

# **MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE ADOMIAN**

**JUAN PABLO BALLÉN LÓPEZ  
PABLO ALBERTO LEÓN VELASCO**

**UNIVERSIDAD EAFIT  
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS  
MEDELLÍN  
2017**

# **MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE ADOMIAN**

**JUAN PABLO BALLÉN LÓPEZ  
PABLO ALBERTO LEÓN VELASCO**

**Tesis de Maestría presentada como requisito para optar el título de Magister en  
Matemática Aplicada**

Director  
**JOSÉ ALBEIRO SÁNCHEZ CANO Ph. D.**

**UNIVERSIDAD EAFIT  
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS  
MEDELLÍN  
2017**

A nuestros hijos  
a nuestras esposas  
a nuestras queridas familias.

# CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>v</b>
<b>Objetivos</b>	<b>1</b>
0.1. Objetivo General . . . . .	1
0.2. Objetivos específicos . . . . .	1
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>2</b>
<b>2. ESTUDIO DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE ADOMIAN</b>	<b>7</b>
2.1. Descripción General del Método . . . . .	7
2.2. Otras fórmulas para hallar los Polinomios de Adomian . . . . .	10
2.3. Comparación entre el MDA y el método de la Serie de Taylor para EDO. .	20
<b>3. APLICACIONES DEL MDA</b>	<b>27</b>
3.1. Solución de ecuaciones algebraicas . . . . .	27
3.2. Solución de ecuaciones diferenciales con problema de valor inicial . . . .	36
3.3. Aplicación del MDA a Ecuaciones Integrales . . . . .	59
<b>4. CONVERGENCIA DEL MDA</b>	<b>66</b>
<b>5. CONCLUSIONES</b>	<b>71</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>78</b>

# INTRODUCCIÓN

Estudiaremos el Método de Descomposición de Adomian (MDA), el cual fue introducido en la década de los años ochentas por el matemático estadounidense George Adomian y descrito en su libro "Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method" [1].

Este método se puede aplicar a diversos problemas funcionales lineales y no lineales de la forma  $Au = f$ , donde  $A$  lo consideraremos un operador en un espacio de Banach  $E$  y  $f$  una función conocida en  $E$ .

El Método de Descomposición de Adomian permite encontrar analíticamente la solución de un problema funcional escribiéndola en forma de serie, donde cada uno de sus términos es hallado en forma recurrente mediante un esquema iterativo usando los llamados Polinomios de Adomian.

Con ayuda de dos resultados sobre integrales anidadas llegaremos a la solución exacta del problema funcional siempre y cuando sea posible determinar el límite de la serie solución dada por el MDA (como lo veremos en los ejemplos 5 y 7 del capítulo 3 ). Si no es fácil identificar dicho límite, realizaremos un truncamiento de la serie solución, esperando que la suma parcial obtenida sea una buena aproximación, situación que por lo general se consigue usando pocos términos de la serie debido a su rápida convergencia.

Es de anotar que el MDA no recurre a ningún tipo de linealización, discretización o perturbación, por lo que no cambia la naturaleza del problema, siendo esta una de sus mayores ventajas.

Aplicaremos el método en la solución de problemas como: Ecuaciones algebraicas no lineales en una variable, problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y no lineales, sistemas acoplados de ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales.

Algunos de los problemas que desarrollaremos en el presente trabajo fueron estudiados por el profesor José Albeiro Sánchez en [22].

Tomando las ideas expuestas en [5], se estudiará una prueba de convergencia para la serie solución dada por el MDA, considerando  $A$  un operador diferencial ordinario, de igual manera se plantea una cota superior para el error de truncamiento.

El esquema de la tesis está conformado por 4 capítulos los cuales se desarrolla de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se estudian algunos conceptos preliminares que serán necesarios para la temática a desarrollar.

En el capítulo 2 haremos una descripción detallada del MDA.

En el capítulo 3 aplicaremos el método a la solución de los problemas antes detallados.

En el capítulo 4 se estudiará la convergencia del MDA.

Por último se presentan las conclusiones del trabajo y en el apéndice se desarrollan los resultados sobre integrales anidadas cuyas demostraciones pueden ser consultadas en [23] y [24].

# Objetivos

## 0.1. Objetivo General

Presentar en forma detallada el Método de Descomposición de Adomian y aplicarlo a ciertos problemas funcionales lineales y no lineales.

## 0.2. Objetivos específicos

1. Encontrar mediante el MDA soluciones exactas o aproximadas para ciertos problemas de tipo funcional.
2. Comparar los resultados obtenidos por el MDA con la solución exacta o con la obtenida al implementar un método numérico.
3. Verificar que la implementación del MDA no cambia la naturaleza del problema propuesto.
4. Estudiar la convergencia del Método de Descomposición de Adomian para un problema funcional donde  $A$  es un operador diferencial ordinario.

# 1. PRELIMINARES

Los fundamentos teóricos que se describen a continuación fueron tomados de las referencias [3] y [4]

## 1.1 Espacios de Banach

**Definición 1.1.1** Sea  $E$  un espacio vectorial sobre un campo  $K$ . Una norma sobre  $E$  es una aplicación

$$\|\cdot\| : E \rightarrow K$$

tal que para cada  $x, y \in E$  se tiene que:

- i)  $\|x\| \geq 0$ ;  $\|x\| = 0$  si y sólo si  $x = 0$ .
- ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\forall \alpha \in K$
- iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Definición 1.1.2** Un espacio Vectorial normado es un par  $(E, \|\cdot\|)$ , donde  $\|\cdot\|$  es una norma sobre el espacio vectorial  $E$ .

**Definición 1.1.3** Sea  $M$  un conjunto no vacío, una métrica o distancia en  $M$  es una aplicación

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para cada  $x, y$  y  $z$  en  $M$  se tiene que

- i)  $d(x, y) \geq 0$ .  $d(x, y) = 0$  si y solo si  $x = y$
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$

iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (desigualdad triangular)

**Definición 1.1.4** Un espacio métrico es un par  $(M, d)$  donde  $M$  es un conjunto no vacío y  $d$  una métrica en  $M$ .

**Definición 1.1.5** Si  $E$  es un espacio vectorial normado, entonces su norma induce una métrica sobre  $E$ , dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ para todo } x, y \in E$$

**Definición 1.1.6** Dada una sucesión  $\{x_n\}$  en un espacio normado  $E$ , se dice que es una sucesión de Cauchy, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que } m, n > n_0 \implies \|x_n - x_m\| < \epsilon$$

**Definición 1.1.7** se dice que un espacio normado  $E$  es un espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy en  $E$  es convergente a un punto de  $E$ .

Ejemplos de Espacios de Banach

1.  $\mathbb{R}^n$  con la norma

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2. El espacio  $\ell^p(\mathbb{R}) = \left\{ x = \{x_n\}_{n \geq 1} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$  para cualquier real  $p \geq 1$ , con la norma definida por

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

3. El espacio de las funciones continuas  $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua}\}$  con la norma

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

## 1.2 Aplicaciones Lineales

**Definición 1.2.1:** Sean  $X, Y$  espacios vectoriales sobre un campo  $K$ . La función  $T : X \rightarrow Y$  se llama un operador o transformación lineal si para cada  $x, y \in X$  y para cada  $\alpha, \beta \in K$  se tiene que

$$T(\alpha X + \beta Y) = \alpha T(X) + \beta T(Y)$$

Consecuencias: Vemos que si  $T$  es lineal de  $X$  en  $Y$ ,  $T(0) = 0$  y además  $T(-x) = -T(x)$

**Definición 1.2.2:** Sean  $X, Y$  espacios vectoriales normados con norma notadas en ambos  $\|\cdot\|$ , Un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$  se dice acotado si existe  $M > 0$  tal que

$$\|T(x)\| \leq M \|x\|, \forall x \in X$$

**Teorema 1.2.1:** Sean  $X, Y$  espacios vectoriales normados con norma notadas en ambos  $\|\cdot\|$ ,  $T : X \rightarrow Y$  aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones acerca de  $T$  son equivalentes:

- i)  $T$  es continua en  $x, \forall x \in X$
- ii)  $T$  es continua en  $0 \in X$ .
- iii) Existe  $M > 0$ , tal que  $\|T(x)\| \leq M$  para todo  $x \in X$  con  $\|x\| \leq 1$
- iv)  $T$  es acotado en  $X$
- v)  $T$  es uniformemente continua en  $X$ .

## 1.3 Series en Espacios de Banach.

Consideraremos  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $\{a_n\}$  una sucesión de elementos en  $E$ , podemos formar la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , que llamaremos serie de término n-ésimo  $a_n$  y suma parcial  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

Diremos que la serie es convergente si existe el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , en caso contrario la serie se dice divergente.

**Teorema 1.3.1** Sean  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Prueba.

Dado que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente, entonces se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Definamos una sucesión  $\{t_n\}$  definida

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_n = s_{n-1} \text{ Para } n > 1 \end{cases}$$

Evidentemente  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  y como  $a_n = s_n - t_n$ , se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Teorema 1.3.2.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie absolutamente convergente, entonces la serie es convergente.

Prueba.

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$  converge en  $\mathbb{R}$ , se tiene que la sucesión  $\{\sigma_n\}$ , definida por  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \|a_k\|$ , es de Cauchy, es decir, Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0$ , implica que

$$|\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon$$

Definamos  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  y tomemos  $n > m$ , luego

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n a_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|a_k\| = \sigma_n - \sigma_m < \varepsilon$$

Lo cual prueba que la sucesión  $\{s_n\}$  es de Cauchy, por lo tanto es convergente y además como  $E$  es completo tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = l \in E$ , en consecuencia la

serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge en  $E$ .

#### 1.4 Principio de contracción de Banach

**Definición 1.4.1:** sean  $(M_1, d_1)$  y  $(M_2, d_2)$  dos espacios métricos, una aplicación  $f : M_1 \rightarrow M_2$  se dice Lipschitziana, si existe una constante  $L > 0$ , tal que

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y)$$

la constante  $L$  se denomina constante de Lipschitz de la función  $f$ .

**Definición 1.4.2:** Sean  $(M_1, d_1)$  y  $(M_2, d_2)$  dos espacios métricos, una aplicación  $f : M_1 \rightarrow M_2$  se dice una contracción si existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , tal que para todo  $x, y \in M_1$ , se tiene que

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y)$$

#### Teorema 1.4.1 (Teorema del punto fijo de Banach)

Sean  $(M, d)$  un espacio métrico completo y  $f : M \rightarrow M$  una contracción con constante de contracción  $\lambda$ , entonces  $f$  posee un único punto fijo. Aún más si  $x_0 \in M$ , la sucesión  $\{x_n\}$  definida por

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

converge al punto fijo de  $f$ .

## 2. ESTUDIO DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE ADOMIAN

### 2.1. Descripción General del Método

Consideremos una ecuación funcional no lineal:

$$Au = f \quad (2.1)$$

Donde  $A$  es un operador en un espacio de Banach  $H$  sobre  $H$  el cual contiene términos lineales y no lineales,  $f$  es una función conocida en  $H$ . Se busca una función  $u \in H$  que satisfice (2.1).

La parte lineal de  $A$  se descompone en la forma  $L + R$ , donde  $L$  es fácilmente invertible y  $R$  es el resto del operador. De tal manera que (2.1) se escribe en la forma:

$$Lu + Ru + Nu = f \quad (2.2)$$

donde  $Nu$  es el término no lineal.

Aplicando en ambos miembros de la ecuación (2.2) el operador inverso de  $L$ , denotado por  $L^{-1}$ , tenemos:

$$u = \Phi + L^{-1}f - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.3)$$

Donde  $\Phi$  es un término que puede aparecer en ciertos tipos de ecuaciones al desarrollar  $L^{-1}Lu$ , como por ejemplo en ecuaciones diferenciales con valores iniciales o valores en la frontera, entre otros.

El método de descomposición de Adomian consiste en representar la solución  $u$  como una serie infinita, escrita en la forma

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \quad (2.4)$$

y la parte no lineal de  $Nu$  se escribe como la serie infinita

$$Nu = N \left( \sum_{i=0}^{\infty} u_i \right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.5)$$

donde los  $A_n$  son polinomios en  $u_0, u_1, \dots, u_n$  llamados Polinomios de Adomian.

Para el cálculo de los polinomios de adomian se usa la expresión

$$N \left( u_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i u_i \right) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A_n \quad (2.6)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro que se introduce en forma conveniente.

Si tomamos  $\lambda = 0$  en (2.6), tenemos que

$$A_0 = N(u_0)$$

Si derivamos (2.6) y tomamos  $\lambda = 0$ , se tiene que

$$A_1 = u_1 N'(u_0)$$

De igual forma, de la expresión

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} N \left( \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \Big|_{\lambda=0} = \left[ \frac{d^2}{d\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \right] \Big|_{\lambda=0}$$

Obtenemos el tercer polinomio de Adomian

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2!} (u_1^2 N''(u_0) + 2u_2 N'(u_0)) \\ &= u_2 N'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 N''(u_0) \end{aligned}$$

Seguindo el proceso de las derivadas sucesivas, encontramos expresiones para  $A_3$  y para  $A_4$

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{3!} (u_1^3 N'''(u_0) + 6u_1 u_2 N''(u_0) + 6u_3 N'(u_0)) \\ &= u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 N'''(u_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{1}{4!} \left( u_1^4 N^{(4)}(u_0) + 12u_1^2 u_2 N'''(u_0) + \left( \frac{1}{12} u_2^2 + 24u_1 u_3 \right) N''(u_0) + 24u_4 N'(u_0) \right) \\ &= u_4 N'(u_0) + \left( \frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) N''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 N'''(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 N^{(4)}(u_0) \end{aligned}$$

En general, los Polinomios de Adomian  $A_n$ , se determinan mediante la expresión:

$$n! A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[ N \left( \sum \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Ahora bien, si reemplazamos (2.5) y (2.6) en la ecuación (2.3) obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \phi + L^{-1} f - L^{-1} R \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) - L^{-1} N \left( \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \quad (2.8)$$

De la expresión (2.8) se plantea el siguiente esquema iterativo

$$\begin{aligned} u_0 &= \Phi + L^{-1} f \\ u_1 &= -L^{-1} R u_0 - L^{-1} A_0 \\ u_2 &= -L^{-1} R u_1 - L^{-1} A_1 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1} R u_n - L^{-1} A_n \end{aligned} \quad (2.9)$$

En resumen, para encontrar una solución del problema (2.1) mediante el MDA, se

lleva el modelo (2.1) a la forma (2.8), de tal manera que para determinar cada uno de los términos de la serie solución (2.4) planteada por el método, se aplica el esquema recurrente formado por las fórmulas (2.7) y (2.9), como lo describiremos en los ejemplos desarrollados en el siguiente capítulo.

