

# Elementos finitos en desplazamiento para interacción fluido acústico–estructura

## Displacement based finite elements for acoustic fluid–structure interaction

Santiago Correa V.<sup>1</sup>

*Recepción: 13-jun-2007/Modificación: 11-dic-2007/Aceptación: 11-dic-2007  
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo*

---

### Resumen

Este artículo compara dos formulaciones en elementos finitos utilizadas para resolver problemas de fluidos acústicos interactuando con elementos estructurales, empleando formulaciones basadas en desplazamiento como variable de estado utilizada para discretizar el fluido acústico. Se escriben códigos de elementos finitos para cada formulación en desplazamientos y se resuelven problemas típicos de interacción fluido acústico estructura. Los resultados obtenidos con cada formulación son comparados obteniendo ventajas e inconvenientes de cada una de ellas.

**Palabras claves:** acústica, elementos finitos, interacción fluido–estructura.

### Abstract

This paper compares two finite elements formulations used for solving fluid structure interaction problems in acoustics. In this case the displacement is used as variable for representing the behavior of the acoustic fluid. Finite element codes are writing for each formulation and typical fluid structure interaction problems are solved. The results obtained with each formulation are compared and advantages and disadvantages are obtained.

**Key words:** Acoustic, Finite element, Fluid–structure interaction.

---

<sup>1</sup> Doctor en Ingeniería Mecánica y Fabricación, scorrea5@eafit.edu.co, profesor, Director Grupo de Investigación en Ingeniería de Diseño (GRID), Codirector Grupo de Investigación en Bioingeniería (GIB), Universidad CES–EAFIT, Medellín–Colombia.

## 1 Introducción

### 1.1 Métodos numéricos para resolver el problema de interacción fluido acústico–estructura

Frecuentemente dos o más sistemas físicos interactúan entre sí y la solución de uno de ellos es imposible de obtener independientemente, sin la solución simultánea de los otros. Estos sistemas se conocen como sistemas acoplados. Uno de los sistemas acoplados más comunes es el conocido como la interacción fluido estructura. En él, tanto el sistema fluido como el estructural no pueden ser resueltos independientemente, dado que se desconocen las fuerzas que actúan en las interfases [1]. La acústica computacional busca, entre otras, la predicción numérica de la respuesta dinámica de sistemas acoplados fluido estructura donde el módulo de compresibilidad del fluido es comparable, en términos de magnitud, con el de un sólido de tal forma que puede influir en la respuesta estructural de un sistema. El agua es un claro ejemplo de ello. Entre las aplicaciones de interés se encuentran estructuras elásticas sumergidas, problemas de resonancia acústica, fluidos contenidos en tuberías elásticas y problemas transitorios dependientes del tiempo.

El fluido acústico puede ser simulado de diversas formas; elementos finitos, elementos de contorno, elementos infinitos, matriz de transición (Matriz T) y métodos analíticos. El fluido acústico está sujeto a varias restricciones, a saber, es incompresible, irrotacional y no viscoso, lo que condiciona el tratamiento numérico de la respuesta del fluido, básicamente cuando se discretiza en desplazamientos, como se tratará más adelante.

Los elementos finitos para discretizar el fluido acústico serán tratados ampliamente en la siguiente sección.

Los elementos de contorno para discretizar el fluido acústico han sido abordados entre otros por Chen y Schweikert (1963) [2], quienes describieron el fluido en la frontera a través de fuentes superficiales de rigidez desconocida. Schenck (1968) [3] emplea una formulación combinada de la ecuación integral de Helmholtz para mejorar las ecuaciones anteriormente expresadas en términos de la presión y la velocidad normal a la superficie. Engblom y Nelson (1975) [4] presentan un método eficiente basado en aproximaciones cuadráticas para determinar los niveles de presión sonora producidos por una estructura en un medio acústico infinito. Mathews (1986) [5], Everstine y

Henderson (1990) [6], Everstine y Cheng (1992) [7], Gaul y Wensel (2002) [8] y Fritze, Marburg y Hardtke (2005) [9] presentan diversas formulaciones acopladas entre elementos finitos y elementos de contorno para discretizar la estructura y el medio acústico respectivamente.

Los elementos infinitos para discretizar el dominio acústico sin frontera fueron introducidos por Bettes (1977) [10, 11] y posteriormente por Zienkiewicz, Emson y Bettes (1983) [12], Zienkiewicz, Bando y Bettes (1985) [13] y Moyer (1992) [14]. Posteriormente Bettes (1992) [15] escribió su famoso libro “Infinite elements” donde se recogen los principales avances en la materia.

Varias soluciones analíticas al problema de interacción entre un fluido acústico y una estructura son presentadas por Hunt, Knittel y Barach (1974) [16], Hunt, Knittel, Nichols y Barach (1975) [17], Keller y Givoli (1989) [18] y Magalhaes y Ferguson (2003) [19].

## **1.2 Elementos finitos en la resolución de problemas de interacción fluido acústico–estructura**

Varias formulaciones se han desarrollado con el objeto de simular un fluido acústico en problemas de interacción fluido estructura, diferenciándose básicamente por la naturaleza de las variables de campo que emplean para la discretización en elementos finitos.

Existen varias formulaciones en desplazamiento como variable para definir el fluido acústico propuestas, entre otros, Gladwell y Zimmerman (1966) [20], Gladwell (1966) [21], Chopra, Wilson y Farhoomand (1969) [22], Wilson (1975) [23], Shantaram et al (1976) [24], Belytschko y Kennedy (1976,1978) [25, 26], Bathe y Hahn (1978) [27], Hamdi et al (1978) [28], Larsson y Svenkvist (1979) [29], Belytschko y Schumman (1980) [30], Belytschko (1980) [31], Belytschko y Mullen (1981) [32] y Belytschko y Flanagan (1981) [33].

Otras formulaciones, tal como la de Zienkiewicz y Newton (1969) [34], Craggs (1971) [35] y Morand y Ohayon (1979) [36], emplean un campo de desplazamiento potencial y/o presión.

Las formulaciones en velocidad potencial fueron propuestas por Everstine (1981) [37] y Olson y Bathe (1985) [38]. Las formulaciones mixtas en velocidad potencial y presión fueron propuestas por Felippa y Ohayon (1990) [39] y la

de desplazamiento, presión y momento de vorticidad propuesta por Bathe, Nitikitpaiboon y Wang (1995) [40] y Wang y Bathe (1997) [41].

Dey et al (2006) [42] proponen un elemento  $p$  para la formulación del problema elasto–acústico con estimación de error *a posteriori*.

La formulación de desplazamiento potencial y presión presenta la desventaja de que no es fácilmente acoplable con elementos estructurales dado que genera matrices no simétricas las cuales pueden hacerse simétricas después de transformaciones secundarias lo que las hace en general, difíciles de incorporar en programas de elementos finitos convencionales [43, 44].

La formulación de desplazamiento, presión y momento de vorticidad es de difícil implementación en programas convencionales de elementos finitos, salvo que puedan condensarse los campos de presión y vorticidad a nivel elemental. Los resultados son satisfactorios para elementos cuadrilaterales de 12 nodos, con 9 grados de libertad en desplazamientos, 3 grados de libertad en presiones y 3 grados de libertad en momento de vorticidad. Los elementos de bajo orden son ineficientes (presentan modos *checker board*), lo que supone una gran desventaja a la hora de abordar la resolución de dominios irregulares, ya que son imposibles de discretizar utilizando únicamente cuadriláteros, sin mencionar el problema del costo computacional que supone su utilización. Una limitación añadida es que se obtienen modos singulares no físicos, lo que impide estudiar problemas de propagación, ya que deben eliminarse con anterioridad. Los experimentos [40] numéricos muestran que también es sensible a la definición de la normal al contorno.

