Propiedades de las Distribuciones Beta y Dirichlet de Matrices Complejas

Por:

Elizabeth Bedoya Macías

Trabajo de Investigación presentado como
requisito parcial para optar al título
de Maestría en Matemática Aplicada

Director : Dr. Daya K. Nagar

Universidad EAFIT
Departamento de Ciencias Básicas

2007

A mis padres José Luis y Elizabeth.

AGRADECIMIENTOS

Al Doctor Daya Krishna Nagar, por su desinterezada colaboración, paciencia, dedicación y entrega para guiar el buen desarrollo de la investigación. Así como también por sus sabios y pertinentes consejos que me llenaban de moral para seguir adelante.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Las distribuciones multivariadas complejas juegan un papel importante en varios campos de investigación. La distribución Gaussiana compleja fue introducida por Wooding [66], Turin [61], y Goodman [16]. La distribución Wishart fue definida por Goodman [16] para aproximar la distribución de un estimativo de la matriz de densidad espectral para un proceso Gaussiano estacionario vectorial. En análisis de series de tiempo las distribuciones complejas se usan para describir estimadores de parámetros de frecuencia. Para las aplicaciones en series de tiempo las referencias adecuadas son Whaba [62, 63], Goodman y Dubman [18], Hannan [33], Priestly, Subba Rao y Tong [54], Brillinger [2, 3], y Shaman [56]. Esta distribución también se ha encontrado útil en física núclear, al estudiar la distribución de espacios entre niveles de energía de núcleos a alta excitación. Para más detalles, se puede citar a Dyson [10, 11, 12], Dyson y Mehta [13, 14], Bronk [4], Porter [53], y Carmeli [5, 6].

La distribución elipticamente simétrica multivariada compleja ha sido estudiada por Krishnaiah y Lin [44], y Khatri y Bhavsar [41]. La familia incluye la distribución Gaussiana y la distribución-t.

Las distribuciones conjunta de las raices de algunas matrices aleatorias complejas han sido obtenidas por James [34], Wigner [64], y Khatri [36]. Las distribuciones de varios estadisticos en el caso complejo han sido estudiadas por algunos autores tales como Goodman [17], Khatri [36, 38, 39], Pillai y Jouris [52], Nagarsenker y Das [51], Chikuse [7], Krishnaiah [43], Gupta [20, 23, 24], Fang, Krishnaiah y Nagarsenkar [15], Conradie y Gupta [8], Gupta [21, 22], Gupta y Nagar [27, 28, 29, 30, 31], Nagar, Jain y Gupta [49], y Nagar y Gupta [47]. Srivastava [58] dió una derivación de la distribución Wishart, cuya caracterización ha sido dada por Gupta y Kabe [26]. James [34] y Khatri [36] obtuvieron las distribuciones beta con variable matricial compleja central como también no central. Un tratamiento sistemático de tales distribuciones fue dado por Tan [60] e incluye las distribuciones Gaussiana, Wishart, beta y Dirichlet. Kabe [35] definió la distribución Gaussiana de matriz hipercompleja incluyendo cuaterniones de Hamilton. También estudió la correspondiente teoria de distribución muestral. Las matrices aleatorias complejas encuentran aplicaciones en muchos campos. Wigner [65] aplicó la teoría de matrices aleatorias en física. Un tratamiento de esta aplicación y su desarrollo se halla en Mehta [45]. Carmeli [5, 6], tratando con la teoría estadistica de niveles de energía y su relación a las matrices aleatorias estudió la matriz aleatoria Gaussiana compleja e introdujo la matriz cuaternion.

Sea X una matriz hermitiana definida positiva aleatoria de orden $m \times m$ tal que todos sus valores propios yacen en el intervalo abierto $(0,1)$. Entonces, X se dice que posee distribución beta tipo I de variable matricial compleja con parámetros (a_1, a_2), denotado por $X \sim \mathbb{C}B^I_m(a_1, a_2)$, si su f.d.p. está dada por

$$\frac{\det(X)^{a_1-m}\det(I_m - X)^{a_2-m}}{\tilde{B}_m(a_1,a_2)},$$

donde $a_1 > m-1$, $a_2 > m-1$,

$$\tilde{B}_m(a_1,a_2) = \frac{\tilde{\Gamma}_m(a_1)\tilde{\Gamma}_m(a_2)}{\tilde{\Gamma}_m(a_1+a_2)}$$

y

$$\tilde{\Gamma}(a) = \pi^{m(m-1)/2}\prod_{i=1}^{m}\Gamma(a-i+1), \quad \mathrm{Re}(a) > m-1.$$

La distribución beta tipo I de variable matricial compleja aparece en varios problemas en análisis multivariado. Varios estadisticos en análisis de varianza y covarianza son funciones de la matriz beta. Transformando $X = (I_m + Y)^{-1}Y$ con Jacobiano $J(X \to Y) = \det(I_m + Y)^{-2m}$ la f.d.p. de la matriz aleatoria Y se obtiene como

$$\frac{\det(Y)^{a-m}\det(I_m + Y)^{-(a+b)}}{\tilde{B}_m(a,b)}, \quad Y = Y^H > 0.$$

La matriz aleatoria Y se dice que posee distribución beta tipo II de variable matricial compleja con parámetros $a\,(\geq m)$ y $b\,(\geq m)$, denotada como $Y \sim \mathbb{C}\mathrm{B}^{II}_m(a,b)$.

Como una generalización de la densidad beta tipo I de variable matricial compleja, se define la distribución Dirichlet tipo I como sigue:

Las matrices (hermitianas definidas positivas de orden $m \times m$) $X_1, \ldots, X_n$ tienen distribución Dirichlet tipo I de variable matricial compleja con parámetros $(a_1, \ldots, a_n;\, a_{n+1})$, denotada por $(X_1, \ldots, X_n) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1, \ldots, a_n; a_{n+1})$, si su f.d.p. conjunta está dada por

$$\{\tilde{B}_m(a_1, \ldots, a_n; a_{n+1})\}^{-1} \prod_{i=1}^{n} \det(X_i)^{a_i - m} \det\left(I_m - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{a_{n+1}-m}$$

donde $I_m - \sum_{i=1}^{n} X_i$ es hermitiana definida positiva, $a_i > m-1$, for $i = 1, \ldots, n+1$ y

$$\tilde{B}_m(a_1, \ldots, a_n; a_{n+1}) = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} \tilde{\Gamma}_m(a_i)}{\tilde{\Gamma}_m(\sum_{i=1}^{n+1} a_i)}.$$

Las distribuciones Dirichlet de matriz compleja han sido definidas y estudiadas por varios autores (ver, por ejemplo, Troskie [59], Tan [60], Gupta y Nagar [25], y Cui, Gupta y Nagar [9]). Un extenso repaso de la distribución Dirichlet está disponible en Gupta y Nagar [32].

En esta tesis se estudia ciertas propiedades incluyendo la expansión asintótica de la distribución Dirichlet tipo I matricial compleja. También hallamos expresiones para $E(X)$, $E(X^2)$, $E[(\mathrm{tr}X)X]$, $E(X^3)$, $E[(\mathrm{tr}X)^2X]$, $E[\mathrm{tr}(X^2)X]$, $E(X^{-1})$, $E(X^{-2})$, $E[(\mathrm{tr}X^{-1})X^{-1}]$, $E(X^{-3})$, $E[(\mathrm{tr}X^{-1})^2X^{-1}]$, $E[\mathrm{tr}(X^{-2})X^{-1}]$, $E(Y)$, $E(Y^2)$, $E[(\mathrm{tr}Y)Y]$, $E(Y^3)$, $E[(\mathrm{tr}Y)^2Y]$, $E[\mathrm{tr}(Y^2)Y]$ cuando $X \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^I(a,b)$ y $Y \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{II}(a,b)$.

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS MATEMÁTICOS Y TEORÍA RELACIONADA

1.1. INTRODUCCIÓN

El entendimiento y las técnicas de ciertas funciones son esenciales para comprender los siguientes capítulos. En este capítulo, los resultados que involucran estas funciones y técnicas se describirán brevemente.

1.2. INTEGRACIÓN

En esta sección se da resultados sobre integración de funciones escalares de argumento matriz compleja. Primero, las siguientes notaciones y resultados (Khatri [36], Srivastava [58], Andersen, Højbjerre, Sørensen y Eriksen [1]) que se usan en éste y en los capítulos siguientes.

Sea $A=(a_{ij})$ una matriz $m\times m$ de números complejos. Entonces, A' denota la transpuesta de A; $\bar{A}$ conjugada de A; A^H conjugada transpuesta de A; $\mathrm{tr}(A)=a_{11}+\cdots+a_{mm}$; $\mathrm{etr}(A)=\exp(\mathrm{tr}(A))$; $\det(A)=$ determinante de A; $\det(A)_+=$ valor absoluto de $\det(A)$; $A=A^H>0$ significa que A es hermitiana definida positiva; $0<A=A^H<I_m$ significa que las matrices A y I_m-A son hermitianas definidas positivas simultaneamente, y $A^{\frac{1}{2}}$ la única raíz cuadrada hermitiana definida positiva de $A=A^H>0$. Además, para la partición $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$,

$\det(A_{11}) \neq 0$, $\det(A_{22}) \neq 0$ los complementos de Schur de A_{11} y A_{22} son definidos como $A_{22\cdot 1} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ y $A_{11\cdot 2} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, respectivamente. Si A_{11}^{-1} y $A_{22\cdot 1}^{-1}$ existen, tenemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}A_{22\cdot 1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22\cdot 1}^{-1} \\ -A_{22\cdot 1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22\cdot 1}^{-1} \end{pmatrix}$$

y si A_{22}^{-1} y $A_{11\cdot 2}^{-1}$ existen, tenemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11\cdot 2}^{-1} & -A_{11\cdot 2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11\cdot 2}^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}A_{11\cdot 2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Además, si A_{11} es no singular, entonces $\det(A) = \det(A_{22\cdot 1})\det(A_{11})$ y si A_{22} es no singular, entonces $\det(A) = \det(A_{11\cdot 2})\det(A_{22})$.

Lema 1.2.1 *Sea $Z\,(m \times n)$ y $W\,(m \times n)$ matrices complejas de variables funcionalmente independientes y sean $G\,(m \times m)$ y $K\,(n \times n)$ matrices no singulares. El Jacobiano de la transformación $Z = GWK$ es $J(Z \to W) = \det(GG^H)^n \times \det(KK^H)^m$.*

Lema 1.2.2 (Khatri [36]) *Sea Z y W matrices hemitianas definidas positivas. Si $Z = GWG^H$, donde $G\,(m \times m)$ es una matriz compleja no singular, entonces $J(Z \to W) = \det(GG^H)^m$.*

Lema 1.2.3 (Goodman [16]) *Sea W una matriz hermitiana definida positiva y $W = TT^H$ donde T es una matriz triangular compleja $m \times m$ con elementos diagonales positivos. Si T es triangular inferior, entonces*

$$J(X \to T) = 2^m \prod_{j=1}^{m} t_{jj}^{2(m-j)+1}, \tag{1.2.1}$$

y si T es triangular superior, entonces

$$J(X \to T) = 2^m \prod_{j=1}^{m} t_{jj}^{2(j-1)+1}. \tag{1.2.2}$$

Ahora se da algunas integrales utiles para la teoria de distribución matricial.

Definición 1.2.1 *La función gamma multivariada compleja, denotada por $\tilde{\Gamma}_m(a)$, se define por*

$$\tilde{\Gamma}_m(a) = \int_{X=X^H>0} \operatorname{etr}(-X)\det(X)^{a-m}\,dX, \tag{1.2.3}$$

donde $\operatorname{Re}(a) > m-1$*, y la integral es sobre el espacio de matrices de orden $m \times m$ hermitianas definidas positivas.*

La función gamma multivariada compleja $\tilde{\Gamma}_m(a)$ puede expresarse como el producto de funciones gamma ordinarias

$$\tilde{\Gamma}_m(a) = \pi^{m(m-1)/2}\prod_{i=1}^{m}\Gamma(a-i+1), \quad \operatorname{Re}(a) > m-1. \tag{1.2.4}$$

Definición 1.2.2 *La función beta compleja, denotada por $\tilde{B}_m(a,b)$, es definida por*

$$\tilde{B}_m(a,b) = \int_{0<X=X^H<I_m} \det(X)^{a-m}\det(I_m-X)^{b-m}\,dX, \tag{1.2.5}$$

donde $\operatorname{Re}(a) > m-1$*,* $\operatorname{Re}(b) > m-1$ *y la integral es sobre el espacio de matrices hermitianas definidas positivas de orden $m \times m$ tal que todos sus valores propios yacen en el intervalo abierto* $(0,1)$.

Dicha función beta puede expresarse en términos de funciones gamma como

$$\begin{aligned}\tilde{B}_m(a,b) &= \frac{\tilde{\Gamma}_m(a)\tilde{\Gamma}_m(b)}{\tilde{\Gamma}_m(a+b)}\\ &= \tilde{B}_m(b,a).\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Sustituyendo $X = (I_m+Y)^{-1}Y$ en (1.2.5) con Jacobiano

$$\begin{aligned}J(X \to Y) &= J((dX) \to (dY))\\ &= \det(I_m+Y)^{-2m},\end{aligned}$$

Se obtiene una representación integral equivalente para la función beta compleja como

$$\tilde{B}_m(a,b) = \int_{Y=Y^H>0} \det(Y)^{a-m}\det(I_m+Y)^{-(a+b)}\,dY. \tag{1.2.7}$$

En el resto de la sección se define la integral de Dirichlet multivariada, la integral de Liouville y sus generalizaciones en el caso complejo desarrollada por Nagar, Gupta y Sánchez [48].