Por lo general, la serie solución presenta una convergencia rápida, por lo que en muchas ocasiones, es suficiente encontrar una suma parcial de la serie con pocos términos para obtener una buena aproximación a la solución del problema.

## 2.2. Otras fórmulas para hallar los Polinomios de Adomian

En la demostración de la convergencia del Método de Descomposición de Adomian, propuesta por K. Abbaoui y Y. Cherruault en [11], [12], [14] y [15], desarrollan nuevas fórmulas para el cálculo de los Polinomios de Adomian, las cuales presentaremos a continuación

Introducimos las siguientes notaciones:

$$k = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$|k| = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$$

$$|nk| = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + nk_n$$

$$k! = k_1! k_2! k_3! \dots k_n!$$

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \dots x_n^{k_n}$$

Considerando las siguientes relaciones:

$$u_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \quad (2.10)$$

$$N(u_n(\lambda)) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i \quad (2.11)$$

y aplicando la fórmula para la  $n$ -ésima derivada de una función compuesta, descrita en [19], tenemos que

$$\begin{aligned}
n!A_n &= \sum_{|nk|=n} \frac{n!(u_1')^{k_1} (u_2'')^{k_2} \dots (u_n^{(n)})^{k_n}}{(1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n} k_1! k_2! k_3! \dots k_n!} N^{(|k|)}(u_0) \\
&= n! \sum_{|nk|=n} \frac{(1!u_1)^{k_1} (2!u_2)^{k_2} \dots (n!u_n)^{k_n}}{(1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n} k_1! k_2! k_3! \dots k_n!} N^{(|k|)}(u_0) \\
&= n! \sum_{|nk|=n} \frac{(u_1)^{k_1} (u_2)^{k_2} \dots (u_n)^{k_n}}{k_1! k_2! k_3! \dots k_n!} N^{(|k|)}(u_0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los polinomios de Adomian se pueden determinar mediante el esquema

$$\begin{cases} A_0 = N(u_0) \\ A_n = \sum_{|nk|=n} \frac{(u_1)^{k_1} (u_2)^{k_2} \dots (u_n)^{k_n}}{k_1! k_2! k_3! \dots k_n!} N^{(|k|)}(u_0) \end{cases} \quad (2.12)$$

Por ejemplo, hallemos  $A_3$

$$A_3 = \sum_{k_1+2k_2+3k_3=3} \frac{(u_1)^{k_1} (u_2)^{k_2} (u_3)^{k_3}}{k_1! k_2! k_3!} N^{(k_1+k_2+k_3)}(u_0)$$

Las soluciones en  $\mathbb{N}$  de la ecuación  $k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 3$  son:

$$\begin{cases} k_1 = 0 & k_2 = 0 & k_3 = 1 \\ k_1 = 1 & k_2 = 1 & k_3 = 0 \\ k_1 = 3 & k_2 = 0 & k_3 = 0 \end{cases}$$

Por tanto

$$A_3 = u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 N'''(u_0)$$

de otra parte, la fórmula (2.12) la podemos expresar de la forma:

$$A_n = \sum_{k=1}^n C_{n,p} N^{(|k|)}(u_0) \quad (2.13)$$

donde

$$C_{n,p} = \sum_S \frac{u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!}$$

$$S = \left\{ (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^m ; \sum_{i=1}^n k_i = p \text{ y } \sum_{i=1}^n i k_i = n \right\}$$

o simplemente

$$A_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{|nk|=n \\ |k|=p}} \frac{u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n}}{k_1! k_2! k_3! \dots k_n!} N^{(|k|)}(u_0) \quad (2.14)$$

Otra fórmula para determinar los polinomios de Adomian, cuya demostración se puede ver en [7], [18] es

$$\begin{cases} A_0 = N(u_0) \\ A_n = \sum_{|nk|=n} \frac{1}{k!} N^{(|k|)}(u_0) (u_{1[k_1]}, u_{2[k_2]}, u_{3[k_3]}, \dots, u_{n[k_n]}) \end{cases} \quad (2.15)$$

donde

$$u_{i[k_i]} = \underbrace{(u_i, u_i, u_i, \dots, u_i)}_{k_i \text{ veces}}$$

En algunas pruebas de convergencia del MDA [6] se utilizan los llamados Polinomios de Bell, los cuales son usados en Análisis Combinatorio y se definen como:

$$B_{n,p}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{\substack{|nk|=n \\ |k|=p}} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3! \dots} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{k_2} \left(\frac{x_3}{3!}\right)^{k_3} \dots \quad (2.16)$$

de donde:

$$B_{n,p}(1^0, 2^1, 3^2, \dots) = C_{n-1}^{n-k} n^{n-k} \quad (2.17)$$

donde  $C_m^i$  representa la combinatoria de  $i$  elementos en un conjunto de  $m$  elementos.

A continuación estudiaremos otro algoritmo para hallar los polinomios de Adomian descrito en [25]

De (2.7) tenemos que:

$$\begin{aligned} A_0 &= N(u_0) \\ A_1 &= u_1 N'(u_0) \\ A_2 &= u_2 N'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 N''(u_0) \\ A_3 &= u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 N'''(u_0) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.18)$$

podemos hacer dos observaciones importantes. En primer lugar,  $A_0$  depende sólo de  $u_0$ ;  $A_1$  depende solamente de  $u_0$  y de  $u_1$ ;  $A_2$  depende solamente de  $u_0$ ,  $u_1$  y de  $u_2$ , y así sucesivamente. En segundo lugar, los polinomios de Adomian presentados anteriormente muestran que la suma de subíndices de los componentes de  $u$  en cada término de  $A_n$  es igual a  $n$ . Este último hecho juega un papel importante en la formulación del nuevo algoritmo.

El nuevo algoritmo sugiere sustituir  $u$  como una suma de componentes :

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

como se definió en (2.4). Es claro que  $A_0$  siempre está determinado independiente de los otros polinomios  $A_n ; n \geq 1$ , de modo que  $A_0$  es siempre:

$$A_0 = N(u_0) \quad (2.19)$$

el nuevo algoritmo sugiere que debemos separar  $A_0 = N(u_0)$  de los otros términos de la expansión del término no lineal  $N(u)$ . Una vez identificado  $A_0$ , los términos restantes de  $N(u)$  pueden ser obtenidos usando operaciones algebraicas, identidades trigonométricas, series de Taylor según sea el caso, hecha la expansión, agrupamos todos los términos de tal forma que la suma de los subíndices de los componentes de  $u$  en cada término sea el mismo, con este paso realizado, el cálculo de los polinomios de Adomian se completa.

Veamos algunos ejemplos

### Ejemplo 1

$$N(u) = u^2$$

primero identificamos  $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

así

$$N(u) = (u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots)^2 \quad (2.20)$$

al expandir la parte derecha de (2.20) tenemos:

$$\begin{aligned} N(u) = & u_0^2 + 2u_0u_1 + 2u_0u_2 + u_1^2 + 2u_0u_3 + 2u_1u_2 + 2u_0u_4 + 2u_1u_3 \\ & + u_2^2 + 2u_0u_5 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

agrupamos los términos, teniendo en cuenta que la suma de los subíndices de las componentes de  $u_n$  sea la misma, y reescribimos la expresión (2.21)

$$\begin{aligned}
N(u) = & \underbrace{u_0^2}_{A_0} + \underbrace{2u_0u_1}_{A_1} + \underbrace{2u_0u_2 + u_1^2}_{A_2} + \underbrace{2u_0u_3 + 2u_1u_2}_{A_3} \\
& + \underbrace{2u_0u_4 + 2u_1u_3 + u_2^2}_{A_4} + \underbrace{2u_0u_5 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3}_{A_5} + \dots
\end{aligned} \tag{2.22}$$

así tenemos los polinomios de Adomian para  $N(u) = u^2$

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0^2 \\
A_1 &= 2u_0u_1 \\
A_2 &= 2u_0u_2 + u_1^2 \\
A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2 \\
A_4 &= 2u_0u_4 + 2u_1u_3 + u_2^2 \\
A_5 &= 2u_0u_5 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

## Ejemplo 2

$$N(u) = uu'$$

primero identificamos

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \\
u' &= \sum_{n=0}^{\infty} u'_n
\end{aligned} \tag{2.23}$$

al sustituir (2.23) en  $N(u) = uu'$  se tiene:

$$\begin{aligned}
N(u) &= (u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots) \\
&\times (u'_0 + u'_1 + u'_2 + u'_3 + u'_4 + u'_5 + \dots)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

multiplicando los dos factores se tiene:

$$\begin{aligned}
 N(u) &= u_0 u'_0 + u'_0 u_1 + u_0 u'_1 + u'_0 u_2 + u'_1 u_1 + u'_2 u_0 + u'_0 u_3 \\
 &\quad + u'_1 u_2 + u'_2 u_1 + u'_3 u_0 + u'_0 u_4 + u_0 u'_4 + u'_1 u_3 \\
 &\quad + u_1 u'_3 + u_2 u'_2 + \dots
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

agrupamos los términos, teniendo en cuenta que la suma de los subíndices de las componentes de  $u_n$  sea la misma, y reescribimos la expresión (2.25)

$$\begin{aligned}
 N(u) &= \underbrace{u_0 u'_0}_{A_0} + \underbrace{u'_0 u_1 + u_0 u'_1}_{A_1} + \underbrace{u'_0 u_2 + u'_1 u_1 + u'_2 u_0}_{A_2} \\
 &\quad + \underbrace{u'_0 u_3 + u'_1 u_2 + u'_2 u_1 + u'_3 u_0}_{A_3} \\
 &\quad + \underbrace{u'_0 u_4 + u'_1 u_3 + u_2 u'_2 + u'_3 u_1 + u'_4 u_0}_{A_4} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

los polinomios de Adomian para la expresión diferencial no lineal  $N(u) = uu'$  están dados por:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= u_0 u'_0 \\
 A_1 &= u'_0 u_1 + u_0 u'_1 \\
 A_2 &= u'_0 u_2 + u'_1 u_1 + u'_2 u_0 \\
 A_3 &= u'_0 u_3 + u'_1 u_2 + u'_2 u_1 + u'_3 u_0 \\
 A_4 &= u'_0 u_4 + u'_1 u_3 + u'_2 u_2 + u'_3 u_1 + u'_4 u_0 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 3

$$N(u) = \sin u$$

primero identificamos

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{2.27}$$

al sustituir (2.27) en  $N(u) = \sin u$  se tiene:

$$N(u) = \sin [u_0 + (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots)] \quad (2.28)$$

para separar  $A_0$  utilizamos la identidad trigonométrica:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

por tanto:

$$\begin{aligned} N(u) &= \sin u_0 \cos (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots) \\ &\quad + \cos u_0 \sin (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Separamos  $N(u_0) = \sin u_0$  de los otros factores y usando la expansión de Taylor para  $\cos(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots)$  y para  $\sin(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots)$  se tiene:

$$\begin{aligned} N(u) &= \sin u_0 \left( 1 - \frac{1}{2!} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^2 + \frac{1}{4!} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^4 - \dots \right) \\ &\quad + \cos u_0 \left( (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) - \frac{1}{3!} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^3 + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

así que

$$\begin{aligned} N(u) &= \sin u_0 \left( 1 - \frac{1}{2!} (u_1^2 + 2u_1u_2 + \dots) \right) \\ &\quad + \cos u_0 \left( (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) - \frac{1}{3!} (u_1^3 + \dots) \dots \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

agrupamos los términos, teniendo en cuenta que la suma de los subíndices de las componentes de  $u_n$  sea la misma, y reescribimos la expresión (2.31)

$$\begin{aligned}
N(u) &= \underbrace{\sin u_0}_{A_0} + \underbrace{u_1 \cos u_0}_{A_1} + \underbrace{u_2 \cos u_0 - \frac{1}{2!} u_1^2 \sin u_0}_{A_2} \\
&+ \underbrace{u_3 \cos u_0 + u_1 u_2 \sin u_0 - \frac{1}{3!} u_1^3 \cos u_0}_{A_3} \\
&- \underbrace{u_4 \cos u_0 - \left( \frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) \sin u_0 - \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 \cos u_0 + \frac{1}{4!} u_1^4 \sin u_0 + \dots}_{A_4}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

completamos los cálculos para hallar los los polinomios de Adomian para el operador no lineal  $N(u) = \sin u$  por tanto:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sin u_0 \\
A_1 &= u_1 \cos u_0 \\
A_2 &= u_2 \cos u_0 - \frac{1}{2!} u_1^2 \sin u_0 \\
A_3 &= u_3 \cos u_0 - u_1 u_2 \sin u_0 - \frac{1}{3!} u_1^3 \cos u_0 \\
A_4 &= u_4 \cos u_0 - \left( \frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) \sin u_0 - \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 \cos u_0 + \frac{1}{4!} u_1^4 \sin u_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

#### Ejemplo 4

$$N(u) = e^u$$

primero identificamos

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{2.33}$$

al sustituir (2.33) en  $N(u) = e^u$  se tiene:

$$N(u) = e^{(u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\dots)} \tag{2.34}$$

lo que es equivalente a:

$$N(u) = e^{u_0} e^{(u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\dots)} \quad (2.35)$$

separando el término  $e^{u_0}$  y utilizando la expansión en serie de Taylor de  $e^{(u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\dots)}$  obtenemos:

$$N(u) = e^{u_0} \times \left( 1 + (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) + \frac{1}{2!} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^2 + \dots \right) \quad (2.36)$$

agrupamos los términos, teniendo en cuenta que la suma de los subíndices de las componentes de  $u_n$  sea la misma tenemos:

$$\begin{aligned} N(u) = & \underbrace{e^{u_0}}_{A_0} + \underbrace{u_1 e^{u_0}}_{A_1} + \underbrace{\left( u_2 + \frac{1}{2!} u_1^2 \right) e^{u_0}}_{A_2} + \underbrace{\left( u_3 + u_1 u_2 + \frac{1}{3!} u_1^3 \right) e^{u_0}}_{A_3} \\ & + \underbrace{\left( u_4 + \frac{1}{2!} u_2^2 + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 + \frac{1}{4!} u_1^4 \right) e^{u_0}}_{A_4} + \dots \end{aligned} \quad (2.37)$$

obtenemos los polinomios de Adomian para el operador no lineal  $N(u) = e^u$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= e^{u_0} \\ A_1 &= u_1 e^{u_0} \\ A_2 &= \left( u_2 + \frac{1}{2!} u_1^2 \right) e^{u_0} \\ A_3 &= \left( u_3 + u_1 u_2 + \frac{1}{3!} u_1^3 \right) e^{u_0} \\ A_4 &= \left( u_4 + \frac{1}{2!} u_2^2 + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 + \frac{1}{4!} u_1^4 \right) e^{u_0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Con procesos similares, se pueden hallar los polinomios de Adomian para operadores no lineales como:  $u^3$ ,  $\cos u$ ,  $\sinh u$ ,  $\cosh u$ ,  $e^{-u}$ ,  $Lnu$

### 2.3. Comparación entre el MDA y el método de la Serie de Taylor para EDO.

Consideremos el PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = N(u(x)) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \quad (2.38)$$

probaremos, basados en [21], que la serie solución dada por el MDA corresponde a la solución dada por el método de la serie de Taylor del PVI (2.38) alrededor de  $x_0$ .