La formulación en desplazamientos, esto es, los desplazamientos del fluido como única variable nodal, es preferida por muchos investigadores ya que los elementos acústicos pueden ser acoplados directamente con elementos estructurales, sin requerir condiciones especiales en las interfases y son fácilmente implementados en programas comunes de elementos finitos. La desventaja de esta formulación es que presenta modos rotacionales espúreos a frecuencias diferentes de cero [4, 45]. Estos modos espúreos contaminan la solución y no son fácilmente detectables para su posterior eliminación. Varios procedimientos se han implementado para mejorar el comportamiento de estos elementos, tales como integración reducida en un punto [40].

El método de penalidad en las rotaciones [28], arroja buenos resultados en los problemas presentados en la referencia, para elementos cuadriláteros

de ocho nodos. Los elementos de más bajo orden son inestables, es decir, la solución depende del valor del factor de penalidad. Esto igualmente supone una desventaja en el mismo sentido que el elemento presión, desplazamiento y momento de vorticidad [40].

Luego, Olson y Wang [45, 41] concluyen que el elemento en desplazamientos de Hamdi no puede resolver varios problemas típicos de interacción fluido estructura, debido, entre otras, a las restricciones de irrotacionalidad e incompresibilidad. Otra desventaja de este elemento es que el factor de penalidad queda indeterminado debiendo ser seleccionado por el usuario.

Otros elementos en desplazamientos son basados en polinomios de Raviart–Thomas que no presentan modos espúreos de rotación [46]. Lamentablemente, la utilización de grados de libertad en la mitad de los lados, en lugar de los nodos, los hace inapropiados para ser acoplados con elementos estructurales comunes y con software de generación de mallas.

Otros autores utilizaron una matriz de masa proyectada en combinación con integración reducida en un punto para la matriz de rigidez [47]. Este elemento se utiliza para resolver algunos ejemplos pero no se presenta una justificación de que la formulación es estable y confiable. Posteriormente se presentó un elemento [48] que combina la penalización a las rotaciones de Hamdi con la matriz de masa proyectada e integración reducida de Chen [47]. Al igual que en [28], el factor de penalización a las rotaciones queda indeterminado, debiendo ser seleccionado por el usuario.

Ninguna de estas formulaciones presenta una extensión a dominios 3D, la cual en algunos casos no es trivial.

## 2 Ecuaciones básicas

Se considera que el fluido es no viscoso, isentrópico y las vibraciones son de tan baja amplitud que no modifican apreciablemente la densidad del mismo. La presión  $p$  y la deformación volumétrica  $e$ , están definidas por

$$p = \beta \nabla \cdot \vec{u} \quad \text{y} \quad e = \nabla \cdot \vec{u},$$

donde  $\beta$  es el módulo de compresibilidad y  $\vec{u}$  es el vector desplazamiento.

La ecuación diferencial que gobierna el problema de propagación acústico, tomando como incógnita el campo de desplazamiento de las partículas, es

$$\left(\beta \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \rho \ddot{\vec{u}}\right) = 0,$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido.

La expresión para la energía elástica acumulada en el volumen del fluido acústico es

$$E = \frac{1}{2} \int_V \beta (\nabla \cdot \vec{u})^2 dV - \int_V \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{u} dV - \int_S p_s \vec{u} \cdot \vec{n} dS, \quad (1)$$

donde  $p_s$  es la presión impuesta en el contorno y  $\vec{n}$  es el vector normal a la superficie donde la presión está impuesta.

Aplicando el principio de la mínima energía potencial total se obtiene

$$\int_V \left(\beta \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \rho \ddot{\vec{u}}\right) \cdot \delta \vec{u} dV - \int_{S-S_p} \beta (\nabla \cdot \vec{u}) \cdot \vec{n} \cdot \delta \vec{u} dS - \int_{S_p} (\beta \nabla \cdot \vec{u} + p_s) \cdot \vec{n} \cdot \delta \vec{u} dS = 0.$$

Se observa que el primer término recupera la ecuación diferencial que gobierna el problema, luego, puede decirse que el principio de la mínima energía constituye un principio variacional para el problema ya que sus ecuaciones de Euler coinciden con las que se quieren resolver.

Este funcional es utilizado para la discretización por elementos finitos de fluidos acústicos basados en desplazamientos.

Los elementos desarrollados con esta formulación, producen modos de circulación espúreos, es decir, rotaciones del fluido que computan baja energía [45]. De hecho campos puramente rotacionales deberían producir energía nula. Estos modos espúreos no son deseables ya que contaminan la solución y no son fácilmente detectables para su posterior eliminación.

Por último, las condiciones de contorno del problema se reducen, dado que el fluido es no viscoso, a que la componente tangencial del desplazamiento del mismo no está restringida, mientras que la componente normal está impuesta y debe ser igual al desplazamiento del sólido

$$\vec{u}^f \cdot \vec{n} = \vec{u}_n^s \text{ en } S.$$

Tal y como se verá más adelante, dicha condición de contorno, a priori sencilla, puede producir, en algunas formulaciones, la aparición de modos espúreos a frecuencias diferentes de cero, debido a que la dirección de la normal al contorno depende del ajuste de los elementos en el contorno.

### 3 Formulación de penalización a las rotaciones

La formulación de penalización en las rotaciones [28], consiste en penalizar el fluido agregando una energía ficticia debida a la rotación, obligando al elemento fluido a ser muy rígido ante un modo de componente rotacional. En realidad, lo que se logra agregando esta energía ficticia es aumentar la frecuencia de los modos no físicos sin afectar la frecuencia de los modos acústicos reales.

Agregando al funcional de (1) un término energético ficticio dado por el rotacional del campo de desplazamientos

$$E = \frac{1}{2} \int_V \beta (\nabla \cdot \vec{u})^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \alpha (\nabla \times \vec{u})^2 dV - \int_V (\rho \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} dV - \int_S p_s \vec{u} \cdot \vec{n} dS, \quad (2)$$

donde  $\alpha$  es un factor de estabilización que penaliza la energía rotacional (segundo término del funcional).

Dado que en el límite de la convergencia la variación del funcional tiende a cero en cada punto del dominio, el término  $\alpha (\nabla \times \vec{u}) \rightarrow 0$  recuperándose la condición de irrotacionalidad del fluido

$$\int_V \beta (\nabla \cdot \vec{u}) (\nabla \cdot \delta \vec{u}) dV + \int_V \alpha (\nabla \times \vec{u}) \cdot (\nabla \times \delta \vec{u}) dV + \int_V \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} dV = - \int_S p \delta \vec{u} \cdot \vec{n} dS.$$

Utilizando los procedimientos usuales de elementos finitos, es decir, empleando un elemento isoparamétrico [1], que utiliza la misma función de interpolación para la geometría y los campos incógnita, puede establecerse que la matriz de rigidez es

$$K = K_b + K_i = \int_V \beta (B^T \cdot B) dV + \int_V \alpha (D^t \cdot D) dV,$$

donde

$K_b$  = Matriz de rigidez por cambio de volumen.

$B_i$  = Matriz de rigidez por deformaciones rotacionales.

