



EVALUACION DEL COMPORTAMIENTO DE UN TROQUEL USANDO  
HERRAMIENTAS CAE

ESTEBAN CASTAÑO ZAPATA

UNIVERSIDAD EAFIT  
ESCUELA DE INGENIERIA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA  
MEDELLIN  
2008

EVALUACION DEL COMPORTAMIENTO DE UN TROQUEL USANDO  
HERRAMIENTAS CAE

ESTEBAN CASTAÑO ZAPATA

Trabajo de grado para optar por el  
título de ingeniero mecánico

Asesor:

Gabriel Jaime Paramo Bermúdez

Ingeniero Mecánico

UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE INGENIERIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

MEDELLIN

2008

## AGRADECIMIENTOS

A mi familia y a aquellos que me ayudaron durante todo este tiempo.

## CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCION .....	13
1 TROQUELERIA .....	15
1.1 GENERALIDADES.....	15
1.2 TIPOS DE TRANSFORMACIONES DE LA LAMINA .....	16
2 TEORIA DE LA EMBUTICION .....	17
2.1 FENÓMENOS FÍSICOS DURANTE LA EMBUTICIÓN.....	17
2.2 PRINCIPIO DE LA EMBUTICIÓN CILÍNDRICA.....	18
2.2.1 Embutición de simple efecto.....	19
2.2.2 Embutición de doble efecto.....	20
2.2.3 Embutición de triple efecto.....	21
2.3 DETERMINACION DEL DIAMETRO DEL ELEMENTO A EMBUTIR .....	22
2.4 DETERMINACION DEL NUMERO DE EMBUTICIONES .....	24
2.5 RADIOS DE MATRIZ Y PUNZON.....	29
2.6 TOLERANCIA DE LA EMBUTICION .....	30
2.7 VELOCIDAD DE EMBUTICION .....	32
2.8 PRESION DEL SUJETA CHAPAS.....	33
2.9 FUERZA DE EMBUTICION .....	35
2.10 LUBRICACION.....	36
2.11 EMBUTICION POR GOMA.....	37

3	TEORIA DE PLASTICIDAD .....	39
3.1	INTRODUCCION .....	39
3.2	DIAGRAMA DE ESFUERZO-DEFORMACION UNITARIA .....	39
3.2.1	Comportamiento elástico .....	40
3.2.2	Fluencia .....	41
3.2.3	Endurecimiento por deformación .....	41
3.2.4	Estricción .....	41
3.3	CRITERIO DE FLUENCIA .....	41
3.4	CRITERIO DE ESFUERZO CORTANTE MAXIMO DE TRESCA .....	43
3.5	CRITERIO DE ESFUERZO VON MISES .....	45
3.6	REGLAS DE FLUJO .....	46
3.7	ESFUERZO EFECTIVO Y DEFORMACION UNITARIA EFECTIVA .....	47
3.8	PLASTICIDAD ANISOTROPICA .....	49
3.9	EFFECTOS DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN EN LA SUPERFICIE DE FLUENCIA .....	50
3.9.1	Modelo isotrópico .....	50
3.9.2	Modelo cinemático .....	51
4	PRUEBAS EXPERIMENTALES PARA COMPORTAMIENTO PLASTICO ..	52
4.1	INTRODUCCION .....	52
4.3	DEFORMACION UNITARIA PLANAS .....	55
4.3.1	Prueba por compresión .....	55
4.3.2	Prueba por tensión .....	57
4.4	PRUEBA DE TENSION BIAXIAL .....	57
4.5	PRUEBA DE TORSION .....	59

4.6	PRUEBA DE FLEXION .....	61
5	HIPERELASTICIDAD.....	62
5.1	INTRODUCCION .....	62
5.2	DEFORMACION UNITARIA ELASTICA FINITA.....	64
5.3	HIPERELASTICIDAD ISOTROPICA.....	65
5.3.1	Neo-Hookean.....	65
5.3.2	Mooney-Rivlin .....	66
5.3.3	Ogden .....	66
5.3.4	Blatz-Ko .....	67
6	ANALISIS NO LINEAL .....	68
6.1	NO LINEALIDAD DEL MATERIAL .....	68
6.2	NO LINEALIDAD DE LA GEOMETRIA .....	69
6.3	NO LINEALIDAD DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA .....	70
6.4	PROCEDIMIENTOS NO LINEALES EN ELEMENTOS FINITOS .....	71
6.4.1	Método iterativo de Newton-Raphson.....	71
6.4.2	Procedimiento de incremento de carga. ....	72
6.4.3	Control de desplazamiento .....	73
6.4.4	Procedimiento iterativo. ....	73
6.4.5	Convergencia de soluciones.....	74
6.5	ANALISIS DINAMICO .....	74
6.5.1	Ansys-Lsdyna. ....	75
6.5.2	Método de integración Implícito. ....	75
6.5.3	Método de integración explícito .....	76

