CONSTRUCCIÓN Y SENSIBILIZACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL CÁLCULO DE LAS PENSIONES DE UNA PERSONA NATURAL EN COLOMBIA

Proyecto de investigación

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

2015

CONSTRUCCIÓN Y SENSIBILIZACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL CÁLCULO DE LAS PENSIONES DE UNA PERSONA NATURAL EN COLOMBIA

Por

LILIANA MARÍA TRUJILLO MESTRA

Proyecto de investigación

Asesor

JUAN DAVID HERNÁNDEZ BETANCUR

Magíster en Finanzas

Estudiante de PhD in Economomics

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

2015

Nota de aceptación

____

____

____

____

____

_________FREDY HERNAN MARIN SANCHEZ

Coordinador de la Maestría

____JUAN DAVID HERNANDEZ BETANCUR

Director del proyecto

Ciudad y fecha (día, mes, año): Medellín, 21 de mayo de 2015___________

Contenido

INTRODUCCIÓN

Las pensiones de jubilación y el ahorro que realizan las personas naturales para disfrutar del periodo de retiro es objeto de estudio recurrente en la actualidad de los gobiernos, de entidades financieras, de aseguradoras y de diferentes entidades académicas. Este tema no sólo es de interés personal al tratarse de la garantía de los ingresos futuros de las personas y por lo tanto de su bienestar, sino que constituye un tema de interés nacional afectando la estabilidad de una población que tiene un grado de vulnerabilidad y podría quedarse desprotegida generando una gran crisis con impacto social.

En Colombia, la Ley 100 de 1993 (Congreso de la República de Colombia, 1993) regula el sistema de seguridad social integral, en desarrollo del artículo 48 de la Constitución Política de Colombia (Asamblea Nacional Constituyente, 1991), donde en concreto regula las pensiones de jubilación con el objetivo de "*garantizar a la población el amparo contra las contingencias derivadas de la vejez, invalidez o muerte, mediante el reconocimiento de una pensión y prestaciones determinadas en la Ley"* (Congreso de la República de Colombia, 1993). No obstante, en Colombia en los últimos años este tema ha tenido diversos estudios y reglamentaciones, buscando un modelo de viabilidad financiera y de bienestar para los trabajadores (Moreno R. & Ortiz, 2010).

Uno de los principales interrogantes a solucionar, es si con el ahorro realizado por el empleado en su periodo laboral, hoy reglamentado por el sistema general de pensiones, se obtiene una reserva de dinero suficiente para llegar a disfrutar del periodo de retiro sin alterar la calidad de vida que la persona tenía en su tiempo de empleado (Martinez, 2005). Adicionalmente, se hace importante estudiar cuáles son las diferentes variables que afectan el fondo constituido y la forma cómo impactan su acumulación y rentabilidad.

En este trabajo se pretende construir, aplicar y sensibilizar un modelo matemático para el ahorro individual que tiene una persona natural y el alcance de los recursos ahorrados para su jubilación. En primer lugar se indicarán las principales normas que afectan las pensiones en Colombia, luego se presentará la formulación matemática y algunos supuestos básicos en la construcción del modelo de ahorro y retiro de recursos, posteriormente se utilizará la herramienta Simulación Monte Carlo para sensibilizar el modelo y medir el impacto de variables que lo afectan como: la esperanza de vida, la tasa de rentabilidad, la inflación y los años laborales.

Este proyecto se centra fundamentalmente en el cálculo y sensibilización matemática de los ahorros para la jubilación de una persona natural, respondiendo al problema si dichos recursos son suficientes para disfrutar de la jubilación sin alterar su calidad de vida; si bien se toma como base algunos de los parámetros de la normatividad actual, no se modela un régimen en específico.

1. MARCO DE REFERENCIA

1.1. PRELIMINARES

Ecuaciones de diferencia finita de primer orden

Definición 1.1: Sea $y = f(t)$ una función para valores enteros no negativos de t, con t = 0, 1, 2, 3,…, se llama diferencia finita de primer grado de $y = f(t)$, a la expresión:

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t) \tag{1}$$

donde $f(t)$ representa el valor de la función f en el punto t, y $f(t+1)$ el valor de la función f en el punto t+1; $\Delta f(t)$ corresponde al incremento que sufre $y = f(t)$ cuando la variable t se incrementa en una unidad.

Definición 1.2: La ecuación que relaciona los valores de una función $y = f(t)$ con una o varias de sus diferencias finitas se llama **ecuación de diferencia finita** en $f(t)$.

Definición 1.3: Una función $y_t = f(t)$ es una solución de la ecuación de diferencia finita si está definida para valores enteros no negativos y satisface la ecuación dada. Hay dos clases de soluciones para esta ecuación: general y particular.

Definición 1.4: Una ecuación de diferencia lineal de primer orden con coeficiente constante en y_t es de la forma:

$$a_1 Y_{t+1} + a_0 Y_t = g(t) \tag{2}$$

donde a_1 y a_0 son constantes y g(t) es una función que depende de t, siendo t = 0, 1, 2, 3,… En matemáticas financieras, la función g(t) se puede presentar como una función polinomial o exponencial.

En general, se considera el intervalo de la forma $[t, t+1]$ y los valores de una función $y = f(t)$ como Y_t e Y_{t+1} en los extremos de este intervalo. Sin embargo, puede considerarse también el intervalo de la forma $[t-1, t]$. En este caso, la ecuación (2) se expresa:

$$a_1Y_1 + a_0Y_{t-1} = g_1(t)$$

Donde; a_1 y a_0 son las mismas constantes de la ecuación (2) y $g_1(t)$ es una función que depende de t.

Soluciones de la ecuación de diferencia de primer orden

Para hallar la solución de la ecuación de diferencia de primer orden de la ecuación (2), se deben considerar los siguientes casos:

i) Cuando g(t) sea constante

ii) Cuando g(t) sea variable

Caso I: Sea $g(t) = k = constante$. Entonces, la ecuación (2) se convierte en:

$$a_1Y_{t+1} + a_0Y_t = k$$

puede expresarse de la forma:

$$Y_{t+1} = AY_t + B \qquad (3)$$

donde $A = \frac{-a_0}{a_1}$ y $B = \frac{K}{a_1}$

Para hallar una solución particular de la ecuación (3) es necesario conocer Y_0, o un valor Y_k para k = 0.

Si se conoce Y_0, lo siguiente es resolver la ecuación:

$Y_{t+1} = AY_t + B$, dado Y_0

Entonces la ecuación (3) varía según el valor de t:

Para t = 0 $\quad Y_1 = AY_0 + B$

Para t = 1 $\quad Y_2 = AY_1 + B = A^2Y_0 + B(1 + A)$

Para t = 2 $\quad Y_3 = AY_2 + B = A^3Y_0 + B(1 + A + A^2)$

Para un t cualquiera $\quad Y_t = A^tY_0 + B(1 + A + A^2 + K + A^{t-1}) = A^tY_0 + B\left[\frac{1-A^t}{1-A}\right]$, si $A \neq 1$

Pero si $A = 1$, se tiene que $Y_t = Y_0 + Bt$.

Por lo tanto, la solución particular de la ecuación (3), conociendo el valor de Y_0, es:

$$Y_t = \begin{cases} A^t Y_0 + B\left[\dfrac{1-A^t}{1-A}\right], si\ A \neq 1 \\ Y_0 + Bt, \qquad\qquad si\ A = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Si se conoce el valor de Y_k, para $k \neq 0$, se considera $Y_0 = C$, donde C es una constante arbitraria. Siguiendo el procedimiento anterior, se llega a la solución general:

$$Y_t = \begin{cases} A^t C + B\left[\dfrac{1-A^t}{1-A}\right], si\ A \neq 1 \\ y_0 + Bt, \qquad\qquad si\ A = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Caso II. Cuando g(t) sea variable, se consideran las siguientes situaciones:

a) g(t) es una función polinomial
b) g(t) es una función exponencial

En ambos casos, la solución general de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (2) tiene la forma:

$$Y_t = Y_h(t) + Y_p(t) \tag{6}$$

donde $Y_h(t)$ representa la solución general de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (2); esto es:

$a_1 Y_{t+1} + a_0 Y_t = 0$

La función $Y_p(t)$ representa una solución particular a la ecuación (2), y será de la misma clase de la función g(t): si g(t) es un polinomio, $Y_p(t)$ también y del mismo grado que g(t), y si g(t) es una función exponencial, $Y_p(t)$ también y de la misma base de g(t). Para matemáticas financieras, la solución a la ecuación tiene una constante determinada y conocida con Y_0 o Y_k para k = 0. La sustitución de t por 0 o por k y de Y_0 o Y_k por su correspondiente valor se hace en la expresión (6).

Una solución de la forma $Y_t = Y_h(t) + Y_p(t)$ satisface la ecuación (2):

$$a_1 Y_{t+1} + a_0 Y_t = a_1\left(Y_h(t+1) + Y_p(t+1)\right) + a_0\left(Y_h(t) + Y_p(t)\right)$$

$$= \left(a_1 Y_h(t+1) + a_0 Y_h(t)\right) + \left(a_1 Y_p(t+1) + a_0 Y_p(t)\right)$$
$$= 0 + a_1 Y_p(t+1) + a_0 Y_p(t)$$
$$= g(t)$$

Caso A. Cuando g(t) es un polinomio

$$a_1 Y_{t+1} + a_0 Y_t = P_n(t) \tag{7}$$

donde

$$P_n(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0$$

Es decir, $P_n(t)$ es un polinomio en t de grado n.

La solución homogénea asociada es:

$$a_1 Y_h(t+1) + a_0 Y_h(t) = 0$$
$$Y_h(t+1) = A Y_h(t)$$

donde

$$A = -\frac{a_0}{a_1}$$

La solución homogénea asociada es

$$Y_h(t) = \begin{cases} A^t Y_h(0), si\ A \neq 1 \\ Y_h(0), \quad si\ A = 1 \end{cases}$$

Luego, para encontrar la solución particular de la ecuación (7) se propone una solución particular de la forma:

$$Y_p(t) = \begin{cases} \beta_n t^n + \beta_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \beta_1 t + \beta_0, & si\ A \neq 1 \\ t(\beta_n t^n + \beta_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \beta_1 t + \beta_0), & si\ A = 1 \end{cases}$$

donde los β son constantes a determinar.

Caso B: Cuando g(t) es una función exponencial

Se desea resolver la ecuación:

$$a_1 Y_{t+1} + a_0 Y_t = cb^t \tag{8}$$

con $b > 0$, $b \neq 1$.

La solución homogénea asociada se calcula como antes y la solución particular es

$$Y_p(t) = \begin{cases} \beta b^t, si\ A \neq b \\ \beta t b^t, si\ A = b \end{cases}$$

donde $A = -\frac{a_0}{a_1}$ y el coeficiente β es hallado usando el método de los coeficientes indeterminados.

Caso III. Cuando g(t) es combinación de una función polinomial y una función exponencial. Obteniendo ecuaciones de la forma:

$$a_1 Y_{t+1} + a_0 Y_t = P_n(t) + cb^t \tag{9}$$

donde

$$P_n(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0,$$

es un polinomio de grado n, $b > 0$ y $b \neq 1$. La solución particular propuesta debe ser de la misma clase que g

$$Y_p(t) = \begin{cases} \beta_n t^n + \beta_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \beta_1 t + \beta_0 + \beta b^t, & si\ A \notin \{1, b\} \\ t(\beta_n t^n + \beta_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \beta_1 t + \beta_0) + \beta b^t, & si\ A = 1 \\ \beta_n t^n + \beta_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \beta_1 t + \beta_0 + \beta t b^t, & si\ A = b \end{cases}$$

donde $A = -\frac{a_0}{a_1}$

Tasas de interés y series en tiempo discreto

Si se tiene un valor inicial $A_0 \in (0, N)$, con $N \neq \infty$ y después de t periodos $t \in (0, T)$, con $T \neq \infty$, se dice que $A_T \in (0, N)$, con $N \neq \infty$, A_T es el valor futuro de A_0, donde $A_T = A_0 + A_0 * i$, con $i \in (-N, N)$, $-N \neq -\infty$ y $N \neq \infty$

$$A_T = A_0(1 + i) \tag{10}$$

Si el proceso se repite de forma discreta por n periodos, donde:

$A_1 = A_0(1 + i_1)$, $A_2 = A_1(1 + i_2)$, $A_3 = A_2(1 + i_3), \ldots,$ $A_T = A_{t-1}(1 + i_t)$, $con\ t = 1, 2, 3, \ldots, T, T \neq \infty$, tenemos

$$A_T = A_0(1+i)^t, \text{ donde } t \in (0,T) \text{ y } T \neq \infty \tag{11}$$

Veamos que si i es constante, esto es $i_1 = i_2 = i_3 = i_t$, entonces:

$$A_1 = A_0(1+i)$$
$$A_2 = A_1(1+i) = A_0(1+i)(1+i) = A_0(1+i)^2$$
$$A_3 = A_2(1+i) = A_0(1+i)^2(1+i) = A_0(1+i)^3$$

Esto se generaliza para cualquier t:

$$A_T = A_{t-1}(1+i)$$
$$A_{t-1} = A_{t-2}(1+i)$$
$$A_T = A_{t-2}(1+i)(1+i)$$
$$A_T = A_{t-2}(1+i)^2$$

Con la ecuación (11) y con $i \neq -1$, se obtiene

$$A_0 = \frac{A_T}{(1+i)^t} \tag{12}$$

Si A_T es el valor futuro de A_0, entonces A_0 es el valor presente de A_T.

Para el caso de una inversión en pensión, que es lo que se aplicará más adelante, se puede limitar i entre $(-1, N)$ con $N \neq \infty$, dado que no se puede perder un valor mayor al que se invierte.

Si i no es constante, es decir: $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \cdots \neq i_t$ entonces se tendrá

$$A_T = A_0(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3) \ldots (1+i_n)$$
$$A_T = A_0 \prod_{i=1}^{T} (1+i) \tag{13}$$

Sea el número $a \in \mathbb{R}$, dentro del intervalo $(-n, n)$, con $n \neq \infty$, y cuyos valores futuros se quieren sumar, dado que a está en diferentes momentos del tiempo. Si se quiere sumar una serie de a, tendremos:

$$VF = A(1+i)^{t-1} + A(1+i)^{t-2} + A(1+i)^{t-3} + \cdots + A(1+i) + A$$

$$(1+i)VF = A(1+i)^{t} + A(1+i)^{t-1} + A(1+i)^{t-2} + \cdots + A(1+i)^{2} + A(1+i)$$

Restando estas dos últimas ecuaciones:

$$VF - (1+i)VF = A + 0 + 0 + \cdots + A(1+i)^{t}$$

$$VF(1-(1+i)) = A[1-(1+i)^{t}]$$

$$VF = \frac{A[1-(1+i)^{t}]}{-i} = \frac{A[(1+i)^{t}-1]}{i} \tag{14}$$

$$VP = \frac{\frac{A[(1+i)^{t}-1]}{i}}{(1+i)^{t}} = \frac{A[(1+i)^{t}-1]}{i(1+i)^{t}} = \frac{A}{i}\left[\frac{(1+i)^{t}}{(1+i)^{t}} - \frac{1}{(1+i)^{t}}\right]$$

$$VP = A\left[\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}\right] \tag{15}$$

Si se presenta que para cada período A crece en G, o sea: $G \in (-N, N)$, con $N \neq \infty$:

$$A_1 = A$$
$$A_2 = A + G$$
$$A_3 = A + G + G$$
$$A_4 = A + 3G$$
$$A_5 = A + 4G$$
$$A_t = A + (t-1)G$$

$$VF = A(1+i)^{t-1} + (A+G)(1+i)^{t-2} + (A+2G)(1+i)^{t-3} + \cdots + (A+(t-2)G)(1+i)^{t} + (A+(t-1)G)$$

$$VF = A(1+i)^{t-1} + A(1+i)^{t-2} + A(1+i)^{t-3} + \cdots + A(1+i) + A + G(1+i)^{t-2} + 2G(1+i)^{t-3} + (t-2)G(1+i) + (t-1)G$$

Tenemos

$$VF_t = VF_{t-1} + iVF_{t-1} + A_t + (t-1)G$$

Donde VF_t representa el valor futuro de la serie al final del tiempo t, es decir, el valor acumulado al final del periodo t es igual al total acumulado al final del anterior (VF_{t-1}), más los intereses devengados por esta suma durante éste (iVF_{t-1}), más el pago realizado al final del periodo t ($A_t + (t-1)G$).