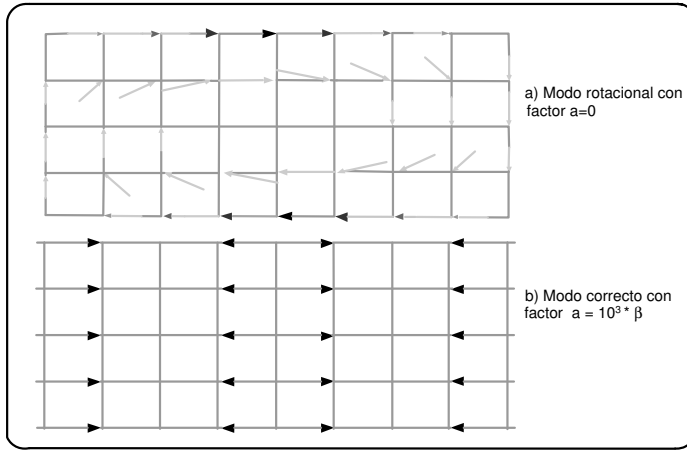
Por definición, esta formulación es variacionalmente inconsistente, ya que a partir del funcional (2) no se recuperan las ecuaciones de Euler del problema (salvo que los campos cumplan unas condiciones especiales), ni tampoco la forma discreta de la convergencia del “principio de la parcela” [49].

Otro punto importante reside en la determinación del factor  $\alpha$ . Varios trabajos [45, 28] apuntan que la matriz de irrotacionalidad  $K_i$  es del mismo orden de magnitud que  $K_b$  cuando  $\alpha$  se considera como algún múltiplo de  $\beta$ . Olson [28] presenta un ejercicio numérico que muestra la influencia del factor  $\alpha$  en el valor de las frecuencias de resonancia acústica de un cuarto cerrado de paredes rígidas. Los resultados muestran que elementos cuadrilátero de cuatro u ocho nodos implementados con esta formulación presentan soluciones estables (es decir que la respuesta no varía con la variación del factor), para valores de  $\alpha$  comprendidos entre 1 y 1.000  $\beta$ . Sin embargo, otros experimentos numéricos de mayor complejidad deben abordarse a fin de probar la confiabilidad de la formulación [40].

La figura 1 muestra el primer modo de resonancia acústica de un cuarto cerrado de paredes rígidas. Para su discretización se ha empleado la formulación de Hamdi sin incluir el término de penalización a las rotaciones (figura 1.a) e incluyendo el mismo con un factor de penalidad de 10.000  $\beta$  (figura 1.b). La programación del elemento se ha realizado en Matlab<sup>®</sup> y la visualización de resultados se realiza con GID<sup>®</sup>. Puede observarse claramente el modo espúreo de circulación resultante de utilizar la formulación de Hamdi sin penalidad a las rotaciones.

### 3.1 Estabilidad de la formulación

Se presenta a continuación un estudio propio que evalúa el efecto en la estabilidad del factor  $\alpha$  para dos problemas concretos de interacción fluido estructura, con la formulación de Hamdi: un pistón rígido inclinado vibrando en el interior de una cavidad cerrada de paredes rígidas y un cilindro suspendido en un resorte vibrando en el interior de una cavidad cerrada de paredes rígidas. Se formulan dos tipos de elementos, un cuadrilátero de cuatro nodos y un triángulo de tres nodos. Los resultados obtenidos se comparan con los

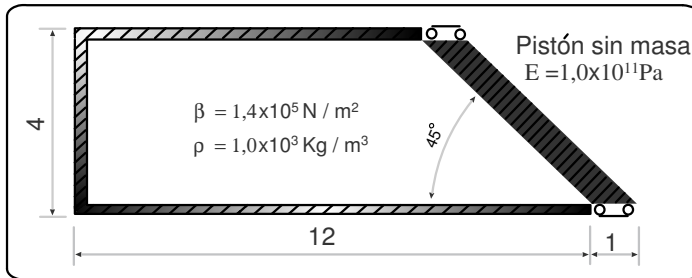


**Figura 1:** modo espúreo y modo correcto para un cuarto cerrado de paredes rígidas utilizando la formulación de Hamdi sin penalización y con penalización a las rotaciones

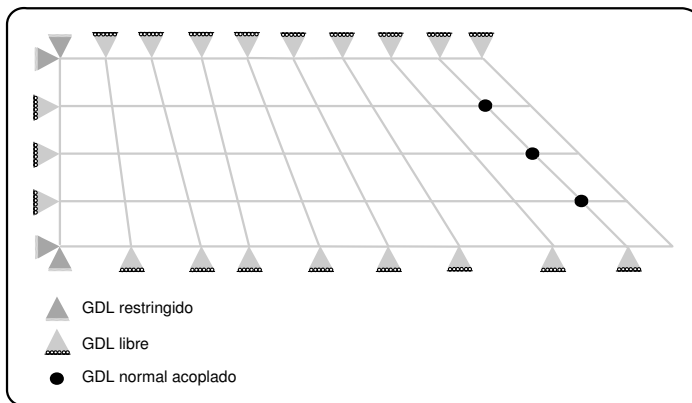
producidos con una formulación  $u-\emptyset$  [38]. La estabilidad se evalúa al variar el factor de penalidad a las rotaciones en un rango entre 0 y 1.000 veces el valor del módulo de compresibilidad  $\beta$  y observar si las frecuencias obtenidas varían con la variación del factor. Estos ejemplos propuestos constituyen una forma efectiva de validar el comportamiento de un elemento desde un punto de vista práctico. Estos análisis facilitan la toma de decisiones a los ingenieros que deseen abordar problemas de interacción fluido–estructura donde la utilización de software comercial resulta insuficiente.

**3.1.1 Problema del pistón inclinado.** Las dimensiones, propiedades de los materiales y condiciones de contorno del problema del pistón inclinado se observan en la figura 2.

Dado que el pistón oscila dentro de un cuarto de paredes rígidas se restringen los grados de libertad (GDL) normales a la pared y se dejan libres los grados de libertad tangenciales. En la interfase sólido–fluido se impone, mediante multiplicadores de Lagrange [50], que el desplazamiento en la dirección normal del fluido es igual al desplazamiento en dirección normal del sólido. El desplazamiento tangencial es libre a fin de permitir el deslizamiento del fluido por la pared del sólido.



(a) problema de un pistón sin masa oscilando en un medio fluido

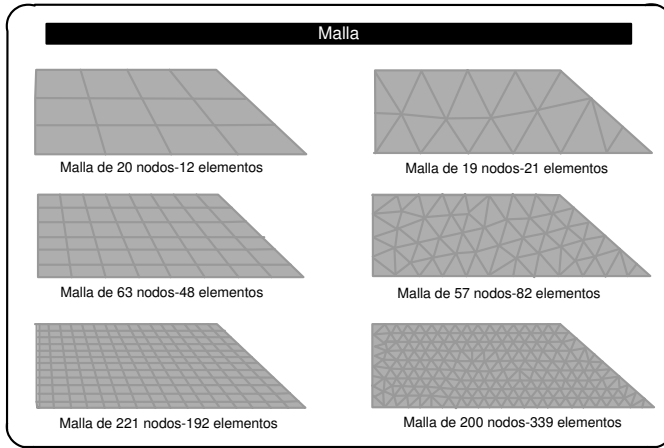


(b) condiciones de contorno

**Figura 2:**

Se procede a resolver el problema del pistón inclinado empleando un elemento cuadrilátero y un elemento triangular desarrollado con la formulación de Hamdi.

Las mallas empleadas se observan en la figura 3. La tabla 1 muestra los resultados obtenidos con la formulación de Hamdi utilizando un elemento cuadrilátero de cuatro nodos. La tabla 2 muestra los resultados obtenidos con la formulación de Hamdi utilizando un elemento triangular de tres nodos.



