

IDENTIFICACIÓN DEL COEFICIENTE DE DIFUSIÓN  
EN UNA ECUACIÓN PARABÓLICA CUASILINEAL,  
MEDIANTE VERSIONES ADJUNTAS DEL PROBLEMA  
DIRECTO

Por:

John Alexander Pérez Sepúlveda

Asesor

Rodney Jaramillo Justinico

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

UNIVERSIDAD EAFIT

Departamento de Ciencias Básicas

Medellín

24 de junio de 2009



# Índice general

0.1. Objetivos . . . . .	2
0.2. Introducción . . . . .	3
<b>1. Análisis del problema directo y del problema inverso</b>	<b>4</b>
1.1. Formulación del problema directo . . . . .	4
1.2. Formulación del problema adjunto . . . . .	5
<b>2. La Solución Aproximada</b>	<b>13</b>
2.1. El algoritmo . . . . .	13
2.2. Causas de error y cotas . . . . .	15
<b>3. Experimento Numérico</b>	<b>29</b>
3.1. Un pseudocódigo en Matlab . . . . .	29
3.2. Conclusiones . . . . .	37
<b>4. Apéndice</b>	<b>38</b>

## 0.1. Objetivos

1. El objetivo principal de este trabajo es la determinación del coeficiente de difusión del problema de valor inicial y de frontera a partir de los datos medidos. Éste trabajo está motivado por el artículo en la referencia [1].
2. Contribuir al fortalecimiento del estudio de problemas inversos en el medio.
3. Realizar simulaciones en Matlab para conseguir estimaciones del coeficiente de difusión y analizar la convergencia del método.

## 0.2. Introducción

Usar ecuaciones diferenciales parciales para modelar problemas físicos es una de las tareas más frecuentes de la matemática aplicada. Un modelo completo requiere cierto tipo de datos de entrada dados en forma de valor inicial y de frontera. La estructura misma de la ecuación diferencial trae consigo uno o más coeficientes que dan cuenta de las propiedades físicas del problema. Encontrar una única solución para el problema constituye lo que reconocemos como el problema directo.

Cuando uno de estos datos de entrada no está disponible, podemos intentar determinarlo tomando medidas de los datos de salida, y resolviendo un problema inverso apropiado. En particular, si el dato desconocido es el coeficiente en la ecuación diferencial parcial, el problema es llamado un problema de identificación de coeficiente.

La identificación de un coeficiente de difusión en una ecuación diferencial parcial cuasi-lineal es el problema escogido a tratar aquí como problema de identificación de coeficiente.

En el capítulo 1 se definen y enuncian los teoremas que justifican el método para conseguir una aproximación del coeficiente. En general éste es un problema inverso.

En el capítulo 2 se muestran y justifican las posibles causas de error y sus cotas en la aplicación del método.

En el capítulo 3 se muestran resultados de simulaciones de recuperación de algunos coeficientes.

En el capítulo 4, el cual se presenta como apéndice, en él aparecen las demostraciones de algunos teoremas enunciados en el capítulo I. La ubicación de tales demostraciones en este capítulo pretende facilitar la lectura de la tesis.

# Capítulo 1

## Análisis del problema directo y del problema inverso

### 1.1. Formulación del problema directo

Para  $T > 0$  sea  $Q_T$  el dominio dado por

$$Q_T = \{(x, t) \mid 0 < x < 1; 0 < t < T\}$$

Supongamos que

$$f \in C^1[0, T] \text{ y } f'(t) > 0 \text{ para } t > 0 \quad (1.1.1)$$

Sean  $J = [f(0), f(T)]$  y  $D : J \rightarrow \mathbb{R}$ , y supongamos que existen constantes positivas  $D_*$ ,  $D^*$  y  $k$  tales que

$$D_* \leq D \leq D^* \text{ para } z \in J \quad (1.1.2)$$

y

$$|D(z_2) - D(z_1)| \leq k|z_2 - z_1| \quad (1.1.3)$$

Consideremos el siguiente problema de valor inicial y de frontera

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x(D(u)\partial_x u(x, t)) = \partial_{xx}B(u(x, t)) \text{ en } Q_T \quad (1.1.4)$$

$$u(x, 0) = f(0) \quad 0 < x < 1$$

$$u(0, t) = f(t) \quad \partial_x u(1, t) = 0 \quad 0 < t < T$$

donde  $B(u) = \int_{f(0)}^u D(s) ds$  y  $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$ .

Para una función  $f$  que satisface ( 1.1.1) y una función  $D$  que satisface ( 1.1.2) y ( 1.1.3), el problema ( 1.1.4) es conocido como el problema directo y tiene única solución  $u$  que satisface,

$$u \in L^2[0, T : H^1(0, 1)] \cap C[0, T : L^2(0, 1)]$$

y

$$\partial_t u \in L^2[0, T : H^{-1}(0, 1)]$$

Ver Ref [1].

En este trabajo trataremos el problema inverso que consiste en identificar de manera aproximada el coeficiente  $D(u)$  a partir de datos de la forma,

$$g(t) = -D(u(0, t))\partial_t u(0, t) \quad \text{ó} \quad h(t) = u(1, t) \quad 0 < t < T$$

Denotaremos por

$$W(J) = \{D \mid D : J \rightarrow \mathbb{R} \text{ que satisface ( 1.1.2) y ( 1.1.3)}\}$$

Para una función  $f$  que satisface ( 1.1.1) podemos definir las funciones  $\Phi$  y  $\Psi$  cuyo dominio es  $W(J)$ , con imágenes en  $L^2[0, T]$  y dadas por:

$$\Phi[f, D] = g(t) = -D(u(0, t))\partial_t u(0, t) \quad \text{ó} \quad \Psi[f, D] = h(t) = u(1, t)$$

## 1.2. Formulación del problema adjunto

**Lema 1.2.1.** Sean  $f$  y  $D$  funciones que satisfacen las hipótesis dadas en ( 1.1.1), ( 1.1.2) y ( 1.1.3), y sea  $u$  la solución del problema ( 1.1.4). Entonces para toda función  $F(x, t)$  suave en  $Q_T$  tenemos

$$-\iint_{Q_T} (f(t) - u(x, t))F(x, t) dx dt = \iint_{Q_T} f'(t)\psi(x, t) dt dx, \quad (1.2.1)$$

en donde  $\psi(x, t)$  es la solución del problema adjunto;

$$K(x, t)\partial_{xx}\psi(x, t) + \partial_t\psi(x, t) = F(x, t) \text{ en } Q_T \quad (1.2.2)$$

$$\psi(x, T) = 0 \quad 0 < x < 1$$

$$\psi(0, t) = \partial_x\psi(1, t) = 0 \quad 0 < t < T$$

siendo  $K(x, t) = \frac{1}{f(t) - u(x, t)} \int_{u(x, t)}^{f(t)} D(s) ds$ .

*Demostración.* En el Apéndice □

**Lema 1.2.2.** Sean  $f$ ,  $D$  y  $u$  como en el Lema 1.2.1. Entonces para toda función  $F(x, t)$  suave en  $Q_T$  tenemos

$$\iint_{Q_T} (u(x, t) - f(0))F(x, t) dt dx = - \int_0^T B(f(t)) \partial_x \psi(0, t) dt, \quad (1.2.3)$$

en donde  $\psi(x, t)$  es la solución del problema adjunto;

$$\hat{K}(x, t) \partial_{xx} \psi(x, t) + \partial_t \psi(x, t) = F(x, t) \text{ en } Q_T \quad (1.2.4)$$

$$\psi(x, T) = 0 \quad 0 < x < 1$$

$$\psi(0, t) = \partial_x \psi(1, t) = 0 \quad 0 < t < T$$

siendo  $\hat{K}(x, t) = \frac{1}{u(x, t) - f(0)} \int_{f(0)}^{u(x, t)} D(s) ds$ .

*Demostración.* En el Apéndice □

**Proposición 1.2.3.** Sean  $f$ ,  $D$  y  $u$  como en el lema 1.2.1. Entonces para todo  $t \in (0, T)$  y para toda  $x \in [0, 1]$

$$f(0) \leq u(x, t) \leq f(t) \quad (1.2.5)$$

*Demostración.* Sean  $\psi_1$  como 1.2.2 y  $\psi_2$  como en 1.2.4

$$- \iint_{Q_T} (f(t) - u(x, t))F(x, t) dx dt = \iint_{Q_T} f'(t) \psi_1(x, t) dt dx$$

en donde la función  $F(x, t)$  se escoge tal que sea positiva en  $Q_T$ . La suavidad de  $K(x, t)$  y de  $F(x, t)$  permiten la aplicación del principio del máximo fuerte al problema adjunto 1.2.2 para concluir que  $\psi_1(x, t) < 0$ , y como  $f$  es una función creciente, entonces  $f'(t) > 0$ . Así, el lado derecho de la igualdad resulta ser negativo, como  $F(x, t)$  se escogió positiva en  $Q_T$ , se concluye que  $f(t) - u(x, t) \geq 0$ , y por tanto que

$$f(t) \geq u(x, t)$$

Por otro lado, del Lema 1.2.2 es cierto que

$$\iint_{Q_T} (u(x, t) - f(0))F(x, t) dt dx = - \int_0^T B(f(t)) \partial_x \psi_2(0, t) dt$$

y sabemos que  $\psi_2(x, t) < 0$ , entonces de las condiciones de frontera del problema adjunto se sigue que  $\partial_x \psi_2(x, t) < 0$ . Como  $F(x, t)$  y  $B(f(t))$  son términos no negativos en  $Q_T$ , entonces  $u(x, t) - f(0) \geq 0$  para casi todo punto  $(x, t)$  en  $Q_T$ .

Una versión del principio del Máximo fuerte puede ser encontrada con prueba en la referencia [6]. □

**Lema 1.2.4.** Sean  $f$ ,  $D$  y  $u$  como en el lema 1.2.1. Entonces para toda función suave  $F(x, t)$  en  $Q_T$  tenemos

$$\iint_{Q_T} \partial_x u(x, t) F(x, t) dt dx = \int_0^T \phi(0, t) f'(t) dt, \quad (1.2.6)$$

en donde  $\phi(x, t)$  es la solución del problema

$$\partial_t \phi(x, t) + D(u(x, t)) \partial_{xx} \phi(x, t) = F(x, t) \text{ en } Q_T \quad (1.2.7)$$

$$\phi(x, T) = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$\partial_x \phi(0, t) = 0, \quad \phi(1, t) = 0 \quad 0 < t < T$$

*Demostración.* En el apéndice □

**Proposición 1.2.5.** Sean  $f$ ,  $D$  y  $u$  como en el lema 1.2.1. Entonces

$$\partial_x u(x, t) < 0 \quad (1.2.8)$$

en casi todo punto de  $Q_T$

*Demostración.* La suavidad de  $D(u(x, t))$  y  $F(x, t)$ , con  $F(x, t) > 0$  en  $Q_T$ , permiten utilizar el principio del máximo fuerte para concluir que  $\phi(x, t) < 0$  en  $Q_T$ , en particular  $\phi(0, t) < 0$  en  $0 < t < T$ , y como  $f'(t) > 0$  en  $0 < t < T$  entonces el lado derecho de la ecuación 1.2.6 es negativo. Así el lado derecho de la misma ecuación también es negativo, lo que implica que

$$\partial_x u(x, t) F(x, t) < 0$$

y dado que  $F(x, t) > 0$  en  $Q_T$  se concluye que

$$\partial_x u(x, t) < 0 \text{ en } Q_T$$

□

**Lema 1.2.6.** Sean  $f$  que satisface (1.1.1),  $D_1$  y  $D_2$  que satisfacen (1.1.2) y (1.1.3), y sea  $u_2 \in J = [f(0), f(T)]$ . Entonces

$$\int_0^T \theta(t) [g_1(t) - g_2(t)] dt = \iint_{Q_T} (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 dx dt \quad (1.2.9)$$

donde  $\phi$  satisface el problema llamado  $g$ -adjunto

$$\begin{aligned}\partial_t \phi + D_1(\mu(x, t)) \partial_{xx} \phi &= 0 \quad \text{en } Q_T \\ \phi(x, T) &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ \phi(0, t) &= \theta(t), \quad 0 < t < T \\ \partial_x \phi(1, t) &= 0, \quad 0 < t < T\end{aligned}\tag{1.2.10}$$

y  $\theta(t) = f(T - t)$

*Demostración.* En el apéndice. □

**Proposición 1.2.7.** Sean  $f$ ,  $D_1$  y  $D_2$  como en el Lema 1.2.6. Si  $D_1(u) > D_2(u)$  para  $u \in [f(0), f(T)]$ , entonces

$$\Phi[f, D_1](t) > \Phi[f, D_2](t)$$

*Demostración.* Como  $D_1(x, t)$  es suave en  $Q_T$ , si escogemos  $\theta(t) = F(T - t)$  positiva donde  $F$  satisface 1.1.1, el principio del máximo fuerte aplicado al problema adjunto 1.2.10 permite concluir que la función  $\partial_x \phi(x, t) < 0$  en  $Q_T$ . Como  $\partial_x u_2(x, t) < 0$  en  $Q_T$  y  $D_1(u) > D_2(u)$ , el lado derecho de la ecuación 1.2.9 es mayor que cero, esto implica que

$$g_1(t) - g_2(t) > 0$$

de donde

$$g_1(t) > g_2(t)$$

luego

$$\Phi[f, D_1](t) > \Phi[f, D_2](t)$$

□

**Lema 1.2.8.** Sean  $f$ ,  $D_1$  y  $D_2$  como en Lema 1.2.6. Sean  $u_1$  y  $u_2$  soluciones de los problemas

$$\begin{aligned}\partial_t u_j &= \partial_x (D_j \partial_x u_j) \quad \text{en } Q_T \\ u_j(x, 0) &= f(0) \\ u_j(0, t) &= f(t) \\ \partial_x u_j(1, t) &= 0\end{aligned}$$

Para  $j \in 1, 2$ . Supongamos que  $\psi$  es la solución del siguiente problema adjunto

$$\partial_t \psi + D_1(\mu(x, t)) \partial_{xx} \psi = 0 \quad \text{en } Q_T\tag{1.2.11}$$

$$\begin{aligned}\psi(x, T) &= 0 \quad 0 < x < 1 \\ \psi(0, t) &= 0 \quad 0 < t < T \\ D_1(\mu(1, t))\partial_x\psi(1, t) &= \beta(t)\end{aligned}$$

con  $\beta(t) = F(T - t)$ . Entonces

$$\int_0^T \beta(t)(h_1(t) - h_2(t))dt = \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2))\partial_x\psi\partial_x u_2 dx dt \quad (1.2.12)$$

*Demostración.* En el apéndice □

Las conclusiones de los Lemas 1.2.7 y 1.2.8 nos lleva a que  $\Phi$  y  $\psi$  son funciones monótonas.