La expresión anterior equivale a

$VF_t - (1+i)VF_{t-1} = G(t-1) + A$, con $VF_0 = 0$ y $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Que corresponde a una ecuación de diferencia finita similar a la ecuación (2), con $g(t) = G(t-1) + A$, una función polinomial de primer grado en la cual G y A son constantes. Aplicando el procedimiento desarrollado en ese apartado, la solución de la homogénea es:

$$VF_h(t) = C(1+i)^t$$

Y la solución particular es:

$$VF_p(t) = -\frac{G}{i}\left[t + \frac{1}{i}\right] - \frac{A}{i}$$

Sumando las dos soluciones y utilizando la condición $VF_0 = 0$ llegamos a:

$$VF_t = \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i} - t\right] \quad (16)$$

que representa el valor total acumulado al final del periodo t. De manera que al final del periodo n tendremos que el valor futuro estará dado por:

$$VF = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right] \quad (17)$$

Esta ecuación calcula el valor futuro de un gradiente aritmético creciente de n pagos, siendo el primero de valor A y un aumento de G por periodo a una tasa de interés del i% por periodo.

Anualidades con tasas aleatorias

Si se tiene que: $i(t),\ t = 1,2, \dots$ Como el rendimiento en el tiempo, y un capital A que se aumenta con el rendimiento $\mathrm{A}(1+i)$

Los rendimientos periódicos $r(t) > 0$, $t = 1,2,...$y $VF(t)$ es el saldo de los aportes con sus rendimientos en el tiempo t. El valor en t está dado por: $VF(t) = (1 + i) * VF(t - 1) + r(t)$, con $t = 1,2,...$, donde V$F(0)$ es el aporte inicial. La tasa $i(t)$ es el rendimiento, se asume $1 + i(t) > 0$

Definiendo $\theta(t) = \ln(1 + i(t))$ y $\Delta(t) = \sum_{s=1}^{t} \theta(s)$, entonces el saldo en el tiempo t será

$$VF(t) = e^{\Delta(t)} \left(VF(0) + \sum_{s=1}^{t} e^{-\Delta(s)} r(s) \right) \tag{18}$$

y el valor presente del saldo es

$$VP(t) = e^{-\Delta(t)} VF(t) = VF(0) + \sum_{s=1}^{t} e^{-\Delta(s)} r(s) \tag{19}$$

Se puede modelar $\theta(t)$ las cuales determinan la distribución de $e^{-\Delta(t)}$ y $e^{-D(t)}$ para un t fijo.

El Modelo básico puede definirse con la ecuación en diferencias finitas de primer orden:

$$VF_t = (1 + i_t)VF_{t-1} - r_t, \qquad t = 1,2, \dots, 12n \tag{20}$$

donde

t es un periodo de tiempo; VF_t es el saldo de la deuda al final del período; i_t es la tasa efectiva en el período; r_t es el pago vencido al final del período; n es el período en años.

Esta última expresión puede escribirse también de la forma

$$VF_t = VF_{t-1} + iVF_{t-1} - r_t \tag{21}$$

Y luego:

$$r_t = iVF_{t-1} + (VF_{t-1} - VF_t) \tag{22}$$

La ecuación (20) puede resolverse para encontrar VF_t. Si se define $\theta(t) = \ln(1 + i)$, y $\Delta_t = \sum_{r=1}^{t} \delta_r$, entonces la ecuación (20) queda:

$$VF_t = e^{\delta_t}VF_{t-1} - r_t, \qquad t = 1,2, \ldots$$

Y su solución está dada por:

$$VF_t = e^{\Delta_t}\left(F(0) - \sum_{j=1}^{t} e^{-\Delta_j} r_j\right) \tag{23}$$

donde e^{Δ_t} es el valor acumulado en el período $[0, k]$, y el valor presente del saldo final del mes t es:

$$e^{-\Delta_t}VF_t = F(0) - \sum_{j=1}^{t} e^{-\Delta_j} r_j \tag{24}$$

A la tasa de rendimiento o crecimiento se le pueden aplicar distribuciones de probabilidad, caminatas aleatorias, modelos ARIMA para modelar la media ó modelos ARCH, GARCH, EGARCH y toda su familia, para modelar la varianza.

Capitalización en tiempo continuo

La capitalización en tiempo continuo aplica ecuaciones diferenciales y permite incorporar tasas variables como procesos estocásticos en tiempo continuo, que es una de las herramientas fundamentales del análisis financiero.

Dada la tasa efectiva para un período de duración $1/m$, $m = 1/12$, 1/360, $i^{(m)}/m$, entonces se puede comprobar que el límite siguiente existe

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^{1/m} - (1+i)^0}{1/m}$$

ya que se cumple

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+i)^h - 1}{h} = \frac{d}{dx}(1+i)^x|_{x=0}$$

$$= (1+i)^x \ln(1+i)|_{x=0}$$
$$= \ln(1+i)$$

Luego se define $\delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \ln(1+i)$ como la tasa de capitalización continua.

Considerando el tiempo muy pequeño $[t-1/m, t]$, de longitud $1/m$ para m grande, entonces se tiene la aproximación $(1+i^{(m)}/m)^m \approx e^{\delta}$. Por tanto, $\left(1+i^{(m)}/m\right) \approx e^{\delta/m}$. Si VF_t es el saldo de una cuenta a la tasa efectiva $i^{(m)}/m$ se tiene $VF_t = \left(1+i^{(m)}/m\right)VF(t-1/m) \approx (1+\delta/m)VF(t-1/m)$

Asumir continuidad es asumir el crecimiento en intervalos demasiado pequeños $[t-1/m, t]$, se tiene $VF_t \approx (1+\delta/m)VF(t-1/m)$. Si VF_t es una función diferenciable entonces $VF'_t \approx \frac{VF_t - VF(t-1/m)}{1/m} \approx \delta VF(t-1/m)$. Y se puede escribir $VF'_t = \delta VF_t$ en el límite cuando $m \to \infty$. Puede definirse la capitalización continua a la tasa δ como un proceso en el cual el capital crece a la tasa $VF'_t = \delta VF_t$. Esto es $VF_t = F(0)e^{\delta t} = F(0)(1+i)^t$.

Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = g(x), \qquad donde\ a_0(x) \neq 0$$

Una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden es de la forma

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = 0, \qquad donde\ a_0(x) \neq 0$$

Solución de la ecuación diferencial lineal homogénea

Considere los siguientes procedimientos para resolver la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden:

Procedimiento 1. La ecuación diferencial $a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = 0$ es separable. Esto es:

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} = -a_1(x)y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \qquad donde\ p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\ y\ a_0(x) \neq 0$$

Integrando se obtiene:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$\ln y + C_1 = -\int p(x)dx + C_2$$

$$\ln y = -\int p(x)dx + C$$

$$y = e^{-\int p(x)dx + C}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}e^{C}$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx};\ donde\ C\ es\ arbitrario$$

Procedimiento 2. Se normaliza la ecuación diferencial, es decir, se divide la ecuación diferencial entre $a_0(x) \neq 0$:

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

$$y' + py = 0$$

Considere las siguientes situaciones:

a. Se define

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Por el teorema Fundamental del Cálculo, al derivar se tiene:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}\right) = e^{\int p(x)dx}\frac{d}{dx}\left(\int p(x)dx\right) = e^{\int p(x)dx} \cdot p(x) = \mu p$$

es decir

$$\mu' = \mu p$$

b. Por otro lado

$$\frac{d}{dx}\mu y = \mu\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu}{dx} = \mu\frac{dy}{dx} + y\mu p = \mu\left(\frac{dy}{dx} + yp\right)$$

Que se puede expresar como:

$$(\mu y)' = \mu(y' + py) \tag{25}$$

Por lo tanto, para resolver la ecuación diferencial $y' + py = 0$

Se multiplica la ecuación diferencial por la función $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

$$\mu(y' + py) = 0$$

Se aplica la igualdad (25)

$$(\mu y)' = 0$$

Integrando

$$\int (\mu y)' dx = \int 0 dx$$

$$\mu y = C$$

$$e^{\int p(x)dx} y = C$$

Y se despeja la variable y:

$$y = \frac{C}{e^{\int p(x)dx}}$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

En este procedimiento la función $\mu(x)$ es un factor integrante de la ecuación diferencial que se utiliza para efectuar la integración y resolver la ecuación diferencial.

Solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden

Se normaliza la ecuación diferencial dividiendo entre $a_0(x) \neq 0$:

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{g(x)}{a_0(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x) = f(x)$$

donde $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ y $f(x) = \frac{g(x)}{a_0(x)}, con\ a_0(x) \neq 0$

Luego, se calcula un factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Se multiplica la ecuación diferencial por la función $\mu(x)$:

$$\mu(y' + py) = \mu f$$

Considerando que $(\mu y)' = \mu(y' + py)$, ecuación (25), se tiene que:

$$(\mu y)' = \mu f$$

Integrando

$$\int (\mu y)'\, dx = \int \mu f\, dx$$

$$\mu y + C_1 = \int \mu f\, dx + C_2$$

$$y = \frac{1}{\mu}\int \mu f\, dx + \frac{C}{\mu}$$

Obteniendo la expresión de la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx + Ce^{-\int p(x)dx} \quad (26)$$

Valor Presente y Valor Futuro en tiempo continuo

Si el interés se capitaliza de forma continua, el ahorro en t es igual a:

$$\frac{ds}{dt} = s \cdot r$$

donde r es la tasa de interés anual y positiva; s es el ahorro.

$$\frac{ds}{s} = rdt$$

Integrando tenemos:

$$\int \frac{ds}{s} = \int rdt$$

$$\ln s + C_1 = rt + C_2$$

$$s = e^{rt+C}$$

$$s = ke^{rt}$$

En matemáticas financieras siempre se conoce la inversión inicial, veamos que $s_0 = A_1$, tenemos que $k = A_1$, entonces $s_0 = A_1 e^{r0} = A_1$. Se puede concluir que $s_t = s_0 e^{rt}$

La razón de cambio del valor de la inversión es igual a la rapidez con la que se acumula el interés, así:

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

donde r es la tasa de interés y P es el valor actual de la inversión.

Se conoce el valor de la inversión en el periodo cero, es decir $P(0) = P_0$

También se hacen depósitos, los cuales son efectuados a través de una cuota constante **K**, lo que da como resultado:

$$\frac{dP}{dt} = rP + K \tag{27}$$

siendo K positiva para los depósitos. Conduciendo a una ecuación diferencial de primer orden, con $P(0) = P_0$

Tomando el factor de integración $\mu(x) = e^{-\int rdt} = e^{-rt}$

Lo multiplicamos a ambos la dos de la ecuación (27):

$$e^{-rt}\left(\frac{dP}{dt} - rP\right) = Ke^{-rt}$$

$$e^{-rt}\frac{dP}{dt} - e^{-rt}rP = Ke^{-rt}$$

Esto es la derivada de un producto:

$$Dt[e^{-rt} \cdot P] = Ke^{-rt}$$

$$\int Dt[e^{-rt} \cdot P]dt = K\int e^{-rt}\,dt$$

$$e^{-rt}P = \frac{K}{r}e^{-rt} + C$$

$$P = \frac{K}{r} + Ce^{rt} \tag{28}$$

Aunque las tasas continuas son un desarrollo importante dentro de las matemáticas financieras, para el caso de pensiones se trabaja de forma discreta ya que los ahorros y las capitalizaciones se hacen en tiempos donde su variación se puede ordenar según los números naturales.

1.2. MARCO LEGAL

Las pensiones en Colombia son coordinadas por el Sistema General de Pensiones, el cual tiene como objetivo *garantizar a la población el amparo contra las contingencias derivadas de la vejez, invalidez o muerte, mediante el reconocimiento de una pensión y prestaciones determinadas en la Ley,* y está compuesto por dos regímenes solidarios excluyentes que coexisten; el de prima media con prestación definida y el de ahorro individual con Solidaridad. (Artículo 10 y 12 Ley 100 de 1993).

Antes de la Ley 100 de 1993, las personas se pensionaban según el régimen al que estuvieran afiliadas. Así por ejemplo, los trabajadores del sector privado cotizaban al ISS y se pensionaban con fundamento en el régimen gobernado por el Acuerdo 049 de 1990, esto es con 55 años de edad (las mujeres) o 60 años (los hombres), y 500 semanas cotizadas durante los últimos 20 años anteriores al cumplimiento de esa edad, o 1000 semanas cotizadas en cualquier época. Los servidores públicos cotizaban a las Cajas de Previsión (municipal. departamental o nacional, según el caso) y se pensionaban con 20 años de servicios y 55 años de edad (Ley 33 de 1985)

Durante los últimos años el Estado colombiano ha realizado una serie de reformas a su sistema pensional basado en la necesidad de eliminar las presiones financieras; por lo cual los actos legislativos han estado orientados a garantizarle a su población una vejez digna basada en la garantía de sus derechos y en lo consignado en la Constitución Política de 1991 en sus artículos 48 y 49. Es de tener en cuenta que las garantías no hacen referencia al pago de una suma de dinero, sino a las condiciones que el Estado debe generar tanto en el ámbito económico como en el social que permitan que la población acceda a la seguridad social (Moreno R. & Ortiz, 2010).

La Ley 100 de 1993, cuyos principales aspectos se resumen en el cuadro 1, entró en vigencia el primero de abril de 1994 para los trabajadores del sector privado, excepto para quienes tenían el derecho adquirido de pensionarse a la fecha, quienes conservaron los beneficios de la ley anterior. Este derecho estaría vigente hasta el año 2014.