Definición 1.2.3 *La función Dirichlet multivariada compleja, denotada por* $\tilde{B}_m(a_1,\ldots,a_r;b)$*, se define por*

$$\tilde{B}_m(a_1,\ldots,a_r;b) = \int_{\substack{0<\sum_{i=1}^r X_i<I_m \\ X_i=X_i^H>0, i=1,\ldots,r}} \cdots \int \prod_{i=1}^r \det(X_i)^{a_i-m} \det\left(I_m - \sum_{i=1}^r X_i\right)^{b-m} \prod_{i=1}^r dX_i$$

donde $\mathrm{Re}(a_i) > m-1$, $i=1,\ldots,r$, *y* $\mathrm{Re}(b) > m-1$.

La relación entre la función Dirichlet multivariada compleja y la función gamma compleja se da en

Teorema 1.2.1 *Para* $\mathrm{Re}(a_i) > m-1$, $i=1,\ldots,r$, *y* $\mathrm{Re}(b) > m-1$,

$$\tilde{B}_m(a_1,\ldots,a_r;b) = \frac{\tilde{\Gamma}_m(b)\prod_{i=1}^r \tilde{\Gamma}_m(a_i)}{\tilde{\Gamma}_m(a+b)} \tag{1.2.8}$$

donde $a = \sum_{i=1}^r a_i$.

Prueba: Nagar, Gupta y Sánchez [48]. ■

1.3. POLINOMIOS ZONALES

En esta sección se da una breve descripción de polinomios zonales y la función hipergeométrica de argumento matriz hermitiana desarrollada por James [34].

Sea X $(m\times m)$ una matriz hermitiana y V_k el espacio lineal de polinomios homogéneos $\phi(X)$ de grado k en los elementos de X. El espacio V_k puede descomponerse en suma directa de subespacios invariantes irreducibles V_κ donde $\kappa = (k_1,\ldots,k_m)$, $k_1+\cdots+k_m =$

k, $k_1 \geq \cdots \geq k_m \geq 0$. Entonces, el polinomio $(\mathrm{tr}X)^k \in V_k$ tiene descomposición única en polinomios $\tilde{C}_\kappa(X) \in V_\kappa$ como

$$(\mathrm{tr}X)^k = \sum_\kappa \tilde{C}_\kappa(X). \tag{1.3.9}$$

Y así se tiene la siguiente definición

Definición 1.3.1 *El polinomio zonal $\tilde{C}_\kappa(X)$ de una matriz hermitiana X es la componente de $(\mathrm{tr}X)^k$ en el subespacio V_κ.*

El polinomio zonal $\tilde{C}_\kappa(X)$ se define para todo k y m, pero para una partición κ de k en más de m partes, es identicamente cero. Son invariantes bajo transformación unitaria, *i.e.*

$$\tilde{C}_\kappa(X) = \tilde{C}_\kappa(UXU^H), U \in U(m). \tag{1.3.10}$$

Luego $\tilde{C}_\kappa(X)$ es un polinomio homogéneo simétrico en las raices características de X. También, si R es hermitiana definida positiva, entonces

$$\tilde{C}_\kappa(RX) = \tilde{C}_\kappa(R^{\frac{1}{2}}XR^{\frac{1}{2}}) \tag{1.3.11}$$

donde $R^{\frac{1}{2}}$ es la raíz cuadrada de R. Siguiendo a Khatri [40], es fácil ver que

$$|\tilde{C}_\kappa(X)| \leq \tilde{C}_\kappa(X_0) \tag{1.3.12}$$

donde $X_0 = \mathrm{diag}(|x_1|, \ldots, |x_m|)$, y x_i, $i = 1, \ldots, m$, son las raices características de X. para valores pequeños de k, las fórmulas explicitas para $\tilde{C}_\kappa(X)$ son:

$$\tilde{C}_{(1)}(X) = \mathrm{tr}(X), \tag{1.3.13}$$

$$\tilde{C}_{(2)}(X) = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}X)^2 + \mathrm{tr}(X^2)\right], \tag{1.3.14}$$

$$\tilde{C}_{(1^2)}(X) = \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}X)^2 - \mathrm{tr}(X^2)], \tag{1.3.15}$$

$$\tilde{C}_{(3)}(X) = \frac{1}{6}[(\mathrm{tr}X)^3 + 3(\mathrm{tr}X)(\mathrm{tr}X^2) + 2\,\mathrm{tr}(X^3)], \tag{1.3.16}$$

$$\tilde{C}_{(2,1)}(X) = \frac{2}{3}[(\mathrm{tr}X)^3 - \mathrm{tr}(X^3)], \tag{1.3.17}$$

$$\tilde{C}_{(1^3)}(X) = \frac{1}{6}[(\mathrm{tr}X)^3 - 3(\mathrm{tr}X)(\mathrm{tr}X^2) + 2\,\mathrm{tr}(X^3)]. \tag{1.3.18}$$

Entonces es fácil ver que:

$$\mathrm{tr}(X^2) = \tilde{C}_{(2)}(X) - \tilde{C}_{(1^2)}(X), \tag{1.3.19}$$

y

$$\mathrm{tr}(X^3) = \tilde{C}_{(3)}(X) - \frac{1}{2}\tilde{C}_{(2,1)}(X) + \tilde{C}_{(1^3)}(X). \tag{1.3.20}$$

Además, sustituyendo $S = I_m$ en (1.3.13)–(1.3.18), es fácil ver que $\tilde{C}_{(1)}(I_m) = m$, $\tilde{C}_{(2)}(I_m) = m(m+1)/2$, $\tilde{C}_{(1^2)}(I_m) = m(m-1)/2$, $\tilde{C}_{(3)}(I_m) = m(m+1)(m+2)/6$,$\tilde{C}_{(2,1)}(I_m) = 2m(m^2-1)/3$, $\tilde{C}_{(1^3)}(I_m) = m(m-1)(m-2)/6$. Si la partición κ de k tiene r partes no cero, entonces James [34] y Khatri [39]

$$\tilde{C}_{\kappa}(I_m) = \left[\frac{k!\prod_{i<j}^{r}(k_i - k_j - i + j)}{\prod_{i=1}^{r}(k_i + r - i)!}\right]^2 \frac{[m]_{\kappa}}{k!} \tag{1.3.21}$$

donde $[m]_{\kappa} = \prod_{i=1}^{r}(m-i+1)_{k_i}$ con $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$, $(a)_0 = 1$.

Sea $\kappa = (k_1, \ldots, k_m)$, $k_1 \geq \cdots \geq k_m \geq 0$, $k_1 + \cdots + k_m = k$. Entonces, el *coeficiente hipergeométrico generalizado* $[a]_{\kappa}$ se define por

$$[a]_{\kappa} = \prod_{j=1}^{m}(a-j+1)_{k_j}. \tag{1.3.22}$$

Usando la notación

$$\tilde{\Gamma}_m(a,\kappa) = \pi^{m(m-1)/2}\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a+k_j-j+1),\ \mathrm{Re}(a) \geq m - k_m, \tag{1.3.23}$$

tal que $\tilde{\Gamma}_m(a,0) = \tilde{\Gamma}_m(a)$, se puede escribir (1.3.22) como

$$[a]_\kappa = \frac{\tilde{\Gamma}_m(a,\kappa)}{\tilde{\Gamma}_m(a)}. \tag{1.3.24}$$

Khatri [37] introdujo la notación

$$\tilde{\Gamma}_m(a,-\kappa) = \pi^{m(m-1)/2} \prod_{j=1}^{m} \Gamma(a - k_j - m + j), \mathrm{Re}(a) \geq m + k_1,$$

que también se usa acá. Alternativamente se puede escribir

$$\tilde{\Gamma}_m(a,-\kappa) = \frac{(-1)^k \tilde{\Gamma}_m(a)}{[-a+m]_\kappa}. \tag{1.3.25}$$

1.4. Nociones de Matriz Aleatoria Compleja

En esta sección se definen las variables aleatorias complejas, los vectores aleatorios complejos, las matrices aleatorias complejas y los operadores asociados con éstos. Algunas de sus propiedades pueden ser encontradas en Andersen, Højbjerre, Sørensen y Eriksen [1].

Definición 1.4.1 *Sean x_1 y x_2 variables aleatorias reales. La variable aleatoria dada por $x = x_1 + \imath x_2$ es una variable aleatoria compleja.*

Los operadores esperanza, covarianza y varianza de variables aleatorias complejas son considerados sobre el espacio vectorial complejo dado por

$$L_2(\mathbb{C}) = \{x : x \text{ es una variable aleatoria compleja y } E(x\bar{x}) < \infty\}.$$

Definición 1.4.2 *Sea $x = x_1 + \imath x_2$ una variable aleatoria compleja. El operador esperanza de x, $E : L_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, se define como*

$$E(x) = E(x_1) + \imath E(x_2).$$

El valor de $E(x)$ es la media de x.

Definición 1.4.3 *Sean x y y variables aleatorias complejas. El operador covarianza, C : $L_2(\mathbb{C}) \times L_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, está definido como*

$$C(x,y) = E\left[\{x - E(x)\}\overline{\{y - E(y)\}}\right].$$

Definición 1.4.4 *Sea x una variable aleatoria compleja. El operador varianza de x, V : $L_2(\mathbb{C}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ está definido como*

$$V(x) = C(x,x) = E\left[\{x - E(x)\}\overline{\{x - E(x)\}}\right].$$

El valor de $V(x)$ es llamado la varianza de x.

Definición 1.4.5 *Sea $\mathbf{x} = (x_k)$ un vector p-dimensional, donde x_k para $k = 1, \ldots, p$ son variables aleatorias complejas; entonces $\mathbf{x}$ es llamado un vector aleatorio complejo p-dimensional.*

Los operadores esperanza, covarianza y varianza de vectores aleatorios complejos son considerados sobre el espacio vectorial complejo dado por

$$L_2(\mathbb{C}^p) = \{\mathbf{x} = (x_k) : x \text{ es un vector aleatorio complejo } p\text{-dimensional y } E\left(\mathbf{x}^H\mathbf{x}\right) < \infty\}.$$

Definición 1.4.6 *Sea $\mathbf{x} = (x_k)$ un vector aleatorio complejo p-dimensional. El operador esperanza de x, $E : L_2(\mathbb{C}^p) \to \mathbb{C}^p$, se define como*

$$E(\mathbf{x}) = (E(x_k)).$$

Nos referimos a $E(x)$ como el vector de medias del vector x.

Definición 1.4.7 *Sean $\mathbf{x} = (x_k)$ y $\mathbf{y} = (y_s)$ vectores aletorios complejos de dimensiones p y q respectivamente. El operador covarianza de x y y, $C : L_2(\mathbb{C}^p) \times L_2(\mathbb{C}^q) \to \mathbb{C}^{p \times q}$, está definido como*

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (C(x_k, y_s)).$$

La matriz de covarianza compleja de los vectores aleatorios complejos $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *puede ser interpretada como un vector complejo de dimensión* $pq \times 1$*, dado por*

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \left(C\left(x_k, y_s\right)\right) \\ &= \left(E[(x_k - E(x_k))\overline{(y_s - E(y_s))}]\right) \\ &= E[(\mathbf{x} - E(\mathbf{x}))(\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))^H]. \end{aligned}$$

Definición 1.4.8 *Sea* $\mathbf{x} = (x_k)$ *un vector aleatorio complejo* p*-dimensional. El operador varianza de* $\mathbf{x}$*,* $V : L_2\left(\mathbb{C}^p\right) \to \mathbb{C}^{p\times p}$*, está definido como*

$$V(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

Nos referimos al valor de $V(\mathbf{x})$ *como la matriz de covarianzas del vector* $\mathbf{x}$*.*

Definición 1.4.9 *Sea* $X = \left(x_{jk}\right)$ *una matriz de orden* $p \times q$*, donde* x_{jk} *para* $j = 1,\ldots,p$ *y* $k = 1,\ldots,q$ *es una variable aleatoria compleja; entonces* X *es llamada una matriz aleatoria compleja de orden* $p \times q$*.*

Los operadores esperanza, covarianza y varianza de matrices aleatorias complejas son considerados sobre el espacio vectorial complejo dado por

$$L_2\left(\mathbb{C}^{p\times q}\right) = \left\{X = \left(x_{jk}\right) : X \text{ es una matriz aleatoria compleja de orden } p\times q \text{ y } E\left(\operatorname{tr}(XX^H)\right) < \infty\right\}.$$

Definición 1.4.10 *Sea* $X = \left(x_{jk}\right)$ *una matriz aleatoria compleja de orden* $p \times q$*. El operador esperanza de* X*,* $E : L_2\left(\mathbb{C}^{p\times q}\right) \to \mathbb{C}^{p\times q}$*, está definido como*

$$E(X) = \left(E\left(x_{jk}\right)\right).$$

El operador esperanza evaluado en la matriz aleatoria compleja X *de orden* $p \times q$*, se llama la media de* X*.*

1.5. ALGUNAS DISTRIBUCIONES COMPLEJAS

A continuación se dan algunas definiciones y resultados sobre distribuciones complejas. Para mayores detalles y pruebas se puede consultar a Andersen, Højbjerre, Sørensen y Eriksen [1], Tan [60], Khatri [36], James [34] y Goodman [16].

Definición 1.5.1 *Sea* $\mathbf{x}$ *un vector aleatorio complejo p-dimensional, el cual tiene una distribución normal multivariada compleja con vector de medias* θ, $\theta \in \mathbb{C}^p$ *y matriz de covarianza* Σ, *donde* Σ *es una matriz compleja hermitiana definida positiva de orden* $p \times p$. *La función de densidad de* $\mathbf{x}$ *está dada por*

$$\pi^{-p} \det(\Sigma)^{-1} \exp[-(\mathbf{x}-\theta)^H \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\theta)], \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^p. \tag{1.5.1}$$

Usaremos la notación $\mathbf{x} \sim \mathbb{C}N_p(\theta, \Sigma)$.