**Proposición 1.2.9.** Sean  $f$ ,  $D_1$  y  $D_2$  como en el Lema 1.2.6. Si  $D_1(u) > D_2(u)$  para  $u \in [f(0), f(T)]$ . Entonces

$$\Psi[f, D_1](t) < \Psi[f, D_2](t) \quad 0 < t < T$$

*Demostración.* Se procede como en el lema 1.2.7 con  $\beta(T) = F(T - t)$  positiva donde  $F$  satisface (1.1.1). Con esto se concluye que el lado derecho de la ecuación (1.2.12) es positivo, de donde

$$h_1(t) < h_2(t)$$

y de aquí se concluye

$$\Psi[f, D_1](t) < \Psi[f, D_2](t)$$

□

Sean  $u_1$  y  $u_2$  soluciones del problema directo con  $D_1(u_1)$ ,  $D_2(u_2)$  los respectivos coeficientes que satisfacen (1.1.2) y (1.1.3). Para  $i = 1, 2$ , sea

$$g_i = \Phi[f, D_i] \quad h_i = \Psi[f, D_i]$$

En el problema  $g$ -adjunto, problema (1.2.10), sea

$$\phi(0, t) = \theta(t) = \frac{g_1(t) - g_2(t)}{\|g_1 - g_2\|_{L^2[0, T]}}$$

y en el problema  $h$ -adjunto, problema (1.2.11), sea

$$D_1(\mu(1, t))\partial_x\psi(1, t) = \beta(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{\|h_1 - h_2\|_{L^2[0, T]}}$$

Como

$$\|g_1 - g_2\|_{L^2[0,T]}^2 = \int_0^T (g_1 - g_2)^2 d\tau$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|g_1 - g_2\|_{L^2[0,T]} &= \frac{1}{\|g_1 - g_2\|_{L^2[0,T]}} \int_0^T (g_1 - g_2)^2 d\tau \\ &= \int_0^T \frac{(g_1 - g_2)^2}{\|g_1 - g_2\|_{L^2[0,T]}} d\tau \\ &= \int_0^T \frac{(g_1 - g_2)}{\|g_1 - g_2\|_{L^2[0,T]}} (g_1 - g_2) d\tau \\ &= \int_0^T \theta(t)(g_1 - g_2) d\tau \end{aligned}$$

Ahora por el lema 1.2.6, ecuación 1.2.9 se sigue que

$$\begin{aligned} \|g_1 - g_2\|_{L^2[0,T]} &= \int_0^T \theta(t)(g_1 - g_2) dt \\ &= \iint_{Q_T} (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 dx dt \end{aligned}$$

De aqui que

$$\begin{aligned} \|g_1 - g_2\|_{L^2[0,T]} &= \left| \iint_{Q_T} (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 dx dt \right| \\ &\leq \iint_{Q_T} |(D_1(u_2) - D_2(u_2))| |\partial_x \phi| |\partial_x u_2| dx dt \end{aligned}$$

La continuidad de las derivadas  $\partial_x \phi$  y  $\partial_x u_2$  en  $Q_T$  implica su acotamiento en  $Q_T$ , con eso

$$\begin{aligned} \|g_1 - g_2\|_{L^2[0,T]} &\leq \bar{C} \iint_{Q_T} \|D_1 - D_2\|_{\infty} dx dt \\ &\leq C \|D_1 - D_2\|_{\infty} \end{aligned}$$

Así,

$$\|g_1 - g_2\|_{L^2[0,T]} \leq C \|D_1 - D_2\|_{\infty} \quad (1.2.13)$$

De la misma manera

$$\|h_1 - h_2\|_{L^2[0,T]}^2 = \int_0^T (h_1 - h_2)^2 dt$$

De donde

$$\begin{aligned} \|h_1 - h_2\|_{L^2[0,T]} &= \frac{1}{\|h_1 - h_2\|_{L^2[0,T]}} \int_0^T (h_1 - h_2)^2 dt \\ &= \int_0^T \frac{1}{\|h_1 - h_2\|_{L^2[0,T]}} (h_1 - h_2)^2 dt \\ &= \int_0^T \beta(t)(h_1 - h_2) dt \end{aligned}$$

Ahora por el lema 1.2.8, ecuación (1.2.12), se sigue que

$$\begin{aligned} \|h_1 - h_2\|_{L^2[0,T]} &= \int_0^T \beta(t)(h_1 - h_2) dt \\ &= \iint_{Q_T} (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \psi \partial_x u_2 dx dt \end{aligned}$$

las derivadas parciales  $\partial_x \psi$  y  $\partial_x u_2$  son acotadas, de esto se concluye que

$$\|h_1 - h_2\|_{L^2[0,T]} \leq C \|D_1 - D_2\|_\infty \quad (1.2.14)$$

De los resultados (1.2.13) y (1.2.14) se concluye que

$$\|g_1 - g_2\|_{L^2[0,T]} = \|\Psi[f, D_1] - \Psi[f, D_2]\|_{L^2[0,T]} \leq C \|D_1 - D_2\|_\infty$$

y

$$\|h_1 - h_2\|_{L^2[0,T]} = \|\Phi[f, D_1] - \Phi[f, D_2]\|_{L^2[0,T]} \leq C \|D_1 - D_2\|_\infty$$

Es decir, que  $\Phi$  y  $\Psi$  son continuas como funciones de  $D$  desde  $W(J)$  al espacio  $L^2[0, T]$ .

La siguiente proposición muestra que  $\Phi$  y  $\Psi$  son inyectivas.

**Proposición 1.2.10.** *Sea  $f$  una función que satisface (1.1.1), y sean  $D_1$  y  $D_2$  coeficientes que satisfacen (1.1.2) y (1.1.3).*

*Para  $k = 1, 2$  definimos*

$$g_k(t) = \Phi[f, D_k] \quad y \quad h_k(t) = \Psi[f, D_k]$$

*Entonces*

$$1. \quad \Phi[f, D_1] = \Phi[f, D_2] \implies D_1(u) = D_2(u) \quad \forall u \in J$$

$$2. \Psi[f, D_1] = \Psi[f, D_2] \implies D_1(u) = D_2(u) \quad \forall u \in J$$

*Demostración.* Veamos 1. Supongamos que  $g_1 = \Phi[f, D_1] = \Phi[f, D_2] = g_2$ , y que existe  $u \in J$  tal que  $D_1(u) \neq D_2(u)$ . Como  $D_1$  y  $D_2$  satisfacen 1.1.3, entonces  $D_1$  y  $D_2$  son continuas en  $J$ , luego existe un intervalo  $I \subset J$  tal que  $D_1(u) \neq D_2(u) \quad \forall u \in I$ . Como  $J = [f(0), f(T)]$ , podemos escoger un intervalo  $I_1 = (t_1, t_2) \subset [0, T]$  tal que  $D_2(f(t)) - D_1(f(t))$  es del mismo signo  $\forall t \in I_1$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que

$$D_2(f(t)) - D_1(f(t)) > 0$$

Por consiguiente, el lema 1.2.6 aplicado a  $(0, 1) \times (t_1, t_2)$  garantiza

$$\int_{t_1}^{t_2} \theta(t)[g_1(t) - g_2(t)]dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 dx dt$$

Luego

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 (D_2(u_2) - D_1(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 dx dt = 0$$

Este resultado es totalmente independiente del dato  $\theta(t)$ , el cual puede ser escogido tal que  $\partial_x \phi$  resulte menor que cero en  $(0, 1) \times (t_1, t_2)$ , además de la proposición 1.2.5 se puede concluir que  $\partial_x u_2 < 0$  en  $(0, 1) \times (t_1, t_2)$ . Por tanto,

$$D_1(u_2) - D_2(u_2) = 0 \quad \text{en } (0, 1) \times (t_1, t_2)$$

Y entonces

$$D_1(u_2) = D_2(u_2) \quad \text{en } (0, 1) \times (t_1, t_2)$$

lo cual representa una contradicción. Por tanto se sigue que

$$D_1(u) = D_2(u) \quad \forall u \in J$$

La prueba de la parte 2. es analoga.

□

# Capítulo 2

## La Solución Aproximada

### 2.1. El algoritmo

Consideremos el problema inverso de aproximar el coeficiente de difusión  $D = D(u)$  en un conjunto de nodos igualmente espaciados

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

En donde los datos de entrada se escogen de la forma

$$\text{dato}(f, g) = \left\{ \begin{array}{l} f(t_k) = \mu_k \quad k = 1, 2, \dots, N \\ g(t_k) = -D(\mu_k) \partial_x u(0, t_k) = \lambda_k \quad k = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \quad (2.1.1)$$

O de la forma

$$\text{dato}(f, g) = \left\{ \begin{array}{l} f(t_k) = \mu_k \quad k = 1, 2, \dots, N \\ h(t_k) = u(0, t_k) = \eta_k \quad k = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \quad (2.1.2)$$

Para  $I = [0, T]$  y  $J = [f(0), f(T)]$ , la función  $f$  es creciente de  $I$  en  $J$ .

A una partición de  $I$  la llamaremos malla interna, y a la partición de  $J$  definida por

$$f(0) = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_M = f(T)$$

La llamaremos malla externa. Aquí  $f_0 = \mu_0$  y  $\mu_M = f_N$  donde  $M < N$ , es decir, entre dos nodos de la malla externa existen cierto número de nodos de la malla interna, esto es

$$f_0 = \mu_0 = \tilde{\mu}_0 < \tilde{\mu}_1 < \dots < \tilde{\mu}_{k_1} = \mu_1 = f(T_1)$$

$$f_1 = \mu_1 = \bar{\mu}_0 < \bar{\mu}_1 < \dots < \bar{\mu}_{k_2} = \mu_2 = f(T_2)$$

y en el intervalo final

$$f_{N-1} = \mu_{M-1} = \hat{\mu}_0 < \hat{\mu}_1 < \cdots < \hat{\mu}_{k_N} = \mu_M = f_N$$

Entre dos nodos  $\mu_{p-1}$  y  $\mu_p$  de la malla externa hay  $k_p$  nodos de la malla interna, estos nodos son necesarios para aproximar integrales entre dos nodos de la malla gruesa.

Asociada a la partición de  $J$  consideremos una familia de funciones poligonales,  $\hat{D}$ . Cada miembro de ésta familia se caracteriza por que su valor en los nodos  $\mu_k$  está dado por  $d_k = \hat{D}(\mu_k)$ , siendo  $d_k$  una aproximación para  $D(\mu_k)$ . Definimos  $\hat{D}$  como

$$\hat{D}(u) = d_{k-1}\rho_{k-1} + d_k\lambda_k \quad (2.1.3)$$

donde

$$\rho_k(u) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\mu_{k+1} - u}{\mu_{k+1} - \mu_k} & , \mu_k < u < \mu_{k+1} \\ 0 & , \text{otro caso} \end{array} \right\} \quad (2.1.4)$$

$$\lambda_k(u) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{u - \mu_{k-1}}{\mu_k - \mu_{k-1}} & , \mu_{k-1} < u < \mu_k \\ 0 & , \text{otro caso} \end{array} \right\} \quad (2.1.5)$$

Las siguientes notaciones serán necesarias en la formulación del algoritmo para la aproximación del coeficiente

1.  $\hat{D}(u) = P_M[d_0, d_1, \dots, d_M]$  denota el coeficiente aproximado por la poligonal ( 2.1.3) basados en los valores de los nodos  $d_0, d_1, \dots, d_M$ .
2.  $u(x, t; D, f)$  denota la solución de el problema directo ( 1.2.4) con coeficiente  $D$  y dato  $f$ .
3.  $\phi(x, t; D, \theta)$  denota la solución de el problema adjunto ( 1.2.10) con coeficiente  $D(x, t) = D(\mu(x, t))$  y dato  $\theta(t)$ .
4.  $\psi(x, t; D, \beta)$  denota la solución de el problema adjunto ( 1.2.11) con coeficiente  $D(x, t) = D(\mu(x, t))$  y dato  $\beta(t)$ .

Para una función  $f$  que satisface ( 1.1.1), un coeficiente desconocido  $D$  que satisface ( 1.2.2) y ( 1.2.3) y un dato medido de flujo  $g(t) = \Phi[f, D]$ , se asume que existe una partición exterior  $\Pi = \{0 = \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_M = f(T)\}$  de  $J$ . Consideremos la poligonal dada por ( 2.1.3) que aproxima al coeficiente  $D$  por el siguiente algoritmo recursivo basado en el dato  $f, g$ .

1.  $d_0$  se asume conocido

2.  $d_k$  es determinado apartir de  $d_0, d_1, \dots, d_{k-1}$  mediante la siguiente fórmula recursiva

$$(d_k - d_{k-1}) \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_0^1 \lambda_k(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt = \int_{T_{k-1}}^{T_k} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) dt \quad (2.1.6)$$

donde

$$\begin{aligned} D_1(u) &= P_M[d_0, d_1, \dots, d_k], \\ D_2(u) &= P_M[d_0, d_1, \dots, d_{k-1}, d_{k-1}], \\ u_2 &= u(x, t; D_2, f), \\ g_2 &= -D_2(f(t)) \partial_x u_2(0, t) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T_k, \\ \phi(x, t) &= \phi(x, t; D_1, f(T-t)) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T_k. \end{aligned}$$

De la misma manera se consigue la aproximación  $D(u)$  para el dato  $f, h$ .

## 2.2. Causas de error y cotas

En la ésta sección se discutirán detalles de algunas cotas de error por la suposición de algunos datos aproximados dentro del algoritmo. Empecemos con el siguiente Lema.

**Lema 2.2.1.** *Para  $f$  que satisface ( 1.1.1), para un coeficiente  $D(u)$  que satisface ( 1.1.2) y ( 1.1.3), y para una partición fija de  $J = [0, F(T)]$  dada por  $\Pi = \{0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_M = f(T)\}$ , sean  $[d_0, d_1, \dots, d_k]$  los valores nodales determinados por la fórmula ( 2.1.6). Entonces para  $k = 1, 2, \dots, M$ ,*

$$|d_k - D(\mu_k)| \leq C |\mu_k - \mu_{k-1}|$$

*Demostración.* Supongamos el valor nodal inicial  $D(\mu_0) = D(f(0)) = d_0$  conocido, y que las aproximaciones  $d_1, d_2, \dots, d_M$  son determinados por la formula recursiva ( 2.1.6).