**Figura 3:** mallas empleadas para resolver el problema del pistón inclinado con elementos cuadrilátero y triangular utilizando la formulación de Hamdi

**Tabla 1:** resultados del problema del pistón inclinado para el elemento cuadrilátero de cuatro nodos implementado con la formulación de Hamdi

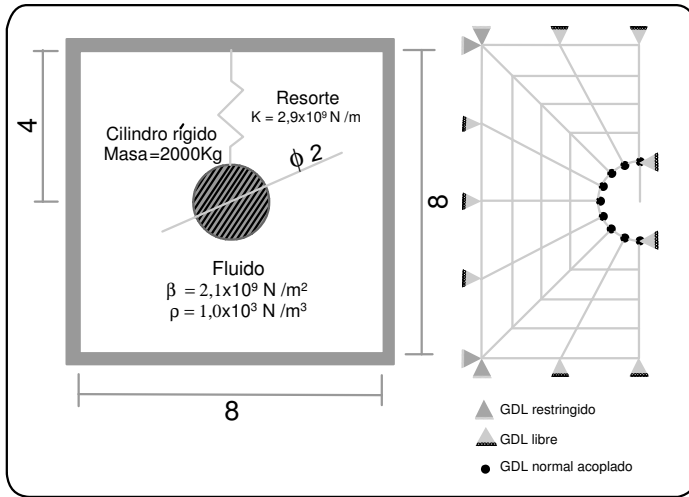
<b>Primer modo</b> <b>f = 0,295 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
12 elementos	0,106	0,291	0,295	0,313	0,358
48 elementos	0,085	0,294	0,296	0,308	0,369
192 elementos	0,0488	0,295	0,296	0,300	0,303
<b>Segundo modo</b> <b>f = 0,886 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
12 elementos	0,165	0,664	0,812	1,034	1,410
48 elementos	0,126	0,844	0,878	0,994	1,404
192 elementos	0,087	0,877	0,888	0,945	0,987
<b>Tercer modo</b> <b>f = 1,45 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
12 elementos	0,223	0,918	1,243	1,411	1,912
48 elementos	0,153	1,175	1,412	1,500	1,617
192 elementos	0,105	1,423	1,468	1,500	1,637
<b>Cuarto modo</b> <b>f = 1,47 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
12 elementos	0,339	1,312	1,428	1,934	4,512
48 elementos	0,198	1,455	1,474	1,716	2,594
192 elementos	0,121	1,467	1,483	1,750	1,921

**Tabla 2:** resultados del problema del pistón inclinado para el elemento triangular de tres nodos implementado con la formulación de Hamdi

<b>Primer modo</b> <b>f = 0,295 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
21 elementos	0,000	0,292	0,295	0,302	0,310
82 elementos	0,000	0,294	0,295	0,298	0,304
339 elementos	0,000	0,295	0,295	0,298	0,310
<b>Segundo modo</b> <b>f = 0,886 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
21 elementos	0,150	0,765	0,869	1,098	1,476
82 elementos	0,028	0,853	0,883	0,949	1,138
339 elementos	0,007	0,876	0,888	0,942	1,227
<b>Tercer modo</b> <b>f = 1,45 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
21 elementos	0,197	0,997	1,369	1,448	2,401
82 elementos	0,036	1,243	1,464	1,858	2,041
339 elementos	0,021	1,413	1,474	1,526	1,734
<b>Cuarto modo</b> <b>f = 1,47 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
21 elementos	0,300	1,357	1,501	2,361	5,183
82 elementos	0,087	1,522	1,497	2,232	2,767
339 elementos	0,027	1,464	1,479	1,677	2,484

**3.1.2 Problema del cilindro suspendido en un resorte.** Las dimensiones y propiedades del problema del cilindro suspendido en un resorte se muestran en la figura 4.a. En este caso es posible aprovechar la simetría del problema y se discretiza únicamente la mitad izquierda del cuarto. La condición de impenetrabilidad se impone mediante multiplicadores de Lagrange, vinculando los grados de libertad normales al contorno de la interfase fluido estructura con el grado de libertad correspondiente a la masa del cilindro, concentrada en un nodo localizado en el centro del mismo. Los nodos de la interfase con las paredes rígidas se vinculan en la dirección normal, dejando libres las direcciones tangenciales. Estas condiciones de contorno se representan en figura 4.b.

Las mallas empleadas para resolver el problema con el elemento cuadrilátero de cuatro nodos desarrollado con la formulación de Hamdi se observa en

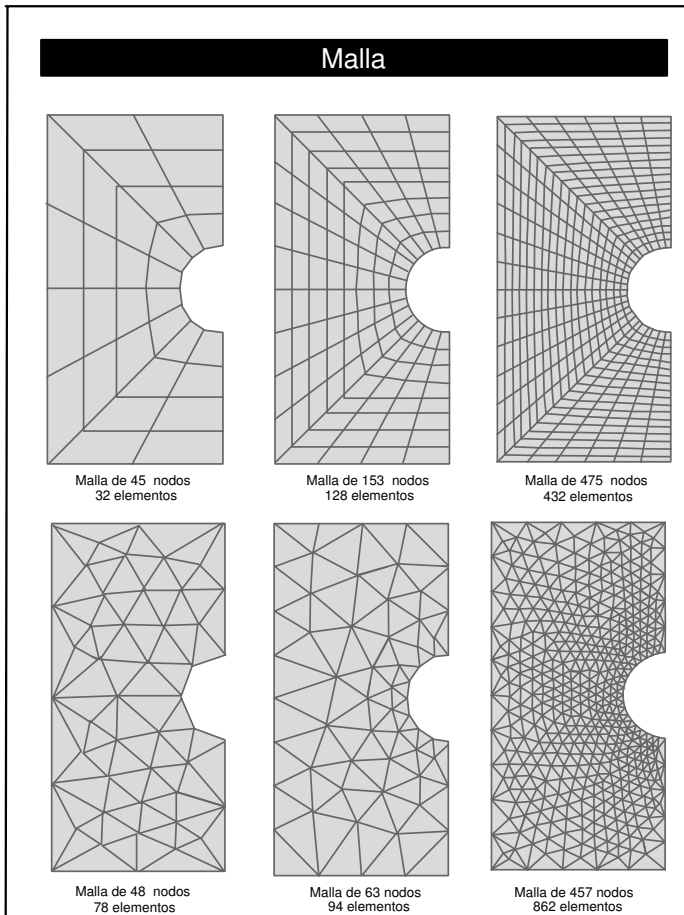


**Figura 4:** a) problema de un cilindro infinito suspendido en un resorte e inmerso en un fluido. b) condiciones de contorno

la figura 5. La tabla 3 muestra los resultados obtenidos con la formulación de Hamdi utilizando un elemento cuadrilátero de cuatro nodos. La tabla 4 muestra los resultados obtenidos con la formulación de Hamdi utilizando un elemento triangular de tres nodos.

**3.1.3 Análisis de los resultados de estabilidad.** Los resultados de ambos experimentos numéricos muestran que, tal y como apuntaban otros autores, la formulación presenta modos espúreos de rotación a frecuencias diferentes de cero. Esto puede observarse en la primera columna al hacer cero el factor  $\alpha$ .

En cuanto a la estabilidad de la solución, puede observarse que para ambos problemas, los dos tipos de elementos considerados son inestables, dado que al incrementar el factor se incrementa los valores en frecuencia obtenidos. Cuando  $\alpha \gg \beta$  la matriz de irrotacionalidad  $K_i$  resulta preponderante en la solución del problema, desvirtuándose la naturaleza del mismo. Esto hace inviable el hecho de tratar de acotar los valores del factor  $\alpha$  entre dos múltiplos de  $\beta$ . Tampoco se puede tomar un valor de referencia único, ya que se observa que el primer problema, el del cilindro inclinado, converge aproximadamente



**Figura 5:** mallas empleadas para resolver el problema del cilindro suspendido utilizando elementos cuadrilátero y triangular utilizando la formulación de Hamdi

a la solución con un factor  $\alpha = 10 * \beta$ , mientras el segundo problema, el del cilindro suspendido converge aproximadamente a la solución con un factor de  $\alpha = 1 * \beta$ . En este segundo problema se observa que ambos elementos son muy rígidos para copiar el segundo modo, que corresponde a la frecuencia natural de vibración del sistema masa–resorte vibrando en el fluido (es decir, debe tomarse en cuenta el efecto de la masa añadida).