Definición 1.5.2 *Sea* $\mathbf{x}$ *un vector aleatorio complejo p-dimensional, el cual tiene una distribución t multivariada compleja con parámetros* μ, Σ, ψ *y n. La función de densidad de probabilidad está dada por*

$$\frac{\Gamma(n+p)}{(\pi\psi)^p} \det(\Sigma)^{-1} \det\left(1 + \frac{1}{\psi}(\mathbf{x}-\mu)^H \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)\right)^{-(n+p)}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^p \tag{1.5.2}$$

donde $\mu \in \mathbb{C}^p$, Σ *es una matriz hermitiana definida positiva de orden* $(p \times p)$ *y* ψ *es un escalar positivo. Usaremos la notación* $x \sim \mathbb{C}T_p(n, \mu, \psi\Sigma)$.

Definición 1.5.3 *Sea* X *una matriz aleatoria compleja de orden* $p \times q$, *la cual tiene una distribución normal matriz-variada compleja con matriz de medias* M *y matriz de covarianzas* $I_p \otimes V$, *donde* V *es una matriz hermitiana definida positiva de orden* $q \times q$. *La función de densidad de probabilidad de* X *está dada por*

$$\pi^{-pq} \det(V)^{-p} \operatorname{etr}[-(X-M)V^{-1}(X-M)^H], X \in \mathbb{C}^{p\times q}. \tag{1.5.3}$$

Usaremos la notación $X \sim \mathbb{C}N_{p,q}(M, I_p \otimes V)$.

Definición 1.5.4 *Sea A una matriz aleatoria hermitiana definida positiva de orden $(p\times p)$, la cual tiene una distribución compleja Wishart con n grados de libertad. La función de densidad de probabilidad está dada por*

$$\frac{\det(A)^{n-p}\operatorname{etr}\left(-A\Sigma^{-1}\right)}{\widetilde{\Gamma}_p(n)\det(\Sigma)^n}. \tag{1.5.4}$$

Usaremos la notación $A\sim\mathbb{C}W_p(n,\Sigma)$.

Es muy conocido (Goodman [16]) que si $X\sim\mathbb{C}N_{p,q}(M,I_p\otimes V)$, entonces para $q\geq p$, $XX^H\sim\mathbb{C}W_p(q,V)$.

Teorema 1.5.1 *Sea X una matriz compleja de orden $p\times q$. Decimos que X se distribuye como una t matriz-variada compleja con parámetros M, Σ, Ψ y n, si su función de densidad de probabilidad está dada por*

$$\begin{aligned}&\frac{\widetilde{\Gamma}_p(n+p+q-1)}{\pi^{pq}\widetilde{\Gamma}_p(n+p-1)}\det(\Sigma)^{-q}\det(\Psi)^{-p}\\&\qquad\times\det(I_p+\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)^H)^{-(n+p+q-1)},\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

donde $X\in\mathbb{C}^{p\times q}$, $M\in\mathbb{C}^{p\times q}$, Σ de orden $p\times p$ y Ψ de orden $p\times p$ son matrices hermitianas definidas positivas.

Usaremos la notación $X\sim\mathbb{C}T_{p,q}(n,M,\Sigma,\Psi)$.

Teorema 1.5.2 *Sea X una matriz compleja de orden $p\times m$, decimos que X tiene una distribución t matriz-variada invertida compleja, si su función de densidad de probabilidad está dada por*

$$\begin{aligned}&\frac{\tilde{\Gamma}_p(n+m+p-1)}{\pi^{mp}\tilde{\Gamma}_p(n+p-1)}\det(\Sigma)^{-m}\det(\Omega)^{-p}\\&\qquad\times\det(I_p-\Sigma^{-1}(X-M)\Omega^{-1}(X-M)^H)^{n-1}, X\in\mathbb{C}^{p\times m}\end{aligned} \tag{1.5.6}$$

donde $I_p-\Sigma^{-1}(T-M)\Omega^{-1}(T-M)^H$, Σ y Ω son matrices hermitianas definidas positivas.

Usaremos la notación $X \sim \mathbb{C}IT_{p,m}(n;M,\Sigma,\Omega)$.

Sea X una matriz aleatoria compleja de orden $p \times m$. Particionando X como $X = (X_1,\ldots,X_r)$ donde X_i es una matriz de orden $p \times m_i$, $p \leq m_i$, $i = 1,\ldots,r$. Si (i) $X \sim \mathbb{C}T_{p,m}(n,M,\Sigma,I_m)$, entonces $(X_1X_1^H,\ldots,X_rX_r^H)$ posee una distribución Dirichlet tipo II de variable matriz compleja y (ii) si $X \sim \mathbb{C}IT_{p,m}(n;M,\Sigma,\Omega)$, entonces $(X_1X_1^H,\ldots,X_rX_r^H)$ posee una distribución Dirichlet tipo I de variable matriz compleja.

CAPÍTULO 2

MOMENTOS DE LA DISTRIBUCIÓN BETA DE VARIABLE MATRICIAL COMPLEJA

2.1. INTRODUCCIÓN

Se dice que la matriz definida positiva hermitiana aleatoria X de orden $m \times m$ tiene distribución beta tipo I de matriz compleja con parámetros $a\,(\geq m)$ y $b\,(\geq m)$, denotada por $X \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^I(a,b)$, si su función de densidad de probabilidad (f.d.p.) está dada por

$$\frac{\det(X)^{a-m}\det(I_m - X)^{b-m}}{\tilde{B}_m(a,b)}, \quad 0 < X = X^H < I_m, \tag{2.1.1}$$

donde $\tilde{B}_m(a,b)$ es la función beta multivariada compleja. Transformando $X = (I_m + Y)^{-1}Y$ con Jacobiano $J(X \to Y) = \det(I_m + Y)^{-2m}$ la f.d.p. de la matriz aleatoria Y se obtiene como

$$\frac{\det(Y)^{a-m}\det(I_m + Y)^{-(a+b)}}{\tilde{B}_m(a,b)}, \quad Y = Y^H > 0. \tag{2.1.2}$$

La matriz aleatoria Y dicese poseer distribución beta tipo II de variable matricial compleja con parámetros $a\,(\geq m)$ y $b\,(\geq m)$, denotada como $Y \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{II}(a,b)$.

Las distribuciones beta de matriz compleja pueden derivarse usando matrices Wishart complejas independientes (Goodman [16]). Sea X_1 y X_2 matrices aleatorias definidas positivas hermitianas independientes de orden m. Defínase la transformación $X_1 + X_2 = TT^H$ y $U = T^{-1}X_1(T^H)^{-1}$, donde la matriz T es triangular inferior con elementos diagonales positivos. Si $X_i \sim \mathbb{C}\mathrm{W}_m(n_i,\Sigma)$, $i=1,2$, entonces $U \sim \mathbb{C}\mathrm{B}^I_m(n_1,n_2)$. Para las propiedades y resultados adicionales sobre distribuciones beta matriciales, se refiere al lector a Khatri [36], Tan [60], Gupta [19], Gupta y Nagar [25] y Nagar, Bedoya y Arias [50].

La distribución beta de matriz compleja se presenta en varios problemas en análisis estadístico multivariado. Varios estadísticos de prueba en análisis multivariado de varianza y covarianza son funciones de la matriz beta. La distribución juega un rol esencial en varios campos de investigación. Se puede encontrar aplicaciones en campos tan diversos como análisis de series de tiempo, física nuclear y radio comunicaciones. Algunos resultados distribucionales sobre variable Gaussiana, Wishart, Wishart invertido, beta, formas cuadráticas en variable normal y Dirichlet se encuentran en Khatri [37], Tan [60], Shaman [56], Smith y Gao [57]. Recientemente, Nagar y Arias [46] han estudiado la distribución Cauchy. Para algunas propiedades de la distribución matricial compleja, ver Andersen, Højbjerre, Sørensen y Eriksen [1], Carmeli [6], Mehta [45], Krishnaiah [43], Reed, Mallett y Brennan [55] y Khatri y Rao [42].

En este capítulo se derivan expresiones para $E(X), E(X^2), E[(\mathrm{tr}X)X], E(X^3), E[(\mathrm{tr}X)^2X]$, $E[\mathrm{tr}(X^2)X]$, $E(X^{-1})$, $E(X^{-2})$, $E[(\mathrm{tr}X^{-1})X^{-1}]$, $E(X^{-3})$, $E[(\mathrm{tr}X^{-1})^2X^{-1}]$, $E[\mathrm{tr}(X^{-2})X^{-1}]$, $E(Y)$, $E(Y^2)$, $E[(\mathrm{tr}Y)Y]$, $E(Y^3)$, $E[(\mathrm{tr}Y)^2Y]$, $E[\mathrm{tr}(Y^2)Y]$ cuando $X \sim \mathbb{C}\mathrm{B}^I_m(a,b)$ y $Y \sim \mathbb{C}\mathrm{B}^{II}_m(a,b)$.

2.2. Algunos Resultados Útiles

En esta sección se define las distribuciones beta y se obtienen algunas propiedades. También se da algunos resultados sobre valores esperados de polinomios zonales.

Definición 2.2.1 *Una matriz X definida positiva hermitiana aleatoria $m\times m$ tiene distribución beta tipo I generalizada con parámetros $a\,(\geq m)$, $b\,(\geq m)$ y $\Omega\,(=\Omega^H>0)$, denotada por $X \sim \mathbb{C}\mathrm{B}^I_m(a,b;\Omega)$, si su f.d.p. está dada por*

$$\frac{\det(X)^{a-m}\det(\Omega-X)^{b-m}}{\tilde{B}_m(a,b)\det(\Omega)^{a+b-m}}, \quad 0<X=X^H<\Omega. \tag{2.2.1}$$

Cuando $\Omega = I_m$, la distribución beta tipo I se reduce a una distribución beta tipo I estandar.

Definición 2.2.2 *Una matriz Y definida positiva simétrica aleatoria de orden $m \times m$ posee la distribución beta tipo II generalizada con parámetros $a\,(\geq m)$, $b\,(\geq m)$ y $\Omega\,(= \Omega^H > 0)$ denotada por $Y \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{II}(a,b;\Omega)$, si su f.d.p. está dada por*

$$\frac{\det(Y)^{a-m}\det(\Omega+Y)^{-(a+b)}}{\tilde{B}_m(a,b)\det(\Omega)^{-b}}, \quad Y = Y^H > 0. \tag{2.2.2}$$

Si $\Omega = I_m$, la distribución beta tipo II generalizada se reduce a la distribución beta tipo II estandar.

Ahora, damos ciertas propiedades de las distribuciones beta que se usan para obtener algunos resultados en ésta y en subsiguientes secciones.

Teorema 2.2.1 *Sea $X \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{I}(a,b;\Omega)$ y C cualquier matriz de orden $m \times m$ no singular compleja. Entonces, $CXC^H \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{I}(a,b;C\Omega C^H)$.*

Prueba: Esto se sigue inmediatamente de la transformación $W = CXC^H$ con Jacobiano $J(X \to W) = \det(CC^H)^{-m}$ en la densidad de X dada por (2.2.1). ■

Corolario 2.2.1.1 *Sea $X \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{I}(a,b;\Omega)$ y $\Omega^{-1} = C^H C$, entonces $CXC^H \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{I}(a,b)$.*

Teorema 2.2.2 *Sea $Y \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{II}(a,b;\Omega)$ y C cualquier matriz no singular compleja de orden $m \times m$. Entonces, $CYC^H \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{II}(a,b;C\Omega C^H)$.*

Prueba: Se obtiene inmediatamente por la transformación $Z = CYC^H$ con Jacobiano $J(Y \to Z) = \det(CC^H)^{-m}$ en la densidad de Y dada por (2.2.2). ■

Corolario 2.2.2.1 *Sea $Y \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{II}(a,b;\Omega)$ y $\Omega^{-1} = C^H C$, entonces $CYC^H \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{II}(a,b)$.*

Teorema 2.2.3 *Sea $X \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{I}(a,b)$ y U $(m \times m)$ una matriz unitaria, cuyos elementos son constantes o variables aleatorias distribuidas independientemente de X. Entonces, la distribución de X es unitaria e invariante bajo la transformación $X \to UXU^H$, y es independiente de U en el segundo caso.*

Prueba: Primero, Sea U una matriz unitaria constante. Entonces, por corolario 2.2.1.1, $UXU^H \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^I(a,b)$ puesto que $UU^H = I_m$. Sin embargo, si U es unitaria aleatoria, entonces $UXU^H|U \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^I(a,b)$. como esta distribución no depende de U, $UXU^H \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^I(a,b)$. ■

Teorema 2.2.4 *Sea $Y \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{II}(a,b)$ y U $(m \times m)$ una matriz unitaria cuyos elementos son constantes o variables aleatorias distribuidas independientemente de Y. Entonces, la distribución de Y es invariante bajo la transformación UYU^H, y es independiente de U en el segundo caso.*

Prueba: Similar a la prueba del teorema 2.2.3. ■

Se sabe que si $X \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^I(a,b)$ y $Y \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{II}(a,b)$, entonces (James [34], Khatri [37]),

$$E[\tilde{C}_\kappa(X)] = \frac{[a]_\kappa}{[a+b]_\kappa}\tilde{C}_\kappa(I_m), \tag{2.2.3}$$

$$E[\tilde{C}_\kappa(X^{-1})] = \frac{[-a-b+m]_\kappa}{[-a+m]_\kappa}\tilde{C}_\kappa(I_m), \operatorname{Re}(a) > m-1+k_1, \tag{2.2.4}$$

y

$$E[\tilde{C}_\kappa(Y)] = \frac{(-1)^k[a]_\kappa}{[-b+m]_\kappa}\tilde{C}_\kappa(I_m), \operatorname{Re}(b) > m-1+k_1, \tag{2.2.5}$$

donde $\tilde{C}_\kappa(X)$ es el polinomio zonal de una matriz hermitiana $m \times m$ correspondiente a la partición κ.

2.3. MOMENTOS

En esta sección, se obtiene varios resultados esperados de funciones de matriz compleja de matrices beta tipo I y beta tipo II.