Par aproximar  $d_1$ , tenemos

1.  $J_1 = [\mu_0, \mu_1]$ ,  $D_1(\mu) = P_M[d_0, d_1]$ , y  $D_2(\mu) = P_M[d_0, d_0]$ .
2.  $Q_1 = (0, 1) \times (0, T_1)$ ;  $u_1(x, t) = u(x, t; D_1, f)$ , y  $u_2(x, t) = u(x, t; D_2, f)$ .

Entonces

$$\int_0^{T_1} \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt = \int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) dt \quad (2.2.1)$$

En ésta ecuación  $g(t)$  es el flujo medido y  $g_2(t)$  es el dato generado apartir de la solución  $u_2$  del problema directo ( 1.1.4) con el coeficiente  $D_2(u)$  descrito al principio de la prueba.

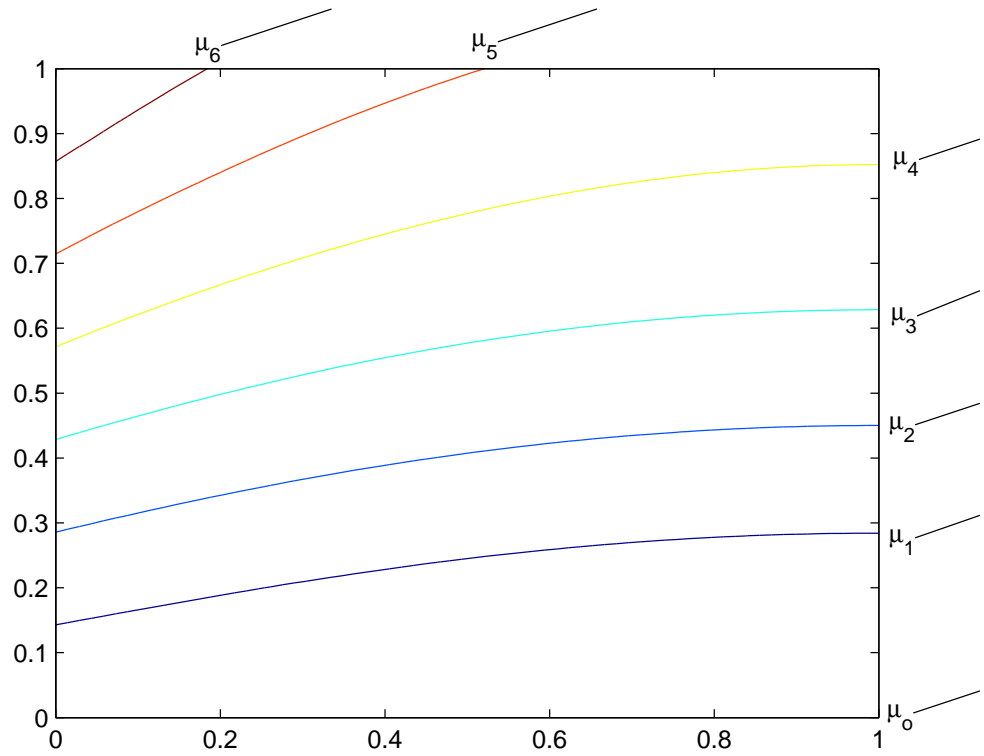


Figura 2.1: Curvas de nivel

Las funciones  $\theta(t)$  y  $\phi(x, t)$  denotan el dato en la condición de frontera y la solución del problema  $\theta$ -adjunto 1.2.10.

Dado que  $f$  que satisface (1.1.1), entonces por la proposición 1.2.3 se tiene que  $u_2$  satisface

$$f(0) = \mu_0 \leq u_2(x, t) \leq \mu_1 = f(T_1)$$

Para  $(x, t) \in (0, 1) \times (0, T_1)$ .

De acuerdo con (2.1.3) se tiene, que para  $u \in J_1$  ( $\mu_0 \leq u \leq \mu_1$ )

$$\begin{aligned} D_1(u) &= d_0 + (d_0 - d_0)\lambda_1(u_2) \\ D_2(u) &= d_0 + (d_1 - d_0)\lambda_1(u_2) \end{aligned}$$

de donde

$$D_2(u) - D_1(u) = (d_1 - d_0)\lambda_1(u_2) \quad (2.2.2)$$

Para cada valor  $\mu_k$ ,  $0 \leq k \leq M$ , se tiene que  $u_2(x_k(t), t) = \mu_k$  a lo largo de la curva  $x = x_k(t)$  donde  $x_k(0) = 0$  y  $x_{\tau_k}(1)$  para algún  $\tau_k > \tau_{k-1} > \dots > \tau_1 > 0$ .

Entonces se tiene que  $u_2(x(t), t) = \mu_0$  a lo largo de una curva  $x(t) = x_0(t)$ , con  $x_0(0) = 0$  y  $x_0(\tau_0) = 1$  para algún  $\tau_1 > 0$ . Algunas curvas de nivel de  $u$  cuando el coeficiente en el problema directo es  $D(u) = 2 - \arctan(6(u - \frac{1}{2}))$  se muestran en la figura 2.1

Supongamos  $T_1 > 0$  suficientemente pequeño como para que  $0 < x_0(T_1) < 1$ . Entonces

$$\lambda_1(u_2(x, t)) = \begin{cases} \frac{\mu_0 - u_2(x, t)}{\mu_0 - \mu_1} & ; 0 \leq x \leq x_0(t), 0 \leq t \leq T_1 \\ 0 & ; x > x_0(t), 0 \leq t \leq T_1 \end{cases}$$

y la integral (2.2.1) se reduce a

$$(d_1 - d_0) \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt = \int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) dt \quad (2.2.3)$$

de donde

$$d_1 = d_0 + \frac{\int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) dt}{\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt}$$

Ahora bien, sea  $\widehat{D}_M(u)$  el coeficiente poligonal sobre la partición  $\Pi$  que satisface

$$\widehat{D}_M(u) = D(\mu_k) \quad \forall k$$

Este coeficiente no es el generado por el dato de medida,  $g(t)$ , por tanto no es el coeficiente poligonal con valor nodal  $d_k$  generado por el algoritmo antes descrito. sin embargo estos dos coeficientes se realcionan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} (D(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt &= \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} (D(u_2) - \widehat{D}_M(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \\ &+ \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} (\widehat{D}_M(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \\ &= \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} (D(u_2) - \widehat{D}_M(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \\ &+ (D(\mu_1) - d_0) \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \end{aligned}$$

La combinación de estas ecuaciones lleva a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} (d_1 - D(\mu_1)) \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt &= \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} (D(u_2) - \widehat{D}_M(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \\ &\leq \max_{J_1} |D - \widehat{D}_M| \left| \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \right| \end{aligned}$$

Ahora

$$\max_{J_1} |D - \widehat{D}_M| = |D(\mu_*) - \widehat{D}_M(\mu_*)| \quad \text{para algún } \mu_* \in J_1$$

Usando la desigualdad triangular sobre ésta ecuación obtenemos

$$|D(\mu_*) - \widehat{D}_M(\mu_*)| \leq 2K |\mu_* - \mu_0|$$

y de ésta desigualdad se sigue

$$|d_1 - D(\mu_1)| \leq 2K \frac{\left| \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \right|}{\left| \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \right|} |\mu_* - \mu_0|$$

Por la forma en que se definió  $\lambda_k$  tenemos que  $0 < \lambda_1 < 1$ , luego existe  $0 < \lambda_1^* < 1$  tal que

$$\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt = \lambda_1^* \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt$$

luego

$$1 \leq \frac{\left| \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \right|}{\left| \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \right|} \leq \frac{1}{\lambda_1^*}$$

Por consiguiente se tiene el resultado para  $k = 1$

$$|d_1 - D(\mu_1)| \leq \frac{2K}{\lambda_1^*} |\mu_1 - \mu_0|$$

Para determinar los valores siguientes  $d_k$ , asumimos que las aproximaciones  $d_0, d_1, \dots, d_{k-1}$  son conocidas, y consideremos sobre el intervalo  $[\mu_0, \mu_k]$  que  $D_1(u) = P_M[d_0, d_1, \dots, d_{k-1}, d_k]$  y que  $D_2(u) = P_M[d_0, d_1, \dots, d_{k-1}, d_{k-1}]$ . Sobre el rectángulo  $Q_k = (0, 1) \times (0, T_k)$ ,  $u_1(x, t) = u(x, t; D_1, f)$  y  $u_2(x, t) = u(x, t; D_2, f)$ .

Entonces  $D_1$  y  $D_2$  son idénticos sobre el intervalo  $[\mu_0, \mu_{k-1}]$  y sólo son diferentes sobre el intervalo  $J_k = [\mu_{k-1}, \mu_k]$  donde se tiene que

$$D_1(u) = d_{k-1} + (d_k - d_{k-1})\lambda_k(u); \quad \mu_{k-1} \leq u \leq \mu_k$$

$$D_2(u) = d_{k-1}; \quad \mu_{k-1} \leq u \leq \mu_k$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt &= \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \\ &= (d_k - d_{k-1}) \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_0^{x_{k-1}(t)} \lambda_k(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \end{aligned}$$

donde

$$(d_k - d_{k-1}) \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_0^{x_{k-1}(t)} \lambda_k(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt = \int_{T_{k-1}}^{T_k} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) dt$$

Desde aquí se procede como en la primera parte y se concluye que

$$|d_k - D(\mu_k)| \leq C |\mu_k - \mu_{k-1}|$$

Un resultado similar se prueba, procediendo de la misma manera, para el dato  $\{f(t_k), h(t_k)\}$ .  $\square$

El lema 2.2.1 afirma que dado uno de los datos  $\{f(t_k), g(t_k)\}$  o  $\{f(t_k), h(t_k)\}$ , se pueden calcular los valores  $d_k$  a partir de la ecuación (2.1.6), estos valores nodales aproximan los valores del coeficiente verdadero  $D$  en los puntos  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_M$ . Sin embargo, ésta conclusión ignora ciertos aspectos, Veamos

1. No se conoce  $D_1(\mu(x, t))$  en el problema adjunto (1.2.10), ya que  $D_1$  es el coeficiente que requiere calcular y  $\mu$  es un número desconocido entre  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Si se supone éste valor, entonces sólo podemos aproximar la solución del problema adjunto (1.2.10) y esto va tener influencia sobre las conclusiones del lema 2.2.1.
2. Las integrales en la identidad (2.2.1) sólo pueden ser aproximadas por algún método numérico por lo que el grado de refinamiento es limitado. Este hecho interfiere con la precisión de  $d_k$  con respecto a  $D(\mu_k)$ .

Se considerarán ambos aspectos, empezando por la aproximación del problema adjunto. Sea  $\hat{\phi}(x, t)$  la solución del problema adjunto (1.2.10) encontrada a partir de una conveniente aproximación de  $D_1$ . Supongamos que el coeficiente en el problema  $g$ -adjunto se escoge como un valor constante  $d_{k-1}$ , es decir

$$D_1(\mu(x, t)) = d_{k-1} \quad \mu(x, t) \in J_k = [\mu_{k-1}, \mu_k]$$

entonces si se reemplaza  $\phi$  en (2.2.1) por  $\hat{\phi}(x, t)$ , podemos denotar el valor nodal resultante por  $\hat{d}_k$ . Note que para esta escogencia del coeficiente, existe la dificultad de resolver el problema adjunto (1.2.10) en el rectángulo  $(0, 1) \times [T_{k-1}, T_k]$  y luego se calcula  $\hat{d}_k$  usando (2.2.1). Ahora se procede a comparar el valor  $\hat{d}_k$  con  $d_k$ .

**Lema 2.2.2.** *Sea  $f(t)$  una función que satisface 1.1.1, sea  $D$  el coeficiente que satisface 1.1.2 y 1.1.3 y sea  $\Pi = \{\mu_k = f(T_k) : k = 1, 2, \dots, M\}$  una partición de  $J$ . Para  $k$  entre 1 y  $M$  consideremos el siguiente problema adjunto*

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(x, t) + c \partial_{xx} \phi(x, t) &= 0 & S_k &= (0, 1) \times (T_{k-1}, T_k) \\ \phi(x, T_k) &= 0 & x &\in (0, 1) \\ \phi(0, t) &= f(T_k - t) & t &\in (T_{k-1}, T_k) \\ \partial_x \phi(1, t) &= 0 & t &\in (T_{k-1}, T_k) \end{aligned}$$

Suponga que  $\{\phi_i, c_i\}$ ,  $i = 1, 2$  denotan dos soluciones del problema adjunto correspondientes a distintos valores del coeficiente  $c$ . En particular, suponga que  $\phi_1 = \phi(x, t; c_1, \theta)$  para  $c_1 = d_{k-1}$  y  $\phi_2 = \phi(x, t; c_2, \theta)$  para  $c_2(x, t) = D(\mu(x, t))$ , donde  $\mu(x, t)$  denota una función continua en  $S_k$  con valores en  $J_k = [\mu_{k-1}, \mu_k]$ . Entonces

$$\|\partial_x(\phi_1 - \phi_2)\|_{L^2(S_k)} \leq C |\mu_k - \mu_{k-1}| \quad (2.2.4)$$

*Demostración.* Primero notemos que  $\sigma = \phi_1 - \phi_2$  satisfice

$$\begin{aligned} \partial_t \sigma + c_1 \partial_{xx} \sigma &= (c_2 - c_1) \partial_{xx} \phi_2 & (x, t) \in S_k \\ \sigma(x, T_k) &= 0 & x \in (0, 1) \\ \sigma(0, t) &= 0 & t \in (T_{k-1}, T_k) \\ \partial_x \sigma(1, t) &= 0 & t \in (T_{k-1}, T_k) \end{aligned}$$

Si  $\psi$  es una función de prueba arbitraria, entonces

$$\iint_{S_k} (\partial_t \sigma + c_1 \partial_{xx} \sigma) \partial_x \psi \, dx dt = \iint_{S_k} (c_2 - c_1) \partial_{xx} \phi_2 \partial_x \psi \, dx dt$$

Integrando por partes se obtiene

$$\iint_{S_k} \partial_t \sigma \partial_x \psi \, dx dt = \iint_{S_k} \partial_x \sigma \partial_t \psi \, dx dt + \int_0^1 \sigma \partial_x \psi \Big|_{T_{k-1}}^{T_k} dx - \int_{T_{k-1}}^{T_k} \sigma \partial_x \psi \Big|_0^1 dt$$

y

$$\iint_{S_k} \partial_{xx} \sigma \partial_x \psi \, dx dt = - \iint_{S_k} \partial_x \sigma \partial_{xx} \psi \, dx dt + \int_{T_{k-1}}^{T_k} \partial_x \sigma \partial_x \psi \Big|_0^1 dt$$

luego

$$\begin{aligned} & \iint_{S_k} \partial_x \sigma [\partial_t \psi - c_1 \partial_{xx} \psi] \, dx dt + \int_0^1 \sigma \partial_x \psi \Big|_{T_{k-1}}^{T_k} dx - \int_{T_{k-1}}^{T_k} \sigma \partial_x \psi \Big|_0^1 dt \\ & + c_1 \int_{T_{k-1}}^{T_k} \partial_x \sigma \partial_x \psi \Big|_0^1 dt = \iint_{S_k} ((c_2 - c_1) \partial_{xx} \phi_2) \partial_x \psi \, dx dt \end{aligned}$$