Cuadro 1: Principales aspectos de la ley 100 de 1993

Ley 100 de 1993 Se instituye un sistema dual público-privado en Colombia	Aparece Sistema dual, con creación del Régimen de Ahorro Individual (RAI) manejado por el sector privado, contrapuesto al ya existente Régimen de Prima Media (RPM)
	En RPM los aportes constituyen fondo común y se liquida la mesada pensional de acuerdo al promedio de los salarios sobre los cuales se cotizó durante los últimos 10 años trabajados
	En RAI, el afiliado tiene una cuenta de ahorro individual, y su mesada pensional depende de los ahorros acumulados y de la expectativa de vida
	Cierre de afiliaciones en entidades públicas, excepto ISS (Instituto de Seguro Social) el cual desaparecerá con RPM conforme se vayan pensionando sus afiliados
	Se elevan requisitos para pensión: la edad será de 55 años para las mujeres y 60 años para los hombres; haber cotizado mínimo 1.250 semanas (2013) y llega a 1.300 semanas en el 2015
	Monto de pensión: Desde 65% y hasta el 80% máximo del IBL (Ingreso Base de Liquidación) (Arts. 34 Ley 100/93, 10 Ley 797/03)

	El IBL se tomará sobre el promedio de lo cotizado durante últimos diez años.

Fuente: Elaboración propia.

La Ley 100 ha tenido importantes reformas en el 2003 y 2012. El cuadro 2 resume los principales cambios (Congreso de la República de Colombia, 2003)(Congreso de la República de Colombia, 2012):

Cuadro 2: Principales reformas a la Ley 100 de 1993

Ley 797 de 2003 Buscando recursos adicionales	Incrementar en dos años la edad de jubilación. A partir de 2014 pasa a ser 57 años para las mujeres y 62 para los hombres
	Se aumentaron las contribuciones al 16% (desde 2008)
	Se amplió el universo de personas obligadas a cotizar estableciendo que tanto empleados dependientes como independientes, tenían que estar afiliados al sistema pensional
	Reglamentó el traslado entre regímenes y se estableció que los afiliados deberían permanecer 5 años en un régimen antes de poder trasladarse al otro. El traslado podría realizarse el número de veces deseado hasta 10 años antes de la edad de jubilación
	Se creó el Fondo de Garantía de Pensión Mínima (FGPM), exclusivo del RAIS
	Elevó requisitos para pensión de sobrevivientes
	Someter a los trabajadores nuevos de Ecopetrol al Sistema General de Pensiones
	Crear un aporte adicional para los afiliados con ingresos iguales o superiores a cuatro salarios mínimos legales (SML)
	Rebajó los topes porcentuales -entre el 80% y el 70.5% del IBL- para definir el monto de la mesada pensional
Ley 1580 de 2012 Se crea la pensión familiar	Es aquella que se reconoce por la suma de esfuerzos de cotización o aportes de cada uno de los cónyuges o cada uno de los compañeros permanentes, cuyo resultado es el cumplimiento de los requisitos establecidos para la pensión de vejez en el régimen de prima media con prestación definida o régimen de ahorro individual y de conformidad con lo establecido en la Ley 100 de 1993

Fuente: Elaboración propia.

Adicionalmente en el año 2011 se definieron los rangos de porcentajes para la composición de tres tipos de portafolios dependiendo de la edad y la aversión al riesgo, véase cuadro 3 (Ministerio de Hacienda y Crédito Público de la República de Colombia, 2011):

Cuadro 3: Límites de inversión de los tipos de fondos

Tipo de Fondo	**Característica**	**Límites de inversión**
Fondo Conservador	Procura el mejor retorno posible al final del periodo de acumulación de aportes con baja exposición al riesgo.	Hasta un 20% del valor del fondo
Fondo Moderado	Procura el mejor retorno posible al final del periodo de acumulación de aportes con moderada exposición al riesgo.	Hasta un 45% del valor del fondo
Fondo de Mayor Riesgo	Procura el mejor retorno posible al final del periodo de acumulación de aportes con mayor exposición al riesgo.	Hasta un 70% del valor del fondo

Fuente: Elaboración propia.

En este trabajo no se modela ninguna situación o régimen en concreto de pensiones, el propósito de este trabajo está basado en las preguntas: ¿es posible que una persona, que ahorre un porcentaje fijo de sus ingresos, pueda pensionarse y mantener las mismas condiciones económicas de vida que tenía en su etapa laboral? ¿Cuáles son las variables que ponen en riesgo la pensión de jubilación de un trabajador? El trabajo se desarrolla a partir de un modelo matemático que iguala los ahorros de la vida laboral con los retiros al momento de la jubilación.

1.3. ANTECEDENTES

Varios han sido los trabajos de investigación sobre pensiones de jubilación y seguridad social, donde se pueden encontrar básicamente tres tipos de aportes: modelos que buscan reducir el déficit que ha dejado en el gasto público, trabajos que buscan un mejoramiento de la calidad de vida para las personas y publicaciones sobre diversificación y optimización de portafolios de inversión para los dineros ahorrados por los trabajadores. Así es como (García Y. y., 2006), analizan diversos modelos multifactoriales de valoración de activos financieros con el objetivo de determinar si permiten explicar de forma eficiente las variaciones de los rendimientos de los planes de pensiones del sistema individual, identificando los factores de riesgo relevantes, para ello contrastan los modelos APT, sobre La Teoría del Arbitraje y el modelo constituido con factores de mercado de Renta fija.

Garcia y Garcia (García & García, 2007), estudian las características fundamentales de planes de pensión y planes de jubilación, el análisis financiero–fiscal y el planteamiento de modelos matemático –que permitan a un particular evaluar la opción de destinar sus ahorros a tales productos, es decir, determinar el modelo de cálculo expresivo de su rentabilidad efectiva, planteando una ecuación que permite determinar la rentabilidad para cada producto.

Arza (Arza, 2008), estudia el funcionamiento del sistema de pensiones mixto creado en Argentina en el año 1994. Apunta a las limitaciones que el nuevo sistema ha encontrado para lograr algunos de la mayoría de los objetivos importantes de la política de pensiones y reforma de las pensiones. El análisis considera los mecanismos que afectan el desempeño del sistema de pensiones, con especial atención a la forma en que el nuevo régimen de pensiones ha interactuado con el contexto local macroeconómico, social y político. El análisis empírico de esta experiencia se orienta a servir de lección para las futuras reformas de Argentina, así como para muchos países de América Latina con los planes de pensiones similares.

Berggrun y Camacho (Berggrun & Camacho, 2009), estudian cómo crear un portafolio de inversión con las opciones que ofrecen los fondos de pensiones voluntarias en Colombia: el caso de Skandia, que consiste en aplicar el modelo de construcción de portafolios de Markowitz (1952) para armar portafolios óptimos a partir de la mezcla de varias alternativas de inversión que ofrece un Fondo de Pensiones Voluntarias como Skandia, con diversas clases de riesgo, teniendo en cuenta el nivel de aversión al riesgo de los inversionistas.

Herce (Herce, 2003) argumenta que el modelado de pensiones debe ser un proceso parsimonioso por el uso de diferentes metodologías para diferentes propósitos. Una gama de metodologías existe y están siendo ampliamente utilizados en diferentes países y sectores. Modelos muy simples de contabilidad agregada puede producir resultados sólidos en cuanto a la sostenibilidad de los sistemas de pensiones, un tema que preocupa a la mayoría de los analistas y los gobiernos. Mientras que los modelos formalmente derivados más sofisticados tienen la ventaja de dar resultados que tengan en cuenta los efectos de equilibrio general, los modelos ad hoc tienen la ventaja de ser más capaces de lidiar con la fina estructura de los programas de pensiones y fórmulas. Centrándonos en el sistema español de pensiones para ilustrar la salida de un modelo ad hoc, varias aplicaciones se presenta un resumen: los indicadores de sostenibilidad hasta el horizonte 2050, efectos del aumento de los flujos migratorios y una evaluación de la legislación reciente reforma de las pensiones. Algunos se presta atención al hecho de que las cuestiones sociales y los comportamientos están entrelazados con las pensiones de una manera difícil de ser capturado por la norma metodologías de modelado.

Dowd & Blake (Dowd & Blake, 2013), han concebido y construido un modelo de simulación de pensiones DC llamada PensionMetrics. El modelo es estocástico lo que significa que se trata de procesos subyacentes que son generados al azar y permite cuantificar la incertidumbre, lo que refleja el hecho de que el futuro es incierto. Este modelo también proporciona lo que se conoce como análisis de escenarios estocásticos. Lo que plantea es un conjunto de buenas prácticas, los principios de modelado, basados en la experiencia en el modelado de DC, y los puntos clave se ilustran con los resultados del modelo.

En los últimos años se han dedicado a construir modelos de simulación teniendo en cuenta variables como la mortalidad, la longevidad, la sobrevivencia, entre otras para estudiar el impacto sobre los fondos de pensiones. Es el caso delmodelo simple del efecto del riesgo de mortalidad en el valor del dinero (Edmund & Tonks, 2013), el modelado sobre el riesgo de longevidad y sobrevivencia (Blake & Turner, Longevity Insurance Annuities: lessons from the United Kingdom, 2013).

Se encuentran también artículos que proponen un procedimiento para la construcción de modelos de mortalidad (Hunt & Blake, 2013), modelos estocásticos de mortalidad (Cairns, 2012), y con procesos ARIMA (Plat, 2010). Otros se han enfocado en los fondos de pensión dinámicos y el retorno de la inversión (Blake, Wright, & Zhang, 2011) y (Cannon & Tonks, 2011). Blake y Boardman (Blake & Boardman, 2012) exponen el modelo SPEEDOMETER acerca del comportamiento económico para manejar el gasto durante el retiro, que consta de los siguientes pasos: Hacer un plan de retiro, calcular una fase de anualidades automáticas, construir un capital de protección, gastar con seguridad.

1.4. MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático básico consiste en igualar los ahorros que una persona va realizando en su periodo laboral, con los flujos de caja que irá desembolsando desde el momento de su retiro y por el tiempo que dure su período de jubilación. El valor de los ahorros debe ser igual o superior al valor de los retiros, llevado a valores de una misma fecha, para garantizar que los recursos del jubilado no se agoten y por lo tanto no necesite la intervención del estado o de algún otro factor exógeno. La intención inicialmente es construir un modelo matemático determinístico, que sea coherente con la realidad de un empleado, bajo unos supuestos básicos de ahorro en el período laboral y que en el período de retiro sean suficientes para mantener su calidad de vida.

Definición 1.5: Sea a_t una variable que representa los ahorros periódicos que hace un trabajador a través del tiempo; estos ahorros son una función de los ingresos periódicos dado que la persona ahorra un porcentaje de su salario, así:

$$a_t = s_t * k \tag{29}$$

Donde a_t es el ahorro en cada período del tiempo, con $a \in \mathbb{R}^+$; s_t es el salario en cada uno de los períodos $s_t \in \mathbb{R}^+$; k es un porcentaje que el trabajador ahorrará $k \in (0,1)$ y se asume que es constante en el tiempo.

Si se supone que el salario en términos reales es constante en el tiempo y crece debido a la inflación (igual para todos los años), el comportamiento del salario será de la siguiente forma:

S_1= salario inicial

$$S_2 = S_1(1 + i_1)$$

$$S_3 = S_2(1 + i_2) = S_1(1 + i_1)(1 + i_2) = S_1(1 + i_1)^2$$

Luego,

$$S_t = S_{t-1}(1 + i_{t-1}) = S_1(1 + i_1)^{t-1} \tag{30}$$

Donde S_t es el salario en el período t; i es la tasa de inflación constante. Y de esta forma el ahorro como función del salario es:

$$a_t = S_1(1 + i)^{t-1} * k \tag{31}$$

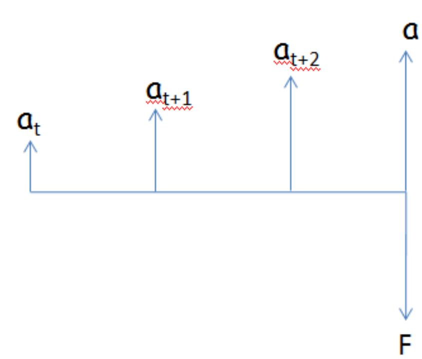
Definición 1.6: Sea r el factor de acumulación de los ahorros definido como la rentabilidad de dichos ahorros en el tiempo, con $r \in \mathbb{R}^+$.

Definición: 1.7: Se define w como el tiempo de cotización, donde en el modelo discreto es una variable que toma valores en $\mathbb{Z}^+$, y en el modelo continuo toma valores en $\mathbb{R}^+$.

Definición 1.8: Sea A_t el valor futuro de los ahorros a una fecha t determinada, es una función que depende de los ahorros, la rentabilidad y los años de cotización, variables definidas anteriormente:

$$A_t = f(a, r, w) \tag{32}$$

Una persona irá acumulando una serie de ahorros a través de los años laborales, como lo muestra el siguiente diagrama de flujo:



Basándose en el supuesto de que la rentabilidad r es igual para todos los años y asumiendo que la persona realiza el mismo ahorro para todos los años, el valor futuro en un momento t está dado por:

$$A_t \ = \ a_1(1+r)^{t-1} + a_2(1+r)^{t-2} + \cdots + a_{t-1}(1+r)^1 + a_t \quad (33)$$

Donde la ecuación en diferencias sería:

$$A_t \ = \ A_{t-1} + A_{t-1} * r + a_t$$

Tal como se mostró en la ecuación 14, la anterior expresión converge en la siguiente ecuación (García J. A.), con $r \neq 0$:

$$A_t \ = \ a\left(\frac{(1+r)^t - 1}{r}\right) \quad (34)$$

Y asumiendo que los ahorros se incrementan de forma constante en forma geométrica en proporción al incremento del salario, como se muestra en la ecuación (31), en este orden de ideas el valor futuro de los ahorros será:

$$VF = \ kS_1(1+r)^{t-1} + kS_1(1+i)(1+r)^{t-2} + \cdots + kS_1(1+i)^{t-2}(1+r)^1 + kS_1(1+i)^{t-1} \quad (35)$$

Esta es una solución a ecuaciones en diferencia de tipo II que corresponde a una ecuación de diferencia finita similar a la ecuación (2), con $g(t) = A(1+k)^t$, una función exponencial (ver ecuación (8)) con la siguiente solución:

$$VF = \frac{kS_1}{r-i}[(1+r)^t - (1+i)^t] \quad (36)$$

Veamos,

La ecuación (35) surge de una ecuación por recurrencia, esto es, partiendo de la expresión de valor futuro con gradiente geométrico,

$VF_{t+1} = (1+r)VF_t + a(1+i)^t$, con $VF_0 = 0$ y $t = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$VF_1 = (1+r)VF_0 + a$$

$$VF_2 = (1+r)VF_1 + a(1+i) = (1+r)[(1+r)VF_0 + a] + a(1+i)$$
$$= a(1+r) + a(1+i)$$

$$VF_3 = (1+r)VF_2 + a(1+i)^2 = (1+r)[a(1+r) + a(1+i)] + a(1+i)^2$$
$$= a(1+r)^2 + a(1+r)(1+i) + a(1+i)^2$$

$$VF_4 = (1+r)VF_3 + a(1+i)^3$$
$$= a(1+r)^3 + a(1+r)^2(1+i) + a(1+r)(1+i)^2 + a(1+i)^3$$

Obteniendo así el equivalente a la ecuación (35), el valor futuro de los ahorros creciendo en forma geométrica:

$$VF_t = a(1+r)^{t-1} + a(1+r)^{t-2}(1+i) + a(1+r)^{t-3}(1+i)^2 + .. + a(1+r)(1+i)^{t-2}$$
$$+ a(1+i)^{t-1}$$

$$VF_t = \frac{a[(1+r)-(1+i)][(1+r)^{t-1} + (1+r)^{t-2}(1+i) + \ldots + (1+i)^{t-1}]}{(1+r)-(1+i)}$$

$$VF_t = \frac{a[(1+r)-(1+i)][(1+r)^{t-1} + (1+r)^{t-2}(1+i) + \ldots + (1+i)^{t-1}]}{(r-i)}$$

$$VF_t = \frac{a}{(r-i)}[(1+r)^t - (1+i)^t]$$

Y por definición (1.5), los ahorros son iguales a: $a_t = s_t * k$, tenemos que:

$$VF_t = \frac{kS}{(r-i)}[(1+r)^t - (1+i)^t]$$

Que corresponde a la ecuación (36), a lo que se quería llegar.