Lema 2.3.1 *Sea $X \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^I(a,b)$. Entonces, para un entero positivo r, (i) $E(X^r) = \tilde{c}_r(m,a,b)I_m$, y (ii) si $E(X^{-r})$ existe, entonces está dada por $E(X^{-r}) = \tilde{d}_r(m,a,b)I_m$, donde $\tilde{c}_r(m,a,b)$ y $\tilde{d}_r(m,a,b)$ son constantes dependientes de r,m, a y b.*

Prueba: Como para cualquier matriz unitaria U de orden $m \times m$, las matrices complejas X y UXU^H tienen la misma distribución, se obtiene

$$E(X^r) = E[(UXU^H)^r] = UE(X^r)U^H,$$

lo cual implica que

$$E(X^r)U = UE(X^r).$$

Luego, $E(X^r)$ debe ser un múltiplo escalar de la matriz identidad. Un argumento similar es valido para $E(X^{-r})$. ■

Lema 2.3.2 *Sea* $X \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^I(a,b;\Omega)$. *Entonces,*
(i) $E(X) = \tilde{c}_1(m,a,b)\Omega$,
(ii) $E(X^{-1}) = \tilde{d}_1(m,a,b)\Omega^{-1}$,
(iii) $E(X\Omega^{-1}X) = \tilde{c}_2(m,a,b)\Omega$,
(iv) $E(X^{-1}\Omega X^{-1}) = \tilde{d}_2(m,a,b)\Omega^{-1}$,
(v) $E(X\Omega^{-1}X\Omega^{-1}X) = \tilde{c}_3(m,a,b)\Omega$,
(vi) $E(X^{-1}\Omega X^{-1}\Omega X^{-1}) = \tilde{d}_3(m,a,b)\Omega^{-1}$,
donde $\tilde{c}_r(m,a,b)$ *y* $\tilde{d}_r(m,a,b)$ *se definen en el lema 2.3.1.*

Prueba: Sea $\Omega = MM^H$ donde M es una matriz compleja no singular de orden $m \times m$. Considere a $W = M^{-1}X(M^H)^{-1}$ y notese que $W \sim \mathbb{C}B_m^I(a,b)$. Ahora

$$E(X) = E(MWM^H) = \tilde{c}_1(m,a,b)MM^H = \tilde{c}_1(m,a,b)\Omega,$$

$$E(X^{-1}) = E[(M^H)^{-1}W^{-1}M^{-1}] = \tilde{d}_1(m,a,b)(MM^H)^{-1} = \tilde{d}_1(m,a,b)\Omega^{-1}$$

y

$$E(X^{-1}\Omega X^{-1}) = E[(M^H)^{-1}W^{-2}M^{-1}] = \tilde{d}_2(m,a,b)(MM^H)^{-1} = \tilde{d}_2(m,a,b)\Omega^{-1}.$$

Similarmente, puede verificarse que

$$E(X\Omega^{-1}X) = E(MW^2M^H) = \tilde{c}_2(m,a,b)MM^H = \tilde{c}_2(m,a,b)\Omega,$$

$$E(X\Omega^{-1}X\Omega^{-1}X) = E(MW^3M^H) = \tilde{c}_3(m,a,b)MM^H = \tilde{c}_3(m,a,b)\Omega,$$

y

$$E(X^{-1}\Omega X^{-1}\Omega X^{-1}) = E[(M^H)^{-1}W^{-3}M^{-1}] = \tilde{d}_3(m,a,b)\Omega^{-1}.$$

■

Teorema 2.3.1 *Sean las constantes $\tilde{c}_r(m,a,b)$ y $\tilde{d}_r(m,a,b)$ definidas como en el lema 2.3.1. Entonces,*

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_1(m,a,b) &= \frac{a}{a+b},\\
\tilde{c}_2(m,a,b) &= \frac{a(a^2+ab+bm-1)}{(a+b-1)(a+b)(a+b+1)},\\
\tilde{d}_1(m,a,b) &= \frac{a+b-m}{a-m}, \quad a>m,\\
\tilde{d}_2(m,a,b) &= \frac{(a+b-m)[(a-m)^2+ab-1]}{(a-m)(a-m-1)(a-m+1)}, \quad a>m+1.
\end{aligned}$$

Prueba: Como, $E(X^r) = \tilde{c}_r(m,a,b)I_m$, se tiene $E[\mathrm{tr}(X^r)] = \tilde{c}_r(m,a,b)m$. Así, el coeficiente de m en $E[\mathrm{tr}(X^r)]$ es $E(X^r)$. Ahora, usando (1.3.13), (1.3.14), (1.3.15), (2.2.3), (2.2.4) y (1.3.19), se obtiene

$$\begin{aligned}
E[\mathrm{tr}(X)] &= E[\tilde{C}_{(1)}(X)] = \frac{[a]_{(1)}}{[a+b]_{(1)}}\tilde{C}_{(1)}(I_m),\\
E[\mathrm{tr}(X^{-1})] &= E[\tilde{C}_{(1)}(X^{-1})] = \frac{[-a-b+m]_{(1)}}{[-a+m]_{(1)}}\tilde{C}_{(1)}(I_m), \quad a>m,\\
E[\mathrm{tr}(X^2)] &= E[\tilde{C}_{(2)}(X)] - E[\tilde{C}_{(1^2)}(X)]\\
&= \frac{[a]_{(2)}}{[a+b]_{(2)}}\tilde{C}_{(2)}(I_m) - \frac{[a]_{(1^2)}}{[a+b]_{(1^2)}}\tilde{C}_{(1^2)}(I_m),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
E[\mathrm{tr}(X^{-2})] &= E[\tilde{C}_{(2)}(X^{-1})] - E[\tilde{C}_{(1^2)}(X^{-1})]\\
&= \frac{[-a-b+m]_{(2)}}{[-a+m]_{(2)}}\tilde{C}_{(2)}(I_m) - \frac{[-a-b+m]_{(1^2)}}{[-a+m]_{(1^2)}}\tilde{C}_{(1^2)}(I_m), \quad a>m+1.
\end{aligned}$$

Ahora, usando los resultados $[n]_{(1)} = n$, $[n]_{(2)} = n(n+1)$, $[n]_{(1^2)} = n(n-1)$, $[-n+m]_{(1)} = -(n-m)$, $[-n+m]_{(2)} = (n-m)(n-m-1)$, $[-n+m]_{(1^2)} = (n-m)(n-m+1)$, $\tilde{C}_{(1)}(I_m) = m$, $\tilde{C}_{(2)}(I_m) = m(m+1)/2$ y $\tilde{C}_{(1^2)}(I_m) = m(m-1)/2$ en las expresiones anteriores y simplificando, se obtiene

$$
\begin{aligned}
E[\mathrm{tr}(X)] &= \frac{am}{a+b},\\
E[\mathrm{tr}(X^{-1})] &= \frac{(a+b-m)m}{a-m}, a > m,\\
E[\mathrm{tr}(X^2)] &= \frac{am(a^2+ab+bm-1)}{(a+b-1)(a+b)(a+b+1)},
\end{aligned}
$$

y

$$
E[\mathrm{tr}(X^{-2})] = \frac{m(a+b-m)[(a-m)^2+ab-1]}{(a-m)(a-m-1)(a-m+1)}, \quad a > m+1.
$$

Finalmente, el calculo de los coeficientes de m en las expresiones anteriores da los resultados deseados. ■

Teorema 2.3.2 *Sea $X \sim \mathbb{C}\mathrm{B}^I_m(a,b)$. Entonces,*

$$
\begin{aligned}
E(X^3) = \frac{a}{6(a+b)} &\left[\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(a+b+1)(a+b+2)} - \frac{2(a^2-1)(m^2-1)}{(a+b)^2-1} \right.\\
&\left. + \frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(a+b-1)(a+b-2)} \right]
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
E(X^{-3}) = \frac{(a+b-m)}{6(a-m)} &\left[\frac{(a+b-m-1)(a+b-m-2)(m+1)(m+2)}{(a-m-1)(a-m-2)} \right.\\
&+ \frac{(a+b-m+1)(a+b-m+2)(m-1)(m-2)}{(a-m+1)(a-m+2)}\\
&\left. - \frac{2[(a+b-m)^2-1](m^2-1)}{(a-m)^2-1} \right], \quad a > m+2.
\end{aligned}
$$

Prueba: Usando (1.3.20), los valores esperados de $\mathrm{tr}(X^3)$ y $\mathrm{tr}(X^{-3})$ se obtienen como

$$
\begin{aligned}
E[\mathrm{tr}(X^3)] &= E[\tilde{C}_{(3)}(X)] - \frac{1}{2}E[\tilde{C}_{(2,1)}(X)] + E[\tilde{C}_{(1^3)}(X)]\\
&= \frac{[a]_{(3)}}{[a+b]_{(3)}}\tilde{C}_{(3)}(I_m) - \frac{1}{2}\frac{[a]_{(2,1)}}{[a+b]_{(2,1)}}\tilde{C}_{(2,1)}(I_m) + \frac{[a]_{(1^3)}}{[a+b]_{(1^3)}}\tilde{C}_{(1^3)}(I_m)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
E[\operatorname{tr}(X^{-3})] &= E[\tilde{C}_{(3)}(X^{-1})] - \frac{1}{2}E[\tilde{C}_{(2,1)}(X^{-1})] + E[\tilde{C}_{(1^3)}(X^{-1})] \\
&= \frac{[-a-b+m]_{(3)}}{[-a+m]_{(3)}}\tilde{C}_{(3)}(I_m) - \frac{1}{2}\frac{[-a-b+m]_{(2,1)}}{[-a+m]_{(2,1)}}\tilde{C}_{(2,1)}(I_m) \\
&\quad + \frac{[-a-b+m]_{(1^3)}}{[-a+m]_{(1^3)}}\tilde{C}_{(1^3)}(I_m),
\end{aligned}
$$

respectivamente. Ahora, usando los resultados $[n]_{(3)} = n(n+1)(n+2)$, $[n]_{(2,1)} = n(n+1)(n-1)$, $[n]_{(1^3)} = n(n-1)(n-2)$, $[-n+m]_{(3)} = -(n-m)(n-m-1)(n-m-2)$, $[-n+m]_{(2,1)} = -(n-m)(n-m-1)(n-m+1)$, $[-n+m]_{(1^3)} = -(n-m)(n-m+1)(n-m+2)$, $\tilde{C}_{(3)}(I_m) = m(m+1)(m+2)/6$, $\tilde{C}_{(2,1)}(I_m) = 2m(m^2-1)/3$ y $\tilde{C}_{(1^3)}(I_m) = m(m-1)(m-2)/6$ en las expresiones anteriores y simplificando, se obtiene

$$
\begin{aligned}
E[\operatorname{tr}(X^{3})] &= \frac{am}{6(a+b)}\left[\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(a+b+1)(a+b+2)} - \frac{2(a^2-1)(m^2-1)}{(a+b)^2-1}\right. \\
&\quad \left. + \frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(a+b-1)(a+b-2)}\right]
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
E[\operatorname{tr}(X^{-3})] &= \frac{(a+b-m)m}{6(a-m)}\left[\frac{(a+b-m-1)(a+b-m-2)(m+1)(m+2)}{(a-m-1)(a-m-2)}\right. \\
&\quad + \frac{(a+b-m+1)(a+b-m+2)(m-1)(m-2)}{(a-m+1)(a-m+2)} \\
&\quad \left. - \frac{2[(a+b-m)^2-1](m^2-1)}{(a-m)^2-1}\right], \quad a > m+2.
\end{aligned}
$$

Finalmente, el cálculo de los coeficientes de m en las expresiones anteriores da $\tilde{c}_3(m,a,b)$ y $\tilde{d}_3(m,a,b)$. ■

Similarmente, aplicando la técnica descrita anteriormente, los valores esperados de $(\operatorname{tr}X)^2$, $(\operatorname{tr}X)^3$, $\operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(X^2)$, $(\operatorname{tr}X^{-1})^2$, $(\operatorname{tr}X^{-1})^3$ y $\operatorname{tr}(X^{-1})\operatorname{tr}(X^{-2})$ se evalúan como

$$
\begin{aligned}
E[(\operatorname{tr}X)^2] &= E[\tilde{C}_{(2)}(X)] + E[\tilde{C}_{(1^2)}(X)] \\
&= \frac{ma(ma^2+mab+b-m)}{(a+b-1)(a+b)(a+b+1)}, \qquad (2.3.1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[(\mathrm{tr} X)^3] &= E[\tilde{C}_{(3)}(X)] + E[\tilde{C}_{(2,1)}(X)] + E[\tilde{C}_{(1^3)}(X)] \\
&= \frac{am}{6(a+b)}\left[\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(a+b+1)(a+b+2)} + \frac{4(a^2-1)(m^2-1)}{(a+b)^2-1}\right. \\
&\quad \left. + \frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(a+b-1)(a+b-2)}\right],
\end{aligned} \tag{2.3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
E[\mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(X^2)] &= E[\tilde{C}_{(3)}(X)] - E[\tilde{C}_{(1^3)}(X)] \\
&= \frac{am}{6(a+b)}\left[\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(a+b+1)(a+b+2)}\right. \\
&\quad \left. - \frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(a+b-1)(a+b-2)}\right],
\end{aligned} \tag{2.3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
E[(\mathrm{tr} X^{-1})^2] &= E[\tilde{C}_{(2)}(X^{-1})] + E[\tilde{C}_{(1^2)}(X^{-1})] \\
&= \frac{m(a+b-m)[m(a-m)(a+b-m)+b-m]}{(a-m-1)(a-m)(a-m+1)}, \quad a > m+1,
\end{aligned} \tag{2.3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
E[(\mathrm{tr} X^{-1})^3] &= \frac{(a+b-m)m}{6(a-m)}\left[\frac{(a+b-m-1)(a+b-m-2)(m+1)(m+2)}{(a-m-1)(a-m-2)}\right. \\
&\quad + \frac{(a+b-m+1)(a+b-m+2)(m-1)(m-2)}{(a-m+1)(a-m+2)} \\
&\quad \left. + \frac{4[(a+b-m)^2-1](m^2-1)}{(a-m)^2-1}\right], \quad a > m+2,
\end{aligned} \tag{2.3.5}
$$

y

$$
\begin{aligned}
E[\mathrm{tr}(X^{-1})\,\mathrm{tr}(X^{-2})] &= E[\tilde{C}_{(3)}(X^{-1})] - E[\tilde{C}_{(1^3)}(X^{-1})] \\
&= \frac{(a+b-m)m}{6(a-m)}\left[\frac{(a+b-m-1)(a+b-m-2)(m+1)(m+2)}{(a-m-1)(a-m-2)}\right. \\
&\quad \left. - \frac{(a+b-m+1)(a+b-m+2)(m-1)(m-2)}{(a-m+1)(a-m+2)}\right], a > m+2.
\end{aligned} \tag{2.3.6}
$$