Escojamos ahora una función de prueba  $\psi$  que satisfaga

$$\begin{aligned} \partial_t \psi - c_1 \partial_{xx} \psi &= \partial_x \sigma & (x, t) \in S_k, \\ \psi(x, T_{k-1}) &= 0 & x \in (0, 1), \\ \partial_x \psi(0, t) &= 0 & t \in (T_{k-1}, T_k), \\ \psi(1, t) &= 0 & t \in (T_{k-1}, T_k). \end{aligned}$$

Entonces la integral anterior se reduce a

$$\iint_{S_k} [\partial_x \sigma]^2 dx dt = \iint_{S_k} ((c_2 - c_1) \partial_{xx} \phi_2) \partial_x \psi dx dt$$

Note que  $\psi$  es la solución de un problema lineal con coeficiente constante, ésta función puede ser expresada en términos de la función de Green,  $\Gamma(x, t)$ ,

$$\psi(x, t) = \int_{T_{k-1}}^t \int_0^1 \Gamma(x - y, t - \tau) \partial_y \sigma(y, \tau) dy d\tau, \quad (x, t) \in S_k$$

y con eso

$$\partial_x \psi(x, t) = \int_{T_{k-1}}^t \int_0^1 \partial_x \Gamma(x - y, t - \tau) \partial_y \sigma(y, \tau) dy d\tau$$

Así para  $(x, t) \in S_k$ , se tiene

$$\begin{aligned} |\partial_x \psi(x, t)| &\leq \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_0^1 |\partial_x \Gamma(x - y, t - \tau) \partial_y \sigma(y, \tau)| dy d\tau \\ &\leq \left( \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_0^1 |\partial_x \Gamma(x - y, t - \tau)|^2 dy d\tau \right)^{1/2} \times \left( \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_0^1 |\partial_y \sigma(y, \tau)|^2 dy d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

de donde

$$\max_{S_k} |\partial_x \psi(x, t)| \leq C \|\partial_y \sigma\|_{L^2}$$

De otra parte

$$\begin{aligned} \iint_{S_k} [\partial_x \sigma]^2 dx dt &= \left| \iint_{S_k} (c_1 - c_2) \partial_{xx} \phi_2 \partial_x \psi dx dt \right| \\ &\leq \max_{S_k} |c_1 - c_2| \iint_{S_k} |\partial_{xx} \phi_2 \partial_x \psi| dx dt \\ &\leq \max_{S_k} |c_1 - c_2| \|\partial_{xx} \phi_2\|_{L^1} \|\partial_x \psi\|_{\infty} \end{aligned}$$

luego

$$\|\partial_y \sigma\|^2 \leq C \max_{S_k} |c_1 - c_2| \|\partial_x \psi\|_\infty \leq C \max_{S_k} |c_1 - c_2| \|\partial_y \sigma\|_2$$

ahora,

$$\begin{aligned} \max_{S_k} |c_1 - c_2| &= \max_{S_k} |d_{k-1} - D(\mu(x, t))| \\ &\leq |d_{k-1} - D(\mu_{k-1})| + \max_{S_k} |D(\mu_{k-1}) - D(\mu(x, t))| \\ &\leq 2K |\mu_k - \mu_{k-1}| \end{aligned}$$

entonces

$$\|\partial_y \sigma\| \leq C |\mu_k - \mu_{k-1}|$$

□

Ahora se usará el estimativo ( 2.2.4) para considerar el efecto al usar una aproximación del problema adjunto en la aproximación del primer valor  $d_1$ . La diferencia entre el valor  $d_1$ , calculado usando la solución correcta pero desconocida del problema adjunto ( 1.2.10), y el valor  $\hat{d}_1$  calculado, usando una incorrecta solución del problema adjunto está dado por.

$$\begin{aligned} \hat{d}_1 - d_1 &= \frac{\int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) dt}{\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \hat{\phi} dx dt} - \frac{\int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) dt}{\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt} \\ &= (g - g_2, \theta) \left\{ \frac{1}{II(\hat{\phi})} - \frac{1}{II(\phi)} \right\} \\ &= (d_1 - d_0) \left\{ \frac{II(\phi) - II(\hat{\phi})}{II(\hat{\phi})} \right\} \end{aligned}$$

(ver ( 2.2.3))

Donde

$$II(\widehat{\phi}) = \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \widehat{\phi} dx dt.$$

Se quiere demostrar que, cuando la maya exterior se refina, la diferencia  $II(\phi) - II(\widehat{\phi})$  en donde  $\widehat{\phi}$  es la solución del problema adjunto 1.2.10 con el mal coeficiente, tiende a cero. Por otro lado,  $II(\widehat{\phi})$  también tiende a cero cuando la malla exterior es refinada. Para ver si  $II(\widehat{\phi})$  tiende a cero con aproximadamente la misma rapidez que  $II(\phi) - II(\widehat{\phi})$ , es necesario examinar el comportamiento asintótico de  $II(\widehat{\phi})$ .

Para esto supongamos que  $x_0(T_1) < 1$ , entonces el dominio de integración para  $II(\widehat{\phi})$  es aproximadamente la región triangular  $\{(x, t) / 0 \leq x \leq x_0(t), 0 \leq t \leq T_1\}$ .

Un posible análisis del comportamiento asintótico de  $II(\widehat{\phi})$  hacia  $T_1$  cuando  $T_1$  tiende a cero es el siguiente. Supongamos que  $f(t) = At$  para una constante positiva  $A$ . Entonces es posible resolver el problema directo y el adjunto respectivamente para obtener  $u_2(x, t)$  y  $\widehat{\phi}(x, t)$ . Siguiendo los argumentos de la referencia [1], encontramos que  $g(t) = -D(u_1(0, t))\partial u_1(0, t)$  y  $g_2(t) = -d_k \partial u_2(0, t)$  se comportan asintóticamente como  $\sqrt{t}$ .

ésto lleva a

$$\int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) dt = \int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) A(T_1 - t) dt \approx CT_1^{5/2}. \quad (2.2.5)$$

Un resultado similar se consigue para  $\partial_x u_2 \partial_x \widehat{\phi}$  sobre  $0 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq t \leq T_1$ ;

$$\partial_x u_2 \partial_x \widehat{\phi} \approx \sqrt{t} m(x) \sqrt{T_1 - tm(x)}$$

donde  $\widehat{m}(x)$  denota una función decreciente con  $m(0) = 1$  y  $m(1) = 0$ . Además, para  $T_1$  pequeño, se puede suponer  $x_0(t) \approx at$  para una constante positiva  $a$ , y esto lleva a que

$$\begin{aligned} II(\widehat{\phi})(x, t) &= \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \widehat{\phi} dx dt \\ &\approx \int_0^{T_1} \left( \int_0^{at} \frac{u_2(x, t)}{AT_1} \sqrt{t} m(x) \sqrt{T_1 - tm(x)} dx \right) dt \end{aligned}$$

La cantidad  $II(\widehat{\phi})$  ha sido calculada numericamente para una sucesión de valores  $T_1$  decreciente hacia cero. El resultado de este estimativo numérico muestra que  $II(\widehat{\phi})$  decrece a cero de la misma manera que  $T_1^{5/2}$  cuando  $T_1$  tiende a cero. Así

$$II(\widehat{\phi}) \approx CT_1^{5/2}. \quad (2.2.6)$$

Ahora

$$\widehat{d}_1 - d_1 = (d_1 - d_0) \left\{ \frac{II(\phi) - II(\widehat{\phi})}{II(\widehat{\phi})} \right\}$$

y del lema 2.2.2 se sigue que

$$\begin{aligned} |II(\phi) - II(\widehat{\phi})| &= \left| \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 [\partial_x \phi - \partial_x \widehat{\phi}] dx dt \right| \\ &\leq C(T_1) \left\| \partial_x(\phi - \widehat{\phi}) \right\|_{L^2(S_1)} \leq C_1 |\mu_1 - \mu_0| \end{aligned}$$

Por otro lado

$$|d_1 - d_0| = |D(\mu_1) - D(\mu_0)| \leq K |\mu_1 - \mu_0|$$

y con eso

$$|\widehat{d}_1 - d_0| \leq |d_1 - d_0| \left| \frac{II(\phi) - II(\widehat{\phi})}{II(\widehat{\phi})} \right| \leq \frac{KC(T_1)}{II(\widehat{\phi})} |\mu_1 - \mu_0|^2$$

Luego para  $T_1$  suficientemente pequeño

$$|\widehat{d}_1 - d_0| \leq \frac{KC(T_1)}{CT_1^{5/2}} |\mu_1 - \mu_0|^2 \leq \frac{Kf'(\tau)^2}{C} T_1^{-1/2}$$

Para algún  $\tau > 0$

En general, se tiene

**Lema 2.2.3.** Para  $f(t) = At$ ,  $A > 0$ , Para el coeficiente  $D$  que satisface 1.1.2 y 1.1.3. Para una partición fija,  $\Pi = \{\mu_k = At_k; k = 0, 1, \dots, M\}$  de  $J$ , fijemos  $k$  entre 1 y  $M$ . Sea  $\widehat{\phi} = \phi(x, t, d_{k-1}, A(T_k - t))$  y  $\phi = \phi(x, t, c.A(T_k - t))$ . Finalmente, sea  $\widehat{d}_k$  y  $d_k$  los valores nodales determinados a partir de 2.1.6 usando los valores  $[d_0, d_1, \dots, d_{k-1}]$  y las soluciones adjuntas  $\widehat{\phi}$  y  $\phi$  respectivamente. Entonces

$$\left| \widehat{d}_k - d_k \right| \leq \frac{K}{II(\widehat{\phi})} |\mu_k - \mu_{k-1}|^2 \leq \frac{Kf'(\tau)^2}{C} |T_k - T_{k-1}|^{-1/2}$$

Este lema implica que el error introducido sobre la identificación por la solución del problema adjunto con un coeficiente aproximado tiene un efecto decreciente cuando la malla exterior es refinada.

Cuando la malla es refinada, la diferencia  $II(\phi) - II(\widehat{\phi})$  tiende a cero cuando el cuadrado de la malla lo hace. Sin embargo, cuando el tamaño de la malla tiende a cero, encontramos que  $II(\phi)$  también lo hace, y quizá más rápidamente. Es posible que la solución del problema adjunto pueda mejorarse a fin de que  $II(\phi) - II(\widehat{\phi})$  tienda a cero con la rapidez que  $|\widehat{d}_k - d_k|$  lo hace, cuando el tamaño de la malla tiende a cero. Se verá a continuación que esa mejora no hace mejor la convergencia de la solución aproximada.

Finalmente se va a considerar el efecto del error en la integración numérica sobre el cálculo de  $\widehat{d}$ . Consideremos el caso  $k = 1$ . Se tiene

$$\widehat{d}_1 = d_0 + \frac{\int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t))\theta(t)dt}{\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \widehat{\phi} dx dt} = d_0 + \frac{I(g - g_2)}{II(\widehat{\phi})},$$

y

$$\widehat{d}_k^* = d_0 + \frac{I^*(g - g_2)}{II^*(\widehat{\phi})}$$

Donde  $I^*(g - g_2)$  y  $II^*(\widehat{\phi})$  denotan los respectivos resultados calculados usando la malla interna para aproximar numéricamente los correspondientes valores de la integral simple y la integral doble. Entonces,

$$\widehat{d}_k^* = d_0 + \frac{I^*(g - g_2) - I(g - g_2) + I(g - g_2)}{II^*(\widehat{\phi}) - II(\widehat{\phi}) + II(\widehat{\phi})} = d_0 + \frac{I(g - g_2)}{II(\widehat{\phi})} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2},$$

donde

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{I - I^*}{I} \right| \quad y \quad \varepsilon_2 = \left| \frac{II - II^*}{II} \right|$$

$$\frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} \approx 1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

Con eso

$$\widehat{d}_1^* = d_0 + \frac{I(g - g_2)}{II(\widehat{\phi})} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} \approx d_0 + \frac{I(g - g_2)}{II(\widehat{\phi})} (1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

$$\left| \widehat{d}_1 - \widehat{d}_1^* \right| \leq \left| \frac{I(g - g_2)}{II(\widehat{\phi})} \right| (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \left| \widehat{d}_1 - d_0 \right| (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

El error en la integración numérica tiene un estimativo

$$|I - I^*| \leq C(\Delta t)^2$$

Donde  $\Delta t$  es el tamaño de la malla interna

$$|II - II^*| \leq C(\Delta x \Delta t) = C(\Delta t)^2$$

de ( 2.2.6) se tiene

$$II = \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \approx T_1^{5/2}$$

Entonces, para  $T_1 = k\Delta t$ , se encuentra que

$$\begin{aligned} \left| \widehat{d}_1 - \widehat{d}_1^* \right| &\leq \left| \frac{I(g - p_M)}{II(\widehat{\phi})} \right| (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ &\leq \left| \widehat{d}_1 - d_0 \right| \frac{C_1(\Delta t)^2}{C_2(k\Delta t)^{5/2}} \leq C(\Delta t)^{-1/2} \end{aligned}$$

(ver ( 2.2.6))

En general se puede enunciar el siguiente teorema

**Lema 2.2.4.** *Sobre las mismas condiciones del lema 2.2.3, sea  $\widehat{d}_1^*$  el nodo con el efecto de error inducido por la integral aproximada numéricamente necesaria para el lema 2.2.3. Entonces, cuando el tamaño de la malla exterior e interior, tiende a cero.*

$$\left| \widehat{d}_k - \widehat{d}_k^* \right| \leq C(\Delta t)^{-1/2}$$

Este estimativo sugiere que cuando la malla exterior es refinada con el fin de mejorar la aproximación de la identificación del valor nodal  $D(\mu_1)$ , más y más puntos son absorbidos por la malla exterior, contribuyendo a los errores en la integración numérica,  $|I - I^*|$  y  $|II - II^*|$ , que son de orden  $\Delta t^2$ . Al mismo tiempo,  $II(\widehat{\phi})$  tiende a cero con orden  $\Delta t^{5/2}$  por lo que el efecto de la integrales aproximadas es magnificado cuando  $\Delta t$  tiende a cero. Evidentemente, para algunos puntos los valores de las integrales usados para calcular  $d_k$  lleva al mismo orden de magnitud que los errores de la integración numérica y en este caso los calculos no tienen ya ninguna información. Además cuando disminuye el tamaño de la malla el tamaño del error aumenta.