Este mismo modelo se puede presentar con capitalizaciones continuas vulnerando los supuestos de que la inflación y la tasa de rentabilidad son constantes y planteando el modelo de forma continua, el modelo general sería el siguiente:

$$VF = k * S_1 * \prod_{j=1}^{t-1}(1+r_t) + k * S_1 * (1+i_1) * \prod_{j=2}^{t-1}(1+r_t) + k * S_1 * (1+i_1)(1+i_2) * \prod_{j=3}^{t-1}(1+r_t) + \cdots + k * S_1 * \prod_{j=t-1}^{t-1}(1+r_t) * \prod_{j=2}^{t-1}(1+i_j) + k * S_1 * \prod_{j=2}^{t}(1+i_j) \quad (37)$$

En un modelo continuo se puede vulnerar el supuesto de que la rentabilidad y la inflación sean constantes a través del tiempo. Con el fin de incorporar este hecho definiremos (Romer, 2006):

$$R(t) \text{ como } \int_{t=0}^{\varphi} r(t)dt \tag{38}$$

$$I(t) = \int_{t=0}^{\varphi} i(t)dt \tag{39}$$

Donde φ es el momento de la jubilación.

De tal forma que el modelo generalizado continuo es:

$$VF = \int_{t=0}^{\varphi} kS_t \, e^{R(t)+I(t)} d(t) \tag{40}$$

Sin embargo, más adelante se demostrará que bajo el supuesto de que el ingreso se mantiene en términos reales, la inflación no tiene ningún efecto.

Se observa ahora la otra parte de la igualdad que consiste en los retiros que realizará el trabajador en su tiempo de jubilación. En el momento en que se jubile (retiro laboral), la persona va a comenzar a necesitar dinero, que se supone debe ser la misma cantidad de dinero en términos reales que venía percibiendo cuando se encontraba trabajando.

Definición 1.9: Sea $J_t \in \mathbb{R}^+$ una variable que representa la mesada de jubilación que recibirá el empleado periódicamente a partir del momento de su retiro laboral. La mesada de jubilación en términos reales es constante en el tiempo y crece indexada a la inflación. Por lo tanto, el comportamiento de la mesada será de la siguiente forma:

J_1= Mesada inicial

$$J_2 = J_1(1 + i_1)$$

$$J_3 = J_2(1 + i_2) = J_1(1 + i_1)(1 + i_2) = J_1(1 + i_1)^2$$

Luego,

$$J_t = J_{t-1}(1 + i_{t-1}) = J_1(1 + i_1)^{t-1} \tag{41}$$

Donde i es la tasa de inflación

Si se asume que la inflación es constante, la mesada para cada uno de los períodos sería:

$$J_t = J_{t-1}(1+i) \tag{42}$$

Y esto converge a

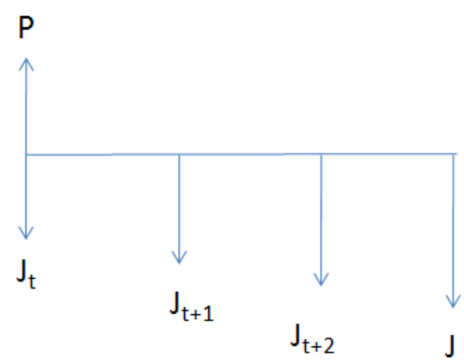
$$J_t = J_1(1+i)^{t-1} \tag{43}$$

Definición 1.10: Se define $v \in \mathbb{R}^+$ **v** como el tiempo que seguirá viviendo la persona a partir del momento en que se jubila, donde en el modelo discreto es una variable que toma valores en $\mathbb{Z}^+$, y en el modelo continuo toma valores en $\mathbb{R}^+$.

Definición 1.11: Sea $VP \in \mathbb{R}$ el valor presente de los ingresos para la pensión a una fecha t determinada, es una función que depende de la mesada de jubilación, la rentabilidad y los períodos que va a continuar viviendo la persona, variables definidas anteriormente:

$$VP = f(J, r, v) \tag{44}$$

Una persona irá obteniendo del fondo de pensiones un ingreso para cubrir sus gastos, como lo muestra el siguiente diagrama de flujo:



Se tiene que una persona irá gastando de forma periódica, por tanto, su capital se verá disminuido. Sin embargo, los ahorros que tiene en el fondo de pensiones seguirán generando rentabilidad. Por consiguiente se calculará el valor presente (VP) del salario por concepto de jubilación de todos los periodos en adelante (asumiendo que el ingreso de jubilación, J, es constante en términos reales en el tiempo), así, la ecuación que representa el valor presente de los gastos en que incurrirá al momento de la jubilación será:

VP es el momento 0 al iniciar la jubilación

J_1: Primer salario de pensión

$$VP = J_1(1+r)^{-1} + J_2(1+r)^{-2} \ldots J_{t-1}(1+r)^{t-1} + J_t(1+r)^t \quad (45)$$

Y esto converge en:

$$VP = J\left(\frac{1-(1+r)^{-t}}{r}\right) \quad (46)$$

con $r \neq 0$

Veamos, partiendo de la ecuación (45):

$$VP = J_1(1+r)^{-1} + J_2(1+r)^{-2} \ldots J_{t-1}(1+r)^{t-1} + J_t(1+r)^t \quad (47)$$

Asumiendo que todas las cuotas son iguales, entonces:

$$J_1 = J_2 = J_t = J$$

Donde J es el valor de una cuota uniforme, es decir, de una mesada de jubilación.

Si el número de períodos es n, entonces:

$$VP = J\left[\frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

Lo que está dentro del corchete es la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente de n términos cuya razón es

$$\frac{1}{1+r}$$

Esta suma tiene como expresión

$$Suma = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

Ahora se factoriza por

$$\frac{1}{1+r}$$

Entonces,

$$VP = \frac{J}{1+r}\left[1 + \frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^{n-1}}\right]$$

Se calcula la suma:

$$Suma = \frac{1 - \left[\frac{1}{1+r}\right]^n}{1 - \left[\frac{1}{1+r}\right]}$$

$$Suma = \frac{\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}}{\frac{1+r-1}{1+r}}$$

$$Suma = \frac{(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n}$$

Al reemplazar este valor en VP se obtiene:

$$VP = \frac{J}{1+r}\left[\frac{(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n}\right]$$

Y en el período t:

$$VP = J\left[\frac{[(1+r)^t - 1]}{r(1+r)^t}\right] = J\left[\frac{1 - (1+r)^{-t}}{r}\right]$$

Que era a lo que se quería llegar. Con esta expresión se calcula el valor presente de una serie de cuotas iguales, es decir, que nos permitirá calcular el valor presente de las mesadas que se recibirán al momento de la jubilación.

En este orden de ideas, el valor presente para los ingresos de jubilación será:

$$VP = J_1(1+r)^{-1}(1+i)^0 + J_1(1+r)^{-2}(1+i)^1 + \cdots + J_1(1+r)^{-t}(1+i)^{t-1} \qquad (48)$$

Y esto al final del período n converge en (García J. A.)

$$VP = \frac{J_1}{r-i}\left[1 - \left(\frac{(1+i)}{(1+r)}\right)^t\right] \qquad (49)$$

Con $r \neq i$ y $r \neq -1$

De otra forma, se sabe que el $VP = \frac{VF}{(1+r)^t}$

Por lo tanto, $VP = \frac{J_1}{(r-i)} * \frac{[(1+r)^t - (1+i)^t]}{(1+r)^t} = \frac{J_1}{r-i}\left[1 - \left(\frac{1+i}{1+r}\right)^t\right]$

Vulnerando los supuestos de que la inflación y la tasa de rentabilidad son constantes, y planteando el modelo de forma discreta, el modelo general sería el siguiente:

$$VP = J_1\left[\prod_{j=1}^{t-1}(1+r_t)\right]^{-1} + J_1(1+i_1)\left[\prod_{j=2}^{t-1}(1+r_t)\right]^{-1} + J_1(1+i_1)(1+i_2)\left[\prod_{j=3}^{t-1}(1+r_t)\right]^{-1} + \cdots + J_1\prod_{j=2}^{t-1}(1+i_j)\left[\prod_{j=t-1}^{t-1}(1+r_t)\right]^{-1} + J_1\prod_{j=2}^{t}(1+i_j) \quad (50)$$

Igual que en el valor futuro de los ahorros, se puede asumir que la rentabilidad y la inflación pueden variar a través del tiempo. Con el fin de incorporar este hecho definiremos (Romer, 2006):

$$R(t) \text{ como } \int_{t=0}^{\varphi} r(t)dt \quad (51)$$

$$I(t) = \int_{t=0}^{\varphi} i(t)dt \quad (52)$$

De tal forma que el modelo generalizado continuo es

$$VP = \int_{t=0}^{\varphi} J_t\, e^{I(t)-R(t)} d(t) \quad (53)$$

Teorema de la suficiencia económica para la pensión de un trabajador. Definido A_t como el valor futuro de los ahorros a una fecha y definido J_t como el valor presente de los retiros a la misma fecha, se debe cumplir que:

$$A_t \geq J_t \quad (54)$$

La desigualdad (54), el valor futuro de los ahorros debe ser igual o superior al valor presente de los retiros llevado a valores de una misma fecha, se debe cumplir para garantizar que la persona continúe viviendo con los recursos necesarios, manteniendo su calidad de vida sin ayuda de un tercero. De no cumplirse esta igualdad el empleado deberá acudir a algún factor exógeno. Esta equivalencia es la que busca el modelo base propuesto, en donde el ahorro que se hace año tras año es equivalente a los ingresos que tendrá la persona una vez se jubile.

Para efectos de construir el modelo inicial, se asumen los siguientes supuestos básicos, los cuales se irán analizando y vulnerando en algunos de los casos:

- Es un modelo determinístico, es decir, se asume que se conoce el futuro.
- Se asume que una persona trabajará el mismo período de tiempo del que disfrutará su jubilación.
- El ingreso que percibe el empleado en términos reales no se afecta, siempre va a ganar lo mismo ajustado por inflación, incluso en el tiempo en que va a estar pensionado, mantiene la calidad de vida en términos reales del ingreso.
- Se conoce la tasa de retorno de los ahorros en el tiempo, la cual inicialmente es determinística e igual para todos los años.
- El saldo de los ahorros nunca será menor a cero.
- El ahorro es un porcentaje del sueldo.

A partir de esta ecuación y con el planteamiento del modelo determinístico se analizará si en condiciones de certeza los ahorros del empleado son suficientes para el período de retiro. Luego se estudiarán estadísticamente las principales variables que afectan esta desigualdad para sensibilizar el modelo y evaluar la probabilidad de que no se cumpla esta condición de estabilidad financiera para el empleado.

La ecuación (54) puede plantearse en términos de la función de sus variables como se muestra a continuación.

$$VF(A, r, w) \geq VP(J, r, v) \tag{55}$$

Y reemplazando las ecuaciones (36) y (49) en la ecuación (55):

$$\frac{kS_1}{r-i}\left[(1+r)^t - (1+i)^t\right] \geq \frac{J_1}{r-i}\left[1 - \left(\frac{1+i}{1+r}\right)^t\right] \tag{56}$$

Donde se asume que k es un porcentaje del salario que el trabajador deseará ahorrar y es constante en el tiempo; S_1 es el salario en el período 1; r es la rentabilidad generada por la acumulación de ahorros (para $r \neq i$ y $r \neq -1$); i es la tasa de inflación constante; J es la mesada de jubilación; t tiempo de ahorro.

De esta manera, el objetivo es hallar una igualdad entre el ahorro y el gasto, y luego analizar las condiciones que deben cumplir las variables para que la primera parte de la desigualdad siempre sea mayor o igual a la segunda parte.

2. ANÁLISIS DE LAS PRINCIPALES VARIABLES QUE AFECTAN LAS PENSIONES DE JUBILACIÓN

En este apartado se pretende realizar un análisis de forma independiente, *CeterisParibus*, para la rentabilidad, el porcentaje de ahorro, la inflación, el periodo laboral y el tiempo de jubilación, variables que afectan la pensión de jubilación de un empleado. Partiendo de la ecuación (56) y de los supuestos básicos con los que se llegaron a dichas ecuaciones, a continuación se hará un análisis de la inflación, la tasa de interés y el porcentaje de ahorro.

Para analizar las variables se parte de la condición de mantener la calidad de vida de la persona que significa que el salario en términos reales no se modifica pero se conserva con la inflación. Adicionalmente, el empleado estaba acostumbrado a ahorrar parte de su salario, lo que significa que no necesita de esta porción para subsistir en su período de jubilación; asimismo dejará de incurrir en gastos menores que necesitaba cuando laboraba, como gastos de transporte, alimentación, entre otros. En este orden de ideas, tenemos que la jubilación del primer período debe ser:

$$J_1 = S_t(1-k-m) = S_1(1+i)^t(1-k-m) \tag{57}$$

Donde $\mathbf{J_1}$ es la mesada de jubilación en el primer período; $\mathbf{S_t}$ es el salario en el primer periodo de jubilación; **k** es el porcentaje del salario ahorrado para la pensión; $\boldsymbol{m}$ es un porcentaje que el trabajador se puede ahorrar al momento de pensionarse dado que en el periodo de laboral genera gastos adicionales. Inicialmente se va a definir $\boldsymbol{m = 0}$**%.**
Por lo tanto, la igualdad de la ecuación se obtiene:

$$\frac{kS_1}{r-i}[(1+r)^t-(1+i)^t] = \frac{S_1(1+i)^t(1-k)}{r-i}\left[1-\left(\frac{1+i}{1+r}\right)^t\right] \tag{58}$$

con $r \neq i$ y $r \neq -1$

Si planteamos que el interés real de un periodo está dado por ecuación (59), con $i \neq -1$:

$$R = \frac{(1 + r)}{(1 + i)} - 1 \quad (59)$$

Entonces el interés real para un periodo t está dado por la ecuación (60):

$$(1 + R)^t - 1 = \frac{(1 + r)^t}{(1 + i)^t} - 1 = R^T \quad (60)$$

Partiendo de la ecuación (58), utilizando lo planteado en las ecuaciones (59) y (60) y luego simplificando se tiene que:

$$\frac{kS_1}{\frac{(1+r)}{(1+i)} - 1} * \left[\frac{(1 + r)^t}{(1 + i)^t} - 1\right](1 + i)^{t-1} = \frac{S_1(1 - k)}{\frac{(1+r)}{(1+i)} - 1} * \frac{\frac{(1+r)^t}{(1+i)^t} - 1}{\frac{(1+r)^t}{(1+i)^t}} * (1 + i)^{t-1}$$

$$\frac{kS_1R^T}{\mathrm{R}} = \frac{S_1(1 - k)}{\mathrm{R}} * \frac{R^T}{R^T + 1}$$