Además, usando (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4), (2.3.5) y (2.3.6), es fácil probar que

$$
E[(\mathrm{tr} X)X] = \frac{a(ma^2+mab+b-m)}{(a+b-1)(a+b)(a+b+1)} I_m,
$$

$$E[(\mathrm{tr}X)^2X] = \frac{a}{6(a+b)}\left[\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(a+b+1)(a+b+2)}+\frac{4(a^2-1)(m^2-1)}{(a+b)^2-1}\right.$$
$$\left.+\frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(a+b-1)(a+b-2)}\right]I_m,$$

$$\begin{aligned}E[\mathrm{tr}(X^2)X] &= E[\mathrm{tr}(X)X^2]\\ &= \frac{a}{6(a+b)}\left[\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(a+b+1)(a+b+2)}\right.\\ &\quad\left.-\frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(a+b-1)(a+b-2)}\right]I_m,\end{aligned}$$

$$E[(\mathrm{tr}X^{-1})X^{-1}] = \frac{(a+b-m)[m(a-m)(a+b-m)+b-m]}{(a-m-1)(a-m)(a-m+1)}I_m, \quad a>m+1,$$

$$\begin{aligned}E[(\mathrm{tr}X^{-1})^2X^{-1}] = \frac{(a+b-m)}{6(a-m)}&\left[\frac{(a+b-m-1)(a+b-m-2)(m+1)(m+2)}{(a-m-1)(a-m-2)}\right.\\ &+\frac{(a+b-m+1)(a+b-m+2)(m-1)(m-2)}{(a-m+1)(a-m+2)}\\ &\left.+\frac{4[(a+b-m)^2-1](m^2-1)}{(a-m)^2-1}\right]I_m, \quad a>m+2,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}E[\mathrm{tr}(X^{-1})X^{-2}] &= E[\mathrm{tr}(X^{-2})X^{-1}]\\ &= \frac{(a+b-m)}{6(a-m)}\left[\frac{(a+b-m-1)(a+b-m-2)(m+1)(m+2)}{(a-m-1)(a-m-2)}\right.\\ &\quad\left.-\frac{(a+b-m+1)(a+b-m+2)(m-1)(m-2)}{(a-m+1)(a-m+2)}\right]I_m,\ a>m+2.\end{aligned}$$

Sea $Y \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{II}(a,b)$. Entonces, usando la invarianza, es fácil mostrar que para un entero positivo r, $E(Y^r) = \tilde{e}_r(m,a,b)I_m$, donde $\tilde{e}_r(m,a,b)$ es una constante dependiente de r,m, a y b. Así, usando este resultado, (2.2.5) y propiedades de los polinomios zonales, se obtiene

$$\begin{aligned}E(Y) &= \frac{a}{b-m}I_m, b>m,\\ E(Y^2) &= \frac{a(1+ab+bm-m^2)}{(b-m)(b-m-1)(b-m+1)}I_m, \quad b>m+1,\end{aligned}$$

$$E[(\operatorname{tr}Y)Y] = \frac{a[am(b-m)+a+b]}{(b-m)(b-m-1)(b-m+1)}I_m, \quad b > m+1,$$

$$\begin{aligned}E(Y^3) = \frac{a}{6(b-m)}\Big[&\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(b-m-1)(b-m-2)} - \frac{2(a^2-1)(m^2-1)}{(b-m)^2-1}\\ &+\frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(b-m+1)(b-m+2)}\Big]I_m, \quad b > m+2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[(\operatorname{tr}Y)^2Y] = \frac{a}{6(b-m)}\Big[&\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(b-m-1)(b-m-2)} + \frac{4(a^2-1)(m^2-1)}{(b-m)^2-1}\\ &+\frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(b-m+1)(b-m+2)}\Big]I_m,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}E[\operatorname{tr}(Y^2)Y] &= E[\operatorname{tr}(Y)Y^2]\\ &= \frac{a}{6(b-m)}\Big[\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(b-m-1)(b-m-2)}\\ &\quad -\frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(b-m+1)(b-m+2)}\Big]I_m.\end{aligned}$$

Además, los valores esperados de funciones de Y^{-1} tales como $E(Y^{-1})$, $E(Y^{-2})$, $E(Y^{-3})$, $E[(\operatorname{tr}Y^{-1})Y^{-1}]$, $E[(\operatorname{tr}Y^{-1})^2Y^{-1}]$y $E[\operatorname{tr}(Y^{-2})Y^{-1}]$ pueden obtenerse de $E(Y)$, $E(Y^2)$, $E(Y^3)$, $E[(\operatorname{tr}Y)Y]$, $E[(\operatorname{tr}Y)^2Y]$ y $E[\operatorname{tr}(Y^2)Y]$ respectivamente observando que $Y^{-1} \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{II}(b,a)$. Finalmente, si $Y \sim \mathbb{C}\mathrm{B}_m^{II}(a,b;\Omega)$, entonces

$$E(Y) = \frac{a}{b-m}\Omega, \quad b > m,$$
$$E(Y\Omega^{-1}Y) = \frac{a(1+ab+bm-m^2)}{(b-m)(b-m-1)(b-m+1)}\Omega, \quad b > m+1,$$

$$\begin{aligned}E(Y\Omega^{-1}Y\Omega^{-1}Y) = \frac{a}{6(b-m)}\Big[&\frac{(a+1)(a+2)(m+1)(m+2)}{(b-m-1)(b-m-2)} - \frac{2(a^2-1)(m^2-1)}{(b-m)^2-1}\\ &+\frac{(a-1)(a-2)(m-1)(m-2)}{(b-m+1)(b-m+2)}\Big]\Omega, \quad b > m+2.\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN DIRICHLET DE VARIABLE MATRIZ COMPLEJA

3.1. INTRODUCCIÓN

Como generalización de la densidad (2.1.1), se define la distribución Dirichlet tipo I a matriz compleja como sigue:

Se dice que las matrices $X_1,\dots,X_n$ definidas positivas, hermitianas y aleatorias de orden $m\times m$ tienen la distribución Dirichlet tipo I con parámetros $(a_1,\dots,a_n;\,a_{n+1})$, denotada por $(X_1,\dots,X_n)\sim \mathbb{C}D_m^I(a_1,\dots,a_n;a_{n+1})$, si su función de densidad de probabilidad conjunta está dada por

$$\{\tilde{B}_m(a_1,\dots,a_n;a_{n+1})\}^{-1}\prod_{i=1}^{n}\det(X_i)^{a_i-m}\det\left(I_m-\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^{a_{n+1}-m} \tag{3.1.1}$$

donde $I_m-\sum_{i=1}^{n}X_i$ es hermitiana definida positiva, $a_i>m-1$, para $i=1,\dots,n+1$ y

$$\tilde{B}_m(a_1,\dots,a_n;a_{n+1})=\frac{\prod_{i=1}^{n+1}\tilde{\Gamma}_m(a_i)}{\tilde{\Gamma}_m(\sum_{i=1}^{n+1}a_i)}.$$

Para $n=1$, dicha distribución se reduce a una distribución beta tipo I con parámetros (a_1,a_2).

La distribución Dirichlet a matriz compleja ha sido definida y estudiada por varios autores (ver, por ejemplo, Troskie [59], Tan [60], Gupta y Nagar [25], y Cui, Gupta y Nagar [9]). Un recuento extenso sobre la distribución Dirichlet está disponible en Gupta y Nagar [32].

En este capítulo, veremos algunas propiedades incluyendo la expansión asintótica de la distribución.

3.2. PROPIEDADES

En esta sección, se obtiene varios resultados sobre la distribución Dirichlet tipo I.

Definición 3.2.1 *Las matrices $Z_1,\ldots,Z_n$ hermitianas y definidas positivas de orden $m\times m$ se dice que tienen distribución Dirichlet tipo I de variable matricial compleja con parámetros $a_1,\ldots,a_n;a_{n+1}$ y Ω, denotada por $(Z_1,\ldots,Z_n)\sim\mathbb{C}D_m^I(a_1,\ldots,a_n;a_{n+1};\Omega)$, si su f.d.p. conjunta está dada por*

$$\frac{\prod_{i=1}^n \det(Z_i)^{a_i-m}\det(\Omega-\sum_{i=1}^n Z_i)^{a_{n+1}-m}}{\tilde{B}_m(a_1,\ldots,a_n;a_{n+1})\det(\Omega)^{\sum_{i=1}^{n+1}a_i-m}}, \tag{3.2.1}$$

donde $0<Z_i=Z_i^H<\Omega$, $i=1,\ldots,n$, y $\sum_{i=1}^n Z_i<\Omega$.

Teorema 3.2.1 *Sea $(X_1,\ldots,X_n)\sim\mathbb{C}D_m^I(a_1,\ldots,a_n;a_{n+1})$ y A una matriz compleja constante no singular de orden $m\times m$. Entonces,*

$$(AX_1A^H,\ldots,AX_nA^H)\sim\mathbb{C}D_m^I(a_1,\ldots,a_n;a_{n+1};AA^H).$$

Prueba: Usando la transformación $Z_i=AX_iA^H$, $i=1,\ldots,n$ con Jacobiano

$$J(X_1,\ldots,X_n\to Z_1,\ldots,Z_n)=\det(AA^H)^{-mn}$$

en (3.1.1), se obtiene el resultado deseado. ■

Es fácil probar que si $(W_1,\dots,W_n) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1,\dots,a_n;a_{n+1};B)$, entonces

$$(B^{-\frac{1}{2}}W_1B^{-\frac{1}{2}},\dots,B^{-\frac{1}{2}}W_nB^{-\frac{1}{2}}) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1,\dots,a_n;a_{n+1}).$$

En el próximo teorema, se demuestra que la distribución Dirichlet tipo I es invariante unitaria.

Teorema 3.2.2 *Sea $(X_1,\dots,X_n) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1,\dots,a_n;a_{n+1})$ y U $(m\times m)$ una matriz unitaria, cuyos elementos son constantes o variables aleatorias distribuidas independientemente de X. Entonces, la distribución de $(X_1,\dots,X_n)$ es unitaria invariante bajo la transformación $X_i \to UX_iU^H$, $i=1,\dots,n$ y es independiente de U en el segundo caso.*

Prueba: Primero, Sea U una matriz constante unitaria. Entonces, usando el Teorema 3.2.1, se tiene $(UX_1U^H,\dots,UX_nU^H) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1,\dots,a_n;a_{n+1})$ puesto que $UU^H = I_m$. Sin embargo, si U es una matriz unitaria aleatoria, entonces $(UX_1U^H,\dots,UX_nU^H)|U \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1,\dots, a_n;a_{n+1})$. Como esta última distribución no depende de U es también distribución incondicional, lo que prueba el teorema. ∎

Teorema 3.2.3 *Si $(X_1,\dots,X_n) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1,\dots,a_n;a_{n+1})$. Entonces, para $1\le i\le n$,*

$$\left(X_1,\dots,X_{i-1},I_m-\sum_{r=1}^n X_r,X_{i+1},\dots,X_n\right) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1,\dots,a_{i-1},a_{n+1},a_{i+1},\dots,a_n;a_i).$$

Prueba: La transformación $Y_k = X_k$, $k=1,\dots,i-1,i+1,\dots,n$ y $Y_i = I_m - \sum_{r=1}^n X_r$ con Jacobiano $J(X_1,\dots,X_n \to Y_1,\dots,Y_n) = 1$ en la densidad (3.1.1) da el resultado deseado. ∎

Teorema 3.2.4 *Sea $(X_1,\dots,X_n) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1,\dots,a_n;a_{n+1})$ defínase*

$$W_i = \left(I_m - \sum_{i=1}^s X_i\right)^{-\frac{1}{2}} X_i \left(I_m - \sum_{i=1}^s X_i\right)^{-\frac{1}{2}},\ i=s+1,\dots,n.$$

Entonces, $(X_1,\dots,X_s)$ y $(W_{s+1},\dots,W_n)$ son independientes,

$$(X_1,\dots,X_s) \sim \mathbb{C}D_m^I\left(a_1,\dots,a_s;\sum_{i=s+1}^{n+1} a_i\right),$$

y

$$(W_{s+1},\dots,W_n) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_{s+1},\dots,a_n;a_{n+1}).$$

Prueba: Transformando $W_i = (I_m - \sum_{i=1}^{s} X_i)^{-\frac{1}{2}} X_i (I_m - \sum_{i=1}^{s} X_i)^{-\frac{1}{2}}, i = s+1,\ldots,n$ con el Jacobiano

$$J(X_{s+1},\ldots,X_n \to W_{s+1},\ldots,W_n) = \det\left(I_m - \sum_{i=1}^{s} X_i\right)^{m(n-s)},$$

en la densidad de $(X_1,\ldots,X_n)$, se obtiene el resultado deseado. ■

Usando (3.1.1), el "momento" mixto de orden $(h_1,\ldots,h_n)^{\text{th}}$ se deriva como

$$E[\det(X_1)^{h_1}\cdots\det(X_n)^{h_n}] = \frac{\tilde{\Gamma}_m(\sum_{i=1}^{n+1} a_i)}{\tilde{\Gamma}_m(\sum_{i=1}^{n+1} a_i + \sum_{i=1}^{n} h_i)} \prod_{i=1}^{n} \frac{\tilde{\Gamma}_m(a_i + h_i)}{\tilde{\Gamma}_m(a_i)}.$$

si $a_i + h_i > m-1$, $i = 1,\ldots,n$, y no existe en otros casos. Las medias, varianzas y covariazas se obtienen como

$$E[\det(X_i)] = \prod_{r=1}^{m} \frac{(a_i - r + 1)}{(\sum_{i=1}^{n+1} a_i - r + 1)}, i = 1,\ldots,n,$$

$$\text{Var}[\det(X_i)] = \frac{m\sum_{k=1(\neq i)}^{n} a_k}{(\sum_{i=1}^{n+1} a_i + 1)(a_i - m + 1)} \prod_{r=1}^{m} \frac{(a_i - r + 1)^2}{(\sum_{i=1}^{n+1} a_i - r + 1)^2}, i = 1,\ldots,n,$$

$$\text{cov}[\det(X_i),\det(X_j)] = -\frac{m}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i + 1} \prod_{r=1}^{m} \frac{(a_i - r + 1)(a_j - r + 1)}{(\sum_{i=1}^{n+1} a_i - r + 1)^2}, \quad i \neq j, i, j = 1,\ldots,n.$$

En el próximo teorema, se obtiene la f.d.p. conjunta de sumas parciales de matrices aleatorias distribuidas conjuntamente como Dirichlet tipo I.