**Tabla 3:** resultados del problema del cilindro suspendido para el elemento cuadrilátero de cuatro nodos implementado con la formulación de Hamdi

<b>Primer modo</b> <b>f = 92,6 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
32 elementos	33,43	95,98	106,16	110,55	115,12
128 elementos	17,61	88,48	101,15	105,38	109,32
432 elementos	18,47	83,77	93,57	104,73	111,49
<b>Segundo modo</b> <b>f = 119,5 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
32 elementos	50,35	171,96	213,86	219,85	270,12
128 elementos	29,71	157,57	193,76	215,48	221,47
432 elementos	29,32	152,48	175,36	198,87	201,31
<b>Tercer modo</b> <b>f = 178,9 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
32 elementos	66,91	180,96	216,25	225,02	262,19
128 elementos	35,26	180,25	200,11	214,51	231,75
432 elementos	33,27	178,63	186,89	199,65	220,06
<b>Cuarto modo</b> <b>f = 194,8 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
32 elementos	68,78	189,22	224,43	240,87	338,14
128 elementos	38,54	193,18	204,57	226,34	259,33
432 elementos	37,73	193,20	200,95	211,14	245,44

### 3.2 Sensibilidad a la definición de la normal al contorno

Como se ha mencionado anteriormente, las condiciones de contorno en la interfase sólido–fluido deben ser: por un lado, desplazamiento libre en la dirección tangencial al contorno y, por otro, debe imponerse que la componente normal al contorno esté acoplada en el sólido y el fluido. Debido a la discretización, es decir, a la manera como los lados del elemento definen un contorno, la normal a dicho contorno no está unívocamente determinada. Donea et al [51] han propuesto un método para definir la dirección de dicha normal. Véase la figura 6 en la cual un contorno está discretizado por dos lados de elementos, de tres ó cuatro nodos. Puede observarse que el vector normal en el nodo tres,  $n_3$  depende del vector normal a  $L_a(n_a)$  y el vector normal a  $L_b(n_b)$ . Dado que, por conservación de masa, el flujo a través de  $L_a$  debe equilibrarse con el flujo a través de  $L_b$ , el ángulo  $\gamma$  que determina la dirección normal apropiada está dado por

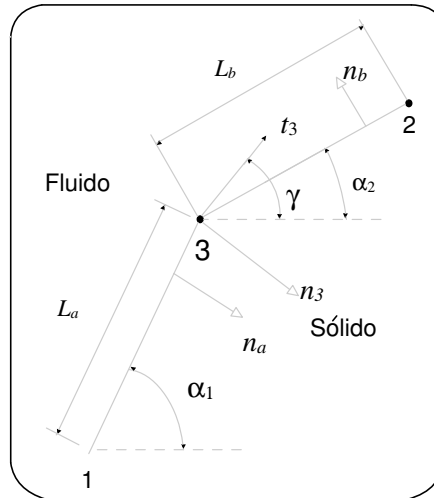
**Tabla 4:** resultados del problema del cilindro suspendido para el elemento triangular de tres nodos implementado con la formulación de Hamdi

<b>Primer modo</b> <b>f = 92,6 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
78 elementos	8,51	101,99	107,72	110,28	114,58
94 elementos	3,34	97,06	106,06	110,64	121,18
862 elementos	0,23	86,16	97,98	107,40	110,28
<b>Segundo modo</b> <b>f = 119,5 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
78 elementos	14,17	185,13	203,95	238,02	325,54
94 elementos	10,00	180,40	193,62	204,41	219,20
862 elementos	1,29	155,89	185,69	198,33	210,81
<b>Tercer modo</b> <b>f = 178,9 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
78 elementos	19,21	190,32	208,80	250,54	382,92
94 elementos	13,68	180,80	212,71	246,21	292,06
862 elementos	2,03	179,95	188,20	213,30	240,08
<b>Cuarto modo</b> <b>f = 194,8 Hz</b>	$\alpha = 0\beta$	$\alpha = 1\beta$	$\alpha = 10\beta$	$\alpha = 100\beta$	$\alpha = 1000\beta$
78 elementos	22,69	193,21	220,00	303,40	517,41
94 elementos	17,28	189,74	202,24	269,51	426,33
862 elementos	2,19	206,25	210,53	216,87	285,20

$$\tan \gamma = \frac{L_a \sin \alpha_1 + L_b \sin \alpha_2}{L_a \cos \alpha_1 + L_b \cos \alpha_2}. \quad (3)$$

La expresión (3) es utilizada por varios autores [40, 41] para definir la dirección normal al contorno. De lo contrario, las formulaciones presentadas en dichas referencias presentan modos no físicos a frecuencias diferentes de cero, para variaciones en la dirección de la normal entre  $1^\circ$  y  $7^\circ$ . Esto se verá con detalle en la siguiente sección. Si bien esta expresión puede utilizarse para determinar la normal a un contorno en dos dimensiones, su extensión a dominios en tres dimensiones no es trivial, máxime cuando en un nodo pueden confluir tres o más elementos.

Debido a esto es conveniente buscar formulaciones insensibles, al menos en los rangos especificados anteriormente, a la variación de la dirección normal al contorno. Se realiza a continuación un experimento numérico con los



**Figura 6:** discretización de un contorno circular

elementos cuadriláteros de cuatro nodos y triangulares de tres nodos desarrollados con la formulación de Hamdi. Se calculan nuevamente los cuatro primeros modos de vibración del pistón inclinado deslizando dentro de una cavidad cerrada de paredes rígidas. Se ha variado aleatoriamente  $\pm 5^\circ$  en la dirección del vector normal en los nodos de la interfase entre sólido y fluido. Se presentan los resultados en frecuencias en las tablas 5 y 6 y los modos de vibración para ambos tipos de elemento en las figuras 7 y 8. Se ha utilizado un factor  $\alpha = 10\beta$  y la malla más densa de las analizadas anteriormente, es decir, la condición para la cual la formulación converge más exactamente a los valores en frecuencia. De esta manera se intenta independizar el problema de sensibilidad a la normal del problema de estabilidad de la solución.

**3.2.1 Análisis de los resultados de sensibilidad a la definición de la normal al contorno.** Como puede observarse en las figuras 7 y 8 la formulación de Hamdi es sensible a la definición de la normal al contorno. Se observa, en el caso del elemento cuadrilátero que tanto los valores en frecuencia, como la forma de los modos cambia al variar la dirección normal al pistón inclinado. En el caso del elemento triangular, se observa que los modos no cambian. Debe recalcar nuevamente que se utilizan mallas muy densas.