Esta última ecuación es la misma ecuación (58) pero con R en términos reales, donde $R > 0$. Luego,

$$kS_1R^T = S_1(1 - k)\left[1 - \frac{(1 + i)^t}{(1 + r)^t}\right]$$

$$kS_1R^T = S_1(1 - k)\left[\frac{(1 + r)^t - (1 + i)^t}{(1 + r)^t}\right]$$

$$kS_1R^T = S_1(1 - k)\left[\frac{(1 + r)^t - (1 + i)^t}{(1 + i)^t}\right]\left(\frac{(1 + i)^t}{(1 + r)^t}\right)$$

$$kS_1R^T = S_1(1 - k)R^T * \frac{1}{\frac{(1+r)^t}{(1+i)^t}}$$

$$kS_1R^T = S_1(1 - k)\frac{R^T}{R^T + 1}$$

$$k = \frac{(1 - k)}{R^T + 1}$$

$$kR^T + k = (1 - k)$$

$$kR^T + k + k - 1 = 0$$

$$k(R^T + 2) - 1 = 0$$

$$k = \frac{1}{(R^T + 2)} \qquad (61)$$

$$kR^T + 2k - 1 = 0$$

De aquí tenemos que, con $R > 0$ y $k > 0$:

$$R^T = \frac{1}{k} - 2 \text{ ó } (1 + r)^t = \frac{1}{k} - 1 \qquad (62)$$

Con estos primeros resultados se puede concluir:

1. Con la ecuación (58) y sus simplificaciones se observa que para un ahorro de t años y un período de jubilación de igual tiempo, manteniendo el valor en términos reales, la inflación no tiene ningún efecto.
2. El porcentaje de ahorro "k" en la ecuación (61) es inverso al interés real que ganará el ahorro, es decir, a mayor interés, el cual se asume constante, menor es el valor que se debe ahorrar.
3. De la misma ecuación (61) se puede deducir que a mayor tiempo, asumiendo que el tiempo de ahorro es igual al tiempo laborado e igual al tiempo de jubilación, menor es la tasa de ahorro, ó también menor la rentabilidad exigida.
4. También es posible obtener la pensión de jubilación manteniendo la calidad de vida de la persona a partir de sus ahorros y la rentabilidad de los mismos.

Las anteriores conclusiones bajo los supuestos básicos expuestos en el planteamiento inicial.

Ahora bien, si se supone que el trabajador no necesita un porcentaje de su salario mensual, que se denominó m en la ecuación (57) tenemos las ecuaciones (61) y (62) de la siguiente forma:

$$k = \frac{1-m}{(R^T+2)} \tag{63}$$

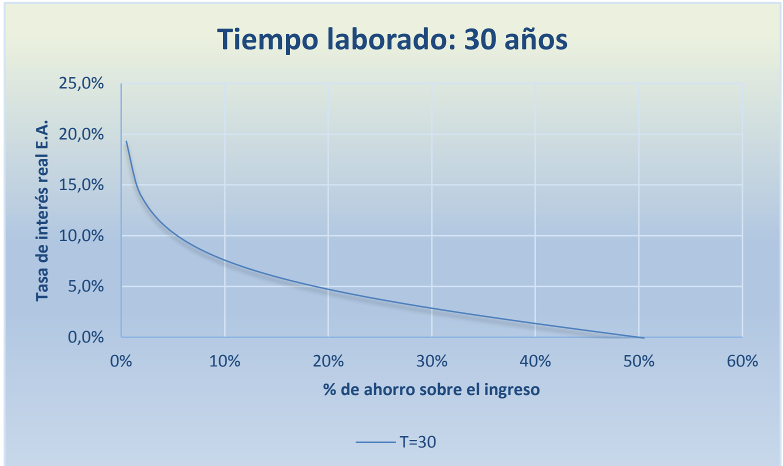
$$R^T = \frac{1-m}{k} - 2 \qquad \text{ó} \qquad (1+r)^t = \frac{1-m}{k} - 1 \tag{64}$$

Es decir que a mayor porcentaje de m, que será parte del ahorro que no necesitará en el futuro (por ejemplo gasto en transporte para la oficina, almuerzos, etc.), menor es la cantidad de dinero que debe ahorrar, y/o menor es la tasa de interés necesaria.

Si se quiere asignar datos para obtener un resultado: asumiendo un tiempo $t = 30$ años, con un ahorro del 15% del salario y con $m = 0$, se tiene que la tasa de interés necesaria para que mantenga la calidad de vida es 466,7% efectivo en los 30 años en términos reales, equivalente a una tasa efectiva anual del 5.95% en términos reales.

En la figura (1) se muestra la relación entre la tasa de interés real efectiva anual (E.A.) para un tiempo igual a 30 años, es decir, asumiendo que el empleado trabaja durante 30 años y luego disfruta la pensión de retiro por 30 años. Se puede observar como a mayor porcentaje de ahorro, menor es la tasa de interés necesaria para que el empleado conserve su calidad de vida. Se observa también que con un ahorro alrededor del 50% del ingreso mensual, la tasa de interés que se necesita es cercana a cero y por el contrario ante bajos porcentajes de ahorro, la tasa de interés real efectiva anual tiende a infinito, es decir que siempre debe haber un mínimo de ahorro para poder tener fondos para el retiro, y la tasa necesaria es exponencialmente mucho más alta.

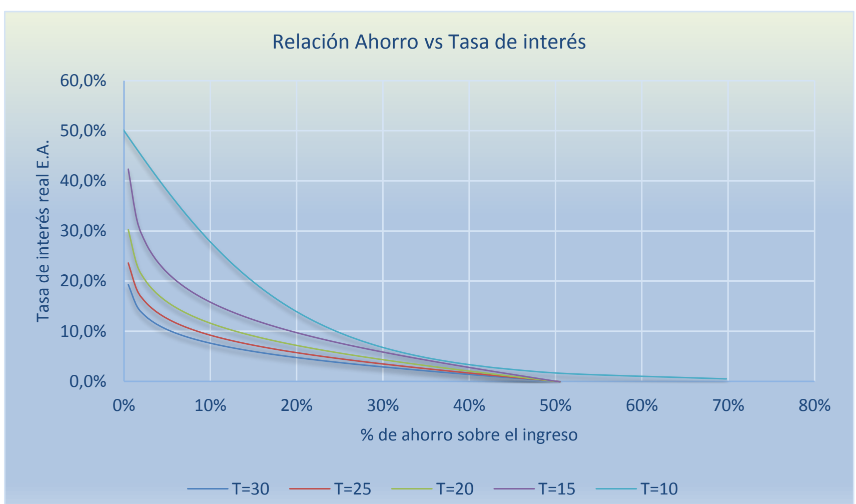
Figura 1. Tasa de interés necesaria con determinado porcentaje de ahorro para un tiempo de 30 años



Fuente: Elaboración propia.

En la figura (2) se muestra la relación ante diferentes tiempos de ahorro, teniendo en cuenta que el tiempo de ahorro siempre es igual al tiempo de jubilación. Se analiza para períodos de 10 años hacia adelante, dado que no tiene sentido hablar de un tiempo muy pequeño. En todo caso, a menor tiempo de ahorro con igual tiempo de disfrute, la relación entre tasa de interés y porcentaje de ahorro sobre el salario es cada vez mayor, es decir a menor tiempo se necesita mayor porcentaje de ahorro con una misma tasa de interés.

Figura 2. Relación entre el ahorro y la tasa de interés en diferentes tiempos de labor



Fuente: Elaboración propia.

Se observa además que a medida que aumenta el tiempo de ahorro, la relación entre la tasa de interés y el porcentaje de ahorro es menor. Es claro que siempre deberá existir un porcentaje de ahorro, de otra manera no es posible percibir ingresos por concepto de jubilación. Nótese que si no hay rentabilidad real, es decir, $R^T = 0$ y $m = 0$, entonces $k = 1/2$, esto significa que la persona deberá ahorrar el 50% del salario.

Analicemos ahora en caso en el que el tiempo de ahorro t_a es diferente al tiempo de jubilación t_j, partiendo de la desigualdad de la ecuación 56, para garantizar que el ahorro sea mayor a dinero necesario en la jubilación tenemos:

$$\frac{kS_1}{r-i}[(1+r)^{t_a}-(1+i)^{t_a}] \geq \frac{S_1(1+i)^{t_a}(1-k)}{r-i}\left[1-\left(\frac{1+i}{1+r}\right)^{t_j}\right]$$

$$k[(1+r)^{t_a}-(1+i)^{t_a}] \geq (1+i)^{t_a}(1-k)\left[1-\left(\frac{1+i}{1+r}\right)^{t_j}\right]$$

$$k[(1+r)^{t_a}-(1+i)^{t_a}] \geq (1+i)^{t_a}(1-k)\left[\frac{(1+r)^{t_j}-(1+i)^{t_j}}{(1+r)^{t_j}}\right]$$

$$k(1+r)^{t_j} \geq (1+i)^{t_a}(1-k)\left[\frac{(1+r)^{t_j}-(1+i)^{t_j}}{[(1+r)^{t_a}-(1+i)^{t_a}]}\right]$$

Caso I. Si $t_j > t_a$, y $\lambda > 1$. El tiempo de jubilación mayor al tiempo de ahorro.

Si definimos $\lambda = \frac{(1+r)^{t_j}-(1+i)^{t_j}}{(1+r)^{t_a}-(1+i)^{t_a}} > 1$

$$k(1+r)^{t_j} > (1+i)^{t_a}(1-k)\lambda$$

$$k(1+r)^{t_j} - (1+i)^{t_a}(1-k)\lambda > 0$$

$$k(1+r)^{t_j} - (1+i)^{t_a}\lambda + (1+i)^{t_a}k\lambda > 0$$

$$k\left[(1+r)^{t_j} - \frac{(1+i)^{t_a}\lambda}{k} + (1+i)^{t_a}\lambda\right] > 0$$

El único sumando que puede hacer que sea menor a cero es $\frac{(1+i)^{t_a}\lambda}{k}$, lo grande de este factor va a depender de k, lo que quiere decir que si k es bajo, entonces $\frac{(1+i)^{t_a}\lambda}{k}$ va a tomar un valor grande, mayor a los otros dos. Desde el punto analítico esto significa que ante $t_a < t_j$, el ahorro debe ser lo suficientemente grande para compensar el poco tiempo de ahorro.

Caso II. Si $t_j < t_a$, con $\lambda > 1$

Tenemos

$$k\left[(1+r)^{t_j} - \frac{(1+i)^{t_a}\lambda}{k} + (1+i)^{t_a}\lambda\right] > 0 \qquad (65)$$

Igualmente el único sumando que puede hacer la desigualdad cero es $\frac{(1+i)^{t_a}\lambda}{k}$ pero en este caso λ contrarresta el ahorro k, en otras palabras se debe ahorrar menos de lo que ahorraría en $\lambda = 1$ y $\lambda > 1$, cuando $t_j = t_a$, $t_j > t_a$ respectivamente. Esto es un poco difícil de suceder puesto que sería el caso en que el tiempo de jubilación es pequeño.

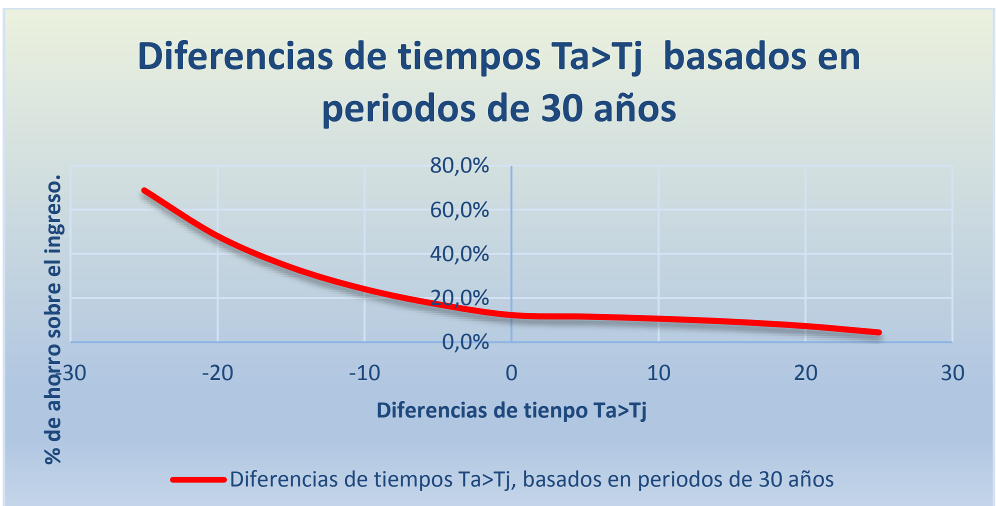
El cuadro 4 y la figura 3 muestran el porcentaje de ahorro sobre el salario ante diferentes casos donde el tiempo de ahorro es diferente al tiempo de jubilación. El cálculo está basado en un tiempo de jubilación de 30 años cuando tiempo de jubilación es mayor al tiempo de ahorro y está fundado en un tiempo de ahorro de 30 años cuando el tiempo de ahorro es mayor al tiempo de jubilación, por ejemplo si el tiempo de ahorro es mayor al tiempo de jubilación en 10 años, se asume tiempo de ahorro igual a 30 y tiempo de jubilación igual a 20; si por el contrario el tiempo de jubilación es mayor al tiempo de ahorro en 20 años, el tiempo de ahorro fue 10 y el tiempo de jubilación fue 30. Este podría analizarse para diferentes tiempos pero los resultados irían en la misma línea. También se asume una rentabilidad real constantes y una inflación constante.