Teorema 3.2.5 *Sea* $(X_1,\ldots,X_n) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1,\ldots,a_n;a_{n+1})$ *y defínase*

$$X_{(i)} = \sum_{j=n_{i-1}^*+1}^{n_i^*} X_j, \quad a_{(i)} = \sum_{j=n_{i-1}^*+1}^{n_i^*} a_j, \quad n_0^* = 0, \quad n_i^* = \sum_{j=1}^{i} n_j, \quad i = 1,\ldots,\ell.$$

Entonces, $(X_{(1)},\ldots,X_{(\ell)}) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_{(1)},\ldots,a_{(\ell)};a_{n+1})$.

Prueba: Se usa la transformación

$$X_{(i)} = \sum_{j=n_{i-1}^*+1}^{n_i^*} X_j, \quad \text{y} \quad W_j = X_{(i)}^{-\frac{1}{2}} X_j X_{(i)}^{-\frac{1}{2}}, \quad j = n_{i-1}^*+1,\ldots,n_i^*-1, \tag{3.2.2}$$

$i = 1,\ldots,\ell$. El Jacobiano de esta transformación está dado por

$$\begin{aligned} &J(X_1,\ldots,X_n \to W_1,\ldots,W_{n_1-1},X_{(1)},\ldots,W_{n_{\ell-1}^*+1},\ldots,W_{n-1},X_{(\ell)}) \\ &\qquad = \prod_{i=1}^{\ell} J(X_{n_{i-1}^*+1},\ldots,X_{n_i^*} \to W_{n_{i-1}^*+1},\ldots,W_{n_i^*-1},X_{(i)}) \\ &\qquad = \prod_{i=1}^{\ell} \det(X_{(i)})^{m(n_i-1)}. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Ahora, sustituyendo (3.2.2) y (3.2.3) en la densidad conjunta de $(X_1,\ldots,X_n)$ dada por (3.1.1), se obtiene la densidad conjunta de $W_{n_{i-1}^*+1},\ldots,W_{n_i^*-1},X_{(i)}$, $i=1,\ldots,\ell$ como

$$\begin{aligned} &\{\tilde{B}_m(a_1,\ldots,a_n;a_{n+1})\}^{-1} \prod_{i=1}^{\ell} \det(X_{(i)})^{a_{(i)}-m} \det\left(I_m - \sum_{i=1}^{\ell} X_{(i)}\right)^{a_{n+1}-m} \\ &\times \prod_{i=1}^{\ell} \left[\prod_{j=n_{i-1}^*+1}^{n_i^*-1} \det(W_j)^{a_j-m} \det\left(I_m - \sum_{j=n_{i-1}^*+1}^{n_i^*-1} W_j\right)^{a_{n_i^*}-m} \right], \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

donde $0 < X_{(i)} = X_{(i)}^H < I_m$, $\sum_{i=1}^{\ell} X_{(i)} < I_m$, $0 < W_j = W_j^H < I_m$, $j = n_{i-1}^*+1,\ldots,n_i^*-1$, $\sum_{j=n_{i-1}^*+1}^{n_i^*-1} W_j < I_m$, $i=1,\ldots,\ell$. Por (3.2.4), es fácil observar que $(X_{(1)},\ldots,X_{(\ell)})$ y $(W_{n_{i-1}^*+1},\ldots,W_{n_i^*-1})$, $i=1,\ldots,\ell$, estan independientemente distribuidas. Además,

$$(X_{(1)},\ldots,X_{(\ell)}) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_{(1)},\ldots,a_{(\ell)};a_{n+1})$$

y

$$(W_{n_{i-1}^*+1},\ldots,W_{n_i^*-1}) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_{n_{i-1}^*+1},\ldots,a_{n_i^*-1};a_{n_i^*}),$$

para $i=1,\ldots,\ell$. ■

Cuando $\ell = 1$, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathbb{C}B_m^I(\sum_{i=1}^{n} a_i, a_{n+1})$.

Ahora, daremos resultados sobre distribuciones marginal y condicional de matrices aleatorias Dirichlet tipo I que serán usados para obtener varios resultados distribucionales.

Teorema 3.2.6 *Sea* $(X_1,\ldots,X_n)\sim \mathbb{C}D^I_{m_1+m_2}(a_1,\ldots,a_n;a_{n+1})$ *pártase* X_i *como*

$$X_i=\begin{pmatrix} X_{11(i)} & X_{12(i)} \\ X^H_{12(i)} & X_{22(i)}\end{pmatrix},\quad X_{11(i)}\,(m_1\times m_1),\quad i=1,\ldots,n.$$

Entonces, (i) $(X_{11(1)},\ldots,X_{11(n)})$ *y* $(X_{22\cdot1(1)},\ldots,X_{22\cdot1(n)})$ *son distribuidas independientemente. Además,*

$$(X_{11(1)},\ldots,X_{11(n)})\sim \mathbb{C}D^I_{m_1}(a_1,\ldots,a_n;a_{n+1}),$$

y

$$(X_{22\cdot1(1)},\ldots,X_{22\cdot1(n)})\sim \mathbb{C}D^I_{m_2}(a_1-m_1,\ldots,a_n-m_1;a_{n+1}+(n-1)m_1).$$

(ii) $(X_{22(1)},\ldots,X_{22(n)})$ *y* $(X_{11\cdot2(1)},\ldots,X_{11\cdot2(n)})$ *son distribuidas independientemente. Además,*

$$(X_{22(1)},\ldots,X_{22(n)})\sim \mathbb{C}D^I_{m_2}(a_1,\ldots,a_n;a_{n+1}),$$

y

$$(X_{11\cdot2(1)},\ldots,X_{11\cdot2(n)})\sim \mathbb{C}D^I_{m_1}(a_1-m_2,\ldots,,a_n-m_2;a_{n+1}+(n-1)m_2).$$

Prueba: Ver Tan [60] ■

Ahora se obtendrá las distribuciones de AXA^H y $(AX^{-1}A^H)^{-1}$ donde $A\,(q\times m)$ es una matriz constante de rango $q\,(\leq m)$.

Teorema 3.2.7 *Sea* $(X_1,\ldots,X_n)\sim \mathbb{C}D^I_m(a_1,\ldots,a_n;a_{n+1})$. *Entonces, para una matriz compleja constante* $A\,(q\times m)$ *de rango* $q\,(\leq m)$,

$$(AX_1A^H,\ldots,AX_nA^H)\sim \mathbb{C}D^I_q(a_1,\ldots,a_n;a_{n+1};AA^H).$$

Prueba: Escríbase $A=M\begin{pmatrix}I_q & 0\end{pmatrix}G$, donde $M\,(q\times q)$ y $G\,(m\times m)$ son matrices compleja no singular y unitaria, respectivamente y $\begin{pmatrix}I_q & 0\end{pmatrix}$ es una matriz particonada de orden $q\times m$

con I_q matriz identidad de orden $q \times q$ y 0 matriz nula de orden $q \times (m-q)$. Ahora, para $i = 1, \ldots, n$,

$$AX_iA^H = M\left(I_q\ 0\right)GX_iG^H\left(I_q\ 0\right)^H M^H = MU_{11(i)}M^H,$$

donde $U_i = GX_iG^H$ y $U_{11(i)}\,(q \times q)$ es el primer bloque de la diagonal principal de U_i. Por los Teorema 3.2.2 y Teorema 3.2.6, se sabe que $(U_1, \ldots, U_n) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1, \ldots, a_n; a_{n+1})$ y $(U_{11(1)}, \ldots, U_{11(n)}) \sim \mathbb{C}D_q^I(a_1, \ldots, a_n; a_{n+1})$. Luego, usando el Teorema 3.2.1,

$$(MU_{11(1)}M^H, \ldots, MU_{11(n)}M^H) \sim \mathbb{C}D_q^I(a_1, \ldots, a_n; a_{n+1}; MM^H)$$

y el resultado se sigue notando que $AX_iA^H = MU_{11(i)}M^H$, $i = 1, \ldots, m$ y $MM^H = AA^H$. ■

Corolario 3.2.7.1 *Sea* $(X_1, \ldots, X_n) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1, \ldots, a_n; a_{n+1})$ *y* $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, *entonces*

$$\left(\frac{\mathbf{c}^H X_1 \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}, \ldots, \frac{\mathbf{c}^H X_n \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}\right) \sim D^I(a_1, \ldots, a_n; a_{n+1}).$$

Prueba: Tómese $q = 1$ en el Teorema 3.2.7. ■

La distribución Dirichlet tipo I designada por $D^I(a_1, \ldots, a_n; a_{n+1})$ usada en el anterior corolario es definida por la f.d.p.

$$\frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{n+1} a_i)}{\prod_{i=1}^{n+1}\Gamma(a_i)} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i - 1}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{a_{n+1}-1},$$

donde $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i < 1$ y $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n+1$.

En Corolario 3.2.7.1 la distribución de $\left(\frac{\mathbf{c}^H X_1 \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}, \ldots, \frac{\mathbf{c}^H X_n \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}\right)$ no depende de $\mathbf{c}$. Luego si $\mathbf{z}\,(m \times 1)$ es un vector aleatorio complejo, independiente de $(X_1, \ldots, X_n)$, y $P(\mathbf{z} \neq \mathbf{0}) = 1$, entonces se sigue que

$$\left(\frac{\mathbf{z}^H X_1 \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{z}}, \ldots, \frac{\mathbf{z}^H X_n \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{z}}\right) \sim D^I(a_1, \ldots, a_n; a_{n+1}).$$

Teorema 3.2.8 *Sea A una matriz constante compleja de orden $q \times m$ y de rango $q\,(\leq m)$. Si*$(X_1, \ldots, X_n) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1, \ldots, a_n; a_{n+1})$. *Entonces*

$$\begin{aligned}((AX_1^{-1}A^H)^{-1}, \ldots, (AX_n^{-1}A^H)^{-1}) \sim \mathbb{C}D_q^I(&a_1 - m + q, \ldots, a_n - m + q;\\ &a_{n+1} + (n-1)(m-q); (AA^H)^{-1}).\end{aligned}$$

Prueba: Escríbase $A = M\begin{pmatrix} I_q & 0 \end{pmatrix} G$, donde $M\,(q \times q)$ es no singular y $G\,(m \times m)$ es unitaria. Ahora, para $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
(AX_i^{-1}A^H)^{-1} &= [M\begin{pmatrix} I_q & 0 \end{pmatrix} GX_i^{-1}G^H \begin{pmatrix} I_q & 0 \end{pmatrix}^H M^H]^{-1} \\
&= (M^H)^{-1}\left[\begin{pmatrix} I_q & 0 \end{pmatrix} U_i^{-1} \begin{pmatrix} I_q \\ 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} M^{-1} \\
&= (M^H)^{-1}(U_i^{11})^{-1}M^{-1},
\end{aligned}$$

donde $U_i = GX_iG^H = \begin{pmatrix} U_{11(i)} & U_{12(i)} \\ U_{21(i)} & U_{22(i)} \end{pmatrix}$, $U_{11(i)}\,(q \times q)$, y $U_i^{11} = U_{11\cdot 2(i)}^{-1}$, $i = 1, \dots, n$. Notese que $(U_1, \dots, U_n) \sim \mathbb{C}D_m^I(a_1, \dots, a_n; a_{n+1})$. Luego, por el teorema 3.2.6,

$$(U_{11\cdot 2(1)}, \dots, U_{11\cdot 2(n)}) \sim \mathbb{C}D_q^I(a_1 - m + q, \dots, a_n - m + q; a_{n+1} + (n-1)(m-q))$$

y el teorema 3.2.1,

$$\begin{aligned}
&((M^H)^{-1}U_{11\cdot 2(1)}M^{-1}, \dots, (M^H)^{-1}U_{11\cdot 2(n)}M^{-1}) \\
&\qquad \sim \mathbb{C}D_q^I(a_1 - m + q, \dots, a_n - m + q; a_{n+1} + (n-1)(m-q); (MM^H)^{-1}).
\end{aligned}$$

La demostración se completa observando que $(AX_i^{-1}A^H)^{-1} = (M^H)^{-1}U_{11\cdot 2(i)}M^{-1}$, $i = 1, \dots, n$ y $MM^H = AA^H$. ■

Por el teorema anterior, cuando $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, se sigue que

$$\left(\frac{\mathbf{c}^H\mathbf{c}}{\mathbf{c}^H X_1^{-1}\mathbf{c}}, \dots, \frac{\mathbf{c}^H\mathbf{c}}{\mathbf{c}^H X_n^{-1}\mathbf{c}}\right) \sim D^I(a_1 - m + 1, \dots, a_n - m + 1; a_{n+1} + (n-1)(m-1)).$$

Ahora, si $\mathbf{z}\,(m \times 1)$ es un vector aleatorio independiente de $(X_1, \dots, X_n)$, y $P(\mathbf{z} \neq \mathbf{0}) = 1$, entonces

$$\left(\frac{\mathbf{z}^H\mathbf{z}}{\mathbf{z}^H X_1^{-1}\mathbf{z}}, \dots, \frac{\mathbf{z}^H\mathbf{z}}{\mathbf{z}^H X_n^{-1}\mathbf{z}}\right) \sim D^I(a_1 - m + 1, \dots, a_n - m + 1; a_{n+1} + (n-1)(m-1)).$$

Finalmente, sustituyendo $n = 1$ en los resultados obtenidos para la distribución Dirichlet tipo I, se logra varias propiedades interesantes de la distribución beta tipo I. Se asume que $X \sim \mathbb{C}B_m^I(a_1, a_2)$.