Finalmente, se puede combinar los lemas 2.2.1, 2.2.3 y 2.2.4 para escribir

$$\begin{aligned} \left| D(\mu_k) - \widehat{d}_k^* \right| &= \left| D(\mu_k) - d_k + d_k - \widehat{d}_k + \widehat{d}_k - \widehat{d}_k^* \right| \\ &\leq |D(\mu_k) - d_k| + \left| d_k - \widehat{d}_k \right| + \left| \widehat{d}_k - \widehat{d}_k^* \right| \\ &\leq C_1 \Delta t + C_2 (\Delta t)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Evidentemente el error en la identificación de  $d_k$  no tiende a cero cuando  $\Delta t$  tiende a cero pero puede ser minimizado por un valor óptimo de  $\Delta t$  diferente de cero.

# Capítulo 3

## Experimento Numérico

### 3.1. Un pseudocódigo en Matlab

Algunas simulaciones se hicieron en matlab para recuperar los siguientes coeficientes;

$$D(u) = 2 - \operatorname{atan}[6(u - 1/2)], \quad D(u) = 1 + u \quad \text{y} \quad D(u) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\pi u) \quad 0 < u < 1$$

El pseudocódigo que se usó para la recuperación del coeficiente en cada caso, es llamado por los autores del artículo, referencia [1], el método no iterativo.

Este método logra obtener buenas aproximaciones utilizando parcialmente las regiones en donde tienen lugar los diferentes rangos de altura determinados por las curvas de nivel de la solución  $u$  del problema directo ( 1.1.4). Cada  $f(\mu_k)$   $k = 0, 1, 2, \dots, M$  representa un valor de la superficie de nivel de  $u$ , en nuestro caso aproximada por  $u_1$  y  $u_2$ . Las regiones de iteración son marcadas también por los nodos de la malla que se ha llamado gruesa y que están representados por la partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M$ . En el algoritmo  $t_M = 1$ .

La figura 3.1 ilustra las curvas de nivel, los nodos de la malla gruesa y las regiones donde se aproximan respectivamente  $d_1, d_2, \dots$ .

El pseudocódigo está basado en la fórmula recurrente dada por ( 2.1.6) y en el algoritmo explicado en las páginas 14 y 15 de este texto. El objetivo en éste es conseguir una aproximación del coeficiente  $D(u)$  por una poligonal  $P_M[d_0, d_1, \dots, d_M]$  empezando la recuperación desde el intervalo  $[\mu(0), \mu(1)] = [f(t_0), f(t_1)]$  aproximando  $d_1$  y aumentando el intervalo a  $[\mu(0), \mu(2)] = [f(t_0), f(t_2)]$  para aproximar el siguiente,  $d_2$ .

Pasar de un intervalo a otro significa una iteración. En la  $k$ -ésima iteración es necesario resolver el problema directo ( 1.1.4) con  $P_k[d_0, d_1, \dots, d_k, d_k]$  como coeficiente aproximado y condición de frontera en  $x = 0$  dada por  $f(t) = t$ , con ésta aproximación del problema directo

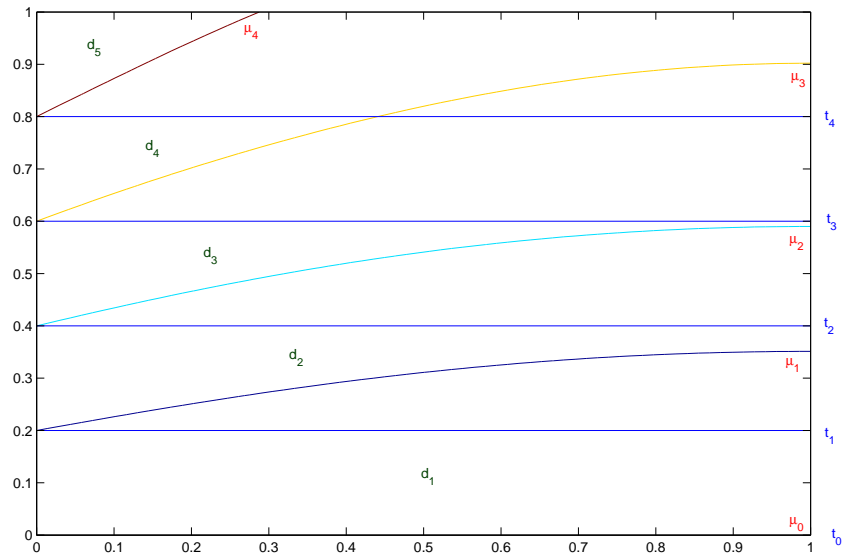


Figura 3.1: Regiones de Integración

se consigue una aproximación de  $d_{k+1}$ , después con  $P_k[d_0, d_1, \dots, d_k, d_{k+1}]$  como coeficiente aproximado se resuelve el problema adjunto dado por 2.1.6, y con la solución aproximada del problema adjunto  $\phi$  se calcula la aproximación  $d_{k+1}$ . Se repite éste proceso para calcular el siguiente hasta terminar los nodos de la malla gruesa.

El código en Matlab para realizar las simulaciones es el siguiente:

```

clc
clear all
% Primero simulamos las condiciones de frontera;
% g(t)=-D(u(0,t))d_xu(0,t) o h(t)=u(1,t);
% utilizamos el archivo datos.m;

datos

dx = 1/length(x);
dt = 1/(m*n);

% este programa tambien calcula la primera aproximaci\on;

NM = length(hp);

```

```

tmax = 1;

T(1) = 0;
D(2) = De(f(0));
nivel = 2;
k = m;
p = 1/n;
T(2)=p;
ti=t1;
si=0;

Dphi = D;

while tmax <= NM

[u1,Dupx,Du1x,phi1,Dphi] = solver_problem1(x,t1,g1,delta,...);

[phi1,Dphix] = solver_phi(x,t1,g1,delta,Dphi,...);

umin = F(T(nivel-1));
    umax = F(T(nivel));
    tmin = m-k+1;
    tmax = m+1;

    II = intedoble(umin,umax,tmin,tmax,u1,Du1x,Dphix,dx,dt);

    I = intel(m,t1,Dupx,D,g1,theta,T,k);

    D(nivel)=D(nivel)+I/II;

nivel = nivel +1;
D(nivel) = D(nivel-1);

p = p + 1/n;
m = m+k;

t1 = linspace(0,p,m+1);
T(nivel)= t1(m+1);
theta = tta(p,t1);

```

```

T
D

if nivel == n+1, break
end

end

[u1,Dupx,Du1x,phi1,Dphi] = solver_problem1(x,t1,g1,delta,...);

[phi1,Dphix] = solver_phi(x,t1,g1,delta,Dphi,...);

umin = F(T(nivel-1));
umax = F(T(nivel));
tmin = m-k+1;
tmax = m+1;

II = intedoble(umin,umax,tmin,tmax,u1,Du1x,Dphix,dx,dt);

I = intel(m,t1,Dupx,D,g1,theta,T,k);

if abs(II-I)<0.1
D(nivel)=D(nivel-1)+I/II;
end

plot(f(T),D,'*',f(T),D);

```

Con éste programa y el uso del software Matlab se consiguieron las aproximaciones de los coeficientes propuestos al principio del capítulo, con diferentes tamaños para malla delgada y gruesa, así:

La figura 3.2 a) muestra la recuperación del coeficiente  $D(u) = 2 - \arctan(6(u - \frac{1}{2}))$  para una malla gruesa de cinco nodos con una malla fina de cuatro puntos.

La figura 3.2 b) muestra el efecto de aumentar el número de puntos de la malla fina a cuatro, siete, diez y veinte puntos entre dos nodos de malla gruesa para el mismo coeficiente. La figura 3.2 c) muestra una recuperación con cuatro nodos en la malla gruesa y cuatro en la malla fina.

La figura 3.2 d) muestra una recuperación con siete nodos en la malla gruesa y cuatro en la malla fina.

La figura 3.2 e) muestra una recuperación del coeficiente para  $f(t) = 2t$  con siete nodos de malla gruesa y 4 de malla fina. Debemos notar qué en este caso el intervalo de  $u$  es

$[f(0), f(1)] = [0, 2]$  aunque  $t \in [0, 1]$ .

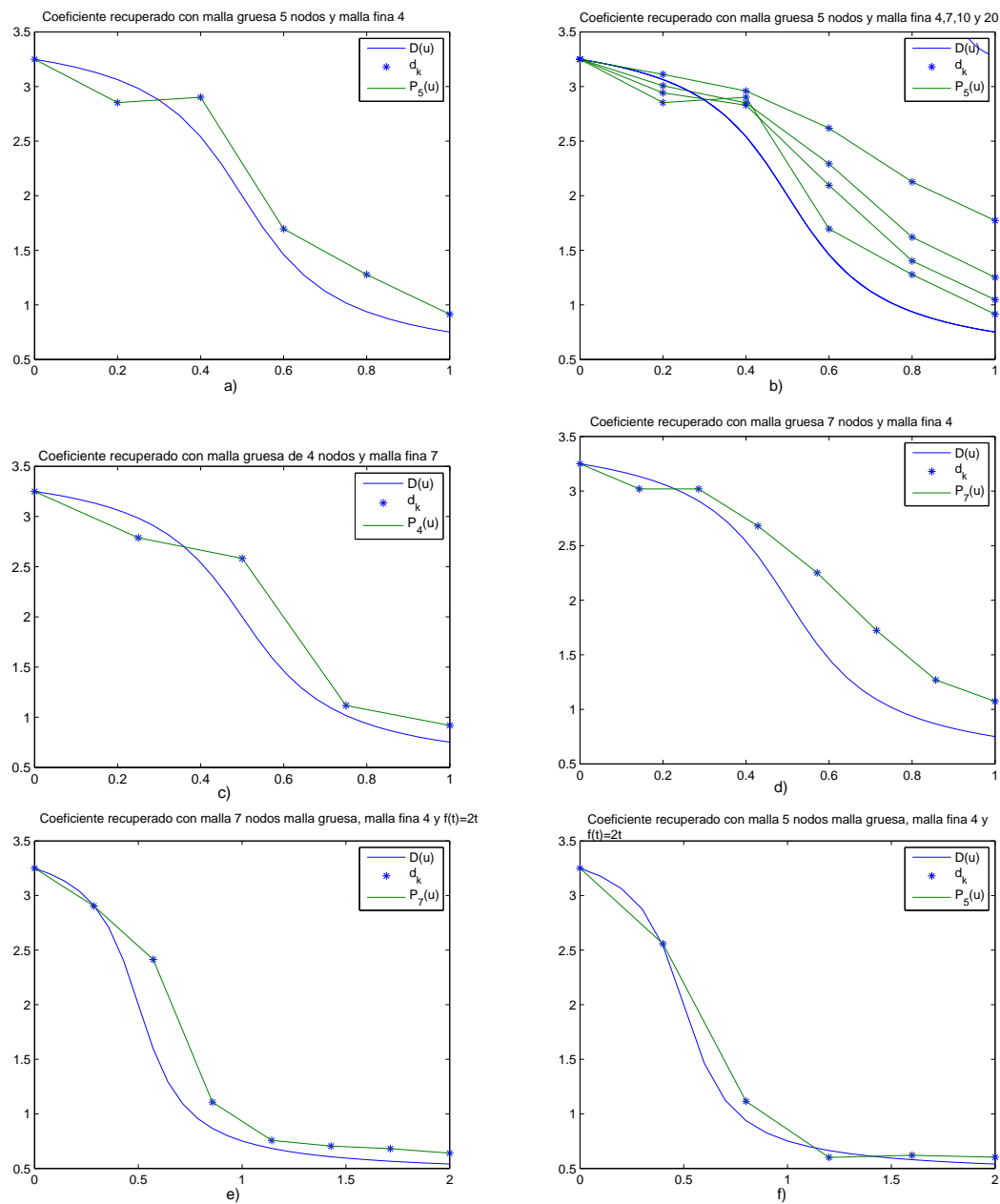


Figura 3.2: recuperación de  $2 - \arctan(6(u - \frac{1}{2}))$

La figura 3.2 e) muestra una recuperación del coeficiente para  $f(t) = 2t$  con siete nodos

de malla gruesa y 4 de malla fina. Debemos notar que en este caso el intervalo de  $u$  es  $[f(0), f(1)] = [0, 2]$  aunque  $t \in [0, 1]$ .

La figura 3.2 f) muestra una recuperación del coeficiente para  $f(t) = 2t$  con cinco nodos de malla gruesa y 4 de malla fina.

Podemos dar una idea de que tan buena es la recuperación del coeficiente, comparando la  $u$  que es la solución del problema directo (Resuelta con el coeficiente original  $D(u)$ ) con la  $u_1$  que es la solución aproximada (Resuelta con la poligonal  $P_n(u)$ ). La figura 3.3 muestra a  $u$  y a  $u_1$ . Para la recuperación se utilizó un malla gruesa de 5 nodos y una malla fina de 4.