Cuadro 4: Diferencias de tiempos $T_a > T_j$, basados en periodos de 30 años

Diferencias de tiempos Ta>Tj, basados en periodos de 30 años	% de ahorro
25	4,3%
20	7,2%
15	9,2%
10	10,6%
5	11,5%
0	12,2%
-5	17,1%
-10	24,0%
-15	33,9%
-20	48,1%
-25	68,9%

Fuente: elaboración propia

Figura 3. Diferencias de tiempos $T_a > T_j$, basados en periodos de 30 años



Fuente: elaboración propia

Sensibilicemos ahora la rentabilidad partiendo de la ecuación (58), utilizando lo planteado en las ecuaciones (59) y (60) y luego simplificando se tiene que (se presentará en forma desigualdad para garantizar que el ahorro sea suficiente):

$$\frac{kS_1}{\frac{(1+r)}{(1+i)}-1}*\left[\frac{(1+r)^t}{(1+i)^t}-1\right](1+i)^{t-1} > \frac{S_1(1-k)}{\frac{(1+r)}{(1+i)}-1}*\frac{\frac{(1+r)^t}{(1+i)^t}-1}{\frac{(1+r)^t}{(1+i)^t}}*(1+i)^{t-1}$$

$$\frac{kS_1}{r_a-i_a}[(1+r_a)^{t_a}-(1+i_a)^{t_a}] > \frac{S_1(1+i_j)^{t_j}(1-k)}{r_j-i_j}\left[1-\left(\frac{1+i_j}{1+r_j}\right)^{t_j}\right]$$

$$\frac{kS_1}{\frac{r_a-i_a}{r_j-i_j}}[(1+r_a)^{t_a}-(1+i_a)^{t_a}] > S_1(1+i_j)^{t_j}(1-k)\left[1-\left(\frac{1+i_j}{1+r_j}\right)^{t_j}\right]$$

$$\frac{kS_1}{\frac{r_a-i_a}{r_j-i_j}}[(1+r_a)^{t_a}-(1+i_a)^{t_a}] > S_1(1+i_j)^{t_j}(1-k)\left[\frac{(1+r_j)^{t_j}-(1+i_j)^{t_j}}{(1+r_j)^{t_j}}\right]$$

$$\frac{kS_1}{\frac{r_a-i_a}{r_j-i_j}}[(1+r_a)^{t_a}-(1+i_a)^{t_a}] > \frac{S_1(1+i_j)^{t_j}(1-k)}{(1+r_j)^{t_j}}[(1+r_j)^{t_j}-(1+i_j)^{t_j}]$$

$$\frac{k}{\frac{r_a-i_a}{r_j-i_j}}\left[\frac{(1+r_a)^{t_a}-(1+i_a)^{t_a}}{(1+r_j)^{t_j}-(1+i_j)^{t_j}}\right] > \frac{(1+i_j)^{t_j}(1-k)}{(1+r_j)^{t_j}}$$

Definiendo

$$\rho=\left[\frac{(1+r_a)^{t_a}-(1+i_a)^{t_a}}{(1+r_j)^{t_j}-(1+i_j)^{t_j}}\right]$$

$$\varphi=\frac{r_a-i_a}{r_j-i_j}$$

Donde si la rentabilidad en términos reales del tiempo de ahorro es mayor a la rentabilidad en términos reales en tiempo de jubilación, entonces $\rho > 1$ y $\varphi > 1$, tenemos que:

$$\frac{k}{\varphi}\rho\cdot\frac{(1+r_j)^{t_j}}{(1+i_j)^{t_j}}\cdot\frac{1}{(1-k)} > 0 \qquad (66)$$

Necesitamos que la desigualdad (66) sea mayor que cero para garantizar los recursos de jubilación. Por lo tanto, ρ es el factor fundamental y φ el segundo en importancia, que debe garantizar que le rentabilidad real R^T sea positiva en ambos periodos en ambos casos el tiempo juega un papel fundamental. Con la herramienta simulación Monte Carlo, se quiere sensibilizar estas variables simultáneamente.

3. APLICACIÓN CON SIMULACIÓN MONTECARLO

En este apartado se plantea un modelo estocástico para simular cada una de las variables que afectan el disfrute de la pensión de jubilación de una persona en Colombia. El propósito es construir un modelo probabilístico para correr bajo simulación Monte Carlo en @Risk, y de esta manera sensibilizar diferentes variables, teniendo en cuenta posibles variaciones que se pueden presentar.

La simulación Monte Carlo es considerada como una técnica que combina conceptos estadísticos con la capacidad que tienen los ordenadores para generar números pseodoaleatorios y automatizar cálculos y así imitar, mediante modelos matemáticos, el comportamiento aleatorio de sistemas reales no dinámicos. En (Peña Sánchez, 2001) se define el método Monte Carlo como "Método no determinista o estadístico numérico, usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud". Esta metodología facilita la sensibilización de todas las variables eliminando la restricción del *ceterisparibus*, es decir, tener que hacer un cambio a la vez. Otra de las ventajas del método es que permite generar gran cantidad de combinaciones de escenarios futuros posibles de una variable, donde al final permite concluir cómo reacciona dicha variable ante múltiples cambios de otras variables.

En cuanto a los inicios del método se establece en (Bautista Abraham, 2004) que "los orígenes de esta técnica están asociados a Stanislaw Ulam y a John Von Neumann, a finales de los años 40 cuando investigaban en el laboratorio de los Álamos el movimiento aleatorio de los neutrones. El nombre Monte Carlo Proviene de la famosa ciudad de Mónaco donde abundan los casinos y el azar, por lo que la probabilidad y el comportamiento aleatorio conforman todo un estilo de vida".

El método Monte Carlo puede decirse que está presente en todos aquellos ámbitos en los que el comportamiento aleatorio o probabilístico desempeña un papel fundamental, por esta razón la técnica es utilizada por profesionales de campos tan diversos como en economía y finanzas (Judge, 1999), (Cáceres, Juan, Grasman, Bektas, & Faulin, 2012), (Alonso B., Azofra P., & de la Fuente, 2007), (Estévez, Infante, & Sáez, 2012), (Cruz A., 2012), (Arbeláez Z. & Maya, 2008), (Maya, 2004), (Rodriguez N. & Venegas M., 2010); en ingeniería (Neira Bravo, 2011), (Garrido & Conesa, 2009); en educación (Eckstein & Riedmueller, 2002); entre otros. Los pasos que se deben tener en cuenta al aplicar el método son: 1) Establecer distribuciones de probabilidad; 2) Construir una distribución de probabilidad acumulada para cada variable; 3) Establecer intervalos de números aleatorios; 4) Generación de números aleatorios; 5) Simular el experimento (Faulin, 2005).

A continuación se define el modelo determinístico y luego se construyen seis modelos estocásticos con el comportamiento aleatorio de las principales variables que afectan la pensión de jubilación. El análisis se hace empleando el programa @Risk para Simulación Monte Carlo.

Modelo 1. Modelo Determinístico

Para elaborar el modelo determinístico se establecieron las siguientes variables de entrada: salario, porcentaje de ahorro sobre el salario, tasa de rentabilidad, tiempo de ahorro, tiempo de jubilación e inflación. En la tabla 1 se muestran los valores iniciales para cada una de estas variables:

Tabla 1. Variables de entrada y resultados del Modelo determinístico.

Variables de entrada		
Salario inicial (S1)	1	Indiferente
% de ahorro del salario (k)	15,0%	Sobre el salario
Tasa de rentabilidad nominal (r)	10,00%	Efectivo anual
Inflación (i)	3,00%	Anual
Tasa de rentabilidad real (R)	6,80%	Efectivo anual
Tiempo de ahorro (Ta)	30	Años
Tiempo de jubilación (Tj)	30	Años
% de salario no necesario en jubilación (m)	0%	Sobre el salario

Fuente: Elaboración propia.

Variables de Salida	
Valor Futuro de ahorros año 30	32,190
Valor presente de la jubilación año 30	(25,374)
Valor Futuro de ahorros en términos reales año 30	13,660
Valor presente de la jubilación en términos reales año 30	(10,767)
Superávit o déficit en términos reales al año 30	2,9
Superávit o Déficit al final del tiempo en términos reales	20,8

Fuente: Elaboración propia.

El salario inicial de un peso es una variable indiferente porque el objetivo del modelo es garantizar la calidad económica de vida del empleado independiente del valor del salario. El resultado de la tabla 1 muestra que la persona ahorra suficiente dinero para vivir su tiempo de jubilación y genera un superávit equivalente a 2,9 veces el salario anual en términos reales del primer año (salario inicial).

Se debe tener en cuenta que se asume una rentabilidad constante para todos los períodos, asimismo la tasa de inflación y el porcentaje de ahorro. Además, se supone que la persona no deja de trabajar en ningún momento durante esos 30 años de vida laboral y al momento de pensionarse la persona disfrutará del 100% de lo ahorrado. Adicionalmente, se puede decir que la persona es capaz de vivir con el mismo sueldo que venía teniendo menos la cantidad de dinero que ahorraba anualmente para la jubilación, no se tuvo en cuenta el factor *m*, llamado gastos menores.

Modelo 2. Modelo estocástico con tiempo laboral igual a tiempo de jubilación

En este modelo se realizan los análisis asumiendo que el tiempo es una variable estocástica, en la cual el período de pensión es igual al periodo laboral, se parte del modelo más simple posible donde el tiempo es igual a 30 años y luego se van considerando nuevos escenarios. Las variables estocásticas utilizadas en este apartado son: la tasa de rentabilidad, la inflación y el tiempo que una persona labora (igual al tiempo de pensión). Para la inflación se toman datos mensuales desde Enero de 2004 hasta Diciembre de 2013 y se hace la prueba de bondad de ajuste Kolmogorov – Smirnov con un nivel de confianza del 90%.

Para la tasa de rentabilidad se adopta una de las estrategias sugeridas en la Ley 100 de 1993 (Ministerio de Hacienda y Crédito Público de la República de Colombia, 2011), conformada por 60% en renta fija para lo que se utilizó la rentabilidad del TES a vencer en marzo de 2023 y 40% en renta variable nacional que se modeló a partir de la rentabilidad de la bolsa de valores de Colombia, utilizando su rentabilidad mensual desde enero de 2004 hasta diciembre de 2013. A estas rentabilidades se les quita el efecto de la inflación, se modelan en términos reales y se hace un estudio de la distribución de probabilidad a partir de las pruebas de bondad de ajuste de Kolmogorov – Smirnov con un nivel de confianza del 90%.

Los resultados muestran que las variables se pueden distribuir de la siguiente forma: Tanto para la inflación como para la rentabilidad real de los TES se puede seguir una distribución Log-Normal, cuya función de probabilidad es:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln(x)-\mu)^2/2\sigma^2} \tag{67}$$

Para $x > 0$, donde μ y σ son la media y la desviación estándar del logaritmo de la variable.

La rentabilidad real del IGBC sigue una distribución Normal, cuya función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \tag{68}$$

Donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

Los años de trabajo siguen una distribución Triangular, cuya función de densidad es:

$$f(x|a,b,c) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, para\ a \leq x \leq b \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)},\ \ para\ c \leq x \leq b \\ 0 \qquad\qquad\qquad en\ otro\ caso \end{cases} \tag{69}$$

Donde a es un valor mínimo, b es un valor máximo y c una moda.

Los parámetros utilizados para cada una de estas distribuciones y los resultados de las variables simuladas se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. Distribuciones de probabilidad y parámetros de las variables para el modelo estocástico

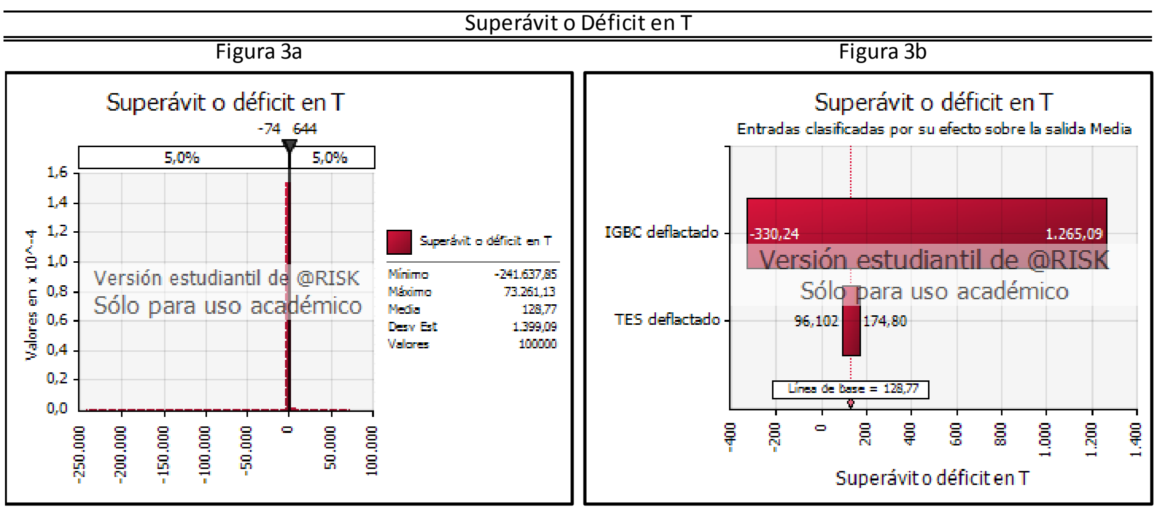
Variable	Periodicidad	Distribución de probabilidad	Parámetros mensuales	Parámetros anualizados
Inflación	Mensual	Log-Normal	µ =0,339% σ=0,357% (mensuales)	µ =4,143% σ=1,238%
rentabilidad real de los TES (deflactado)	Mensual	Log-Normal	µ =0,439% σ=0,359% (mensuales)	µ =5,395% σ=1,243%
Rentabilidad real del IGBC (deflactado)	Mensual	Normal	µ =1,354% σ=7,085% (mensuales)	µ =17,517% σ=24,542%
Años de trabajo = años de pensión		Triangular	Min=20 Max=40 Probable=30	Min=20 Max=40 Probable=30

Fuente: Elaboración propia.

A partir de esta información se construyen y analizan los siguientes modelos:

Modelo 2.1: Una importante aplicación es dejar constante el tiempo a 30 años dado que es un periodo de referencia para la vida de una persona. El modelo se configura asumiendo un porcentaje de ahorro del 15%. Se crea un solo modelo para la inflación y la rentabilidad asumiendo que permanecen estables para todos los períodos.

Figura 3. Superávit o déficit en Ten el modelo 2.1



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 3. Percentiles para superávit o déficit en T en el modelo 2.1

Percentiles para Superávit o déficit en T																			
Percentil	**5%**	**10%**	**15%**	**20%**	**25%**	**30%**	**35%**	**40%**	**45%**	**50%**	**55%**	**60%**	**65%**	**70%**	**75%**	**80%**	**85%**	**90%**	**95%**
	(73,9)	(34,5)	(20,8)	(13,1)	(7,5)	(2,8)	1,7	6,4	11,7	18,0	25,6	35,1	47,8	65,1	89,4	127,6	189,9	311,3	643,6

Fuente: Elaboración propia

Con estos parámetros se obtiene que la probabilidad de quedar en déficit es cercano al 33%. En promedio, esta situación va a generar en el momento que se retira un superávit de 128,77 veces el salario inicial (después de descontar la reserva que debe dejar parar sus retiros). En la figura (3b) se observa que la tasa de rentabilidad es la variable que más afecta el modelo. Esto sugiere darle delicada importancia a la rentabilidad generada en los activos financieros donde se invierten los ahorros de los futuros pensionados.

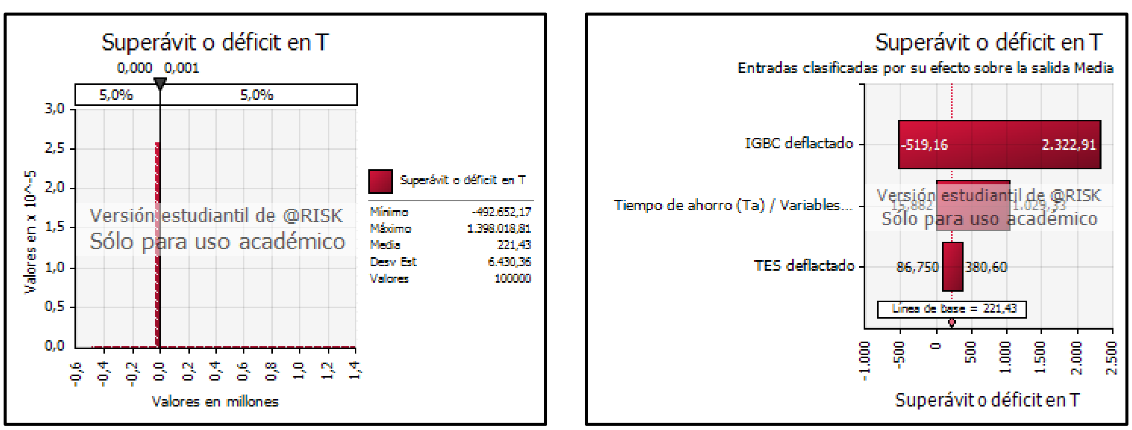
Modelo 2.2: Se considera el modelo anterior pero se asume el tiempo como una variable estocástica, asumiendo que la persona trabaja igual tiempo que el de la jubilación. La rentabilidad y la inflación son estables para cada período de tiempo.