Recordemos que la serie de Taylor para la función  $u$  alrededor de  $x_0$  viene dada por:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (2.39)$$

de otra parte, si queremos resolver el PVI mediante el MDA, identificamos

$$L(\cdot) = \frac{d}{dx}(\cdot) \text{ y el operador inverso: } L^{-1}(x) = \int_{x_0}^x (\cdot) ds.$$

Aplicando  $L^{-1}$  en ambos miembros de (2.38), tenemos

$$\int_{x_0}^x \frac{du}{dx} = \int_{x_0}^x N(u(s)) ds \quad (2.40)$$

por lo cual

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x N(u(s)) ds \quad (2.41)$$

La idea fundamental del MDA, es escribir la solución  $u$  en forma de la serie (2.4) y la parte no lineal se sustituye por la serie (2.5), de tal manera que (2.41) se escribe de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0 + \int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) ds \quad (2.42)$$

de donde se plantea el esquema recurrente

$$\begin{cases} u_0(x) = u_0 \\ u_n(x) = \int_{x_0}^x A_{n-1}(s) ds \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.43)$$

con lo anterior podemos revisar la siguiente proposición.

**Proposición.** La solución dada por el método de la serie de Taylor es precisamente la solución  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$  dada por el MDA, donde

$$u_k(x) = \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

Prueba.

Combinando la condición inicial en (2.38) y (2.43) tenemos que  $u(x_0) = u_0 = u_0(x)$

si reemplazamos  $x = x_0$  en (2.38)

$$u'(x_0) = N(u(x_0)) = N(u_0) = A_0(x) \quad (2.44)$$

integrando ambos miembros de (2.44)

$$\int_{x_0}^x u'(x_0) ds = \int_{x_0}^x A_0(s) ds$$

de donde

$$u'(x_0)(x - x_0) = u_1(x) \quad (2.45)$$

Ahora, derivando (2.38) tenemos:

$$u''(x) = N'(u(x)) u'(x) \quad (2.46)$$

luego

$$u''(x_0) = N'(u(x_0)) u'(x_0) = N'(u_0) u'(x_0) \quad (2.47)$$

multiplicando ambos miembros de (2.47) por  $(x - x_0)$  y usando (2.45) tenemos

$$u''(x_0)(x - x_0) = u'(x_0)(x - x_0) N'(u_0) = u_1(x) N'(u_0) = A_1 \quad (2.48)$$

Integrando ambos miembros de (2.48)

$$\int_{x_0}^x u''(x_0)(s - x_0) ds = \int_{x_0}^x A_1(s) ds \quad (2.49)$$

de donde

$$\frac{u''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 = u_2(x) \quad (2.50)$$

derivando (2.46) y reemplazando  $x$  por  $x_0$  tenemos

$$u'''(x_0) = N''(u_0) \left(u'(x_0)\right)^2 + N'(u_0) u''(x_0) \quad (2.51)$$

Multiplicando ambos miembros de (2.51) por la expresión  $\frac{1}{2!} (x - x_0)^2$  y teniendo en cuenta (2.45) y (2.50) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} u'''(x_0) (x - x_0)^2 &= \frac{1}{2!} \left(u'(x_0)(x - x_0)\right)^2 N''(u_0) + \frac{u''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 N'(u_0) \\ &= \frac{1}{2!} u_1^2(x) N''(u_0) + u_2(x) N'(u_0) \\ &= A_2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Integrando ambos miembros de (2.52) se tiene que

$$\frac{u'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 = u_3(x) \quad (2.53)$$

Repetiendo una vez más el proceso anterior, tenemos que

$$u^{(4)}(x_0) = N'''(u_0) \left(u'(x_0)\right)^3 + 3N''(u_0) u'(x_0) u''(x_0) + N'(u_0) u'''(x_0) \quad (2.54)$$

Multiplicando (2.54) por  $\frac{1}{3!} (x - x_0)^3$  se llega a la relación

$$\begin{aligned} \frac{u^{(4)}(u_0)}{3!} (x - x_0)^3 &= \frac{1}{3!} N'''(u_0) \left(u'(x_0) (x - x_0)\right)^3 \\ &+ N''(u_0) \left(u'(x) (x - x_0)\right) \left(\frac{u''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2\right) \\ &+ N'(u_0) \frac{u'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{u^{(4)}(u_0)}{3!} (x - x_0)^3 &= \frac{1}{3!} u_1^3(x) N'''(u_0) + u_1(x) u_2(x) N''(u_0) + u_3(x) N'(u_0) \\ &= A_3 \end{aligned} \quad (2.55)$$

integrando ambos miembros de (2.55) obtenemos

$$\frac{u^{(4)}(u_0)}{4!} (x - x_0)^4 = u_4(x) \quad (2.56)$$

En general, continuando con este proceso se obtiene

$$\frac{1}{(n-1)!} u^{(n)}(u_0) (x - x_0)^{n-1} = A_{n-1} \quad (2.57)$$

de tal manera que si integramos (2.57) se va a obtener

$$\frac{u^{(n)}(u_0)}{n!} (x - x_0)^n = u_n(x) \quad (2.58)$$

lo cual prueba la proposición.

A continuación resolveremos dos problemas de valor inicial para EDO mediante el método de la serie de Taylor. Más adelante, en el capítulo 3, estos mismos ejemplos serán resueltos usando el MDA, con lo cual verificaremos el resultado de la proposición estudiada en esta sección.

Ejemplo1: Consideremos el PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.59)$$

solución.

El método de la serie de Taylor escribe la solución  $y(x)$  del PVI en la forma

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (2.60)$$

Para determinar los valores de  $y^{(k)}(0)$  para  $k = 1, 2, \dots$ , seguimos el procedimiento dado en [21]

Remplazando  $x = 0$  en (2.59) tenemos que

$$y'(0) = 2(y(0)) - (y(0))^2 = 2(1) - 1 = 1$$

derivando (2.58)

$$y'' = 2y' - 2yy' \quad (2.61)$$

reemplazando  $x = 0$  en (2.61) obtenemos

$$y''(0) = 0$$

siguiendo con el proceso anterior tenemos que:

$$y'''(0) = -2, y^{(4)}(0) = 0, y^{(5)}(0) = 16, y^{(6)}(0) = 0, y^{(7)} = -272, \dots$$

de tal manera que

$$y(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad (2.62)$$

Es fácil comprobar analíticamente que la solución exacta del PVI (2.59) es

$$y(x) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \quad (2.63)$$

por lo cual, (2.62) corresponde a la expansión en serie de Taylor de la función

$$y(x) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \text{ alrededor de } x_0 = 0.$$

**Ejemplo 2.** Consideremos el PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.64)$$

solución

El método de la serie de Taylor escribe la solución del PVI (2.64) en la forma

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} + \dots$$

considerando  $xy \neq 1$ , escribimos la ecuación (2.64) de la forma:

$$(1 - xy)y' = y^2 \quad (2.65)$$

calculamos ahora los valores de  $y^{(k)}(0)$  con  $k = 1, 2, \dots$ , siguiendo el procedimiento del ejemplo 1.

reemplazando  $x = 0$  en (2.65), tenemos que

$$y'(0) = 1$$

derivando (2.65), tenemos

$$(1 - xy)y'' - (3y + xy')y' = 0 \quad (2.66)$$

de donde

$$y''(0) = 3$$

derivando (2.66)

$$(1 - xy)y''' - (4y + 3xy')y'' - 4(y')^2 = 0 \quad (2.67)$$

de donde

$$y'''(0) = 16$$

derivando (2.67), tenemos

$$(1 - xy)y^{(4)} - (5y + 4xy')y''' - (15y' + 3xy'')y'' = 0 \quad (2.68)$$

de donde

$$y^{(4)}(0) = 125$$

con lo cual tenemos que:

$$y(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{125}{4!}x^4 + \dots$$

en el capítulo 3, verificaremos que los resultados obtenidos en los anteriores ejemplos, son los mismos que se obtienen con el MDA. (ver ejemplos 4 y 5)

## 3.APLICACIONES DEL MDA

A continuación aplicaremos el Método de Descomposición de Adomian para resolver algunos problemas funcionales lineales y no lineales .

### 3.1. Solución de ecuaciones algebraicas

**Ejemplo 1:**

Encontrar mediante el Método de Descomposición de Adomian la aproximación a una de las raíces de la ecuación:

$$x^3 - 5x + 2 = 0 \tag{3.1}$$

**solución:**

Escribiendo la ecuación (3.1) en la forma

$$-5x = -2 - x^3 \tag{3.2}$$

tenemos que el operador lineal  $L$  viene dado por:

$$L(\cdot) = -5(\cdot)$$

y el operador inverso  $L^{-1}$  viene dado por:

$$L^{-1}(\cdot) = -\frac{1}{5}(\cdot)$$

La parte no lineal de (3.2) es  $N(x) = x^3$

aplicando MDA, multiplicamos ambos miembros de (3.2) por  $L^{-1}$  y obtenemos:

$$x = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}x^3 = 0 \quad (3.3)$$

reemplazando (2.5) y (2.6) en (3.3) tenemos:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}$$

de donde se plantea la fórmula de recurrencia:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{2}{5} \\ x_n = \frac{1}{5}A_{n-1} \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

los Polinomios de Adomian para la función no lineal  $N(x) = x^3$  vienen dados por:

$$A_0 = x_0^3$$

$$A_1 = 3x_0^2x_1$$

$$A_2 = 3x_0^2x_2 + 3x_1^2x_0$$

$$A_3 = 3x_0^2x_3 + 6x_0x_1x_2 + x_1^3 \dots$$

Así:

$$x_0 = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$x_1 = \frac{1}{5}A_0 = 0,0128$$

$$x_2 = \frac{1}{5}A_1 = 0,0012288$$

por lo cual:

$$S_2 = x_0 + x_1 + x_2 = 0,4 + 0,0128 + 0,0012288 = 0,4140288$$

donde 0,4140288 sería una aproximación a una de las raíces

Para realizar los cálculos correspondientes, usamos el siguiente archivo .m , el cual se puede utilizar para ecuaciones de la forma  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

```

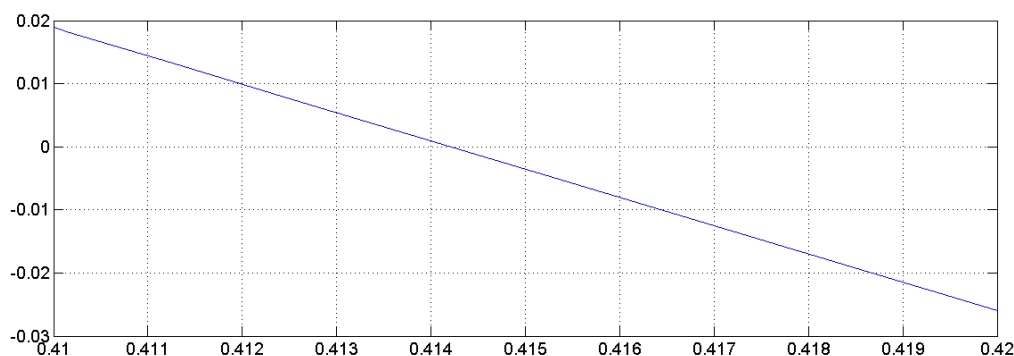
function [X,S]=ejemplo1(a,b,c,d)
%Este programa resuelve una ecuación de la forma ax^3+bx^2+
  cx+d=0
%mediante MDA
x0=-d/c;
A0=x0^2;B0=x0^3;
x1=(-b/c)*A0-(a/c)*B0;
A1=2*x0*x1;B1=3*(x0^2)*x1;
x2=(-b/c)*A1-(a/c)*B1;
A2=x1^2+2*x0*x2;B2=3*(x0^2)*x2+3*(x1^2)*x0;
x3=(-b/c)*A2-(a/c)*B2;
A3=2*x1*x2+2*x0*x3;B3=x1^3+3*(x0^2)*x3+6*x0*x1*x2;
x4=(-b/c)*A3-(a/c)*B3;
A4=x2^2+2*x1*x3+2*x0*x4;B4=3*(x0^2)*x4+3*(x1^2)*x2+3*(x2^2)*x0
  +6*x0*x1*x3;
x5=(-b/c)*A4-(a/c)*B4;
A5=2*x2*x3+2*x1*x4+2*x0*x5;
B5=3*(x0^2)*x5+3*(x1^2)*x3+3*(x2^2)*x1+6*x0*x1*x4+6*x0*x2*x3;
x6=(-b/c)*A5-(a/c)*B5;
A6=x3^2+2*x0*x6+2*x2*x4+2*x1*x5;
B6=x2^3+3*(x0^2)*x6+3*(x1^2)*x4+3*(x3^2)*x0+6*x0*x1*x5+...
  +6*x0*x2*x4+6*x1*x2*x3;
x7=(-b/c)*A6-(a/c)*B6;
A7=2*x0*x7+2*x3*x4+2*x2*x5+2*x1*x6;
B7=3*(x0^2)*x7+3*(x1^2)*x5+3*(x2^2)*x3+3*(x3^2)*x1+6*x0*x1*x6
  +...
  +6*x0*x2*x5+6*x0*x3*x4;
x8=(-b/c)*A7-(a/c)*B7;
X=[x0 x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8]';
s=0;
for k=1:length(X)
s=s+X(k);
S(k)=s;
end
S=S';

```

Al ejecutar el programa anterior, para los valores de entrada  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = -5$  y  $d = 2$ , obtenemos un vector  $X$  que contiene los primeros 9 términos de la serie solución dada por el MDA y un vector  $S$  que contiene las sumas parciales de dicha serie.

$X$	$S$
0,4	0,4
0,0128000000000000	0,4128000000000000
0,0012288000000000	0,4140288000000000
0,0001572864000000	0,4141860864000000
0,0000230686720000	0,4142091550720000
0,000003664143974	0,414212819215974
0,000000613321330	0,414213432537304
0,000000106542677	0,414213539079981
0,000000018591862	0,414213557671843

el MDA nos proporciona el valor de  $S_8 = 0,414213557671843$  como aproximación a una de las raíces de la ecuación. En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función  $f(x) = x^3 - 5x + 2$  en el intervalo  $[0,41, 0,42]$ , donde se evidencia que la aproximación obtenida está cerca del valor exacto de la raíz.



gráfica ejemplo 1

para comparar el resultado obtenido con el MDA aplicamos el método de *Newton-Raphson*, para lo cual se tomó  $x_0 = 0$  y  $tol = 5 \times 10^{-5}$  y se obtuvo la aproximación  $\tilde{x} = 0,4142135624$ .