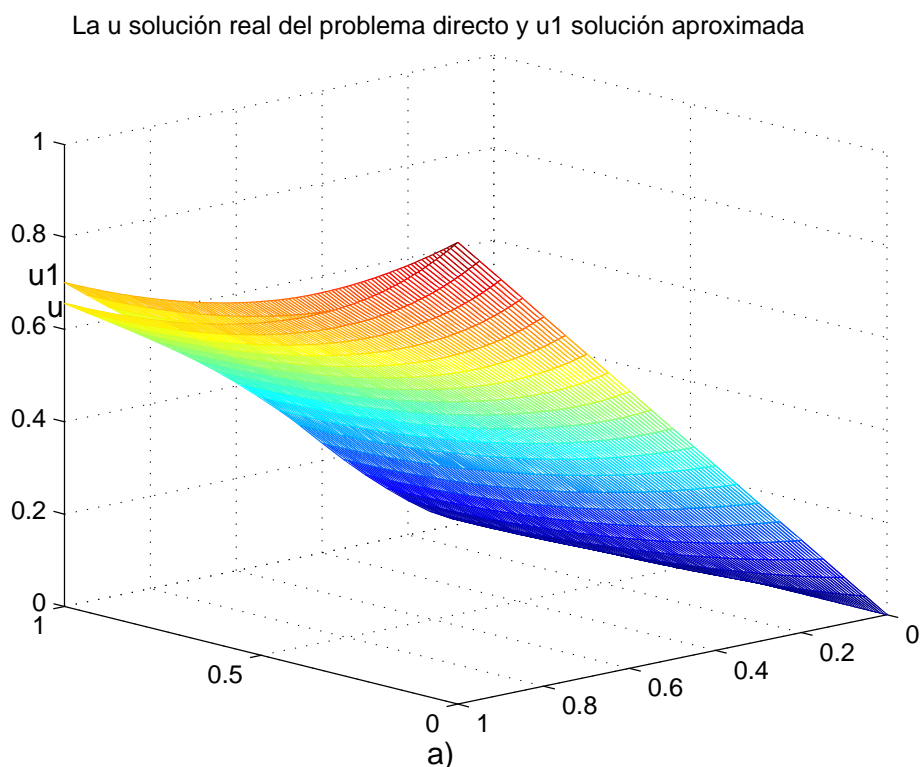


Figura 3.3: La solución real  $u$  y la solución aproximada para  $2 - \arctan(6(u - \frac{1}{2}))$

Otras aproximaciones se hicieron con el programa en matlab para los coeficientes  $D(u) = 1 + u$  y  $D(u) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi u)$  con diferentes tamaños para malla gruesa y fina. Las graficas para  $1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi u)$  se presentan a continuación con diferentes tamaños de malla gruesa y malla fina.

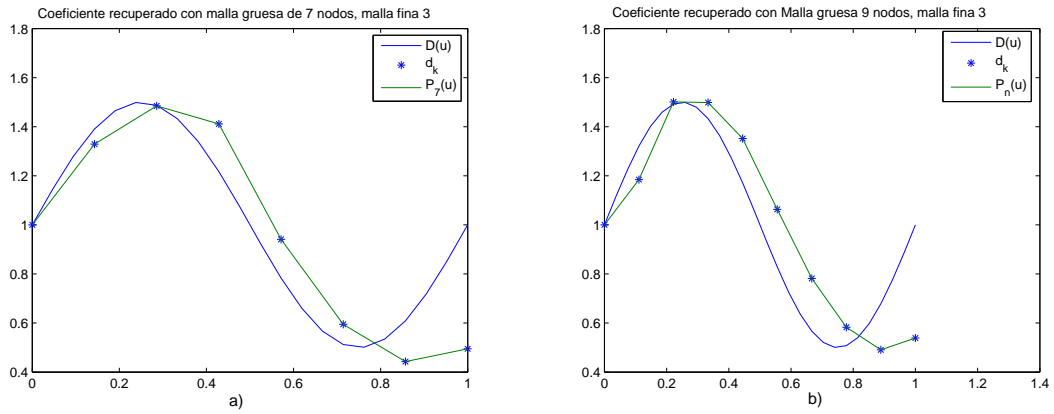


Figura 3.4: Coeficiente recuperado  $D(u) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi u)$

También podemos comparar para éste coeficiente la  $u$  real con la  $u_1$  aproximada, veamos la siguiente gráfica.

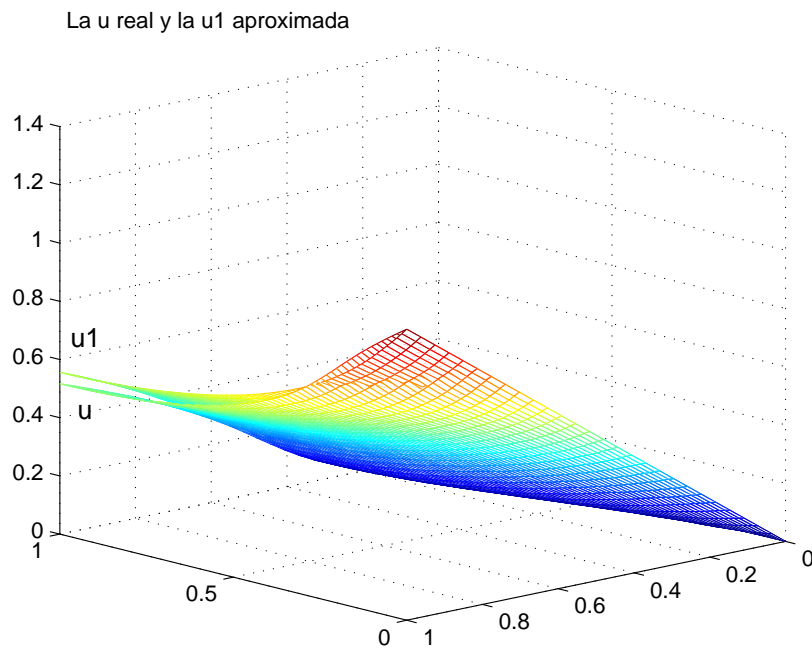


Figura 3.5: La  $u$  real y la  $u_1$  aproximada para  $D(u) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi u)$

Y para el coeficiente  $D(u) = 1 + u$  obtuvimos las siguientes aproximaciones con diferentes tamaños de paso en la malla gruesa y en la malla fina

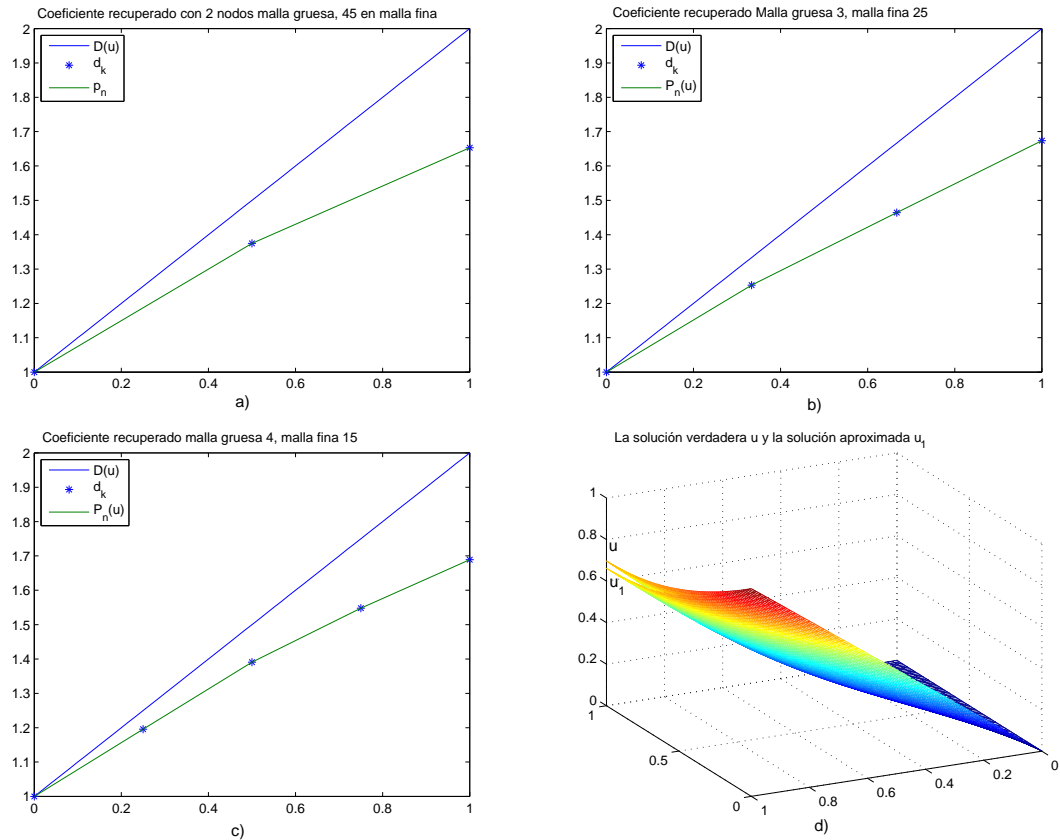


Figura 3.6: Coeficiente recuperado  $D(u) = 1 + u$

La figura 3.6 muestra las aproximaciones del coeficiente  $D(u) = 1 + u$  con tamaños en la malla gruesa 2,3 y 4. En estas gráficas se nota que cuando se uso un tamaño de malla gruesa pequeño la mejor aproximación se consigue con un tamaño de malla fina grande. Al final se obtiene una muy buena aproximación de la solución verdadera  $u$  la cual se muestra en la figura 3.6 d).

En las ecuaciones diferenciales parciales se utilizó "solver\_problem1" para resolver el problema directo y `solver_phi` para resolver el problema adjunto. Ambos programas incorporan el resolvidor `ode15s` que hace parte del Tolbox de Matlab para resolver ecuaciones en derivadas parciales.

Para calcular las integrales se utilizó `trapz` una de las funciones incorporadas de Matlab para calcular integrales simples. Este comando de matlab se uso también de manera iterada para calcular la integral doble.

## 3.2. Conclusiones

1. El algoritmo funciona rápidamente. Esto es relevante ya que el programa debe resolver, en cada iteración, dos ecuaciones diferenciales parciales, además de un sistema de ecuaciones que aumenta de tamaño en cada iteración.
2. Las cotas de error dadas en teoría evidencian en el algoritmo la pérdida de información en la recuperación del coeficiente cuando la malla en general crece (Malla gruesa y malla fina). Las mejores aproximaciones se consiguieron con tamaños de malla pequeños.
3. La conclusión 2. está obviamente ligada al estimativo ( 2.2.7)

$$\left| D(\mu_k) - \hat{d}_k^* \right| \leq c_1 \Delta t + c_2 (\Delta t)^{\frac{1}{2}}$$

En esta tesis no se explica un método para hallar un  $\Delta t$  óptimo para la recuperación de  $D(u)$ . No obstante, el lado derecho de la anterior desigualdad sugiere la posibilidad de calcular un  $\Delta t$  óptimo, aplicando técnicas como L-cuvas o GCV (General Cross Validation).

# Capítulo 4

## Apéndice

### Lema 1.2.1

*Demostración.* Sean  $f$  y  $D$  funciones que satisfacen las hipótesis dadas en ( 1.1.1), ( 1.1.2), ( 1.1.3), y  $u$  la solución del problema ( 1.1.4). Sean  $F(x, t)$  una función suave en  $Q_T$  y  $\psi(x, t)$  una función de prueba en  $Q_T$ , entonces

$$(\partial_t(f(t) - u(x, t)) + \partial_{xx}B(u(x, t)))\psi(x, t) = f'(t)\psi(x, t)$$

Integrando sobre  $Q_T$ , tenemos

$$\iint_{Q_T} (\partial_t(f(t) - u(x, t)) + \partial_{xx}B(u(x, t)))\psi(x, t) dt dx = \iint_{Q_T} f'(t)\psi(x, t) dt dx$$

de donde

$$\iint_{Q_T} \left[ \begin{array}{c} \partial_t(f(t) - u(x, t)) + \\ \partial_{xx}(B(f(t)) - B(u(x, t))) \end{array} \right] \psi(x, t) dt dx = \iint_{Q_T} f'(t)\psi(x, t) dt dx$$

luego

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \partial_t(f(t) - u(x, t))\psi(x, t) dt dx + \iint_{Q_T} \partial_{xx}(B(f(t)) - B(u(x, t)))\psi(x, t) dt dx \\ = \iint_{Q_T} f'(t)\psi(x, t) dt dx. \end{aligned} \quad (4.0.1)$$

Calculemos la primera integral del lado izquierdo

$$\iint_{Q_T} \partial_t(f(t) - u(x, t))\psi(x, t)dt dx = \int_0^1 \int_0^T \partial_t(f(t) - u(x, t))\psi(x, t)dt dx$$

Integrando por partes en la integral iterada del lado derecho, tenemos

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \partial_t(f(t) - u(x, t))\psi(x, t)dt dx \\ &= \int_0^1 \left[ ((f(t) - u(x, t))\psi(x, t))\Big|_0^T - \int_0^T (f(t) - u(x, t))\partial_t\psi(x, t)dt \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ (f(T) - u(x, T))\psi(x, T) - (f(0) - u(x, 0))\psi(x, 0) \right. \\ & \quad \left. - \int_0^T (f(t) - u(x, t))\partial_t\psi(x, t)dt \right] dx \end{aligned}$$

Sabemos que,  $f(0) - u(x, 0) = 0$  e imponemos la condición

$$\psi(x, T) = 0 \tag{4.0.2}$$

con eso,

$$\iint_{Q_T} \partial_t(f(t) - u(x, t))\psi(x, t)dt dx = - \int_0^1 \int_0^T (f - u)\partial_t\psi(x, t)dt dx$$

Para la segunda integral del lado izquierdo de la ecuación ( 4.0.1), tenemos

$$\iint_{Q_T} \partial_{xx}(B(f(t)) - B(u(x, t)))\psi(x, t)dx dt = \int_0^T \int_0^1 \partial_{xx}(B(f(t)) - B(u(x, t)))\psi(x, t)dx dt$$

Integrando por partes la integral iterada, tenemos

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_T} \partial_{xx}(B(f(t)) - B(u(x,t)))\psi(x,t) dx dt \\
&= \int_0^T \left[ \partial_x(B(f(t)) - B(u(x,t)))\psi(x,t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \partial_x(B(f(t)) - B(u(x,t)))\partial_x\psi(x,t) dx \right] dt \\
&= \int_0^T \left[ -\partial_x(B(u(x,t)))\psi(x,t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \partial_x(B(f(t)) - B(u(x,t)))\partial_x\psi(x,t) dx \right] dt \\
&= \int_0^T \left[ -D(u(x,t))\partial_x(u(x,t))\psi(x,t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \partial_x(B(f(t)) - B(u(x,t)))\partial_x\psi(x,t) dx \right] dt \\
&= \int_0^T \left[ \begin{aligned} & -D(u(1,t))\partial_x(u(1,t))\psi(1,t) + D(u(0,t))\partial_x(u(0,t))\psi(0,t) \\ & - \int_0^1 \partial_x(B(f(t)) - B(u(x,t)))\partial_x\psi(x,t) dx \end{aligned} \right] dt.
\end{aligned}$$