(i) Sea A una matriz constante no singular de orden $m \times m$. Entonces, la distribución de $Z = AXA^H$, denotada por $Z \sim \mathbb{C}B_m^I(a_1, a_2; AA^H)$, está dada por la siguiente f.d.p.

$$\frac{\det(Z)^{a_1-m}\det(AA^H - Z)^{a_2-m}}{\tilde{B}_m(a_1,a_2)\det(AA^H)^{a_1+a_2-m}}, 0 < Z = Z^H < AA^H.$$

(ii) Si $W \sim \mathbb{C}B_m^I(a_1, a_2; B)$, entonces $B^{-\frac{1}{2}}WB^{-\frac{1}{2}} \sim \mathbb{C}B_m^I(a_1, a_2)$.

(iii) Sea $U\,(m \times m)$ una matriz unitaria cuyos elementos son ya sea constantes o variables aleatorias distribuidas independientemente de X. Entonces la distribución de X es unitaria invariante bajo la transformación $X \to UXU^H$, y es independiente de U en el segundo caso.

(iv) Para una matriz constante compleja A de orden $q \times m$ y de rango $q\,(\leq m)$,

$$AXA^H \sim \mathbb{C}B_q^I(a_1, a_2; AA^H)$$

y

$$(AX^{-1}A^H)^{-1} \sim \mathbb{C}B_q^I(a_1 - m + q, a_2; (AA^H)^{-1}).$$

(v) Sea $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\frac{\mathbf{c}^H X \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H \mathbf{c}} \sim B^I(a_1, a_2)$$

y

$$\frac{\mathbf{c}^H \mathbf{c}}{\mathbf{c}^H X^{-1} \mathbf{c}} \sim B^I(a_1 - m + 1, a_2).$$

Además, si $\mathbf{z}\,(m \times 1)$ es un vector independiente de X y $P(\mathbf{z} \neq \mathbf{0}) = 1$, entonces

$$\frac{\mathbf{z}^H X \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{z}} \sim B^I(a_1, a_2)$$

y

$$\frac{\mathbf{z}^H\mathbf{z}}{\mathbf{z}^H X^{-1}\mathbf{z}} \sim B^I(a_1-m+1,a_2).$$

La distribución beta tipo I univariada denotada por $B^I(a_1,a_2)$ se define por la f.d.p.

$$\frac{\Gamma(a_1+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}x^{a_1-1}(1-x)^{a_2-1}, 0<x<1.$$

Los valores esperados de X y X^{-1} pueden obtenerse facilmente usando los anteriores resultados. Para cualquier $\mathbf{c}\in\mathbb{C}^{m\times 1}$, $\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$, se sabe que $\frac{\mathbf{c}^H X\mathbf{c}}{\mathbf{c}^H\mathbf{c}} \sim B^I(a_1,a_2)$ y $\frac{\mathbf{c}^H\mathbf{c}}{\mathbf{c}^H X^{-1}\mathbf{c}} \sim B^I(a_1-m+1,a_2)$ y así

$$E(\mathbf{c}^H X\mathbf{c}) = E(u_1)\mathbf{c}^H\mathbf{c} \quad \text{y} \quad E(\mathbf{c}^H X^{-1}\mathbf{c}) = E\left(\frac{1}{u_2}\right)\mathbf{c}^H\mathbf{c}$$

donde $u_1\sim B^I(a_1,a_2), u_2\sim B^I(a_1-m+1,a_2)$. Luego, para todo $\mathbf{c}\in\mathbb{C}^{m\times 1}$,

$$\mathbf{c}^H E(X)\mathbf{c} = \left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)\mathbf{c}^H\mathbf{c}, a_1>m-1, a_2>m-1,$$

y

$$\mathbf{c}^H E(X^{-1})\mathbf{c} = \left(\frac{a_1+a_2-m}{a_1-m}\right)\mathbf{c}^H\mathbf{c}, a_1>m, a_2>m-1,$$

lo cual implica que

$$E(X) = \left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)I_m, a_1>m-1, a_2>m-1, \tag{3.2.5}$$

y

$$E(X^{-1}) = \left(\frac{a_1+a_2-m}{a_1-m}\right)I_m, a_1>m, a_2>m-1. \tag{3.2.6}$$

como para una matriz $A\,(q\times m)$ constante de rango $q\,(\leq m)$,

$$(AA^H)^{-\frac{1}{2}}AXA^H(AA^H)^{-\frac{1}{2}} \sim \mathbb{C}B^I_q(a_1,a_2)$$

y

$$(AA^H)^{\frac{1}{2}}(AX^{-1}A^H)^{-1}(AA^H)^{\frac{1}{2}} \sim \mathbb{C}B_q^I(a_1-m+q,a_2)$$

se obtiene de (3.2.5) y (3.2.6),

$$E(AXA^H) = \left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)AA^H, a_1 > m-1, a_2 > m-1,$$

$$E(AXA^H)^{-1} = \left(\frac{a_1+a_2-q}{a_1-q}\right)(AA^H)^{-1}, a_1 > m, a_2 > m-1,$$

$$E(AX^{-1}A^H)^{-1} = \left(\frac{a_1-m+q}{a_1+a_2-m+q}\right)(AA^H)^{-1}, a_1 > m-1, a_2 > m-1,$$

y

$$E(AX^{-1}A^H) = \left(\frac{a_1+a_2-m}{a_1-m}\right)AA^H, a_1 > m, a_2 > m-1.$$

3.3. Expansión Asintótica

En esta sección se da la expansión asintótica de la función de densidad de probabilidad de la distribución Dirichlet tipo I. Primero se enuncian tres lemas que serán necesarios para el resultado final.

Lema 3.3.1 *Para* $|\arg(z)| \leq \pi-\varepsilon, \varepsilon > 0$*, el logaritmo de* $\Gamma(z+c)$ *puede expandirse como*

$$\begin{aligned} \ln\Gamma(z+c) &= \left(z+c-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \ln\sqrt{2\pi} \\ &\quad + \sum_{s=1}^{r} \frac{(-1)^{s+1}B_{s+1}(c)}{s(s+1)} z^{-s} + O(z^{-r-1}), \end{aligned}$$

donde $B_k(x)$ *es el polinomio de Bernoulli de grado k y orden uno.*

Lema 3.3.2 *Para escalares c_1 y c_2, se tiene*

$$\begin{aligned}\ln\left[\frac{\tilde{\Gamma}_m(z+c_1)}{\tilde{\Gamma}_m(z+c_2)}\right] &= (c_1-c_2)m\ln z \\ &+\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^{s+1}}{s(s+1)}\left[B_{s+1}(c_1-i+1)-B_{s+1}(c_2-i+1)\right]z^{-s} \\ &+O(z^{-r-1}), |\arg(z)| \leq \pi-\varepsilon, \varepsilon>0\end{aligned}$$

donde $B_k(x)$ es el polinomio de Bernoulli de grado k y orden uno.

Prueba: Escribiendo las funciones gamma multivariadas en términos de las funciones gamma ordinarias utilizando (1.2.4), se obtiene

$$\frac{\tilde{\Gamma}_m(z+c_1)}{\tilde{\Gamma}_m(z+c_2)} = \prod_{i=1}^{m}\frac{\Gamma(z+c_1-i+1)}{\Gamma(z+c_2-i+1)}. \tag{3.3.1}$$

Ahora, tomando logaritmo y usando Lema 3.3.1 en la expresión anterior, se obtiene el resultado deseado. ■

Lema 3.3.3 *Para* $\text{máx}_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|<1$, *donde $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ son valores propios de la matriz Z/n,*

$$-\ln\det\left(I_m-\frac{Z}{n}\right) = \sum_{s=1}^{r}\frac{n^{-s}\operatorname{tr}(Z^s)}{s}+O(n^{-r-1}).$$

Teorema 3.3.1 *Sea $(X_1,\ldots,X_n)\sim\mathbb{C}D_m^I(a_1,\ldots,a_n;a_{n+1})$. Defínase $W_i=a_{n+1}X_i$, $i=1,\ldots,n$. Entonces, la f.d.p. de $(W_1,\ldots,W_n)$ puede expresarse como*

$$\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{\det(W_i)^{a_i-m}}{\tilde{\Gamma}_m(a_i)}\right]\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}W_i\right)\left[1+\frac{\tilde{d}_1}{2a_{n+1}}+\frac{3\tilde{d}_1^2+4\tilde{d}_2}{24a_{n+1}^2}+O(a_{n+1}^{-3})\right], \tag{3.3.2}$$

donde $W_i=W_i^H>0$, $i=1,\ldots,n$,

$$\tilde{d}_1 = -\operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n}W_i\right)^2+2m\operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n}W_i\right)+am(a-m),$$

$$\tilde{d}_2 = -2\operatorname{tr}\left(-\sum_{i=1}^{n}W_i\right)^3+3m\operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n}W_i\right)^2-\frac{1}{2}am(2a^2-3am+2m^2-1)$$

y $a=\sum_{i=1}^{n}a_i$.

Prueba: Sustituyendo $W_i = a_{n+1}X_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, con

$$J(X_1,\ldots,X_n \to W_1,\ldots,W_n) = a_{n+1}^{-nm^2}$$

en (3.1.1), se obtiene la f.d.p. de $(W_1,\ldots,W_n)$ como

$$\left[\prod_{i=1}^{n} \frac{\det(W_i)^{a_i-m}}{\tilde{\Gamma}_m(a_i)}\right] \mathscr{I}_1\mathscr{I}_2, \quad W_i = W_i^H > 0, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{3.3.3}$$

donde

$$\mathscr{I}_1 = \frac{\tilde{\Gamma}_m(\sum_{i=1}^{n+1} a_i)}{\tilde{\Gamma}_m(a_{n+1})} a_{n+1}^{-m\sum_{i=1}^{n} a_i},$$

$$\mathscr{I}_2 = \det\left(I_m - \frac{W}{a_{n+1}}\right)^{a_{n+1}-m} \quad \text{con} \quad W = \sum_{i=1}^{n} W_i.$$

Ahora, usando Lema 3.3.2 con $r = 2, z = a_{n+1}, c_1 = a$ y $c_2 = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}\ln \mathscr{I}_1 \;=\; & \frac{1}{2a_{n+1}} \sum_{i=1}^{m} [B_2(a-i+1) - B_2(1-i)] \\ & - \frac{1}{6a_{n+1}^2} \sum_{i=1}^{m} [B_3(a-i+1) - B_3(1-i)] + O(a_{n+1}^{-3})\end{aligned}$$

donde $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$ y $B_3(x) = x^3 - 3x^2/2 + x/2$. Sustituyendo por $B_2(\cdot)$ y $B_3(\cdot)$ en la expresión anterior y simplificando, se obtiene

$$\ln \mathscr{I}_1 \;=\; \frac{am(a-m)}{2a_{n+1}} - \frac{am(2a^2 - 3am + 2m^2 - 1)}{12\,a_{n+1}^2} + O(a_{n+1}^{-3}). \tag{3.3.4}$$

Además, aplicando Lema 3.3.3 da

$$\begin{aligned}\ln \mathscr{I}_2 \;=\; & \operatorname{tr}(-W) + \frac{1}{2a_{n+1}}[2m\operatorname{tr}(W) - \operatorname{tr}(W^2)] \\ & + \frac{1}{6a_{n+1}^2}[3m\operatorname{tr}(W^2) - 2\operatorname{tr}(W^3)] + O(a_{n+1}^{-3}).\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Luego, usando (3.3.4) y (3.3.5) se llega a

$$\ln \mathscr{I}_1 + \ln \mathscr{I}_2 = \operatorname{tr}(-W) + \frac{\tilde{d}_1}{2a_{n+1}} + \frac{\tilde{d}_2}{6a_{n+1}^2} + O(a_{n+1}^{-3}) \tag{3.3.6}$$

donde $\tilde{d}_1$y $\tilde{d}_2$ están dadas en el Teorem 3.3.1. Luego se obtiene

$$\mathscr{I}_1\mathscr{I}_2 = \operatorname{etr}(-W)\left[1+\frac{\tilde{d}_1}{2a_{n+1}}+\frac{3\tilde{d}_1^2+4\tilde{d}_2}{24a_{n+1}^2}+O(a_{n+1}^{-3})\right]. \tag{3.3.7}$$