**Tabla 5:** resultados del problema del pistón inclinado al variar  $\pm 5^\circ$  la dirección del vector normal para el elemento cuadrilátero de cuatro nodos implementado con la formulación de Hamdi

Malla $\alpha = 10\beta$	Primer modo $f = 0,295$ Hz	Segundo modo $f = 0,886$ Hz	Tercer modo $f = 1,45$ Hz	Cuarto modo $f = 1,47$ Hz
192 elementos sin variación	0,296	0,888	1,46	1,48
192 elementos variación $\pm 5^\circ$	0,290	0,676	1,046	1,49

**Tabla 6:** resultados del problema del pistón inclinado al variar  $\pm 5^\circ$  la dirección del vector normal para el elemento triangular de tres nodos implementado con la formulación de Hamdi

Malla $\alpha = 10\beta$	Primer modo $f = 0,295$ Hz	Segundo modo $f = 0,886$ Hz	Tercer modo $f = 1,45$ Hz	Cuarto modo $f = 1,47$ Hz
339 elementos sin variación	0,295	0,887	1,474	1,479
339 elementos variación $\pm 5^\circ$	0,295	0,885	1,457	1,487

#### 4 Formulación mixta con penalización a las rotaciones

La formulación mixta [40], introduce tres variables de estado: la presión, el desplazamiento y un “momento de vorticidad”, encargado este último de eliminar los modos espúreos a frecuencias diferentes de cero. El momento de vorticidad se define como

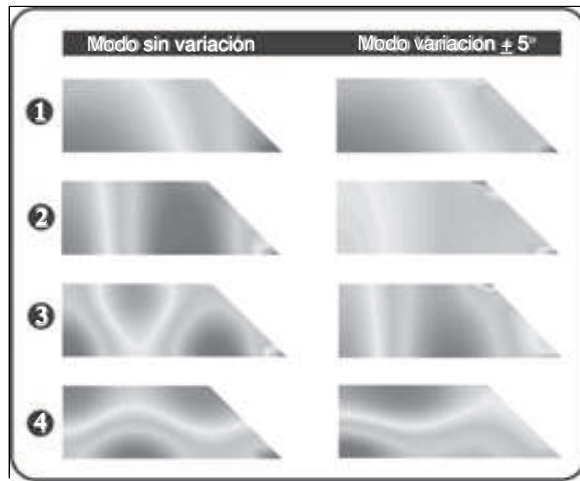
$$\nabla \times \vec{u} = \frac{\Lambda}{\alpha},$$

donde  $\Lambda$  es el momento de vorticidad. La magnitud de  $\Lambda$  debe ser pequeña mientras  $\alpha$  es una constante de gran valor.

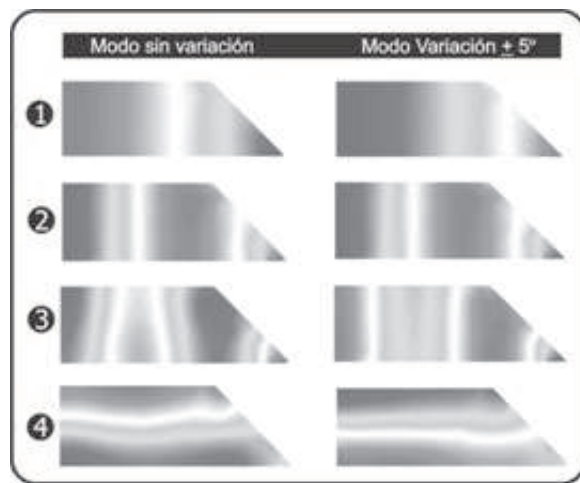
Se propone el siguiente funcional para discretizar el fluido acústico

$$\Pi = \int_{V_f} \left\{ \frac{p^2}{2\beta} - \vec{u} \cdot f^B - \lambda_p \left( \frac{p}{\beta} + \nabla \cdot \vec{u} \right) \frac{\Lambda \cdot \Lambda}{2\alpha} - \lambda_\Lambda \cdot \left( \frac{\Lambda}{\alpha} - \nabla \times \vec{u} \right) \right\} dV + \int_{S_f} \tilde{p} \vec{u}_n^s dS,$$

donde las variables son la presión  $p$ , los desplazamientos  $u$ , el momento de vorticidad  $\Lambda$  y los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_p$  y  $\lambda_\Lambda$ . La constante  $\beta$  es



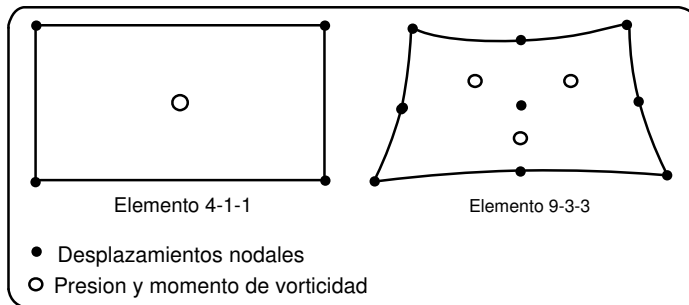
**Figura 7:** efecto sobre los modos de vibración al variar  $\pm 5^\circ$  la dirección del vector normal para el elemento cuadrilátero de cuatro nodos implementado con la formulación de Hamdi



**Figura 8:** efecto sobre los modos de vibración al variar  $\pm 5^\circ$  la dirección del vector normal para el elemento triangular de tres nodos implementado con la formulación de Hamdi

el módulo de compresibilidad y la constante  $\alpha$  tiene un valor alto, como ya se mencionó. Nótese que los dos primeros términos corresponden a la energía de deformación (dada en términos de la presión) y al potencial de las cargas externas aplicadas. El tercer término corresponde a la restricción de incompresibilidad y el cuarto término se incluye para poder condensar estáticamente los grados de libertad del momento de vorticidad. El quinto término corresponde a la restricción de irrotacionalidad. El último término es el potencial debido a la aplicación de una presión en el contorno. El valor de  $\alpha$  se encuentra entre  $10\beta < \alpha < 10^4\beta$ . Los experimentos numéricos presentados en la referencia [40], los cuales se mencionarán más adelante, han utilizado un valor de  $\alpha = 1.000\beta$ .

Los elementos desarrollados con esta formulación son elementos cuadriláteros, tal como se observa en la figura 9. El elemento 4-1-1 de cuatro nodos tiene 8 grados de libertad en desplazamientos, 1 grado de libertad en presiones y 1 grado de libertad para el momento de vorticidad. El elemento 9-3-3 de nueve nodos tiene 18 grados de libertad en desplazamientos, 3 grados de libertad en presiones y 3 grados de libertad para el momento de vorticidad.

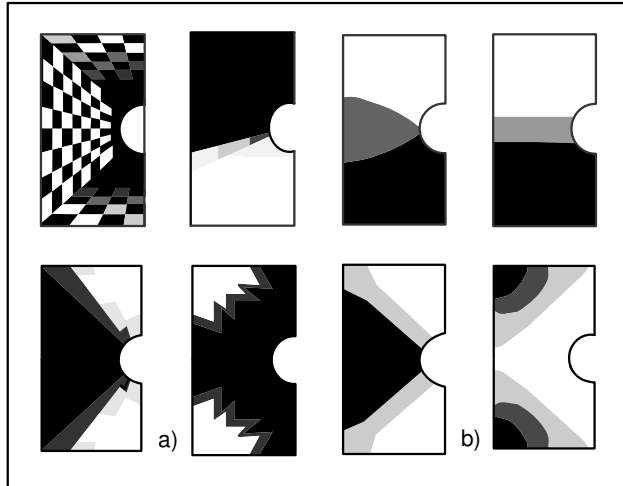


**Figura 9:** elementos cuadriláteros para la formulación de Bathe

#### 4.1 Estabilidad de la formulación

De acuerdo con los resultados publicados [40] el elemento 4-1-1 no es estable, dado que arroja resultados en frecuencia incorrectos además de producirse

modos de presión discontinuos entre elementos a modo de tablero de ajedrez<sup>1</sup>, figura 10.a. La formulación 9-3-3 es estable y presenta como ventaja adicional que no parece ser tan rígido para copiar los modos de vibración estructural, tal como se aprecia en la figura 10.b. Se presentan los resultados para el caso de un cilindro suspendido en un resorte, similar al presentado en secciones anteriores.