El error absoluto entre las dos aproximaciones es  $E = |S_8 - \tilde{x}| = 4.7282 \times 10^{-9}$ , por lo que podemos afirmar que el valor obtenido con el MDA es muy aproximado a la raíz exacta de la ecuación en el intervalo  $[0,41, 0,42]$  y que la serie solución presenta una convergencia rápida hacia dicha raíz.

### Ejemplo 2.

Encontrar mediante el Método de Descomposición de Adomian la aproximación a una de las raíces de la ecuación:

$$x^3 - x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (3.5)$$

Solución.

la ecuación (3.5) tiene dos términos no lineales

$$N_1(x) = x^2 \quad \text{y} \quad N_2(x) = x^3,$$

tenemos que el operador lineal  $L$  viene dado por:

$$L(\cdot) = -5(\cdot)$$

y el operador inverso  $L^{-1}$  viene dado por:

$$L^{-1}(\cdot) = -\frac{1}{5}(\cdot)$$

así que debemos hallar los polinomios de Adomian  $A_n$  para  $N_1(x) = x^2$  y los polinomios de Adomian  $B_n$  para  $N_2(x) = x^3$

por tanto tenemos:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1} + \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}$$

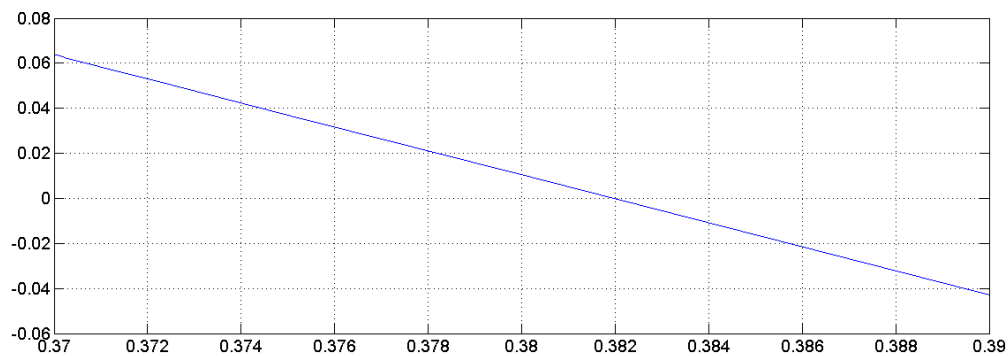
donde:

$$\begin{array}{ll}
 A_0 = x_0^2 & B_0 = x_0^3 \\
 A_1 = 2x_0x_1 & B_1 = 3x_0^2x_1 \\
 A_2 = x_1^2 + 2x_0x_2 & B_2 = 3x_0^2x_2 + 3x_1^2x_0 \\
 A_3 = 2x_0x_3 + 2x_1x_2 & B_3 = 3x_0^2x_3 + 6x_0x_1x_2 + x_1^3 \\
 \vdots & \vdots
 \end{array}$$

Nuevamente usamos el archivo .m para realizar los cálculos correspondientes con los datos de entrada  $a = 1$  ,  $b = -1$  ,  $c = -5$  y  $d = 2$ , obteniendo los siguientes resultados:

$X$	$S$
0,4	0,4
-0,0192000000000000	0,3808000000000000
0,0012288000000000	0,3820288000000000
-0,0000638976000000	0,3819649024000000
0,0000007864320000	0,3819656888320000
0,0000003800039420	0,3819660688359420
-0,0000000633373460	0,3819660054985970
0,0000000060646010	0,3819660115631980
-0,0000000002783860	0,3819660112848120

el MDA nos arroja el valor de  $S_8 = 0,381966011284812$  como aproximación a una de la raíces de la ecuación. En la siguiente gráfica se evidencia que el valor obtenido por el MDA está cerca del valor exacto de dicha raíz.



gráfica ejemplo 2

al aplicar el método de *Newton-Raphson* tomando  $x_0 = 0$  y  $tol = 5 \times 10^{-5}$ , obtenemos la aproximación  $\tilde{x} = 0,3819660113$ .

El error absoluto entre las dos aproximaciones es  $E = |S_8 - \tilde{x}| = 1.5188 \times 10^{-11}$ , con lo cual podemos afirmar que el valor obtenido con el MDA es una muy buena aproximación a la raíz exacta de la ecuación en el intervalo  $[0,37, 0,39]$  y que la serie solución presenta una convergencia rápida a dicha raíz.

### Ejemplo 3

Encontrar mediante el Método de Descomposición de Adomian la aproximación a una de las raíces de la ecuación:

$$x = k + e^{-x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3.6)$$

con  $k \in \mathbb{R}$

Solución.

En esta ecuación la parte no lineal viene dada por

$$N(x) = e^{-x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3.7)$$

por lo tanto, al aplicar el MDA la ecuación (3.6) nos queda de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = k + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1} \quad (3.8)$$

de (3.8) obtenemos la fórmula recurrente

$$\begin{cases} x_0 = k \\ x_k = A_{k-1} \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.9)$$

los polinomios de Adomian para la función  $N(x) = e^{-x} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  vienen dados por

$$A_0 = e^{-x_0} \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$$A_1 = x_1 \left( \frac{1}{2} e^{-x_0} \cos\left(\frac{x_0}{2}\right) - e^{-x} \sin\left(\frac{x_0}{2}\right) \right)$$

$$A_2 = x_2 \left( \frac{1}{2} e^{-x_0} \cos\left(\frac{x_0}{2}\right) - e^{-x} \sin\left(\frac{x_0}{2}\right) \right) + \frac{1}{2!} x_1^2 \left( \frac{3}{4} e^{-x_0} \sin\left(\frac{x_0}{2}\right) - e^{-x} \sin\left(\frac{x_0}{2}\right) \right)$$

⋮

para determinar los 5 primeros términos de la solución en serie dada por el MDA usamos el siguiente archivo .m

```

function [X,S]= ejemplo3(k)
  %Este programa calcula los primeros valores de los t\
  % términos de la serie
  %soluci\ón dada por el MDA para la ecuaci\ón  $x=k+exp(-x)$ 
  %  $sin(x/2)$ 
  x0=k;
  A0=exp(-x0)*sin(x0/2);
  x1=A0;
  A1=x1*((1/2)*exp(-x0)*cos(x0/2)-exp(-x0)*sin(x0/2));
  x2=A1;
  A2=x2*((1/2)*exp(-x0)*cos(x0/2)-exp(-x0)*sin(x0/2))+...
  (1/2)*(x1^2)*((3/4)*exp(-x0)*sin(x0/2)-exp(-x0)*cos(x0/2));
  x3=A2;
  A3=x3*((1/2)*exp(-x0)*cos(x0/2)-exp(-x0)*sin(x0/2))+...
  x1*x2*((3/4)*exp(-x0)*sin(x0/2)-exp(-x0)*cos(x0/2))+...
  (1/6)*(x1^3)*((11/8)*exp(-x0)*cos(x0/2)-(1/4)*exp(-x0)*sin(x0
  /2));
  x4=A3;
  A4=x4*((1/2)*exp(-x0)*cos(x0/2)-exp(-x0)*sin(x0/2))+...
  ((1/2)*x2^2+x1*x3)*((3/4)*exp(-x0)*sin(x0/2)-exp(-x0)*cos(x0
  /2))+...
  (1/2)*(x1^2)*x2*((11/8)*exp(-x0)*cos(x0/2)-(1/4)*exp(-x0)*sin(
  x0/2))+...
  (1/24)*(x1^4)*((-3/2)*exp(-x0)*cos(x0/2)-(7/16)*exp(-x0)*sin(
  x0/2));
  x5=A4;
  s=0;
  X=[x0 x1 x2 x3 x4 x5]';
  for k=1:6;
  s=s+X(k);
  S(k)=s;
  end
  S=S';

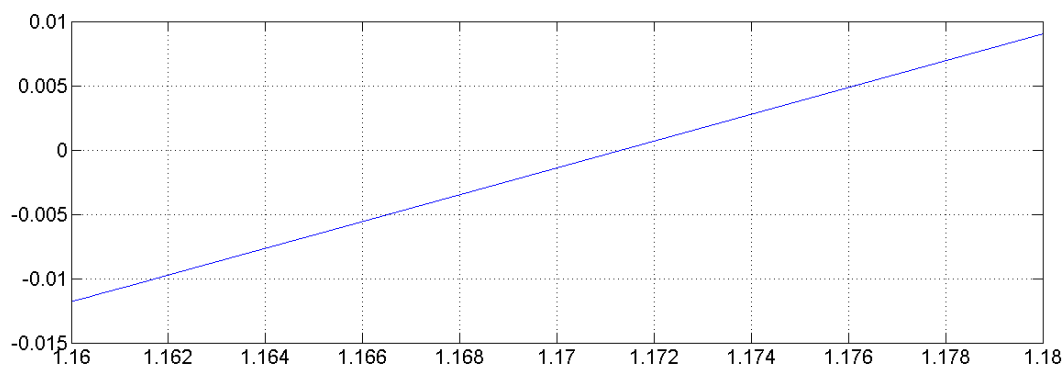
```

al resolver la ecuación (3.6) con  $k = 1$ , obtenemos los siguientes resultados.

$X$	$S$
1,0000000000000000	1,0000000000000000
0,176370799225032	1,176370799225032
-0,002636480303185	1,173734318921847
-0,002924531838117	1,170809787083730
0,000497918330851	1,171307705414581
0,000051158627115	1,171358864041696

luego, el MDA nos proporciona el valor  $S_5 = 1,171358864041696$  como aproximación a una de las raíces de la ecuación.

la siguiente figura, nos muestra la gráfica de la función  $y = f(x) = x - 1 - e^{-x} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  en el intervalo  $[1,16, 1,18]$ , lo cual evidencia que la aproximación obtenida está cerca del valor exacto de la raíz de la ecuación en dicho intervalo.



gráfica ejemplo 3

para comparar el resultado obtenido con el MDA, se aplicó el método numérico de Newton-Raphson, tomando  $x_0 = 1$  y  $\text{tol } 5 \times 10^{-5}$ , con lo que se obtuvo la aproximación:  $\tilde{x} = 1,1713285128$ .

El error absoluto entre ambas aproximaciones es  $E = |S_5 - \tilde{x}| = 3.0351 \times 10^{-5}$ , por lo que podemos afirmar que la serie solución dada por el MDA presenta una convergencia rápida a dicha raíz.

### 3.2. Solución de ecuaciones diferenciales con problema de valor inicial

#### Ejemplo 4

Aplicamos el MDA al problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} = 2y - y^2, \quad \text{con} \quad y(0) = 1 \quad (3.10)$$

Solución.

Tenemos:

$$L(\cdot) = \frac{d}{dx}(\cdot)$$

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot) ds$$

La ecuación (3.10) escrita en forma de operador nos queda:

$$Ly = 2y - y^2 \quad (3.11)$$

Aplicando  $L^{-1}$  a ambos lados de la ecuación (3.11), tenemos

$$y(x) = 1 + 2 \int_0^x y(s) ds - \int_0^x y^2(s) ds \quad (3.12)$$

Luego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = 1 + 2 \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} y_n(s) ds - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) ds \quad (3.13)$$

de (3.13) obtenemos el siguiente esquema recurrente:

$$\begin{cases} y_0(x) = 1 \\ y_k(x) = 2 \int_0^x y_{k-1}(s) ds - \int_0^x A_{k-1}(s) ds \end{cases} \quad (3.14)$$

Para calcular los 9 primeros términos de la serie solución usamos el siguiente archivo *.m*

```

function Y=ejemplo4(y0)
  %Este programa resuelve la ecuaci\on dy/dx=2y-y^2 usando MDA.
  syms x;
  A0=y0^2;
  y1=2*int(y0,0,x)-int(A0,0,x);
  A1=2*y0*y1;
  y2=2*int(y1,0,x)-int(A1,0,x);
  A2=y1^2+2*y0*y2;
  y3=2*int(y2,0,x)-int(A2,0,x);
  A3=2*y0*y3+2*y1*y2;
  y4=2*int(y3,0,x)-int(A3,0,x);
  A4=2*y2^2+2*y1*y3+2*y0*y4;
  y5=2*int(y4,0,x)-int(A4,0,x);
  A5=2*y2*y3+2*y1*y4+2*y0*y5;
  y6=2*int(y5,0,x)-int(A5,0,x);
  A6=2*y0*y6+y3^2+2*y2*y4+2*y1*y5;
  y7=2*int(y6,0,x)-int(A6,0,x);
  A7=2*y7+2*y3*y4+2*y2*y5*2*y1*y6;
  y8=2*int(y7,0,x)-int(A7,0,x);
  Y=y0+y1+y2+y3+y4+y5+y6+y7+y8;

```

Con el que obtenemos la aproximación

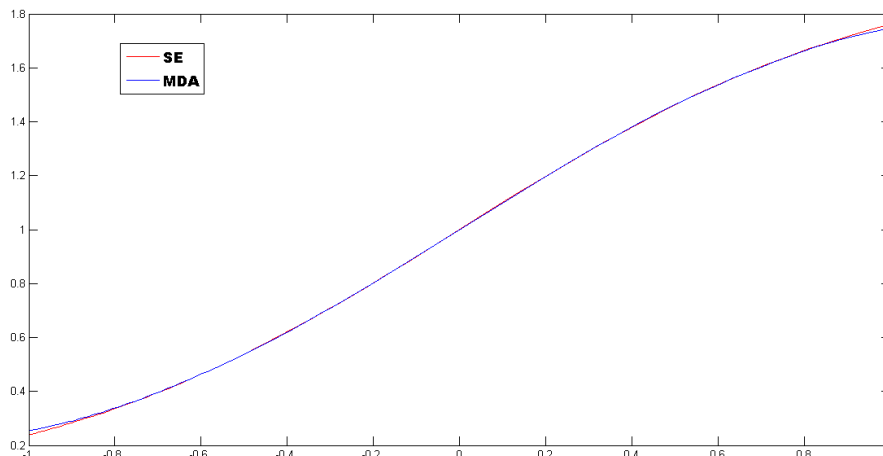
$$y(x) \approx -\frac{17}{315}x^7 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x + 1 \quad (3.15)$$

que coincide con el resultado obtenido en el ejemplo de la sección 2.3 , ecuación (2.42)

La solución exacta del PVI (3.10) es:

$$y = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \quad (3.16)$$

En la siguiente figura se muestran las gráficas de la aproximación encontrada con el MDA (3.15) y de la solución exacta (3.16)



gráfica ejemplo 4

podemos observar que la aproximación obtenida con el MDA es muy buena para valores cercanos al valor inicial  $y(0) = 1$ , teniendo en cuenta que se calcularon pocos términos de la serie.