En la última integral tenemos del problema directo que  $\partial_x u(1,t) = 0$ , e imponemos sobre  $\psi$  la condición

$$\psi(0,t) = 0 \tag{4.0.3}$$

con eso,

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_T} \partial_{xx}(B(f(t)) - B(u(x,t)))\psi(x,t) dx dt \\
&= - \int_0^T \int_0^1 \partial_x(B(f(t)) - B(u(x,t)))\partial_x\psi(x,t) dx dt
\end{aligned}$$

de nuevo integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 \partial_x(B(f(t)) - B(u(x,t)))\partial_x\psi(x,t) dx dt \\
&= \int_0^T \left[ \begin{aligned} & (B(f(t)) - B(u(x,t)))\partial_x\psi(x,t) \Big|_0^1 \\ & - \int_0^1 B(f(t)) - B(u(x,t))\partial_{xx}\psi(x,t) dx \end{aligned} \right] dt \\
&= \int_0^T \left[ \begin{aligned} & (B(f(t)) - B(u(1,t)))\partial_x\psi(1,t) - (B(f(t)) - B(u(0,t)))\partial_x\psi(0,t) \\ & - \int_0^1 B(f(t)) - B(u(x,t))\partial_{xx}\psi(x,t) dx \end{aligned} \right] dt
\end{aligned}$$

del problema directo  $u(0, t) = f(t)$ , e imponemos sobre  $\psi$  la condición

$$\partial_x \psi(1, t) = 0 \quad (4.0.4)$$

y entonces tenemos que

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \partial_{xx} (B(f(t)) - B(u(x, t))) \psi(x, t) \\ &= - \int_0^T \int_0^1 \partial_x (B(f(t)) - B(u(x, t))) \partial_x \psi(x, t) dx dt \\ &= - \left[ - \int_0^T \int_0^1 (B(f(t)) - B(u(x, t))) \partial_{xx} \psi(x, t) dx dt \right] \\ &= \int_0^T \int_0^1 (B(f(t)) - B(u(x, t))) \partial_{xx} \psi(x, t) dx dt \end{aligned}$$

Podemos escribir la ecuación (4.0.1), como sigue

$$\left[ \begin{array}{l} \int_0^1 \int_0^T (B(f(t)) - B(u(x, t))) \partial_{xx} \psi(x, t) dt dx \\ - \int_0^1 \int_0^T (f - u) \partial_t \psi(x, t) dt dx \end{array} \right] = \iint_{Q_T} f'(t) \psi(x, t) dx dt \quad (4.0.5)$$

Notemos que

$$B(f(t)) - B(u(x, t)) = \int_{f(0)}^{f(t)} D(s) ds - \int_{f(0)}^{u(x, t)} D(s) ds = - \int_{u(x, t)}^{f(0)} D(s) ds.$$

Ahora para  $(x, t)$  fijo, existe  $\bar{u}(x, t) \in J$  tal que

$$B(f(t)) - B(u(x, t)) = - \int_{u(x, t)}^{f(t)} D(s) ds = -D(\bar{u}(x, t))(f(t) - u(x, t))$$

luego

$$\left[ \begin{array}{l} - \int_0^1 \int_0^T D(\bar{u}(x, t))(f(t) - u(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t) dt dx \\ - \int_0^1 \int_0^T (f - u) \partial_t \psi(x, t) dt dx \end{array} \right] = \iint_{Q_T} f'(t) \psi(x, t) dx dt$$

De donde

$$- \int_0^1 \int_0^T (f - u) (D(\bar{u}(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t) + \partial_t \psi(x, t)) dt dx = \iint_{Q_T} f'(t) \psi(x, t) dx dt, \quad (4.0.6)$$

e imponemos la siguiente condición

$$D(\bar{u}(x, t))\partial_{xx}\psi(x, t) + \partial_t\psi(x, t) = F(x, t)$$

donde  $F(x, t)$  es una función suave en  $Q_T$ .

Escribimos entonces la ecuación 4.0.6 como sigue

$$-\int_0^1 \int_0^T (f(t) - u(x, t))F(x, t)dt dx = \iint_{Q_T} f'(t)\psi(x, t)dx dt$$

donde  $\psi(x, t)$  es la solución del problema adjunto

$$K(x, t)\partial_{xx}\psi(x, t) + \partial_t\psi(x, t) = F(x, t) \text{ en } Q_T$$

$$\psi(x, T) = 0 \quad 0 < x < 1$$

$$\psi(0, t) = \partial_x\psi(1, t) = 0 \quad 0 < t < T$$

$$\text{con } K(x, t) = D(\bar{u}(x, t)) = \frac{1}{f(t) - u(x, t)} \int_{u(x, t)}^{f(t)} D(s)ds.$$

□

### Lema 1.2.2

*Demostración.* Sean  $f$  y  $D$  funciones que satisfacen las hipótesis dadas en ( 1.1.1), ( 1.1.2) y ( 1.1.3), y sea  $u$  la solución del problema ( 1.1.4). Del problema directo tenemos que

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx} B(u(x, t)) \text{ en } Q_T$$

donde

$$B(u) = \int_{f(0)}^u D(s)ds$$

tenemos

$$\partial_t(u(x, t) - f(0)) = \partial_{xx} B(u(x, t))$$

Sea  $\psi(x, t)$  una función de prueba en  $Q_T$ , entonces

$$\partial_t(u(x, t) - f(0))\psi(x, t) = \partial_{xx} B(u(x, t))\psi(x, t)$$

Ahora integremos sobre  $Q_T$ , esto es,

$$\iint_{Q_T} \partial_t(u(x, t) - f(0))\psi(x, t) dx dt = \iint_{Q_T} \partial_{xx} B(u(x, t))\psi(x, t) dx dt \quad (4.0.7)$$

Integrando por partes en el lado izquierdo de la ecuación 4.0.7, tenemos

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_T} \partial_t(u(x, t) - f(0))\psi(x, t) dxdt \\
&= \int_0^1 \left[ (u(x, T) - f(0))\psi(x, T) - \int_0^T (u(x, t) - f(0))\partial_t\psi(x, t)dt \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[ (u(x, T) - f(0))\psi(x, T) - (u(x, 0) - f(0))\psi(x, 0) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T (u(x, t) - f(0))\partial_t\psi(x, t)dt \right] dx
\end{aligned}$$

Ahora imponemos sobre  $\psi$ , la condición  $\psi(x, T) = 0$ , para obtener

$$\iint_{Q_T} \partial_t(u(x, t) - f(0))\psi(x, t) dxdt = - \int_0^1 \int_0^T (u(x, t) - f(0))\partial_t\psi(x, t)dt dx \quad (4.0.8)$$

Integrando por partes en el lado derecho de la ecuación 4.0.7 tenemos

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_T} \partial_{xx}B(u(x, t))\psi(x, t) dxdt \\
&= \int_0^T \left[ \psi(x, t)\partial_x B(u(x, t)) \Big|_0^1 - \int_0^1 \partial_x B(u(x, t))\partial_x\psi(x, t)dx \right] dt \\
&= \int_0^T \left[ \psi(1, t)\partial_x B(u(1, t)) - \psi(0, t)\partial_x B(u(0, t)) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \partial_x B(u(x, t))\partial_x\psi(x, t)dx \right] dt
\end{aligned}$$

E imponemos una segunda condición sobre  $\psi$ , la cual es  $\psi(0, t) = 0$ , con eso,

$$\iint_{Q_T} \partial_{xx}B(u(x, t))\psi(x, t) dxdt = \int_0^T \left[ \psi(1, t)\partial_x B(u(1, t)) - \int_0^1 \partial_x B(u(x, t))\partial_x\psi(x, t)dx \right] dt$$

Integrando por partes en la integral entre 0 y 1, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_T} \partial_{xx} B(u(x, t)) \psi(x, t) dx dt \\
&= \int_0^T \left[ \begin{array}{c} \psi(1, t) \partial_x B(u(1, t)) \\ - \left( \partial_x \psi(x, t) B(u(x, t)) \Big|_0^1 \right. \\ \left. - \int_0^1 B(u(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t) dx \right) \end{array} \right] dt \\
&= \int_0^T \left[ \begin{array}{c} \psi(1, t) \partial_x B(u(1, t)) \\ - \left( \partial_x \psi(1, t) B(u(1, t)) \right. \\ \left. - \partial_x \psi(0, t) B(u(0, t)) \right. \\ \left. - \int_0^1 B(u(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t) dx \right) \end{array} \right] dt \\
&= \int_0^T \partial_x \psi(0, t) B(u(0, t)) dt + \iint_{Q_T} B(u(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t) dx dt
\end{aligned}$$

En esta última igualdad se impuso la condición sobre  $\psi$ ,  $\partial_x \psi(1, t) = 0$ , y se usó la regla de la cadena y la condición  $\partial_x u(1, t) = 0$ , del problema directo, para mostrar que

$$\partial_x B(u(1, t)) = 0$$

Luego

$$\iint_{Q_T} \partial_{xx} B(u(x, t)) \psi(x, t) dt = \left[ \begin{array}{c} \int_0^T \partial_x \psi(0, t) B(u(0, t)) dt \\ + \iint_{Q_T} B(u(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t) dx dt \end{array} \right] \quad (4.0.9)$$

De las igualdades de ( 4.0.8) y ( 4.0.9), y por la ecuación ( 4.0.7) tenemos que

$$- \iint_{Q_T} (u(x, t) - f(0)) \partial_t \psi(x, t) dx dt = \left[ \begin{array}{c} \int_0^T \partial_x \psi(0, t) B(u(0, t)) dt \\ + \iint_{Q_T} B(u(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t) dx dt \end{array} \right]$$

Que podemos escribir

$$\left[ \begin{array}{l} \iint_{Q_T} (u(x, t) - f(0)) \partial_t \psi(x, t) dx dt \\ + \iint_{Q_T} B(u(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t) dx dt \end{array} \right] = - \int_0^T \partial_x \psi(0, t) B(u(0, t)) dt$$

O también, en virtud del teorema del valor medio, con  $f(0) < \mu(x, t) < u(x, t)$ , podemos escribir

$$\left[ \begin{array}{l} \iint_{Q_T} (u(x, t) - f(0)) \partial_t \psi(x, t) dx dt \\ + \iint_{Q_T} D(\mu(x, t)) (u(x, t) - f(0)) \partial_{xx} \psi(x, t) dx dt \end{array} \right] = - \int_0^T \partial_x \psi(0, t) B(u(0, t)) dt$$

Que es equivalente a

$$\iint_{Q_T} (u - f(0)) (\partial_t \psi(x, t) + D(\mu(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t)) dx dt = - \int_0^T \partial_x \psi(0, t) B(u(0, t)) dt$$

Sea  $F(x, t) = \partial_t \psi(x, t) + D(\mu(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t)$  en donde  $F(x, t)$  es una función suave en  $Q_T$ .

Entonces podemos escribir la ecuación anterior como,

$$\iint_{Q_T} (u(x, t) - f(0)) F(x, t) dx dt = - \int_0^T \partial_x \psi(0, t) B(f(t)) dt$$

En donde  $\psi$  es la solución del problema adjunto en  $Q_T$

$$\partial_t \psi(x, t) + \hat{K}(x, t) \partial_{xx} \psi(x, t) = F(x, t)$$

$$\psi(0, t) = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad \partial_x \psi(1, t) = 0, \quad 0 < t < 1$$

donde  $\hat{K}(x, t) = D(\mu(x, t)) = \frac{1}{u(x, t) - f(0)} \int_{f(0)}^{u(x, t)} D(s) ds$  es una función suave en  $Q_T$ . □

**Lema 1.2.4**

*Demostración.* Del problema directo tenemos

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx} B(u(x, t))$$

Multipiquemos ambos lados de la ecuación por  $\partial_x \phi(x, t)$  para una función de prueba arbitraria  $\phi(x, t)$ , esto es

$$\partial_x \phi(x, t) \partial_t u(x, t) = \partial_{xx} B(u(x, t)) \partial_x \phi(x, t)$$

e integremos sobre  $Q_T$ , tenemos

$$\iint_{Q_T} \partial_x \phi(x, t) \partial_t u(x, t) dx dt = \iint_{Q_T} \partial_{xx} B(u(x, t)) \partial_x \phi(x, t) dx dt \quad (4.0.10)$$

De la integral del lado izquierdo, obtenemos

$$\iint_{Q_T} \partial_x \phi(x, t) \partial_t u(x, t) dx dt = \int_0^T \int_0^1 \partial_x \phi(x, t) \partial_t u(x, t) dx dt$$

Integrando por partes conseguimos

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \partial_x \phi(x, t) \partial_t u(x, t) dx dt \\ &= \int_0^T \left[ \partial_t u(x, t) \phi(x, t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi(x, t) \partial_{xt} u(x, t) dx \right] dt \\ &= \int_0^T \left[ \partial_t u(1, t) \phi(1, t) - \partial_t u(0, t) \phi(0, t) - \int_0^1 \phi(x, t) \partial_{xt} u(x, t) dx \right] dt \end{aligned}$$

Impongamos la primera condición sobre  $\phi$ , esta es  $\phi(1, t) = 0$  con eso

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \partial_x \phi(x, t) \partial_t u(x, t) dx dt &= \int_0^T \left[ -\partial_t u(0, t) \phi(0, t) - \int_0^1 \phi(x, t) \partial_{xt} u(x, t) dx \right] dt \\ &= - \int_0^T \partial_t u(0, t) \phi(0, t) dt - \int_0^T \int_0^1 \phi(x, t) \partial_{xt} u(x, t) dx dt \\ &= - \int_0^T \partial_t u(0, t) \phi(0, t) dt - \int_0^1 \int_0^T \phi(x, t) \partial_{xt} u(x, t) dx dt \end{aligned}$$

Como se ha supuesto continuidad del integrando de la integral doble en el lado derecho, podemos cambiar el orden de integración, e integrar por partes con respecto a  $t$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_T} \partial_x \phi(x, t) \partial_t u(x, t) dx dt \\
&= - \int_0^T \partial_t u(0, t) \phi(0, t) dt - \int_0^1 \left[ \phi(x, t) \partial_x u(x, t) \Big|_0^T - \int_0^T \partial_t \phi(x, t) \partial_x u(x, t) dt \right] dx \\
&= - \int_0^T \partial_t u(0, t) \phi(0, t) dt - \int_0^1 \left[ \phi(x, T) \partial_x u(x, T) - \phi(x, 0) \partial_x u(x, 0) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T \partial_t \phi(x, t) \partial_x u(x, t) dt \right] dx
\end{aligned}$$

En esta última igualdad imponemos una segunda condición sobre  $\phi$ , que es  $\phi(x, T) = 0$ , además  $\partial_x u(x, 0) = \partial_x(f(0)) = 0$  obtenemos

$$\iint_{Q_T} \partial_x \phi(x, t) \partial_t u(x, t) dx dt = - \int_0^T \partial_t u(0, t) \phi(0, t) dt + \int_0^1 \int_0^T \partial_t \phi(x, t) \partial_x u(x, t) dt dx \quad (4.0.11)$$

Por otra parte, integrando por partes en el lado derecho de la ecuación ( 4.0.10), obtenemos