Finalmente, sustituyendo (3.3.7) en (3.3.3) se consigue el resultado deseado. ∎

La expresión (3.3.2) puede usarse para dar una fórmula asintótica correspondiente para la función acumulada de probabilidad de $(X_1,\dots,X_n)$, *i.e.*,

$$P_n(A_1,\dots,A_n;a_1,\dots,a_n;a_{n+1}) = P_n(0<X_1<A_1,\dots,0<X_n<A_n)$$

donde $A_1,\dots,A_n$ son matrices definidas positivas y hermitianas. Escribiendo $B_i = b_{n+1}A_i$, $i=1,2,\dots,n$ se tiene

$$\begin{aligned}
&P_n(A_1,\dots,A_n;a_1,\dots,a_n;a_{n+1})\\
&= P_n(0<W_1<B_1,\dots,0<W_n<B_n)\\
&= \int_{0<W_1<B_1}\cdots\int_{0<W_n<B_n}\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{\det(W_i)^{a_i-m}}{\tilde{\Gamma}_m(a_i)}\right]\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}W_i\right)\\
&\qquad\times\left[1+\frac{\tilde{d}_1}{2a_{n+1}}+\frac{3\tilde{d}_1^2+4\tilde{d}_2}{24a_{n+1}^2}+O(a_{n+1}^{-3})\right]dW_1\cdots dW_n
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

donde $B_1,\dots,B_n$ son matrices definidas positivas hermitianas. Se observa que cada término en (3.3.8) es una combinación de las funciones

$$\begin{aligned}
&\tilde{G}_{\alpha,K_1,K_2}(B_1,\dots,B_n)\\
&= \int_{0<W_1<B_n}\cdots\int_{0<W_n<B_n}\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{\det(W_i)^{a_i-m}}{\tilde{\Gamma}_m(a_i)}\right]\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}W_i\right)\\
&\qquad\times\left[\operatorname{tr}\left(-\sum_{i=1}^{n}W_i\right)^{\alpha}\right]^{K_1}\left[\operatorname{tr}\left(-\sum_{i=1}^{n}W_i\right)\right]^{K_2}dW_1\cdots dW_n.
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

La integral del lado derecho en (3.3.9) no parace fácil de evaluar.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

- En el capítulo 2 se obtuvieron varios resultados esperados de la función de matriz compleja de matrices beta tipo I y beta tipo II. Estos resultados fueron obtenidos usando invarianza y resutados de polinomios zonales de matrices hermitianas para $k = 2, 3$. Los resultados sobre polinomios zonales para $k = 4, 5$ también están disponibles, entonces los valores esperados como $E[(\mathrm{tr}X^{j_1})^{r_1}(\mathrm{tr}X^{j_2})^{r_2}]$, $j_1 r_1 + j_2 r_2 = 4, 5$ pueden ser obtenidos. Este tema será objeto de estudio de una futura investigación.

- En el capítulo 3, se obtubieron también varios resultados esperados y la expansión asintótica de la distribución Dirichlet tipo I de variable matriz compleja. Dado que la distribución beta tipo I matricial compleja es un caso especial de la distribución Diriclhet tipo I de variable matriz compleja, los resultados obtenidos en este capítulo son también validos para la distribución beta tipo I matricial compleja. Será posible obtener resultados similares a los del capítulo 3 para la distribución Diriclhet tipo II de variable matricial compleja?. La integral al lado derecho de (3.3.9) no es fácil de evaluar. Trabajo adicional sobre ésto se reportará posteriormente en un artículo de investigación o reporte técnico.

Bibliografía

[1] H. H. Andersen, M. Højbjerre, D. Sørensen and P. S. Eriksen, *Linear and Graphical Models for the Multivariate Complex Normal Distribution*, Lecture Notes in Statistics, 101, Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] D. R. Brillinger, Asymptotic properties of spectral estimate of second order. *Biometrika*, **56**, 375–387 (1969).

[3] D. R. Brillinger, *Time Series: Data Analysis and Theory*. Holt, Rinehart and Winston, New York (1975).

[4] R. V. Bronk, Exponential ensembles for random matrix, *Journal of Mathematical Physics*, **6**, 228–237 (1965).

[5] M. Carmeli, Statistical theory of energy levels and random matrices in physics, *Journal of Statistical Physics*, **10**, 259–297 (1974).

[6] M. Carmeli, *Statistical Theory and Random Matrices in Physics*, Marcel Dekker, New York (1983).

[7] Y. Chikuse, Partial differential equations for hypergeometric functions of complex matrices and their applications, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **28**, 187–199 (1976).

[8] W. J. Conradie, and A. K. Gupta, Quadratic forms in complex normal variates: Basic results. *Statistica*, **47**, 37–84 (1987).

[9] Xinping Cui, Arjun K. Gupta and Daya K. Nagar, Wilks' factorization of the complex matrix variate Dirichlet distributions, *Revista Matemática Complutense*, **18** (2005), no. 2, to appear.

[10] F. J. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems I, *Journal of Mathematical Physics*, **3**, 140–156 (1962).

[11] F. J. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems II, *Journal of Mathematical Physics*, **3**, 157–165 (1962).

[12] F. J. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems III, *Journal of Mathematical Physics*, **3**, 166–175 (1962).

[13] F. J. Dyson, and M. L. Mehta, Statistical theory of the energy levels of complex systems IV, *Journal of Mathematical Physics*, **4**, 701–712 (1963).

[14] F. J. Dyson and M. L. Mehta, Statistical theory of the energy levels of complex systems V, *Journal of Mathematical Physics*, **4**, 713–719 (1963).

[15] C. Fang, P. R. Krishnaiah and B. N. Nagarsenkar, Asymptotic distribution of the likelihood ration test statistics for covariance structures of the complex multivariate normal distributions, *Journal of Multivariate Analysis*, **12**, 597–611 (1982).

[16] N. R. Goodman, Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution (an introduction), *Annals of Mathematical Statistics*, **34** (1963), 152–177.

[17] N. R. Goodman, The distribution of the determinant of complex Wishart distributed matrix, *Annals of Mathematical Statistics*, **34**, 178–180 (1963).

[18] N. R. Goodman, and M. R. Dubman, Theory of time-varying spectral analysis and complex Wishart process. In *Multivariate Analysis-II* (M. R. Krishnaiah, ed.), Academic Press, New York, 351–365 (1969).

[19] A. K. Gupta, Nonnull distribution of Wilks' statistic for MANOVA in the complex case, *Commun. Stat.-Simulation Comput.*, **B5**, (1976), 177–188.

[20] A. K. Gupta, Distribution of Wilks' likelihood ratio criterion in the complex case. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, **23**, 77–87 (1971).

[21] A. K. Gupta, Noncentral distribution of Wilks' statistic in MANOVA, *Annals of Mathematical Statistics*, **42**, 1254–1261 (1971).

[22] A. K. Gupta, On a stochastic inequality for the Wilks' statistic, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **27**, 341–348 (1971).

[23] A. K. Gupta, On a test for reality of the covariance matrix of a complex Gaussian distribution, *Journal of Statististical Computation and Simulation*, **2**, 333–342 (1973).

[24] A. K. Gupta, Nonnull distribution of Wilks' statistic for MANOVA in the complex case, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **5**, 177–188 (1976).

[25] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Distribution of the product of determinants of random matrices connected with the noncentral matrix variate Dirichlet distribution, *South African Statist. J.*, **21** (1987), no. 2, 141–153.

[26] A. K. Gupta and D. G. Kabe, Characterization of gamma and the complex Wishart densities. In *Applied Statistical Science III* (E. Ahmed, M. Ahsanullah and B.K. Sinha, eds.), Nova Science Pub., 393–400 (1998).

[27] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Nonnull distribution of LR-statistic for testing $\mu = \mu_0; \Sigma = \sigma^2 I$ in complex multivariate normal model, *Statistica*, **45**(4), 457–464 (1985).

[28] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Distribution of the product of determinants of random matrices connected with non-central matric variate Dirichlet distribution, *South African Statistical Journal*, **21**, 141–153 (1987).

[29] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Nonnull distribution of likelihood ratio criterion for testing multisample sphericity in the complex case, *Australian Journal of Statistics*, **30**(3), 307–318 (1988).

[30] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Asymptotic nonnull distribution of likelihood ratio statistic for testing homogeneity of complex multivariate Gaussian populations, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **31**, 83–91 (1989).

[31] A. K. Gupta D. K. Nagar, Distribution of LR-statistic for testing $H:\mu=\mu_0;\Sigma=\sigma^2 I$ in multivariate complex Gaussian distribution, *Statistica*, **52**(2), 255–267 (1992).

[32] A. K. Gupta and D. K. Nagar, *Matrix Variate Distributions*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[33] E. J. Hannan, *Multiple Time Series*, John Wiley & Sons, New York (1970).

[34] A. T. James, Distributions of matrix variate and latent roots derived from normal samples, *Annals of Mathematical Statistics*, **35**, 475–501 (1964).

[35] D. G. Kabe, Classical statistical analysis based on a certain hypercomplex multivariate normal distribution, *Metrika*, **31**, 63–76 (1984).

[36] C. G. Khatri, Classical statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution, *Ann. Math. Statist.*, **36** (1965), 98–114.

[37] C. G. Khatri, On certain distribution problems based on positive definite quadratic functions in normal vectors, *Ann. Math. Statist.*, **37** (1966), no. 2, 468–479.

[38] C. G. Khatri, Non-central distributions of i-th largest characteristic roots of three matrices concerning complex multivariate normal populations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **21**, 23–32(1969).

[39] C. G. Khatri, On the moments of traces of two matrices in three situations for complex multivariate normal populations, *Sankhyā*, **A32** (1970), 65–80.

[40] Khatri, C. G. (1971). Series representation of distributions of quadratic form in the normal vectors and generalized variance. *Journal of Multivariate Analysis*, **1**(2), 199–214.

[41] C. G. Khatri, and C. D. Bhavsar, Some asymptotic inferential problems connected with complex elliptical distribution, *Journal of Multivariate Analysis*, **35**, 66–85 (1990).

[42] C. G. Khatri and C. R. Rao, Effects of estimated noise covariance matrix in optimal signal detection, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, *ASPP*-**35** (1987), No. 5, 671–679.

[43] P. R. Krishnaiah, Some recent developments on complex multivariate distributions, *J. Multivariate Anal.*, **6** (1976), no. 1, 1–30.

[44] P. R. Krishnaiah and J. Lin, Complex elliptically symmetric distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **15**(12), 3693–3718 (1986).

[45] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Second Edition, Academic Press, New York, 1991.

[46] D. K. Nagar, and E. L. Arias, Complex matrix variate Cauchy distribution, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **58**(1), 67–80 (2003).

[47] D. K. Nagar, and A. K. Gupta, Asymptotic non-null distribution of likelihood ratio statistic for testing $\mu = \mu_0; \Sigma = \sigma^2 I_m$ in complex multivariate Gaussian model, *Statistica*, **53**(4), 603–617 (1993).

[48] D. K. Nagar, A. K. Gupta and L. E. Sánchez, A class of integral identities with Hermitian matrix argument, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **134** (11), 3329–3341.

[49] D. K. Nagar, S. K. Jain and A. K. Gupta, Distribution of LRC for testing sphericity of a complex multivariate Gaussian model, *International Journal of Mathematics & Mathematical Sciences*, **8**(3), 555–562 (1985).

[50] Daya K. Nagar, Elizabeth Bedoya and Elkin Lubin Arias, Non-central complex matrix-variate beta distribution, *Advances and Applications in Statistics*, **4** (2004), no. 3, 287–302.

[51] B. N. Nagarsenkar and M. M. Das, Exact distribution of sphericity criterion in the complex case and its percentage points, *Communications in Statistics*, **4**(4), 362–374 (1975).

[52] K. C. S. Pillai and G. M. Jouris, Some distribution problems in the multivariate complex Gaussian case, *Annals of Mathematical Statistics*, **42**, 517–525 (1971).

[53] C. E. Porter, *Statistical Theory of Spectra: Fluctuations*, Academic Press, New York (1965).

[54] M. B. Priestly, T. Subba Rao, H. Tong, Identification of the structure of multivariable stochastic systems. In *Multivariate Analysis-III* (M. R. Krishnaiah, ed.), Academic Press, New York, 351–368 (1973).

[55] I. S. Reed, J. D. Mallett and L. E. Brennan, Rapid convergence rate in adaptive rays, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **10** (1974), 853–863.

[56] P. Shaman, The inverted complex Wishart distribution and its application to spectral estimates, *Journal of Multivariate Analysis*, **10**, 51–59 (1980).

[57] P. J. Smith and H. Gao, A determinant representation for the distribution of a generalized quadratic form in complex normal vectors, *J. Multivariate Anal.*, **73** (2000), no. 1, 41–54.

[58] M. S. Srivastava, On the complex Wishart Distribution, *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 312–315 (1965).

[59] C. G. Troskie, Noncentral multivariate Dirichlet distribution, *South African Statistical Journal*, **1** (1967), 21–32.

[60] W. Y. Tan, Some distribution theory associated with complex Gaussian distribution, *Tamkang Journal*, **7** (1968), 263–302.

[61] G. L. Turin, The characteristic function of Hermitian quadratic forms in complex normal variables, *Biometrika*, **47**, 199–201 (1960).

[62] G. Whaba, On the distributions of some statistics useful in the analysis of jointly stationary time series, *Annals of Mathematical Statistics*, **39**, 1849–1862 (1968).

[63] G. Whaba, Some tests of independence for stationary multivariate time series, *Journal of Royal Statistical Society*, **B33**, 153–166 (1971).

[64] E. P. Wigner, Distribution laws for the roots of a random Hermitian matrix. In *Statistical Theory of Spectra: Flactuations* (C. E. Porter, ed.), Academic Press, New York, 446–461 (1965).

[65] E. P. Wigner, Random matrices in physics, *SIAM Review*, **9**, 1–23 (1967).

[66] R. A. Wooding, The multivariate distribution of complex normal variables, *Biometrika*, **43**, 212–215 (1956).