### Ejemplo 5:

Apliquemos el MDA al PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

solución

Considerando  $xy \neq 1$ , escribimos la ecuación (3.17) en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = xy' + y^2 \quad (3.18)$$

por lo tanto  $L(\cdot) = \frac{dy}{dx}$  y  $L^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot)$

aplicando en ambos miembros de (3.18) el operador inverso, tenemos

$$y(x) = 1 + \int_0^x s y y' ds + \int_0^x y^2 ds \quad (3.19)$$

al aplicar el MDA, escribimos (3.19) en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = 1 + \int_0^x s \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) ds + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) ds \quad (3.20)$$

donde  $A_n$  y  $B_n$  son los polinomios de Adomian para los términos no lineales  $y y'$  y  $y^2$  respectivamente.

Los primeros polinomios de Adomian vienen dados por

$$\begin{array}{ll} A_0 = y_0 y_0' & B_0 = y_0^2 \\ A_1 = y_0 y_1' + y_1 y_0' & B_1 = 2y_0 y_1 \\ A_2 = y_0 y_2' + y_1 y_1' + y_2 y_0' & B_2 = 2y_0 y_2 + y_1^2 \\ A_3 = y_0 y_3' + y_1 y_2' + y_2 y_1' + y_3 y_0' & B_3 = 2y_1 y_2 + 2y_0 y_3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

de (3.20) obtenemos el siguiente esquema recurrente

$$\begin{cases} y_0(x) = 1 \\ y_k(x) = \int_0^x s A_{k-1}(s) ds + \int_0^x B_{k-1}(s) ds \end{cases} \quad (3.21)$$

con el siguiente archivo .m, calculamos los 5 primeros términos de la serie solución dada por MDA

```
function y=ejemplo5(y0)
%Este programa calcula los primeros valores de los t\`erminos
de la serie
%soluci\`on dada por el MDA para la ecuaci\`on dy/dx=y^2/(1-xy)
)
syms x
A0=y0*diff(y0,x);
B0=y0^2;
y1=int(x*A0,0,x)+int(B0,0,x);
A1=y0*diff(y1,x)+y1*diff(y0,x);
B1=2*y0*y1;
y2=int(x*A1,0,x)+int(B1,0,x);
```

```

A2=y0*diff(y2,x)+y1*diff(y1,x)+y2*diff(y0,x);
B2=2*y0*y2+y1^2;
y3=int(x*A2,0,x)+int(B2,0,x);
A3=y0*diff(y3,x)+y1*diff(y2,x)+y2*diff(y1,x)+y3*diff(y0,x);
B3=2*y1*y2+2*y0*y3;
y4=int(x*A3,0,x)+int(B3,0,x);
y=y0+y1+y2+y3+y4;

```

con el que obtenemos la aproximación a la solución

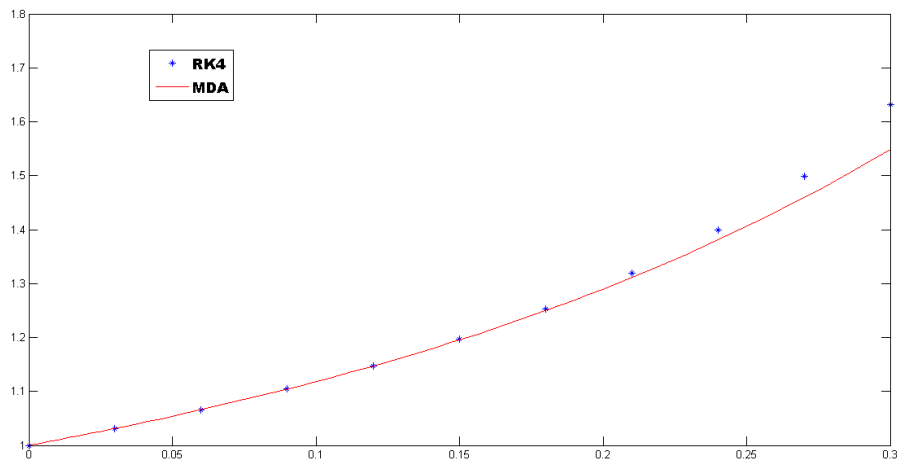
$$y(x) \approx 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{125}{24}x^4$$

recordemos que estos fueron precisamente los 5 primeros términos que obtuvimos con el método de la serie de Taylor en el ejemplo 2 de la sección (2.3)

comparemos la aproximación obtenida por el MDA con la solución numérica dada por el método de *Runge-Kutta* en el intervalo  $[0,0.3]$  y tamaño de paso  $h = 0,03$

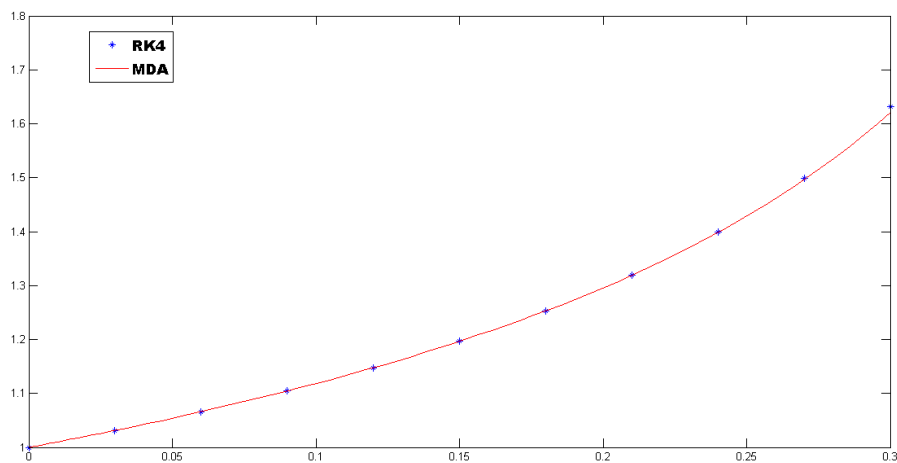
0	1
0,03	1,031426502641069
0,06	1,066053164404095
0,09	1,104515048485491
0,12	1,147652197831125
0,15	1,196608517296388
0,18	1,252999025295565
0,21	1,319212118780431
0,24	1,399005410267236
0,27	1,498829736832092
0,3	1,631346228504565

en la siguiente figura se muestran las gráficas de ambas aproximaciones



gráfica 1 ejemplo 5

observamos que las soluciones no son muy aproximadas en todos los valores de la discretización dada por la solución numérica. Sin embargo, mejoraremos la situación escogiendo 11 términos en la serie solución dada por el MDA, como se evidencia en la siguiente figura.



gráfica 2 ejemplo 5

**Ejemplo 6**

Apliquemos el MDA al problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} = e^{y^2}, \quad \text{con} \quad y(1) = 0 \quad (3.22)$$

solución

Es claro que la solución del PVI (3.22) no se puede hallar analíticamente. Primero resolvemos el PVI usando MDA y luego comparamos con la solución numérica obtenida al aplicar el método de *Runge-Kutta* de orden 4.

Tenemos:

$$L(\cdot) = \frac{dy}{dx}$$

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot) ds$$

así llegamos a la expresión:

$$y(x) = \int_1^x e^{y^2(s)} ds \quad (3.23)$$

Luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = \int \sum_{n=0}^{\infty} A_n ds \quad (3.24)$$

Los 4 primeros polinomios de Adomian para la función no lineal  $N(y) = e^{y^2}$  con  $y_0 = 0$  son:

$$A_0 = N(y_0) = N(0) = 1.$$

$$A_1 = y_1 N'(0) = 0$$

$$A_2 = y_2 N'(0) + \frac{1}{2!} y_1^2 N''(0) = y_1^2$$

$$A_3 = y_3 N'(0) + y_1 y_2 N''(0) + \frac{1}{3!} y_1^3 N'''(0) = 2y_1 y_2$$

$$A_4 = y_4 N'(0) + \left( \frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) N''(0) + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 N'''(0) + \frac{1}{4!} y_1^4 N^{(4)}(0) = y_2^2 + 2y_1 y_3$$

Para los cálculos, usamos el siguiente archivo *.m*

```
function Y=ejemplo6(y0)
%Resuelve la ecuaci\on diferencial dy/dx=exp(y^2) usando MDA
syms x;
A0=exp(y0^2);
y1=int(A0,1,x);
A1=0;
y2=int(A1,1,x);
A2=y1^2;
y3=int(A2,1,x);
A3=2*y1*y2;
y4=int(A3,1,x);
A4=y2^2+2*y1*y3;
y5=int(A4,1,x);
Y=y1+y2+y3+y4+y5;
```

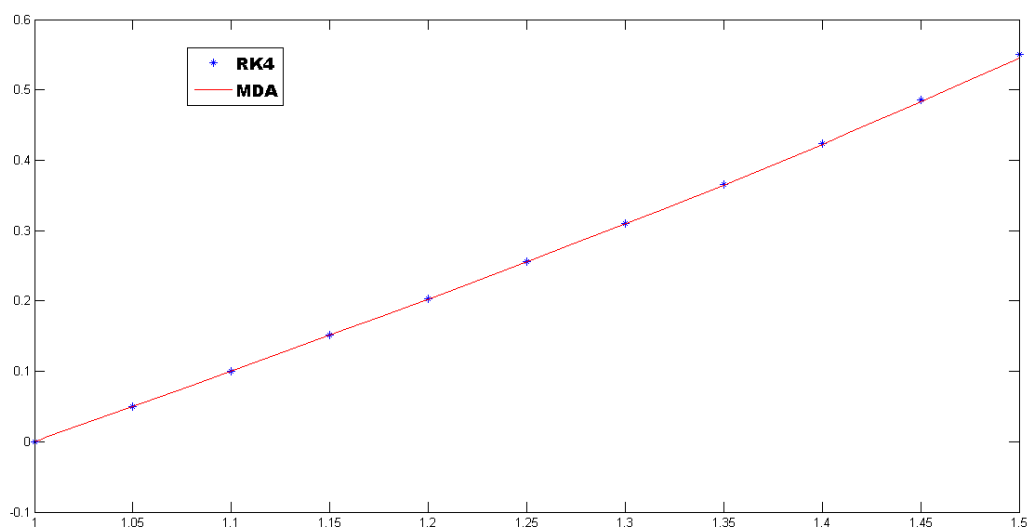
La aproximación obtenida de la solución del PVI (3.22) es:

$$y(x) \approx \frac{2}{15}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{22}{15}.$$

Usando el método numérico *Runge-Kutta* de orden 4, en el intervalo [1,1.5] con tamaño de paso  $h = 0,05$  nos arrojó la siguiente solución numérica:

1	0
1,05	0,050041738434859
1,1	0,100335684482427
1,15	0,151143067200703
1,2	0,202744012280262
1,25	0,255449282455201
1,3	0,309615258450090
1,35	0,365664227270597
1,4	0,424113319890580
1,45	0,485617842427670
1,5	0,551039478702561

En la siguiente figura se muestran las dos soluciones , donde se puede evidenciar el buen resultado dado por el MDA



gráfica ejemplo 6

### Ejemplo 7

Aplicamos el MDA al problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) + e^{-y(x)} \quad ; \quad y(x_0) = y_0 \quad (3.25)$$

donde  $f$  es una función continua definida en un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  y  $x_0 \in I$

Solución.

Escribiendo (3.25) en forma de operador tenemos

$$L(y) = f(x) + e^{-y} \quad (3.26)$$

donde  $L(\cdot) = \frac{d}{dy}(\cdot)$  y el operador inverso viene dado por  $L^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot) ds$   
 aplicando el operador inverso a ambos lados de (3.26) se tiene que

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s) ds + \int_{x_0}^x e^{-y(s)} ds \quad (3.27)$$

Por el MDA escribimos (3.27) en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s) ds + \int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) ds \quad (3.28)$$

con el fin de simplificar la escritura de las fórmulas que utilizaremos en adelante, definamos

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s) ds \quad (3.29)$$

de tal manera que (3.28) nos queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = F(x) + \int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) ds \quad (3.30)$$

de (3.30) se plantea la siguiente fórmula de recurrencia

$$\begin{cases} y_0(x) = F(x) \\ y_{k+1}(x) = \int_{x_0}^x A_k(s) ds \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.31)$$

Luego, aplicando el esquema iterativo (3.31) tenemos

$$A_0(x) = N(y_0(x)) = e^{-F(x)}$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_{x_0}^x A_0(s) ds \\ &= \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1(x) &= y_1(x) N'(y_0(x)) \\ &= -e^{F(x)} \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \int_{x_0}^x A_1(s) ds \\
&= - \int_{x_0}^x e^{-F(s)} \left( \int_{x_0}^s e^{-F(u)} du \right) ds \\
&= - \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^s e^{-F(s)} e^{-F(u)} du \right) ds \\
&\qquad\qquad\qquad \text{Teorema 1 (Apéndice)} \\
&= -\frac{1}{2!} \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2(x) &= y_2(x) N'(y_0(x)) + \frac{1}{2} y_1^2(x) N''(y_0(x)) \\
&= -\frac{1}{2!} \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right)^2 (-e^{-F(x)}) + \frac{1}{2} \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right)^2 (e^{-F(x)}) \\
&= \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right)^2 (e^{-F(x)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_3(x) &= \int_{x_0}^x A_2(s) ds \\
&= \int_{x_0}^x e^{-F(s)} \left( \int_{x_0}^s e^{-F(u)} du \right)^2 ds \\
&\qquad\qquad\qquad \text{Teorema 1 (Apéndice)} \\
&= \frac{1}{3} \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3(x) &= y_3(x) N'(y_0(x)) + y_1(x) y_2(x) N''(y_0(x)) + \frac{1}{3!} y_1^3(x) N'''(y_0(x)) \\
&= \frac{1}{3} \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right)^3 (-e^{-F(x)}) + \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right) \left( -\frac{1}{2} \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right)^2 \right) e^{-F(x)} \\
&\quad + \frac{1}{3!} \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right)^3 (-e^{-F(x)}) \\
&= - \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right)^3 e^{-F(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_4(x) &= - \int_{x_0}^x e^{-F(s)} \left( \int_{x_0}^s e^{-F(u)} du \right)^3 ds \\
&\quad \text{Teorema 1 (Apéndice)} \\
&= -\frac{1}{4} \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right)^4
\end{aligned}$$

En general, se obtiene

$$y_k(x) = (-1)^{k+1} \left( \frac{1}{k} \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right)^k \right) \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.32)$$

de tal manera que la solución exacta del PVI (3.25) viene dada por

$$y(x) = F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left( \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right)^k \quad (3.33)$$

recordemos que  $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$  por tanto de (3.33) se tiene:

$$y(x) = F(x) + \ln \left( 1 + \int_{x_0}^x e^{-F(s)} ds \right) \quad (3.34)$$

Es de anotar que en este ejemplo hemos llegado a la solución exacta de PVI por

medio del método de Adomian y con ayuda del teorema 1 del Apéndice sobre integrales anidadas.