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_T} \partial_{xx} B(u(x, t)) \partial_x \phi(x, t) dx dt \\
&= \int_0^T \left[ \partial_x \phi(x, t) \partial_x B(u(x, t)) \Big|_0^1 - \int_0^1 \partial_{xx} \phi(x, t) \partial_x B(u(x, t)) dx \right] dt \\
&= \int_0^T \left[ \partial_x \phi(1, t) \partial_x B(u(1, t)) - \partial_x \phi(0, t) \partial_x B(u(0, t)) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \partial_{xx} \phi(x, t) \partial_x B(u(x, t)) dx \right] dt
\end{aligned}$$

Ahora imponemos una tercera condición sobre  $\phi$ , que es  $\partial_x \phi(0, t) = 0$ . Además  $\partial_x B(u(1, t)) = \partial_u B(u(1, t)) \partial_x u(1, t) = 0$ , ya que  $\partial_x u(1, t) = 0$ . Con eso

$$\iint_{Q_T} \partial_{xx} B(u(x, t)) \partial_x \phi(x, t) dx dt = - \int_0^T \int_0^1 \partial_{xx} \phi(x, t) \partial_x B(u(x, t)) dx dt \quad (4.0.12)$$

La igualdad 4.0.10 nos conduce a

$$- \int_0^T \partial_t u(0, t) \phi(0, t) dt + \int_0^1 \int_0^T \partial_t \phi(x, t) \partial_x u(x, t) dt dx = - \int_0^T \int_0^1 \partial_{xx} \phi(x, t) \partial_x B(u(x, t)) dx dt$$

De donde

$$\int_0^T \partial_t u(0, t) \phi(0, t) dt = \iint_{Q_T} \partial_t \phi(x, t) \partial_x u(x, t) dt dx + \iint_{Q_T} \partial_{xx} \phi(x, t) \partial_x B(u(x, t)) dt dx$$

Que implica

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi(0, t) f'(t) dt &= \iint_{Q_T} [\partial_t \phi(x, t) \partial_x u(x, t) + \partial_{xx} \phi(x, t) \partial_x B(u(x, t))] dt dx \\ &= \iint_{Q_T} \partial_x u(x, t) [\partial_t \phi(x, t) + \partial_u B(u) \partial_{xx} \phi(x, t)] dt dx \\ &= \iint_{Q_T} \partial_x u(x, t) F(x, t) dt dx \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos que

$$\int_0^T \phi(0, t) f'(t) dt = \iint_{Q_T} \partial_x u(x, t) F(x, t) dt dx,$$

para una función  $F(x, t)$  positiva y continua en  $Q_T$  y  $\phi$  que satisface el problema adjunto en  $Q_T$

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(x, t) + D(u) \partial_{xx} \phi(x, t) &= F(x, t) \\ \phi(x, T) &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ \partial_x \phi(0, t) = 0, \quad \phi(1, t) &= 0, \quad 0 < t < T \end{aligned}$$

□

**Lema 1.2.6**

*Demostración.* Sean  $u_1$  y  $u_2$  soluciones del problema directo ( 1.1.4), entonces se satisfacen que

$$\partial_t u_1(x, t) = \partial_{xx} B_1(u_1(x, t))$$

$$\partial_t u_2(x, t) = \partial_{xx} B_2(u_2(x, t))$$

Restando las ecuaciones anteriores, tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t(u_1 - u_2) &= \partial_{xx}(B_1(u_1) - B_2(u_2)) \\ &= \partial_{xx}B_1(u_1) - \partial_{xx}B_1(u_2) + \partial_{xx}B_1(u_2) - \partial_{xx}B_2(u_2) \\ &= (\partial_{xx}B_1(u_1) - \partial_{xx}B_1(u_2)) + (\partial_{xx}B_1(u_2) - \partial_{xx}B_2(u_2)) \end{aligned}$$

Luego

$$\partial_t(u_1 - u_2) - (\partial_{xx}B_1(u_1) - \partial_{xx}B_1(u_2)) = (\partial_{xx}B_1(u_2) - \partial_{xx}B_2(u_2))$$

O también podemos escribir

$$\partial_t(u_1 - u_2) - (\partial_{xx}B_1(u_1) - \partial_{xx}B_1(u_2)) = \partial_{xx}(B_1(u_2) - B_2(u_2))$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por  $\phi(x, t)$  e integramos sobre  $Q_T$ , obtenemos

$$\left[ \begin{array}{l} \int_0^1 \int_0^T \phi \partial_t(u_1 - u_2) dt dx \\ - \int_0^1 \int_0^T \partial_{xx} [B_1(u_1) - B_1(u_2)] \phi dt dx \end{array} \right] = \int_0^1 \int_0^T \partial_{xx} [B_1(u_2) - B_2(u_2)] \phi dt dx$$

Sean

$$I = \int_0^1 \int_0^T \phi \partial_t(u_2 - u_2) dt dx$$

$$II = \int_0^1 \int_0^T \partial_{xx} [B_1(u_1) - B_1(u_2)] \phi dt dx$$

$$III = \int_0^1 \int_0^T \partial_{xx} [B_1(u_2) - B_1(u_2)] \phi dt dx$$

Integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 [\phi(u_1 - u_2)]_{t=0}^{t=T} dx - \int_0^1 \int_0^T \partial_t \phi(u_2 - u_2) dt dx \\
II &= \int_0^T [\partial_x(B_1(u_1) - B_2(u_2))\phi]_{x=0}^{x=1} - \int_0^T \int_0^1 \partial_x \phi \partial_x [B_1(u_1) - B_1(u_2)] dx dt \\
II &= \left[ \begin{aligned} &\int_0^T [\partial_x(B_1(u_1) - B_1(u_2))\phi]_{x=0}^{x=1} dt - \int_0^T [\partial_x \phi(B_1(u_1) - B_1(u_2))]_{x=0}^{x=1} dt \\ &+ \int_0^T \int_0^1 \partial_{xx} \phi [B_1(u_1) - B_1(u_2)] dx dt \end{aligned} \right] \\
II &= \left[ \begin{aligned} &\int_0^T [\partial_x(B_1(u_1) - B_1(u_2))\phi]_{x=0}^{x=1} dt - \int_0^T [\partial_x \phi(B_1(u_1) - B_1(u_2))]_{x=0}^{x=1} dt \\ &+ \int_0^T \int_0^1 \partial_{xx} \phi D_1(\mu(x, t))(u_1 - u_2) dx dt \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Conviene recordar las condiciones dadas para  $u_1$  y  $u_2$

$$\begin{aligned}
\partial_t u_j &= \partial_x(D_j(u_j)\partial_x u_j) = \partial_{xx} B(u_j) \quad j = 1, 2 \\
u_j(x, 0) &= f(x) \quad 0 < x < 1 \\
u_j(0, t) &= f(t) \quad 0 < t < T \\
\partial_x \phi(1, t) &= 0 \quad 0 < t < T
\end{aligned}$$

Si además imponemos sobre  $\phi$  las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
\partial_t \phi + D_1(\mu(x, t))\partial_{xx} \phi &= 0 \quad \text{en } Q_T \\
\phi(x, T) &= 0 \quad 0 < x < 1 \\
\phi(0, t) &= \theta(t) \quad 0 < t < T \\
\partial_x \phi(1, t) &= 0 \quad 0 < t < T
\end{aligned}$$

Entonces llegamos a

$$\begin{aligned}
I - II &= \int_0^1 \int_0^T \partial_t \phi(u_1 - u_2) dt dx + \int_0^T [D_1(u_1(0, t)) \partial_x u_1(0, t) - D_1(u_2(0, t)) \partial_x u_2(0, t)] \theta(t) dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^1 D_1(\mu(x, t))(u_1 - u_2) \partial_{xx} \phi dx dt \\
&= \int_0^T [D_1(u_1(0, t)) \partial_x u_1(0, t) - D_1(u_2(0, t)) \partial_x u_2(0, t)] \theta(t) dt
\end{aligned}$$

Retomemos la expresión *III*

$$\begin{aligned}
III &= \int_0^T [\phi \partial_x (B_1(u_2) - B(u_2))]_{x=0}^{x=1} dt - \int_0^T \int_0^1 \partial_x \phi \partial_x (B_1(u_2) - B_2(u_2)) dx dt \\
&= - \int_0^T \theta(t) [D_1(u_2(0, t)) - D_2(u_2(0, t))] \partial_x u_2(0, t) dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^1 \partial_x \phi (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 dx dt
\end{aligned}$$

Ahora como  $I - II = III$ , entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^T \begin{bmatrix} D_1(u_1(0, t)) \partial_x u_1(0, t) \\ -D_1(u_2(0, t)) \partial_x u_2(0, t) \end{bmatrix} \theta(t) dt &= - \int_0^T \theta(t) [D_1(u_2(0, t)) - D_2(u_2(0, t))] \partial_x u_2(0, t) dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^1 \partial_x \phi (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 dx dt
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_0^T \theta(t)(D_1(u_1)\partial_x u_1 - D_2(u_2)\partial_x u_2)dt = - \int_0^T \int_0^1 \partial_x \phi(D_1(u_2) - D_2(u_2))\partial_x u_2 dx dt$$

De donde

$$\int_0^T \theta(t)(g_1(t) - g_2(t))dt = - \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2))\partial_x \phi \partial_x u_2 dx dt$$

□

### Lema 1.2.8

*Demostración.* La demostración es igual que la demostración del Lema 1.2.6 basta escribir las expresiones *I*, *II* y *III* cambiando  $\phi$  por  $\psi$ . Después de igualar *I*–*II* con *III*. obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [\psi(u_1 - u_2)]_0^T dx - \int_0^T [\psi(x, t)(D_1(u_1)\partial_x u_1 - D_1(u_2)\partial_x u_2) - \partial_x \psi(B_1(u_1) - B_1(u_2))]_0^1 dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 (u_1 - u_2)(\partial_t \psi + D_1(\mu(x, t))\partial_{xx} \psi(x, t)) dx dt \\ & = \int_0^T \psi(x, t)\partial_x (B_1(u_2) - B_2(u_2))|_0^1 dt - \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2))\partial_x u_2 \partial_x \psi dx dt \end{aligned}$$

y evaluando los limites de integración se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\psi(x, T)(u_1(x, T) - u_2(x, T)) - \psi(x, 0)(u_1(x, 0) - u_2(x, 0))) dx \\ & - \int_0^T \left[ \begin{array}{l} \psi(1, t)(D_1(u_1(1, t))\partial_x u_1(1, t) - D_1(u_2(1, t))\partial_x u_2(1, t)) \\ - \partial_x \phi(1, t)(B_1(u_1(1, t)) - B_1(u_2(1, t))) \\ - \psi(0, t)(D_1(u_1(0, t))\partial_x u_1(0, t) - D_1(u_2(0, t))\partial_x u_2(0, t)) \\ + \partial_x \psi(0, t)(B_1(u_1(0, t)) - B_1(u_2(0, t))) \end{array} \right] dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 (u_1 - u_2)(\partial_t \psi + D_1(\mu(x, t))\partial_{xx} \psi(x, t)) dx dt \\ & = \int_0^T (\psi(1, t)(\partial_x (B_1(u_2(1, t)) - B_2(u_2(1, t))) - \psi(0, t)\partial_x (B_1(u_2(0, t)) - B_2(u_2(0, t)))) dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2))\partial_x u_2 \partial_x \psi dx dt \end{aligned}$$

Se establecen las siguientes condiciones sobre  $\psi$

$$\psi(x, T) = 0 \quad \text{y} \quad \psi(0, t) = 0$$

y recordemos del problema directo 1.2.4, que

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = 0$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = f(t)$$

$$\partial_x u_1(1, t) = \partial_x u_2(1, t) = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \int_0^T \partial_x \psi(1, t) (B_1(u_1(1, t)) - B_1(u_2(1, t))) dt - \int_0^T \int_0^1 (u_1 - u_2) (\partial_t \psi + D_1(\mu(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t)) dx dt \\ &= \int_0^T (\psi(1, t) (\partial_x (B_1(u_2(1, t)) - B_2(u_2(1, t)))) - \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \psi dx dt \end{aligned}$$

Ahora

$$\partial_x (B_1(u_2(1, t)) - B_2(u_2(1, t))) = (D_1(u_2(1, t)) - D_2(u_2(1, t))) \partial_x u_2(1, t)$$

Luego

$$\begin{aligned} & \int_0^T \partial_x \psi(1, t) (B_1(u_1(1, t)) - B_1(u_2(1, t))) dt - \int_0^T \int_0^1 (u_1 - u_2) (\partial_t \psi + D_1(\mu(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t)) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \psi dx dt \end{aligned}$$

y como

$$B_1(u_1) - B_1(u_2) = D_1(\mu(x, t))(u_1 - u_2)$$

para  $f(0) \leq \mu(x, t) \leq f(t)$   $(x, t) \in Q_T$ , entonces

$$\begin{aligned} & \int_0^T \partial_x \psi(1, t) D_1(\mu(1, t)) (u_1(1, t) - u_2(1, t)) dt - \int_0^T \int_0^1 (u_1 - u_2) (\partial_t \psi + D_1(\mu(x, t)) \partial_{xx} \psi(x, t)) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \psi dx dt \end{aligned}$$

Así, para  $\psi$  que satisface el problema llamado  $h$ -adjunto

$$\begin{aligned} \partial_t \psi + D_1(\mu(x, t)) \partial_{xx} \psi &= 0 & \text{en } Q_T, \\ \psi(x, t) &= 0 & 0 < t < 1 \\ \psi(0, t) &= 0 & 0 < t < T \\ D_1(\mu(1, t)) \partial_x \psi(1, t) &= \beta(t) & 0 < t < T \end{aligned}$$

Se tiene de todo lo anterior que

$$\int_0^T \beta(t) (u_1(1, t) - u_2(1, t)) dt = - \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \psi dx dt$$

De donde

$$\int_0^T \beta(t) (h_1(t) - h_2(t)) dt = - \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \psi dx dt$$

□

# Bibliografía

- [1] Paul Duchateau., R Thelwell y G Butters., Analysis of adjoint problem approach to the identification of unknown diffusion coefficient, Inverse Problems, issue2, 2004, páginas 601-625.
- [2] Paul Duchateau., David Zachmann., Applied Partial Diferential Equations, Dover Publications, 2002.
- [3] Charles W Groetsch, Inverse Problems in the Mathematical sciences, 1993, Veweg.
- [4] Dinh Nho H´ao, Methods for Inverse heat conduction problems, 1998, PETER LANG.
- [5] Haim Brezis, Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones, Version española Juan Ramón Esteban, 1984, Alianza Editorial, S.A., Madrid.
- [6] Murray H. Protter., Hans F. Weinberguer., Maximum Principles in Differential Equation, 1984, Springer.