**Figura 10:** a) Modos de presión “checkerboard” para el elemento 4-1-1 de presión, desplazamiento y momento de vorticidad b) Modos correctos del problema del cilindro suspendido utilizando el elemento 9-3-3 en desplazamiento, presión y momento de vorticidad

Aunque no se presentan en las referencias [40, 41], experimentos referentes a la estabilidad debida al factor de penalización a las rotaciones, se menciona en dichos trabajos que el elemento es estable a dicha variación.

## 4.2 Sensibilidad a la definición de la dirección normal al contorno

El elemento 4-1-1 y el 9-3-3 son sensibles a variaciones de la dirección normal al contorno de entre  $1^\circ$  y  $7^\circ$ . La tabla 7 muestra las frecuencias de vibraciones

<sup>1</sup>Más conocidos en la literatura especializada con la expresión inglesa: “checkerboard modes”.

obtenidas como resultado de variar la dirección normal al contorno del cilindro suspendido en un resorte, similar al presentado en secciones anteriores. Una vez más los resultados se comparan con los obtenidos con una formulación  $u - \varnothing$  [38].

**Tabla 7:** sensibilidad de la formulación de desplazamiento, presión y momento de vorticidad a la definición de la dirección normal al contorno [40]

Malla $\alpha = 1000\beta$	Primer modo $f = 0,679$ Hz	Segundo modo $f = 92,59$ Hz	Tercer modo $f = 178,9$ Hz	Cuarto modo $f = 194,8$ Hz
2 elementos 9-3-3 sin variación	0,614	109,53	186,1	210,7
2 elementos 9-3-3 variación $\pm 5^\circ$	0,739	13,71	110,4	183,6

## 5 Conclusiones

Se ha realizado una revisión de dos formulaciones en elementos finitos existentes para resolver el problema de un fluido acústico en interacción con un sólido. De todas las formulaciones mencionadas, se prefieren aquellas cuyas variables de estado son los desplazamientos, ya que se pueden vincular directamente a elementos estructurales. Es reportado por varios autores y se ha comprobado mediante los experimentos numéricos realizados, que la formulación en desplazamientos presenta modos de circulación espúreos a frecuencias diferentes de cero. La aparición de estos modos es interpretada por varios autores como una pérdida de la condición de irrotacionalidad inherente al fluido debido a la discretización por elementos finitos.

Se han analizado dos formulaciones que buscan evitar la aparición de los modos de circulación:

La primera formulación, desarrollada por Hamdi et al [28], impone un valor de penalización que hace que el elemento sea muy rígido ante una rotación. Esta formulación es inestable para elementos de tres y cuatro nodos, ya que la solución depende del valor de penalidad empleado. Además es sensible a la definición de la dirección normal al contorno, lo que la hace poco adecuada para modelar problemas de contornos irregulares.

La segunda formulación, desarrollada por Bathe et al [40], plantea un elemento mixto entre campos: presiones, desplazamientos y momentos de vorticidad. Es posible condensar los campos de presión y momento de vorticidad a nivel elemental, con lo cual su acoplamiento a elementos estructurales es directo. Los elementos de bajo orden, cuadriláteros de cuatro nodos, son sensibles de igual forma a la definición de la dirección de la normal al contorno. Los elementos de alto orden, cuadriláteros de nueve nodos, son estables y poco rígidos para copiar los modos estructurales. Dado que son cuadriláteros su utilización para discretizar contornos irregulares es limitada, lo que supone una gran desventaja para su utilización, ya que una discretización en cuadriláteros produce, en general, elementos más distorsionados (mala relación de aspecto) que una discretización en elementos triangulares. Dos triángulos equiláteros no producen un buen cuadrilátero, ya que forman un rombo.

Ninguna de estas dos formulaciones presenta una extensión a dominios 3D. La extensión a 3D en el caso del elemento de Hamdi es directa aunque se prevé que siga siendo inestable. En el caso del elemento de Bathe, no se mencionan las funciones de interpolación de los campos de presión y momento de vorticidad necesarias en el dominio 3D. En este caso parece previsible la necesidad de emplear un hexaedro de 27 nodos, que haría de éste un elemento ineficiente para resolver problemas acústicos, caracterizados por la gran densidad de malla necesaria para discretizar el medio fluido.

Es evidente que ante los problemas encontrados en las formulaciones existentes, surge la necesidad de desarrollar elementos de bajo orden estables, basados en desplazamientos, que permitan la discretización de contornos irregulares. Este tema se abordará en un próximo artículo.

## Agradecimientos

Al doctor Carmelo Militello de la Universidad de La Laguna en Tenerife, España por su dedicación y apoyo en este trabajo.

## Referencias

- [1] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method, The Basis*, ISBN 0750650494. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1, 2000. Referenciado en 108, 113

- [2] L. H. Chen and D. G. Schweikert. *Sound radiation from an arbitrary body*. The Journal of the Acoustical Society of America, ISSN 0001-4966, **35**(10), 1626-1632 (1963). Referenciado en 108
- [3] Harry A. Schenck. *Improved integral formulation for acoustic radiation problems*. The Journal of the Acoustical Society of America, ISSN 0001-4966, **44**(1), 41-58 (1968). Referenciado en 108
- [4] J. J. Engblom and R. B. Nelson. *Consistent formulation of sound radiation from arbitrary structure*. Journal of Applied Mechanics, ISSN 0021-8936, **42**, 295-300 (1975). Referenciado en 108, 110
- [5] Ian C. Mathews. *Numerical technique for three dimensional steady-state fluid-structure interaction*. The Journal of the Acoustical Society of America, ISSN 0001-4966, **79**(5), 1317-1325 (1986). Referenciado en 108
- [6] Gordon C. Everstine and Francis M. Henderson. *Coupled finite element/boundary element approach for fluid structure interaction*. The Journal of the Acoustical Society of America, ISSN 0001-4966, **87**(5), 1938-1947 (1990). Referenciado en 109
- [7] Gordon C. Everstine and Raymond S. Cheng. *The coupling of finite elements and boundary elements for scattering from fluid-filled structures*. In Computer Technology: Advances and Applications. American Society of Mechanical Engineers, New York, PVP-**234**, 43-47 (1992). Referenciado en 109
- [8] L. Gaul and W. Wenzel. *A coupled symmetric BE-FE for acoustics fluid-structure interaction*. Engineering Analysis with boundary elements, ISSN 0955-7997, **26**(7), 629-636 (2002). Referenciado en 109
- [9] D. Fritze, S. Marburg and H. S. Hardtke. *FEM-BEM coupling and structural acoustic sensitivity analysis for shell geometries*. Computers & Structures, ISSN 0045-7949, **83**, 143-154 (2005). Referenciado en 109
- [10] Peter Bettess. *Infinite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, ISSN 0029-5981, **11**(1), 53-64 (1977). Referenciado en 109
- [11] Peter Bettess. *More on infinite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, ISSN 0029-5981, **15**(11), 1613-1626 (1980). Referenciado en 109
- [12] O. C. Zienkiewicz, C. Emson and P. Bettess. *A novel boundary infinite element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, ISSN 0029-5981, **19**(3), 393-404 (1983). Referenciado en 109