A continuación aplicaremos el resultado obtenido a dos ejemplos particulares para el PVI (3.25)

$$\text{a) } \frac{dy}{dx} = 5 + e^{-y} ; \quad y(1) = 1$$

en este problema tenemos que  $f(x) = 5$ , luego por (3.29) tenemos que

$$F(x) = 1 + \int_1^x 5 ds = -4 + 5x$$

Por lo tanto la solución del PVI es

$$y(x) = -4 + 5x + \ln \left( 1 + \frac{1}{5} e^{-1} - \frac{1}{5} e^{4-5x} \right) \quad \text{con } x > 1 - \frac{1}{5} \ln(5e + 1)$$

$$\text{b) } \frac{dy}{dx} = x + e^{-y} ; \quad y(0) = 0$$

$$F(x) = 0 + \int_0^x s ds = \frac{1}{2} x^2$$

luego la solución del PVI viene dada por

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 + \ln \left( 1 + \int_0^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds \right)$$

$$\text{recordemos que la función } erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

por lo tanto,

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 + \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} erf(x) \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right) \quad \text{con } x > -1,2755.$$

### Ejemplo 8

Aplicaremos el MDA al problema de valor inicial.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2e^{-x} y^2 ; \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 1 \quad (3.35)$$

Solución.

La ecuación (3.35) la escribimos en la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{dy}{dx} + 2e^{-x}y^2 \quad (3.36)$$

En esta ecuación tenemos:

$$L(\cdot) = \frac{d^2}{dx^2}(\cdot)$$

el operador inverso:

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^t (\cdot) ds dt$$

aplicando el operador inverso a ambos lados de (3.36) tenemos:

$$\int_0^x \int_0^t \frac{d^2 y(s)}{dx^2} ds dt = - \int_0^x \int_0^t \frac{dy(s)}{dx} ds dt + \int_0^x \int_0^t 2e^{-x}y^2 ds dt \quad (3.37)$$

de donde obtenemos

$$y(x) = 1 + 2x - \int_0^x y(t) dt + \int_0^x \int_0^t 2e^{-x}y^2 ds dt \quad (3.38)$$

para aplicar el MDA, escribimos (3.38) en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = 1 + 2x - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) dt + \int_0^x \int_0^t 2e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) ds dt \quad (3.39)$$

de (3.39) se obtiene el siguiente esquema recurrente

$$\begin{cases} y_0(x) = 1 + x \\ y_k(x) = - \int_0^x y_{k-1}(t) dt + \int_0^x \int_0^t 2e^{-x} A_{k-1}(s) ds dt \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.40)$$

Para calcular los 3 primeros términos generados por la fórmula (3.40) usamos el siguiente archivo .m

```

function Z=ejemplo8(y0)
%El programa resuelve la ecuaci\ 'on d2y/dx2+dy/dx=2y^2 exp
(-x)
%mediante el m\ 'etodo de Adomian.
syms x;
syms s;
A0=y0^2;
y1=simplify(-int(y0,0,x)+int(int(2*exp(-x)*A0,0,x),0,x));
A1=2*y0*y1;
y2=simplify(-int(y1,0,x)+int(int(2*exp(-x)*A1,0,x),0,x));
Y=simplify(y0+y1+y2);

```

Los resultados obtenidos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= 1 + 2x \\
 y_1(x) &= 25x + 66e^{-x} + 40xe^{-x} + 8x^2e^{-x} - x^2 - 66 \\
 y_2(x) &= 134x - 14e^{-x} + 418e^{-2x} + 268xe^{-x} + 420xe^{-2x} + 156x^2e^{-x} \\
 &\quad + 136x^2e^{-2x} - 8x^3e^{-x} + 16x^3e^{-2x} - \frac{25}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - 4
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

La aproximación obtenida es:

$$\begin{aligned}
 y(x) &\approx 161x + 52e^{-x} + 418e^{-2x} + 308xe^{-x} + 420xe^{-2x} + 164x^2e^{-x} \\
 &\quad + 136x^2e^{-2x} - 8x^3e^{-x} + 16x^3e^{-2x} - \frac{27}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - 4
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

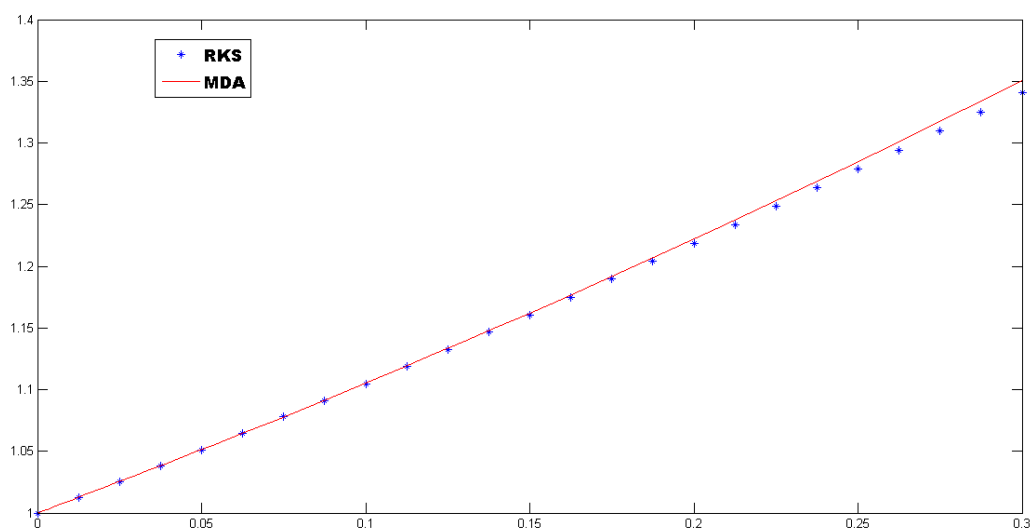
Para comparar la aproximación (3.42), utilizamos el método numérico de *Runge-Kutta* para sistemas de ecuaciones diferenciales, para ello representamos la ecuación (3.35) mediante el sistema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} + z = 2e^{-x}y^2 \\ y(0) = 0, \quad z(0) = 1 \end{cases} \tag{3.43}$$

Se obtuvo la siguiente solución numérica en el intervalo  $[0,0.5]$  con tamaño de paso  $h = 0,0125$

0	0	1
1	0,0125	1,012578451540251
2	0,025	1,025315120523295
3	0,0375	1,038211997079572
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
37	0,4625	1,588039124034443
38	0,4750	1,608014197187796
39	0,4875	1,628240525830465
40	0,5	1,648721270367443

En la siguiente figura se representan las dos soluciones, donde se puede evidenciar que con pocos términos de la serie, dada por el MDA, obtenemos una buena aproximación a la solución del PVI (3.35) en el intervalo  $[0,0.5]$



gráfica ejemplo 8

**Ejemplo 9**

Apliquemos el MDA al sistema de ecuaciones diferenciales acoplado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - ay(t) = f(t) \\ \frac{dy}{dt} + ax(t) = 0 \\ x(0) = \alpha, y(0) = \beta \end{cases} \quad (3.44)$$

con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

Solución.

Para este sistema tenemos que  $L(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot)$

y el operador inverso es  $L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) ds$ ,

de tal manera que (3.44) nos queda de la forma:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + \int_0^t f(s) ds + a \int_0^t y(s) ds \\ y(t) = \beta - a \int_0^t x(s) ds \end{cases} \quad (3.45)$$

De donde obtenemos los siguientes esquemas iterativos

$$\begin{cases} x_0(t) = \alpha + \int_0^t f(s) ds \\ x_k(t) = a \int_0^t y_{k-1}(s) ds \text{ para } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.46)$$

y

$$\begin{cases} y_0(t) = \beta \\ y_k(t) = -a \int_0^t x_{k-1}(s) ds \end{cases} \quad (3.47)$$

combinando los esquemas (3.46) y (3.47) obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a \int_0^t y_0(s) ds \\ &= a \int_0^t \beta ds \\ &= \beta at \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -a \int_0^t x_0(s) ds \\ &= -a \int_0^t \left( \alpha + \int_0^s f(u) du \right) ds \\ &= -\alpha at - a \int_0^t \int_0^s f(u) dud s \\ &\quad \text{Teorema 2 (Apéndice)} \\ &= -\alpha at - \frac{a}{1!} \int_0^t (t-u) f(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= a \int_0^t y_1(s) ds \\ &= a \int_0^t \left( -\alpha s - \frac{a}{1!} \int_0^s (s-u) f(u) du \right) ds \\ &\quad \text{Teorema 2 (Apéndice)} \\ &= -\alpha a^2 \frac{t^2}{2!} - \frac{a^2}{2!} \int_0^t (t-u)^2 f(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= -a \int_0^t x_1(s) ds \\ &= -a \int_0^t a\beta s ds \\ &= -\beta a^2 \frac{t^2}{2!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3(t) &= a \int_0^t y_2(s) ds \\
 &= -\beta a^3 \frac{t^3}{3!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_3(t) &= -a \int_0^t x_2(s) ds \\
 &= -a \int_0^t \left( -a^2 \alpha \frac{s^2}{2!} - \frac{a^2}{2!} \int_0^s (s-u)^2 f(u) du \right) ds \\
 &= \alpha a^3 \frac{s^3}{3!} + \frac{a^3}{3!} \int_0^t (t-u)^3 f(u) du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_4(t) &= a \int_0^t y_3(s) ds \\
 &= a \int_0^t \left( a^3 \alpha \frac{s^3}{3!} + \frac{a^3}{3!} \int_0^s (s-u)^3 f(u) du \right) ds \\
 &= \alpha a^4 \frac{t^4}{4!} + \frac{a^4}{4!} \int_0^t (t-u)^4 f(u) du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_4(x) &= \int_0^t x_3(s) ds \\
 &= \beta a^4 \frac{t^4}{4!}
 \end{aligned}$$

Luego la serie solución para  $x(t)$  viene dada por

$$x(t) = \alpha + \int_0^t f(u) du + \beta at - \alpha a^2 \frac{t^2}{2!} - \frac{a^2}{2!} \int_0^t (t-u)^2 f(u) du \\ - \beta a^3 \frac{t^3}{3!} + \alpha a^4 \frac{t^4}{4!} + \frac{a^4}{4!} \int_0^t (t-u)^4 f(u) du + \dots \quad (3.48)$$

reorganizando los términos en (3.48) tenemos:

$$x(t) = \alpha \left( 1 - \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(at)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) \\ + \beta \left( (at) - \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{(at)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) \\ + \int_0^t \left( \frac{(a(t-u))^0}{0!} - \frac{(a(t-u))^2}{2!} + \frac{(a(t-u))^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(a(t-u))^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) f(u) du \quad (3.49)$$

por lo cual tenemos que

$$x(t) = \alpha \cos(at) + \beta \sin(at) + \int_0^t \cos(a(t-u)) f(u) du$$

es decir:

$$x(t) = \alpha \cos(at) + \beta \sin(at) + f(t) * \cos(at)$$

donde  $*$  representa la convolución.

De otra parte

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \beta - \alpha at - \frac{a}{1!} \int_0^t (t-u) f(u) du - \beta a^2 \frac{t^2}{2!} \\
 & + \alpha a^3 \frac{t^3}{3!} + \frac{a^3}{3!} \int_0^t (t-u)^3 f(u) du + \beta a^4 \frac{t^4}{4!} + \dots
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

reorganizando los términos en (3.50) tenemos:

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \beta \left( 1 - \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(at)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) \\
 & - \alpha \left( (at) - \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{(at)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) \\
 & - \int_0^t \left( \frac{a(t-u)}{1!} - \frac{(a(t-u))^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{(a(t-u))^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) f(u) du
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

por lo cual

$$y(t) = \beta \cos(at) - \alpha \sin(at) - \int_0^t \sin(a(t-u)) f(u) du$$

es decir:

$$y(t) = \beta \cos(at) - \alpha \sin(at) - f(t) * \sin(at)$$

hemos encontrado la solución exacta del PVI (3.34), la cual viene dada por

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \alpha \cos(at) + \beta \sin(at) + f(t) * \cos(at) \\
 y(t) &= \beta \cos(at) - \alpha \sin(at) - f(t) * \sin(at)
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

A continuación consideraremos dos ejemplos particulares para el PVI (3.44)

$$\mathbf{a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} - 2y(t) = t^2 \\ \frac{dy}{dt} + 2x(t) = 0 \\ x(0) = 1, y(0) = 1 \end{array} \right.$$

la solución de este sistema es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(2t) - \sin(2t) + \int_0^t u^2 \cos(2(t-u)) du \\ &= \cos(2t) + \frac{3}{4} \sin(2t) + \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos(2t) - \sin(2t) - \int_0^t u^2 \sin(2(t-u)) du \\ &= \frac{3}{4} \cos(2t) - \sin(2t) - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\mathbf{b)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2y}{dt^2} + a^2y(t) = \cos(t) \quad \text{con } a \neq 0 \\ y(0) = \alpha, y'(0) = \beta \end{array} \right.$$

Para  $a = \pm 1$ , tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2y}{dt^2} + y(t) = \cos(t) \\ y(0) = \alpha, y'(0) = \beta \end{array} \right.$$

que escrito en forma de un sistema de ecuaciones diferenciales nos queda

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y(t) = \cos(t) \\ \frac{dy}{dt} - x(t) = 0 \\ x(0) = \beta, y(0) = \alpha \end{cases}$$

cuya solución es:

$$x(t) = \left(\beta + \frac{t}{2}\right) \cos(t) - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \sin(t) + \frac{1}{2} \sin(t)$$

$$y(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) + \frac{1}{2}t \sin(t)$$

para  $a \neq \pm 1$ , el PVI nos queda en la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + ay(t) = \frac{1}{a} \cos(t) \\ \frac{dy}{dt} - ax(t) = 0 \\ x(0) = \frac{\beta}{a}, y(0) = \alpha \end{cases}$$

cuya solución viene dada por

$$x(t) = \frac{\beta}{a} \cos(at) - \left(\alpha + \frac{1}{1-a^2}\right) \sin(at) + \frac{1}{a(1-a^2)} \sin(t)$$

$$y(t) = \left(\alpha - \frac{1}{a^2-1}\right) \cos(at) + \frac{\beta}{a} \sin(at) + \frac{1}{a^2-1} \cos(t)$$

### 3.3. Aplicación del MDA a Ecuaciones Integrales

**Definición:** Una ecuación integral es una ecuación en la cual la función desconocida aparece bajo un signo integral.

La forma más estándar de este tipo de ecuaciones viene dada por

$$\varphi(x) y(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x, s) y(s) ds \quad (3.53)$$

donde  $y(x)$  es la función desconocida,  $\varphi(x)$ ,  $k(x, s)$  y  $f(x)$  son funciones conocidas,  $\lambda$  es un parámetro constante conocido,  $g(x)$  y  $h(x)$  son los límites de integración que pueden ser tanto variables, constantes o mixtos. La función  $k(x, s)$  recibe el nombre de núcleo de la ecuación integral (3.53)

La ecuación (3.53) es dice lineal, puesto que la función desconocida  $y(x)$  aparece en forma lineal en la ecuación integral, en otro caso la ecuación se denomina no lineal.

las siguientes ecuaciones no son lineales

$$\varphi(x) y(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x, s) (y(s))^2 ds$$

$$\varphi(x) y(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x, s) \sin(y(s)) ds$$

Dentro de las ecuaciones integrales distinguimos las siguientes

#### 1. Ecuación Integral de Fredholm (EIF)

En su forma más estándar viene dada por:

$$\varphi(x) y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, s) y(s) ds \quad (3.54)$$

con  $a \leq x$  y  $s \leq b$

Nótese que ambos límites son constantes.