En este caso se modelan diferentes tiempos, teniendo en cuenta siempre que el tiempo de jubilación es igual al tiempo de labor. Para el tiempo de ahorro se asume una distribución de probabilidad triangular con un mínimo de 20 años, un máximo de 40 años y un valor más probable de 30 años.

Figura 4. Superávit o déficit en T, con el tiempo como variable estocástica

Superávit o Déficit en T

Figura 4a | Figura 4b



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4. Percentiles para superávit o déficit en T en el modelo 2.2

Percentiles para Superávit o déficit en T																			
Percentil	5%	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	55%	60%	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%
	(72,2)	(34,5)	(21,3)	(14,0)	(8,8)	(4,5)	(0,4)	3,7	8,4	13,8	20,5	29,0	40,3	56,1	79,2	115,4	178,3	314,1	730,2

Fuente: Elaboración propia.

Bajo estos supuestos se tiene que la probabilidad de quedar en déficit es cercano al 40%. El valor promedio de superávit de 221,43 veces el salario inicial. En la figura (4b) se observa que la tasa de rentabilidad conformada por los activos en el IGBC continúa siendo una variable que afecta fuertemente al modelo. Seguida por el tiempo de ahorro, que como se había mencionado, entre menos tiempo labore una persona, más deberá ahorrar para alcanzar la estabilidad que se busca y más rentabilidad deberá obtener por parte del fondo de pensiones. La tasa de rentabilidad proveniente de los TES afecta el modelo en menor nivel.

Modelo 2.3: Hasta el momento se asumió en cada iteración un solo aleatorio para todos los periodos, en este punto se quebranta este supuesto y se crea un modelo donde los parámetros inflación y tasas de interés cambian para cada año, y el tiempo de ahorro será igual al tiempo de jubilación.

Figura 5. Superávit o déficit en T, con parámetros diferentes para cada período

Superávit o Déficit en T

Figura 5a

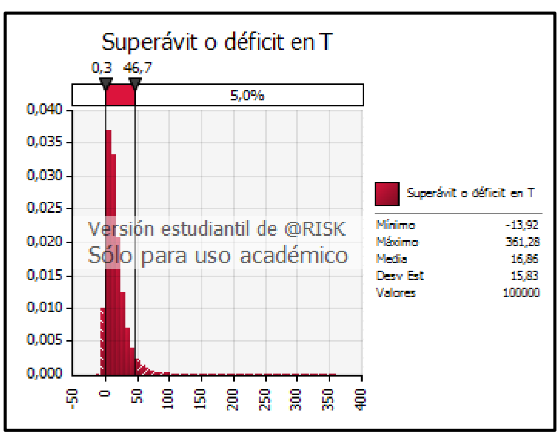
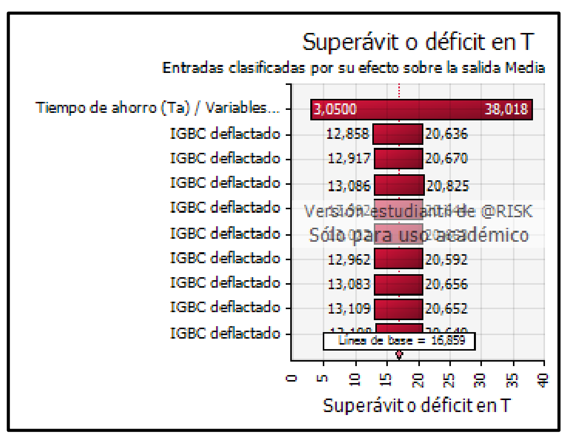


Figura 5b



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5. Percentiles para superávit o déficit en T en el modelo 2.3

Percentiles para Superávit o déficit en T																			
Percentil	**5%**	**10%**	**15%**	**20%**	**25%**	**30%**	**35%**	**40%**	**45%**	**50%**	**55%**	**60%**	**65%**	**70%**	**75%**	**80%**	**85%**	**90%**	**95%**
	0,3	2,1	3,6	5,0	6,3	7,5	8,8	10,1	11,4	12,8	14,4	16,2	18,1	20,3	23,0	26,1	30,3	36,1	46,7

Fuente: Elaboración propia.

Según los resultados arrojados por la simulación, se encuentra que la probabilidad de quedar en déficit es casi 0%. El valor promedio de superávit es 16,86 veces el salario inicial. En la figura (5b) se observa que la variable que más afecta al modelo es el tiempo de ahorro. Por otra parte, la rentabilidad generada de la renta variable sigue afectando al modelo. Este modelo tiende a proyectar una situación más real que los escenarios anteriores, y su probabilidad de déficit es la más baja.

Modelo 3. Modelo estocástico con tiempo laboral diferente al tiempo de jubilación.

Para este modelo se afectan de forma estocástica todas las variables: la rentabilidad, la inflación, el tiempo laboral, y el tiempo de jubilación que depende de la esperanza de vida, de la edad en que inicia una persona a trabajar y del tiempo que labora de la siguiente forma:

$$T_j = f(E(v), E_t, T_a) \tag{70}$$

$$T_j = E(v) - E_t - T_a \tag{71}$$

Donde T_j es el tiempo de jubilación y $T_j > 0$; $E(v)$ es la esperanza de vida de una persona; E_t es la edad en que inicia una persona a trabajar y T_a es el tiempo en que labora la persona, con $T_a > 0$

Para la esperanza de vida se toma el trabajo realizado por (Arango, Arroyave, & Hernández, 2011) que modelan la esperanza de vida como una función triangular con valor mínimo 0 años, máximo 106 años y valor más probable 74 años; con relación a la edad en que se inicia a trabajar se modeló con una distribución triangular con mínimo 18 años, máximo 40 años y valor más probable 25 años.

Con relación al porcentaje de ahorro, se realizarán dos simulaciones: una asumiendo el 15% constante y en la otra se asume una distribución uniforme con un mínimo del 15% y un máximo del 20% (que se presenta en el modelo 3.3). Esto con el objetivo de sensibilizar el modelo con este parámetro y analizar la incidencia que tiene sobre el déficit o el superávit.

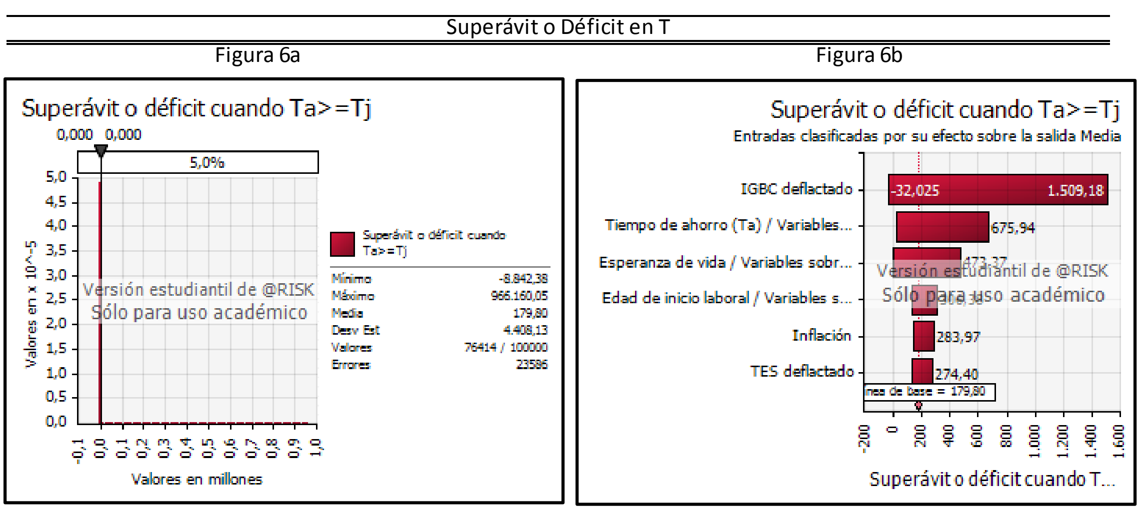
Tabla 6. Distribuciones de probabilidad y parámetros de las variables para el modelo estocástico con tiempo laboral diferente al tiempo de jubilación

Variable	Periodicidad	Distribución de probabilidad	Parámetros mensuales	Parámetros anualizados
Inflación	Mensual	Log-Normal	μ =0,339% σ=0,357% (mensuales)	μ =4,143% σ=1,238%
rentabilidad real de los TES (deflactado)	Mensual	Log-Normal	μ =0,439% σ=0,359% (mensuales)	μ =5,395% σ=1,243%
Rentabilidad real del IGBC (deflactado)	Mensual	Normal	μ =1,354% σ=7,085% (mensuales)	μ =17,517% σ=24,542%
Edad de inicio Laboral		Triangular	Min=18 Max=40 Probable=25	Min=18 Max=40 Probable=25
Años de trabajo		Triangular	Min=20 Max=40 Probable=30	Min=20 Max=40 Probable=30
Esperanza de vida		Triangular	Min=0 Max=106 Probable=74	Min=0 Max=106 Probable=74
% de ahorro		Uniforme	Min=15% Max=25%	Min=15% Max=25%

Fuente: Elaboración propia.

Modelo 3.1: Se plantea un modelo similar al 2.2, pero el tiempo de ahorro (T_a) es una variable diferente e independiente al tiempo de jubilación (T_j). El análisis se realiza teniendo en cuenta por separado los casos donde el tiempo de labor es mayor o igual que el tiempo de jubilación y luego el caso contrario.

Figura 6. Superávit o déficit en T, cuando $T_a \geq T_j$



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7. Percentiles para superávit o déficit en T, cuando $T_a \geq T_j$

Percentiles para Superávit o déficit en T																			
Percentil	**5%**	**10%**	**15%**	**20%**	**25%**	**30%**	**35%**	**40%**	**45%**	**50%**	**55%**	**60%**	**65%**	**70%**	**75%**	**80%**	**85%**	**90%**	**95%**
	(13,2)	(4,9)	(0,0)	0,8	1,4	2,2	3,1	4,3	6,0	8,2	11,4	15,7	21,9	30,9	44,3	66,1	104,4	189,6	457,8

Fuente: Elaboración de autores.

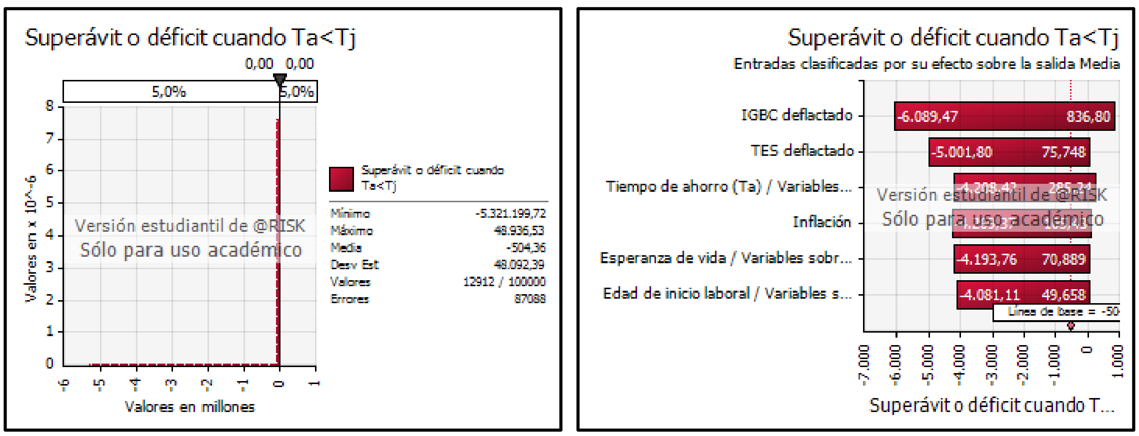
De acuerdo a las simulaciones bajo estos parámetros, cuando $T_a \geq T_j$, la probabilidad de déficit es cercana al 20%, y las variables de mayor incidencia son la tasa de rentabilidad representado en la renta variable, el tiempo de ahorro y la esperanza de vida.

Figura 7. Superávit o déficit en T, cuando $T_a < T_j$

Superávit o Déficit en T

Figura 7a

Figura 7b



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8. Percentiles para superávit o déficit en T cuando $T_a < T_j$

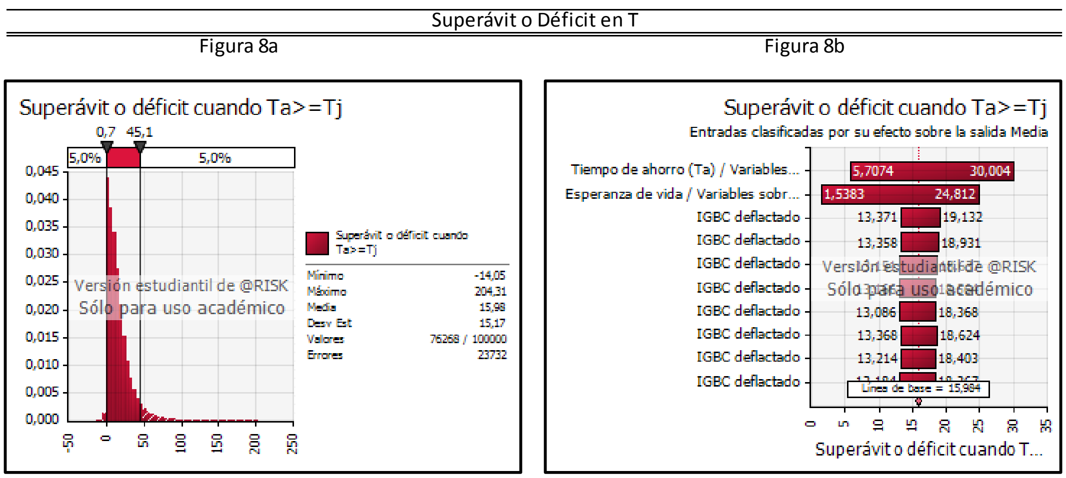
Percentiles para Superávit o déficit en T																			
Percentil	**5%**	**10%**	**15%**	**20%**	**25%**	**30%**	**35%**	**40%**	**45%**	**50%**	**55%**	**60%**	**65%**	**70%**	**75%**	**80%**	**85%**	**90%**	**95%**
	(108,8)	(44,1)	(26,6)	(16,9)	(10,9)	(6,5)	(2,6)	0,8	4,4	8,4	13,6	19,5	27,2	36,9	50,2	70,6	102,7	176,0	365,6

Fuente: Elaboración propia.