- 
- [13] O. C. Zienkiewicz, K. Bando, P. Bettess and T. C Chiam. *Mapped infinite elements for exterior wave problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, ISSN 0029-5981, **21**(7), 1229-1251 (1985). Referenciado en 109
- [14] E. T. Moyer, Jr. *Performance of mapped infinite elements for exterior wave scattering applications*. Communications in Applied Numerical Methods, ISSN 0748-8025, **8**(1), 27-39 (1992). Referenciado en 109
- [15] Peter Bettess. *Infinite elements*, ISBN 0-9518806-0-8. Sunderland. UK: Penshaw Press, 264 (1992). Referenciado en 109
- [16] John T. Hunt, Max R. Knittel and Don Barach. *Finite element approach to acoustic radiation from elastic structures*. The Journal of the Acoustical Society of America, ISSN 0001-4966, **55**(2), 269-280 (1974). Referenciado en 109
- [17] John T. Hunt, Max R. Knittel, Charles S. Nichols and Don Barach. *Finite-element approach to acoustic scattering from elastic structures*. The Journal of the Acoustical Society of America, ISSN 0001-4966, **57**(2), 287-299 (1975). Referenciado en 109
- [18] J. B. Keller and D. Givoli. *Exact non-reflecting boundary conditions*. Journal of Computational Physics, ISSN 0021-9991, **82**(1), 172-192 (1989). Referenciado en 109
- [19] MDC. Magalhaes and NS. Ferguson. *Acoustic-structural interaction analysis using the component mode synthesis method*. Applied Acoustics, ISSN 0003-682X, **64**(11), 1049-1067 (2003). Referenciado en 109
- [20] G. M. L. Gladwell and G. Zimmerman. *On energy and complementary energy formulations of acoustic and structural vibration problems*. Journal of Sound and Vibration, ISSN 0022-460X, **3**(3), 233-241 (1966). Referenciado en 109
- [21] G. M. Gladwell. *A variational formulation of damped acousto-structural vibration problems*. Journal of Sound and Vibration, ISSN 0022-460X, **4**(2), 172-186 (1966). Referenciado en 109
- [22] Anil K. Chopra, E. L. Wilson and I. Farhoomand. *Earthquake analysis of reservoir-dam systems*. Proceedings of the 4th World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, 1969. Referenciado en 109
- [23] E. L. Wilson. Chap. 10 of *Finite Elements in Geomechanics*. Ed.: Gudehus John Wiley and Sons, New York, 1977, paper at the International Symposium of Numerical Methods in Soil Mechanics and Rock Mechanics, Karlsruhe, September 1975. Referenciado en 109

- [24] D. Shantaram, D. R. J. Owen and O. C. Zienkiewicz. *Dynamic transient behaviour of two and three-dimensional structures including plasticity, large deformation effects, and fluid interaction*. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, ISSN 0098-8847, **4**(6), 561-578 (1976). Referenciado en 109
- [25] T. B. Belytschko and J. M. Kennedy. *A fluid-structure finite element method for the analysis of reactor safety problems*. Nuclear engineering Design, ISSN 0029-5493, **38**, 71-81 (1976). Referenciado en 109
- [26] T. B. Belytschko and J. M. Kennedy. *Computer models for subassembly simulation*. Nuclear engineering Design, ISSN 0029-5493, **49**, 17-38 (1978). Referenciado en 109
- [27] K. J. Bathe and W. Hahn. *On transient analysis of fluid-structure systems*. Computers and Structures, ISSN 0045-7949, **10**, 383-391 (1978). Referenciado en 109
- [28] M. A. Hamdi, et al. *A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, ISSN 0029-5981, **13**(1), 139-150 (1978). Referenciado en 109, 110, 111, 113, 114, 128
- [29] G. Larsson and P. Svenkvist. *Experiences using the ADINA fluid element for large displacement analysis*. Proceedings of the ADINA Conference, ISSN 0045-7949, 383-406 (1979). Referenciado en 109
- [30] T. B. Belytschko and U. Schumann. *Fluid-structure interactions in light water reactor systems*. Nuclear engineering Design, ISSN 0029-5493, **60**, 173-195 (1980). Referenciado en 109
- [31] T. B. Belytschko. *Fluid-structure interaction*. Computer & Structures, ISSN 0045-7949, **12**, 459-469 (1980). Referenciado en 109
- [32] T. B. Belytschko and R. Mullen. *Two dimensional fluid structure impact computations with regularization*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, ISSN 0045-7825, **27**, 139-154 (1981). Referenciado en 109
- [33] T. B. Belytschko and D. P. Flanagan. *A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, ISSN 0029-5981, **17**(5), 676-706 (1981). Referenciado en 109
- [34] O. C. Zienkiewicz and R. E. Newton. *Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid*. Symposium on Finite Element Techniques. Stuttgart, 1969. Referenciado en 109

- [35] Craggs. *The transient response of a coupled plateacoustic system using plate and acoustic finite elements*. Journal of Sound and Vibration, ISSN 0022-460X, **15**, 509-528 (1971). Referenciado en 109
- [36] Henri Morand and Roger Ohayon. *Substructure variational analysis of coupled fluid structure systems. Finite element results*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, ISSN 0029-5981, **14**(5), 741-755 (1979). Referenciado en 109
- [37] G. C. Everstine. *A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction*. Journal of Sound and Vibration, ISSN 0022-460X, **79**(1), 157-160 (1981). Referenciado en 109
- [38] L. G. Olson and K. J. Bathe. *Analysis of fluid-structure interactions. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potencial*. Computers & Structures, ISSN 0045-7949, **21**, 21-32 (1985). Referenciado en 109, 115, 128
- [39] C. A. Felippa and R. Ohayon. *Mixed variational formulation of finite element analysis of acoustoelastic/slosh fluid-structure interaction*. Journal of Fluids and Structures, ISSN 0889-9746, **4**, 35-57 (1990). Referenciado en 109
- [40] K. J. Bathe, C. Nitikitpaiboon and X. Wang. *A mixed displacement-based finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction*. Computers & Structures, ISSN 0045-7949, **56**(2), 225-237 (1995). Referenciado en 110, 111, 114, 122, 124, 126, 127, 128, 129
- [41] Xiaodong Wang and Klaus-Jürgen Bathe. *Displacement/pressure based finite element formulations for acoustic fluid-structure interaction problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, ISSN 0029-5981, **40**(11), 2001-2017 (1997). Referenciado en 110, 111, 122, 127
- [42] S. Dey, D. K. Datta, J. J. Shirron and M. S. Shepard. *p-Version FEM for structural acoustics with a posteriori error estimation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, ISSN 0045-7825, **195**, 1946-1957 (2006). Referenciado en 110
- [43] W. Cristoph Müller. *Simplified analysis of linear fluid-structure interaction*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, ISSN 0029-5981, **17**(1), 113-121 (1981). Referenciado en 110
- [44] M. Petyt and S. P. Lim. *Finite element analysis of the noise inside a mechanically excited cylinder*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, ISSN 0029-5981, **13**(1), 109-122 (1978). 110

- [45] L. G. Olson and K. J. Bathe. *A study of displacement-based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid-structure systems*. Nuclear Engineering and Design, ISSN 0029-5493, **76**, 137-151 (1983). Referenciado en 110, 111, 112, 114
- [46] Alfredo Bermúdez and Rodolfo Rodríguez. *Finite Element Computation of the Vibration Modes of a Fluid-Soil System*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, ISSN 0045-7825, **119**(4), 355-370 (1994). Referenciado en 111
- [47] Harn C. Chen and Robert L. Taylor. *Vibration analysis of fluid-solid systems using a finite element displacement formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, ISSN 0029-05981, **29**(4), 683-698 (1990). Referenciado en 111
- [48] Y. S. Kim and C. B. Yung. *A spurious free four-node displacement-based fluid element for fluid-structure interaction analysis*. Engineering Structures, ISSN 0141-0296, **19**(8), 665-678. (1997). Referenciado en 111
- [49] R. L. Taylor et al. *The patch test—a condition for assessing FEM convergence*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, ISSN 0029-5981, **22**(1), 39-62 (1986). Referenciado en 114
- [50] Klaus-Jurgen Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, ISBN 9780133173055. New Jersey: Prentice Hall. 1982. Referenciado en 115
- [51] J. Donea, S. Giuliani and J. P. Halleux. *An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, ISSN 0045-7825, **33**, 689-723 (1982). Referenciado en 121