· Si  $\varphi(x) = 0$ , la ecuación (3.54) queda de la forma:

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, s) y(s) ds = 0 \quad (3.55)$$

y se denomina EIF de primer tipo.

· Si  $\varphi(x) = 1$ , queda de la forma:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, s) y(s) ds \quad (3.56)$$

y se denomina EIF de segundo tipo.

· Si  $\varphi(x)$  no es 0 ni 1, se denomina EIF de tercer tipo.

Ejemplos

**a)**  $3x^2 + \int_0^1 (x - s)^2 y(s) ds = 0$  EIF de primer tipo

**b)**  $y(x) = -xe^x + 2 \int_1^2 xe^{-s} y(s) ds$  EIF de segundo tipo

## 2. Ecuación Integral de Volterra (EIV)

En su forma más estándar viene dada por:

$$\varphi(x) y(x) = f(x) + \int_a^x k(x, s) y(s) ds \quad (3.57)$$

notese que el límite superior de la integral es variable.

· Si  $\varphi(x) = 0$ , la ecuación (3.51) queda de la forma:

$$f(x) + \int_a^x k(x, s) y(s) ds = 0 \quad (3.58)$$

y se denomina EIV de primer tipo.

· Si  $\varphi(x) = 1$ , la ecuación (3.51) queda de la forma:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x k(x, s) y(s) ds \quad (3.59)$$

y se denomina EIV de segundo tipo.

· Si  $\varphi(x)$  no es 0 ni 1, se denomina EIF de tercer tipo.

Ejemplos:

a)  $2x \cos x - x + \int_0^x (x + s) y(s) ds = 0$  EIV de primer tipo.

b)  $y(x) = x + \int_0^x (s - x) y(s) ds$  EIV de segundo tipo.

A continuación se aplicará el MDA a dos ecuaciones integrales.

### Ejemplo 1.

Apliquemos el MDA a la EIV

$$y(x) = x + \int_0^x (s - x) y(s) ds \quad (3.60)$$

Solución

Al aplicar el MDA, la ecuación (3.60) la escribimos de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = x + \int_0^x (s - x) \sum_{n=0}^{\infty} y_n(s) ds \quad (3.61)$$

de (3.61) planteamos el esquema iterativo:

$$\begin{cases} y_0(x) = x \\ y_k(x) = \int_0^x (s-x) y_{k-1}(s) ds \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.62)$$

Utilizando el siguiente archivo .m calculamos los 6 primeros términos de la serie solución dada por el MDA

```
function y=ejemplo1ei(y0)
\%Este programa aplica el MDA a una ecuaci\{o\}n integral de la
forma
\%y(x)=f(x)+int(s-x)*y(s),s,0,x)
syms s
syms x
y1=int((s-x)*y0,s,0,x);
y1=subs(y1,x,s);
y2=int((s-x)*y1,s,0,x);
y2=subs(y2,x,s);
y3=int((s-x)*y2,s,0,x);
y3=subs(y3,x,s);
y4=int((s-x)*y3,s,0,x);
y4=subs(y4,x,s);
y5=int((s-x)*y4,s,0,x);
y5=subs(y5,x,s);
y=y0+y1+y2+y3+y4+y5;
y=subs(y,s,x);
```

de tal manera que

$$\begin{aligned} y(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \frac{x^{11}}{39916800} + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots \end{aligned} \quad (3.63)$$

procediendo en forma inductiva, se tiene que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x) \quad (3.64)$$

donde  $y(x) = \sin(x)$  es la solución exacta de la EIV (3.60).

### Ejemplo 2

Apliquemos el MDA a la ecuación integral

$$y(x) = 1 - \frac{x^6}{15} - \frac{x^4}{3} + 2 \int_0^x (x-s) y^2(s) ds \quad (3.65)$$

Solución

Aplicando el MDA en (3.65) tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = 1 - \frac{x^6}{15} - \frac{x^4}{3} + 22 \int_0^x (x-s) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) ds \quad (3.66)$$

de (3.66) planteamos el siguiente esquema iterativo:

$$\begin{cases} y_0(x) = 1 - \frac{x^6}{15} - \frac{x^4}{3} \\ y_k(x) = 22 \int_0^x (x-s) A_{k-1}(s) ds \end{cases} \quad (3.67)$$

los polinomios de Adomian para la función  $N(y) = y^2$  vienen dados por:

$$A_0 = y_0^2$$

$$A_1 = 2y_0y_1$$

$$A_2 = y_1^2 + 2y_0y_1$$

⋮

para determinar los términos de la serie solución del MDA usamos el siguiente archivo .m

```

function y=ejemplo2ei(y0)
\% Este programa resuelve mediante el MDA la ecuaci\ 'on integral
\ %y(x)=1-x\^6/15-x\^4/3+2 int((x-s)y\^2(s),s,0,x)
syms s
syms x
A0=y0\^2;
y1=2*int((x-s)*A0,s,0,x);
y1=subs(y1,x,s);
A1=2*y0*y1;
y2=2*int((x-s)*A1,s,0,x);
y2=subs(y2,x,s);
A2=y1\^2+2*y0*y2;
y3=2*int((x-s)*A2,s,0,x);
y3=subs(y3,x,s);
A3=2*y1*y2+2*y0*y3;
y4=2*int((x-s)*A3,s,0,x);
y4=subs(y4,x,s);
A4=y2\^2+2*y1*y3+2*y0*y4;
y5=2*int((x-s)*A4,s,0,x);
y5=subs(y5,x,s);
y=y0+y1+y2+y3+y4+y5;
y=subs(y,s,x);

```

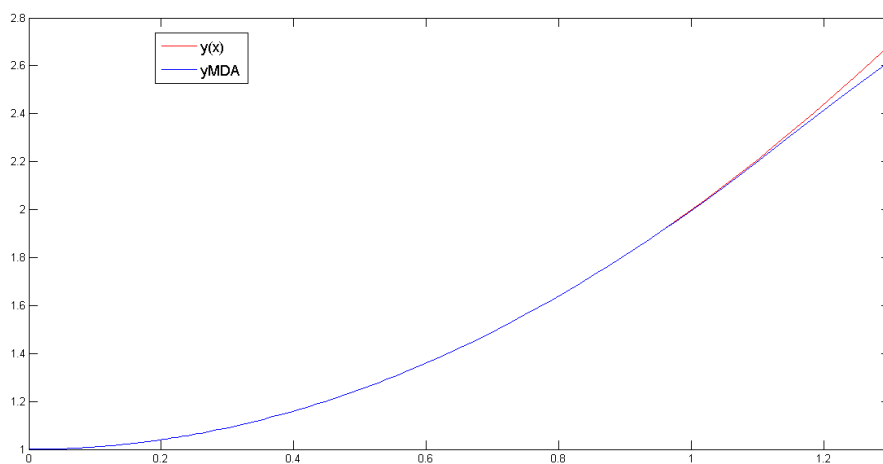
La solución exacta de la ecuación integral (3.65) es:

$$y(x) = x^2 + 1 \quad (3.68)$$

En la siguiente tabla se muestran algunos valores obtenidos de la solución exacta y de la solución dada por el MDA para los valores indicados de  $x$  y se calcula el error absoluto en cada caso.

$x$	$y(x)$	$y_{MDA}$	$ y(x) - y_{MDA} $
0,1	1,01	1,0099999999999998	$1,99840 \times 10^{-15}$
0,2	1,04	1,0399999999990268	$9,73199 \times 10^{-12}$
0,3	1,09	1,089999998721238	$1,27876 \times 10^{-9}$
0,4	1,16	1,159999958932004	$4,10679 \times 10^{-8}$
0,5	1,25	1,249999389634768	$6,10365 \times 10^{-7}$
0,6	1,36	1,359994423993117	$5,57600 \times 10^{-6}$
0,7	1,49	1,489963589960119	$3,64100 \times 10^{-5}$
0,8	1,64	1,639814166775971	$1,85833 \times 10^{-4}$
0,9	1,81	1,809215150811130	$7,84849 \times 10^{-4}$
1,0	2	1,997150388278014	$2,84961 \times 10^{-3}$

en la siguiente figura se muestran las gráficas de la solución exacta (3.68) y de la aproximación dada por el MDA



gráfica ejemplo 2

Con la información anterior, podemos afirmar que el MDA fue muy eficiente para encontrar una aproximación a la solución de la ecuación integral (3.65), para valores de  $x$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

Si queremos mejorar las aproximaciones para un intervalo de longitud mayor, se deben calcular más términos de la serie solución.

## 4. CONVERGENCIA DEL MDA

### Estudio de la Convergencia del Método de Descomposición de Adomian

En este capítulo estudiaremos algunas condiciones suficientes, desarrolladas por S. Saha Ray en [5], que garantizan la existencia de una única solución para la ecuación (2.2), como también la convergencia de la serie solución (2.4) dada por el MDA. De igual manera, se presenta una cota superior para el error de truncamiento  $\|u(t) - S_n\|$ , donde  $S_n$  es la n-ésima suma parcial de la serie (2.4).

Para ello, se considera el operador  $A$  de la ecuación (2.1) como un operador diferencial ordinario que involucra términos tanto lineales como no lineales. Además, se asume que los términos  $R$  y  $N$ , definidos en la ecuación (2.2), son localmente Lipschitzianos con constantes de Lipschitz  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente.

En el siguiente teorema se demuestra la existencia de una única solución para la ecuación (2.2)

**Teorema 4.1** La ecuación (2.2) tiene única solución cuando  $0 < \alpha < 1$ , donde  $\alpha = \frac{(L_1 + L_2)t^k}{k!}$ .

Prueba.

Sea  $H$  el espacio de Banach para todas las funciones continuas en el intervalo  $I = [0, T]$  con la norma

$$\|u(t)\| = \max_{t \in I} |u(t)|$$

definimos  $A : H \rightarrow H$ , donde

$$A(u(t)) = \varphi(t) + L^{-1}f(t) - L^{-1}Ru(t) - L^{-1}Nu(t)$$

sean  $u$  y  $\tilde{u}$  que pertenecen a  $H$ , luego

$$\begin{aligned}
\|Au - A\tilde{u}\| &= \max_{t \in I} \left| -L^{-1}Ru - L^{-1}Nu + L^{-1}R\tilde{u} + L^{-1}N\tilde{u} \right| \\
&= \max_{t \in I} \left| -L^{-1}(Ru - R\tilde{u}) - L^{-1}(Nu - N\tilde{u}) \right| \\
&= \max_{t \in I} \left| L^{-1}(Ru - R\tilde{u}) + L^{-1}(Nu - N\tilde{u}) \right| \\
&\leq \max_{t \in I} \left( \left| L^{-1}(Ru - R\tilde{u}) \right| + \left| L^{-1}(Nu - N\tilde{u}) \right| \right) \\
&\leq \max_{t \in I} \left( L^{-1} \left| Ru - R\tilde{u} \right| + L^{-1} \left| Nu - N\tilde{u} \right| \right)
\end{aligned}$$

Ahora, como suponemos que los términos  $R$  y  $N$  son Lipschitzianos, con contantes de Lipschitz  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|Au - A\tilde{u}\| &\leq \max_{t \in I} \left( L^{-1} \left| Ru - R\tilde{u} \right| + L^{-1} \left| Nu - N\tilde{u} \right| \right) \\
&\leq \max_{t \in I} \left( L_1 L^{-1} \left| u - \tilde{u} \right| + L_2 L^{-1} \left| u - \tilde{u} \right| \right) \\
&= (L_1 + L_2) \max_{t \in I} \left( L^{-1} \left| u - \tilde{u} \right| \right) \\
&\leq (L_1 + L_2) \left\| u - \tilde{u} \right\| \frac{t^k}{k!} \\
&= \alpha \left\| u - \tilde{u} \right\|
\end{aligned}$$

donde  $\alpha = \frac{(L_1 + L_2) t^k}{k!}$

bajo la condición  $0 < \alpha < 1$ , se tiene que  $A$  es una contracción, por lo tanto por el teorema del punto fijo de Banach, existe una única solución para la ecuación (2.2)

**Teorema 4.2** La serie solución (2.4) dada por el MDA es convergente si  $0 < \alpha < 1$  y  $\|u_1\| < \infty$

Prueba.

Considerando la suma parcial  $S_n = \sum_{i=0}^n u_i(t)$  de la serie solución (2.4) probaremos que la sucesión  $\{S_n\}$  es de Cauchy en el espacio de Banach  $H$ , con lo cual se prueba la convergencia de la serie (2.4).