Cuando $T_a < T_j$, la probabilidad de déficit es cercana al 40%; y todas las variables que se consideraron afectan significativamente el modelo. Nótese que el tiempo de ahorro es menor que el tiempo de jubilación, por tanto, la persona deberá hacer un mayor esfuerzo por ahorrar la cantidad de dinero necesaria para el retiro o tomar un adecuado portafolio de inversiones que genere buena rentabilidad y de esta manera lograr el equilibrio deseado.

Modelo 3.2: Se plantea un modelo similar al 2.3, pero el tiempo de ahorro (T_a) es una variable diferente e independiente al tiempo de jubilación (T_j). El análisis se realiza teniendo en cuenta por separado los casos donde el tiempo de ahorro es mayor o igual que el tiempo de jubilación y luego el caso contrario.

Figura 8. Superávit o déficit en T, cuando $T_a \geq T_j$, con parámetros diferentes en cada período.



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 9. Percentiles para superávit o déficit en T cuando $T_a \geq T_j$, con parámetros diferentes en cada período.

Percentiles para Superávit o déficit en T																			
Percentil	**5%**	**10%**	**15%**	**20%**	**25%**	**30%**	**35%**	**40%**	**45%**	**50%**	**55%**	**60%**	**65%**	**70%**	**75%**	**80%**	**85%**	**90%**	**95%**
	0,7	1,7	2,8	4,0	5,3	6,5	7,8	9,2	10,6	12,1	13,7	15,4	17,3	19,5	22,0	25,0	29,1	34,8	45,1

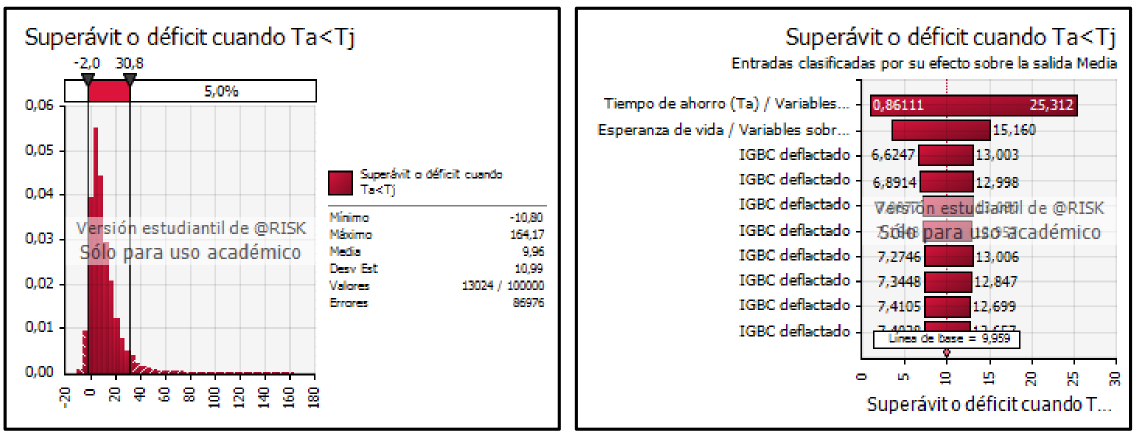
Fuente: Elaboración propia.

Cuando varían los parámetros en cada período, el porcentaje de déficit arrojado por el modelo es cercano a 0%, tomando el tiempo de ahorro mayor o igual al tiempo de jubilación. El valor promedio de superávit es 15,98 veces el salario inicial. El tiempo de ahorro, la esperanza de vida y la tasa de rentabilidad son las variables que más afectan al modelo. Observe que la probabilidad de déficit es similar al modelo 2.3, donde también varían los parámetros cada período.

Figura 9. Superávit o déficit en T, cuando $T_a < T_j$, con parámetros diferentes en cada período.

Superávit o Déficit en T

Figura 9a | Figura 9b



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 10. Percentiles para superávit o déficit en T cuando $T_a < T_j$, con parámetros diferentes en cada período

Percentiles para Superávit o déficit en T																			
Percentil	**5%**	**10%**	**15%**	**20%**	**25%**	**30%**	**35%**	**40%**	**45%**	**50%**	**55%**	**60%**	**65%**	**70%**	**75%**	**80%**	**85%**	**90%**	**95%**
	(2,0)	(0,4)	0,8	1,8	2,7	3,6	4,4	5,4	6,4	7,4	8,4	9,6	10,9	12,5	14,4	16,5	19,2	23,2	30,8

Fuente: Elaboración propia.

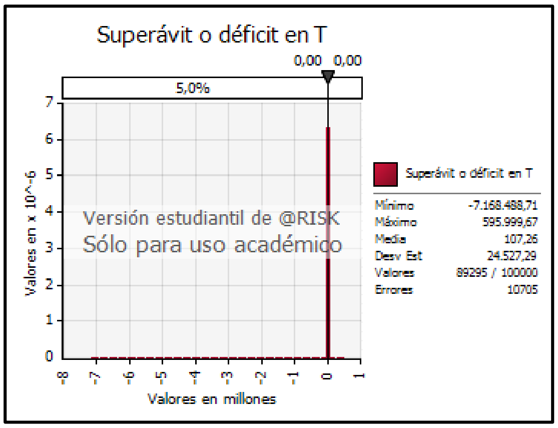
Cuando el tiempo de ahorro es menor que el tiempo de jubilación, el porcentaje de déficit arrojado por el modelo es cercano al 15%, que es mayor que el modelo anterior, dado que la persona deberá realizar un mayor ahorro para su tiempo de jubilación que será más prolongado que el tiempo en que estuvo laborando. Además, se observa que las variables tiempo de ahorro, esperanza de vida y tasa de rentabilidad afectan al modelo.

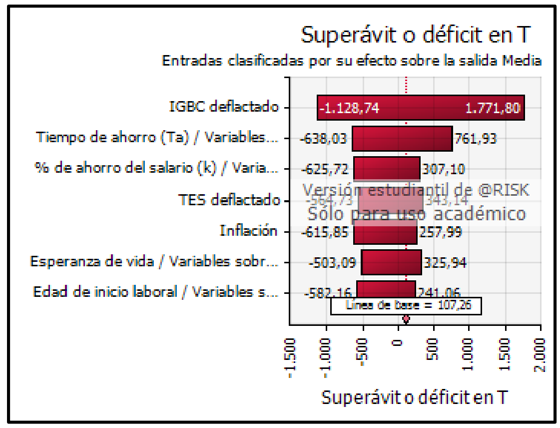
Modelo 3.3. En este último modelo se sensibilizan todas las variables, tasa de rentabilidad, tiempo de ahorro diferente a tiempo de jubilación, esperanza de vida, inflación, y se incluye el porcentaje de ahorro.

Figura 10. Superávit o déficit en T, con todas las variables aleatorias

Superávit o Déficit en T

Figura 10a	Figura 10b





Fuente: Elaboración propia.

Tabla 11. Percentiles para superávit o déficit en T, con todas las variables aleatorias

Percentiles para Superávit o déficit en T																			
Percentil	**5%**	**10%**	**15%**	**20%**	**25%**	**30%**	**35%**	**40%**	**45%**	**50%**	**55%**	**60%**	**65%**	**70%**	**75%**	**80%**	**85%**	**90%**	**95%**
	(18,8)	(6,5)	(0,4)	1,0	2,0	3,1	4,5	6,4	8,9	12,2	16,9	22,9	31,3	43,1	61,0	89,7	141,3	249,2	593,3

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, se simulan todas las variables del modelo, incluyendo el porcentaje de ahorro que hasta el momento se había mantenido constante en un 15%. Con estas variaciones, se obtiene una probabilidad de déficit cercano al 20%, y el modelo se ve afectado por todas las variables, siendo la rentabilidad en el mercado accionario la de mayor peso, como ocurre en todos los escenarios.

4. CONCLUSIONES

De acuerdo con el modelo planteado y según los resultados arrojados en la simulación siguiendo el método Monte Carlo existe una alta probabilidad de que con el ahorro realizado por el empleado en su periodo laboral, éste obtenga una reserva de dinero suficiente para llegar a disfrutar del periodo de retiro sin alterar la calidad de vida que tenía en su tiempo de empleado, debido a que mantiene el mismo salario en términos reales durante su periodo de jubilación.

Una de las variables que más afecta al modelo, posiblemente por su volatilidad y por ende alto nivel de riesgo, es la tasa de rentabilidad proveniente del mercado accionario, lo cual sugiere darle delicada importancia a la rentabilidad generada en los activos financieros donde se invierten los ahorros de los futuros pensionados, las personas que deseen asumir poco nivel de riesgo pueden optar por invertir el dinero ahorrado en fondos como los TES que ofrecen mayor estabilidad.

Se puede observar que para un ahorro de t años y un período de jubilación de igual tiempo, manteniendo el valor en términos reales, la inflación no tiene ningún efecto. La inflación sólo afecta la condición de equilibrio de los ahorros y los retiros si es significativamente diferente entre cada uno de los periodos, tanto el periodo laboral como el periodo de jubilación. También podría tener un importante efecto si el periodo de jubilación es radicalmente diferente al tiempo laboral.

Cuando el tiempo de ahorro es menor al tiempo de jubilación el modelo se muestra muy sensible, esto se debe a que la persona deberá aumentar el nivel de ahorros para conservar el mismo nivel de vida, o tomar un adecuado portafolio de inversiones que genere buena rentabilidad y de esta manera lograr el equilibrio deseado.

REFERENCIAS

Alonso B., S., Azofra P., V., & de la Fuente, G. (2007). Las Opciones Reales y la Simulación Monte Carlo. *Universia Business Review* , 52-63.

Arango, M., Arroyave, E., & Hernández, J. (2011). Valoración del riesgo financiero (CFaR) en las EPS a través de opciones reales: una aplicación al nivel de atención IV. *Revista de Ingenierías Universidad de Medellín* , 125-135.

Arbeláez Z., J. C., & Maya, C. (2008). Valoración de credit Default Swaps (CDS): Una aproximación con el método Monte Carlo. *Cuadernos de Administración* , 87-111.

Arza, C. (2008). The limits of pension privatization: lesson from Argentine experience. *World Development , 36* (12), 2696-2712.

Asamblea Nacional Constituyente. (1991). *Constitución Política de Colombia.* Bogotá.

Bautista Abraham, M. (2004). Producción de electrones en la primera etapa de detección de rayos gamma por algunos materiales centelladores. *Tesis de Licenciatura en Física* . Mexico.

Bellina Yrigoyen, J. (1999). Análisis económico de los planes de pensión públicos. *Invenio* , 75-99.

Bellina Yrigoyen, J., & German, M. (2003). Ideas para mejorar el desempeño de los fondos de pensión en cuanto al riesgo y la rentabilidad. *Invenio* , 119-138.

Berggrun, L., & Camacho, V. (2009). Como crear un protaflio de inversión con las opciones que ofrecen los fondos de pensiones voluntarias en Colombia: el caso Skandia. *Estudios Gerenciales , 25* (113), 229-424.

Blake, D., & Boardman, T. (2012). Spend more today safely: using behavioural economics to improve retirement expenditure decisions.

Blake, D., & Turner, J. A. (2013). *Longevity Insurance Annuities: lessons from the United Kingdom.* London.

Blake, D., Wright, D., & Zhang, Y. (2011). Age-dependent investing: optimal funding and investment strategies in defined contribution pension plans when memebers are rational life cycle financial planners. London.

Cáceres, J., Juan, A., Grasman, S., Bektas, T., & Faulin, J. (2012). La combinación de Monte Carlo Simulación con heurística para resolver el problema de enrutamiento de inventario con demandas estocasticas. *Winter Simulation Conference*, (págs. 1-9). Berlin.

Cairns, A. (2012). *Robust hedging of longevity risk.* London.

Cannon, E., & Tonks, I. (2011). The value and risk of defined contribution pension schemes: international evidence. London.

Castro Iragorri, C. A. (2009). *Administración de riesgos en los fondos privados de pensiones.* Bogotá.

Congreso de la República de Colombia. (1993). *Ley 100 de 1993.* Bogotá.

Congreso de la República de Colombia. (2012). Ley 1580 de 2012 . Bogotá.

Congreso de la República de Colombia. (2003). Ley 797 de 2003. Bogotá.

Cruz A., F. (2012). Procesos estocásticos en la evaluación de proyectos de inversión, opciones reales, árboles binomiales, simulación bootstrap y simulación Monte Carlo: flexibilidad en la toma de decisiones. *Contaduría y Administración* , 83-112.

Dowd, K., & Blake, D. (2013). *Good practice principles modeling pension defined contribution.* London: Cass Business School.

Eckstein, J., & Riedmueller, S. (2002). YASAI: Yet Another Add-infor Teaching Elementary Monte Carlo Simulation in Excel. *Informs Transactions on Education* .

Edmund, C., & Tonks, I. (2013). *Cohort mortality risk or adverse selection in the UK annuity market?* London: Cass Business School.

Estévez, G., Infante, S., & Sáez, F. (2012). Estimación de modelos de equilibrio general en economías dinámicas por métodos de Monte Carlo y Cadenas de Markov. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* , 7-36.

Faulin, J. A. (2005). Simulación Monte Carlo con Excel. *Técnica Administrativa* .

García, J. A. *Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita* (Quinta ed.). Prentice Hall.

García, Y. y. (2006). ¿Cómo valorar los planes de pensiones del sistema individual en España? *Estudios de Economía* , 21-43.

García, Y., & García, J. (2007). Carcaterísticas generales y estudio financiero fiscal de los planes de pensiones versus planes de jubilación. *Innovar. Revista de Ciencias Administrativas y Sociales , 17* (29), 155-169.

Garrido, A., & Conesa, E. (2009). Simulación por el método Monte Carlo para generar criterios de aceptación en el control de calidad de productos de construcción. *Informes de la construcción* , 77-85.

Herce, J. A. (2003). Modelling the pension system. *Futures , 35*, 75-87.

Hunt, A., & Blake, D. (2013). *A general procedure for constructing mortality models.* London.

Judge, G. (1999). Simple Monte Carlo studies on a spreadsheet. *Computers in Higher Education Economics Review* .

Kelly, C., & Morgan, K. (2008). A Monte-Carlo approach to the effect of noise on local stability in polynomial difference equations. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* , 1-8.

Martinez, G. (2005). Reforma a las pensiones y ahorro individual. *Economía: Teoría y práctica* , 119-134.

Maya, C. (2004). Monte Carlo Option Pricing. *Lecturas de Economía* , 53-70.

Ministerio de Hacienda y Crédito Público de la República de Colombia. (2011). Decreto 857 de 2011. Bogotá, Colombia.

Moreno R., A., & Ortiz, F. (2010). Economia política de la reforma del sistema colombiano de pensiones. *Revista de Economía Institucional* , 167-192.

Neira Bravo, D. A. (2011). Aplicación de métodos secuenciales de Monte Carlo sensibles al riesgo en la estimación de vida útil de componentes. *Tesis* . Chile.

Peña Sánchez, D. (2001). Deducción de distribuciones: el método de Monte Carlo. *Fundamentos de Estadística* , 223.

Plat, R. (2010). *One-year value at risk for longevity and mortality.* London.

Rodriguez N., A., & Venegas M., F. (2010). Efectos del tipo de cambio sobre el déficit público:modelos de simulación Monte Carlo. *Contaduría y Administración* , 11-40.

Romer, D. (2006). *Macroeconomía avanzada.* Mc Graw Hill.