Sabemos que

$$N\left(\sum_{i=0}^n u_i\right) = \sum_{i=0}^n A_i$$

por lo que podemos escribir la relación

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_i = N(S_n) - A_n$$

De igual forma, realizando la expansión en serie de Taylor para la función  $Ru$  sobre  $u_0$ , tenemos que

$$Ru = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u - u_0}{k!} \left. \frac{d^k Ru}{dt^k} \right|_{t=t_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{A}_k(u_0, u_1, \dots, u_k)$$

de donde se obtienen las siguientes relaciones

$$\bar{A}_0 = R(u_0) = R(S_0)$$

$$\bar{A}_0 + \bar{A}_1 = R(u_0 + u_1) = R(S_1)$$

y así sucesivamente, de tal manera que podemos escribir

$$\sum_{i=0}^{n-1} \bar{A}_i = R(S_n) - \bar{A}_n$$

ahora bien,

$$\begin{aligned}
\|S_{n+p} - S_n\| &= \max_{t \in I} |S_{n+p} - S_n| \\
&= \max_{t \in I} \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(t) \right| \\
&= \max_{t \in I} \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} (-L^{-1} R u_{i-1} - L^{-1} A_{i-1}) \right| \\
&= \max_{t \in I} \left| -L^{-1} \left( \sum_{i=n+1}^{n+p} R u_{i-1} \right) - L^{-1} \left( \sum_{i=n+1}^{n+p} A_{i-1} \right) \right| \\
&= \max_{t \in I} \left| -L^{-1} \left( \sum_{i=n}^{n+p-1} R u_i \right) - L^{-1} \left( \sum_{i=n}^{n+p-1} A_i \right) \right| \\
&= \max_{t \in I} |L^{-1} (R(S_{n+p-1}) - R(S_{n-1})) + L^{-1} (N(S_{n+p-1}) - N(S_{n-1}))| \\
&\leq \max_{t \in I} |L^{-1} (R(S_{n+p-1}) - R(S_{n-1}))| + \max_{t \in I} |L^{-1} (N(S_{n+p-1}) - N(S_{n-1}))| \\
&\leq \max_{t \in I} L^{-1} |(R(S_{n+p-1}) - R(S_{n-1}))| + \max_{t \in I} L^{-1} |(N(S_{n+p-1}) - N(S_{n-1}))| \\
&\leq L_1 \max_{t \in I} L^{-1} |S_{n+p-1} - S_{n-1}| + L_2 \max_{t \in I} L^{-1} |S_{n+p-1} - S_{n-1}| \\
&= (L_1 + L_2) \max_{t \in I} L^{-1} |S_{n+p-1} - S_{n-1}| \\
&= \frac{(L_1 + L_2) t^k}{k!} \|S_{n+p-1} - S_{n-1}\|
\end{aligned}$$

haciendo  $\alpha = \frac{(L_1 + L_2) t^k}{k!}$  y aplicando el resultado anterior en forma recurrente, tenemos que

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq \alpha \|S_{n+p-1} - S_{n-1}\| \leq \alpha^2 \|S_{n+p-2} - S_{n-2}\| \leq \dots \leq \alpha^n \|S_p - S_0\|$$

en particular para  $p = 1$

$$\|S_{n+1} - S_n\| \leq \alpha^n \|S_1 - S_0\| = \alpha^n \|u_1\|$$

ahora, si tomamos  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $n > m$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 \|S_n - S_m\| &\leq \|S_{m+1} - S_m\| + \|S_{m+2} - S_{m+1}\| + \cdots + \|S_n - S_{n-1}\| \\
 &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) \|u_1\| \\
 &= \alpha^m (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1-m}) \|u_1\| \\
 &= \alpha^m \left( \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \right) \|u_1\|
 \end{aligned}$$

con la condición  $0 < \alpha < 1$ , se demuestra que  $0 < 1 - \alpha^{n-m} < 1$ , por lo tanto

$$\|S_n - S_m\| \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \|u_1\|$$

como  $u(t)$  es acotada, se tiene que  $\|u_1\| < \infty$ , en consecuencia

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| = 0$$

lo cual prueba que la sucesión  $\{S_n\}$  es de Cauchy en un espacio de Banach  $H$ , por lo tanto  $\{S_n\}$  converge en  $H$  y así la serie solución dada por el MDA es convergente.

### Estimación del Error

En el teorema 4.2 llegamos a la relación  $\|S_n - S_m\| \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \|u_1\|$ , ahora  $S_n \rightarrow u(t)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , por lo que se tiene la siguiente cota para el error de truncamiento

$$\left\| u(t) - \sum_{i=0}^m u_i(t) \right\| \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \|u_1\|$$

## 5. CONCLUSIONES

El método de Descomposición de Adomian es una técnica muy eficiente para la solución de problemas de tipo lineal o no lineal, como lo pudimos evidenciar en los ejercicios expuestos en el capítulo 3 del presente trabajo.

Dentro de las ventajas que presenta el MDA destacamos las siguientes:

1. El método no acude a ningún proceso de linealización, discretización o perturbación, por lo cual no cambia la naturaleza del modelo a estudiar, esto hace que la aproximación encontrada esté ajustada al modelo original.
2. La serie solución  $u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$  presenta por lo general convergencia rápida, lo cual lo evidenciamos al obtener muy buenas aproximaciones, utilizando la suma parcial  $S_n = \sum_{i=0}^n u_i$  con relativamente pocos términos.
3. El método de descomposición de Adomian también puede aplicarse a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con aproximaciones que convergen rápidamente a las soluciones exactas.
4. La implementación del método ha mostrado resultados confiables en donde pocos términos son necesarios para obtener una solución exacta o para encontrar una solución aproximada con un grado razonable de precisión en problemas de tipo funcional lineales y no lineales.
5. El constante desarrollo de software especializados en diversos procesos simbólicos de la matemática, han propiciado que el MDA se pueda aplicar de una forma más sencilla y eficiente en la solución de ciertos problemas concretos de la ciencia.

Muchos son los estudios que se han realizado acerca de la convergencia del MDA, tanto en modelos matemáticos generales como en modelos particulares, lo cual muestra que el método sigue siendo objeto de investigación para diferentes sectores de la comunidad académica y científica.

# Apéndice A

## Apéndice

En este apéndice, mostraremos un teorema sobre las integrales anidadas.

Una integral anidada es una integral evaluada múltiples veces sobre una misma variable, es diferente a una integral múltiple, que consiste de un número de integrales evaluadas con respecto a variables diferentes.

**Teorema 1.** Sea  $f$  una función continua definida en un intervalo abierto  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ , y  $x_0 \in \mathbb{I}$  se tiene la siguiente relación:

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_2} \cdots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_1) f(x_2) f(x_3) \cdots f(x_n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_2 dx_1 = \frac{1}{n!} \left( \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1 \right)^n \quad (\text{A.1})$$

### Demostración

para la demostración utilizamos inducción sobre  $n$

Es claro para  $n = 1$

veamos para  $n = 2$

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} f(x_1) f(x_2) dx_2 dx_1 = \int_{x_0}^x f(x_1) \left( \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 \right) dx_1 = \frac{1}{2!} \left( \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1 \right)^2 \quad (\text{A.2})$$

utilizamos el método de integración por partes:

$$\text{Si } u = \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 \quad \text{y} \quad dv = f(x_1) dx_1$$

entonces

$$du = f(x_1) dx_1 \quad \text{y} \quad v = \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1$$

por tanto:

$$\int_{x_0}^x f(x_1) \left( \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 \right) dx_1 = \left( \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 \right) \left( \int_{x_0}^x f(x) dx_1 \right) \Big|_{x_0}^x \\ - \int_{x_0}^x f(x_1) \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 dx_1$$

ahora:

$$\left( \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 \right) \left( \int_{x_0}^x f(x) dx_1 \right) \Big|_{x_0}^x = \left( \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1 \right)^2$$

reemplazando en la última ecuación se tiene (A.2)

supongamos ahora que se cumple para  $n = k$  tenemos la hipótesis de inducción:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_2} \cdots \int_{x_0}^{x_{k-1}} f(x_2) f(x_3) \cdots f(x_k) dx_k dx_{k-1} \cdots dx_2 dx_1}_{k-1 \text{ veces}} = \frac{1}{k!} \left( \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1 \right)^k \quad (HI)$$

y veamos que se cumple para el siguiente, esto es, para  $n = k + 1$ .

$$I = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_2} \cdots \int_{x_0}^{x_{k-1}} f(x_1) f(x_2) f(x_3) \cdots f(x_k) dx_k dx_{k-1} \cdots dx_2 dx_1 \\ = \frac{1}{(k+1)!} \left( \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1 \right)^{k+1} \quad (A.3)$$

la parte izquierda de la ecuación (A.3) la escribimos de la forma:

$$\int_{x_0}^x f(x_1) \left( \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_2} \cdots \int_{x_0}^{x_{k-1}} f(x_2) f(x_3) \cdots f(x_k) dx_k dx_{k-1} \cdots dx_2 \right) dx_1$$

en esta expresión hacemos la siguiente sustitución:

$$F(x_1) = \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_2} \cdots \int_{x_0}^{x_{k-1}} f(x_2) f(x_3) \cdots f(x_k) dx_k ; dx_{k-1} \cdots dx_2}_{k-1 \text{ veces}} = \frac{1}{k!} \left( \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1 \right)^k \quad (\text{A.4})$$

luego lo que se debe probar es que:

$$I = \int_{x_0}^x f(x_1) F(x_1) dx_1 = \frac{1}{(k+1)!} \left( \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1 \right)^{k+1} \quad (\text{A.5})$$

usamos el método integración por partes, y obtenemos lo siguiente:

$$u = F(x_1) \quad dv = f(x_1) dx_1 \quad (\text{A.6})$$

por tanto:

$$du = F'(x_1) dx_1 \quad v = \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 \quad (\text{A.7})$$

pero de (A.4) se tiene que:

$$F'(x_1) = \frac{k}{k!} \left( \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1 \right)^{k-1} f(x_1) dx_1 \quad (\text{A.8})$$

reemplazando (A.8) en (A.7) se tiene:

$$du = \frac{1}{(k-1)!} \left( \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1 \right)^{k-1} f(x_1) dx_1 \quad v = \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 \quad (\text{A.9})$$

reemplazando (A.8) y (A.9) en (A.5), se tiene:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{x_0}^x f(x_1) F(x_1) dx_1 \\
 &= F(x_1) \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 \Big|_{x_0}^x - \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^x \left\{ f(x_1) \left[ \left( \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 \right)^{k-1} \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 \right] \right\} dx_1 \\
 &= F(x) \int_{x_0}^x f(x_2) dx_2 - \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^x \left\{ f(x_1) \left( \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 \right)^k \right\} dx_1
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

pero por (A.4) se tiene que:

$$\left( \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1 \right)^k = F(x_1)$$

al reemplazar esta expresión en (A.10), se tiene:

$$\begin{aligned}
 I &= F(x) \int_{x_0}^x f(x_2) dx_2 - \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^x f(x_1) (k! F(x_1)) dx_1 \\
 &= F(x) \int_{x_0}^x f(x_2) dx_2 - \frac{k!}{(k-1)!} \int_{x_0}^x f(x_1) F(x_1) dx_1 \\
 &= \frac{1}{k!} \left( \int_{x_0}^x f(x_2) dx_2 \right)^k \left( \int_{x_0}^x f(x_2) dx_2 \right) - kI \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

por tanto:

$$(1+k)I = \frac{1}{k!} \left( \int_{x_0}^x f(x_2) dx_2 \right)^{k+1}$$

finalmente:

$$I = \frac{1}{(k+1)!} \left( \int_{x_0}^x f(x_2) dx_2 \right)^{k+1}$$

por lo tanto, queda probado el teorema.

**Teorema 2**

Sea  $f$  una función continua definida en  $I \subseteq \mathbb{R}$  y  $x_0 \in I$ , entonces

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_n} \cdots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} f(x_1) dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} dx_n = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-u)^n f(u) du$$

La demostración del teorema puede ser consultada en [24]

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] Adomian, G. (1994), Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. ISBN 0-7923-2644-x
- [2] Adomian, G. (1986), Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, London. ISBN 0-12-044375-9.
- [3] Walter Rudin, Análisis Funcional, Editorial Reverté, ISBN 84-291-5115-x
- [4] José F.Caicedo, Cálculo Avanzado, Universidad Nacional de Colombia, ISBN 978-958-761-239-4
- [5] S. Saha Ray, New Approach for General Convergence of the Adomian Decomposition Method, World Applied Sciences Journal 32 (11): 2264-2268, 2014. IDOSI Publications, 2014
- [6] S. Khelifa, Y. Cherruault, New Results for the Adomian Method, Kibernetes, Vol 29(3), 332-354, 2000
- [7] K Abbaoui, Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'Adomian et application á la résolution de problèmes issus de la biologie et de la médecine, thèse de doctorat, 1995
- [8] Y Cherruault. Convergence of Adomian's Method, Kybernetes, 18(2): 31-38, 1989
- [9] Y Cherruault, G Saccomandi, and B Some, New Results for Convergence of Adomian's Method Applied to Integral Equations, Mathematical and Computer Modelling, 16(2): 85-93, 1992.
- [10] Y Cherruault, and G. Adomian, Decomposition Method: A New Proof of Convergence, Mathematical and Computer Modelling, 18(12):103-106, 1993
- [11] K Abbaoui and Y Cherruault. Convergence of Adomian's Method Applied to Differential Equations, Computers and Mathematics with Applications, 28(5): 103-109, 1994.

- [12] K Abbaoui and Y Cherruault, Convergence of Adomian's Method Applied to Nonlinear Equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 20(9):69-73, 1994
- [13] L Gabet. The Theoretical Foundation of the Adomian Method, *Computers and Mathematics with Applications*, 27(12): 41-52, 1994..
- [14] K Abbaoui and Y Cherruault. New Ideas for Proving Convergence of Decomposition Methods, *Computers and Mathematics with Applications*, 29(7):103-108, 1995
- [15] K Abbaoui, Y Cherruault and V Seng. Practical Formulae for the Calculus of Multivariable Adomian Polynomials, *Mathematical and Computer Modelling*, 22(1):89-93, 1995.
- [16] T Badredine, K Abbaoui and Y Cherruault. Convergence of Adomian's Method Applied to Integral Equation, *Kybernetes*, 28(5):557-564, 1999.
- [17] G Adomian, A Review of the Decomposition Method and Some Recent Results for Nonlinear Equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 13(7):17-43, 1990.
- [18] V Seng, K Abbaoui, and Y Cherruault, Adomian's Polynomials for nonlinear operators, *mathl. Comput. Modelling* vol 24(1), pp 59-65, 1996.
- [19] Laurent Schwartz, *Analyse Mathématique*, Hermann, Paris 1967
- [20] Roman Steven, The Formula de Faá Di Bruno, *Amer. Math. Monthly*. 87, (1980), 805-809.
- [21] Sánchez Cano José Albeiro, Adomian Decomposition Method and Taylor Series Method in Ordinary Differential Equations, *IJRRAS* 16 (2) August 2013
- [22] Sánchez Cano Jose Albeiro, Adomian Decomposition Method for a Class of Nonlinear Problems, *ISRN Applied Mathematics*, 2011.
- [23] Sánchez Cano Jose Albeiro, *Aplicaciones de las Integrales Anidadas* [www.academia.edu/19419149/](http://www.academia.edu/19419149/) 2011
- [24] G. E. Chilov, *Fonctions de Plusieurs Variables R'eelles*, Mir, Moscow, Russia, 1975.
- [25] Abdul-Majid Wazwaz, A new algorithm for calculating adomian polynomials for nonlinear operators. *Applied Mathematics and Computation* 111. Elsevier Science Inc 2000 53-69