6.5.4	Limite de estabilidad .....	77
6.5.5	Hourglassing.....	78
7	SIMULACIONES .....	79
7.1	EMBUTICION PROFUNDA CILINDRICA .....	79
7.1.1	Cálculo de la fatiga en el punzón.....	86
7.2	EMBUTICION PROFUNDA RECTANGULAR .....	90
8	CONCLUSIONES .....	94
	BIBLIOGRAFIA.....	96
	ANEXOS .....	98

## LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Coeficientes de reducción para embutición .....	26
Tabla 2. Determinación del número de embuticiones y la altura .....	28
Tabla 3. Valores de J para diferentes material y formas .....	31
Tabla 4. Velocidades de embutición .....	33
Tabla 5. Presiones específicas para el sujetador .....	34
Tabla 6. Resistencia de la chapa .....	35
Tabla 7. Factor de relación .....	36
Tabla 8. Propiedades de la chapa .....	79
Tabla 9. Elementos definidos para el modelo .....	82
Tabla 10. Fuerzas de reacción sobre el punzón .....	89

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Tuerca maquinada y su contraparte en lámina troquelada .....	15
Figura 2. Procesos de troquelado .....	16
Figura 3. Deformación de la chapa embutida .....	17
Figura 4. Formación de pliegues en la embutición y zonas de carga. ....	18
Figura 5. Componentes principales de una embutición simple .....	19
Figura 6. Componentes de una embutición de doble efecto .....	20
Figura 7. Representación de una embutición de triple efecto .....	22
Figura 8. Diámetro de la chapa para algunas formas comunes .....	23
Figura 9. Proceso de embutición en varias pasadas. ....	26
Figura 10. Método grafico para calcular el número de embuticiones .....	27
Figura 11. Problemas de la chapa por radios inadecuados .....	29
Figura 12. Influencia de la tolerancia en el proceso .....	31
Figura 13. Método alternativo para el cálculo de la tolerancia .....	32
Figura 14. Esquema de una embutición con caucho .....	38
Figura 15. Diagrama de esfuerzo-deformación unitaria para una probeta de acero .....	40
Figura 16. Representación tridimensional de la superficie de fluencia .....	43
Figura 17. Modelo isotrópico .....	51
Figura 18. Modelo cinemático .....	51
Figura 19. Abarrilamiento debido a la fricción .....	52
Figura 20. Foto de uno de los extremos en una prueba a compresión .....	54
Figura 21. Primera alternativa para la prueba a compresión .....	56
Figura 22. Segunda alternativa para la prueba a compresión .....	56
Figura 23. Pruebas de deformación plana por tensión .....	57
Figura 24. Esquema de una prueba de inflado hidráulico .....	58

Figura 25. Equilibrio de fuerzas cerca del domo .....	58
Figura 26. Esquema de una prueba a torsión .....	59
Figura 27. Esquema de la variación del momento flector sobre un elemento.....	61
Figura 28. Grafica típica de Fuerza-desplazamiento de un elastómero.....	63
Figura 29. Método Newton-Raphson .....	72
Figura 30. Elemento tipo shell.....	78
Figura 31. Deformaciones debidas a hourglassing .....	78
Figura 32. Producto a embutir.....	79
Figura 33. Modelo CAD del troquel.....	81
Figura 34. Condiciones de frontera de la chapa .....	81
Figura 35. Modelo discretizado del troquel .....	82
Figura 36. Grafica de la velocidad del punzón .....	83
Figura 37. Grafica del desplazamiento del punzón .....	84
Figura 38. Grafica de la fuerza ejercida por el sujetador .....	84
Figura 39. Esfuerzos equivalentes en la chapa .....	85
Figura 40. Altura máxima de embutición.....	86
Figura 41. Nuevo modelo de embutición cilíndrica .....	87
Figura 42. Esfuerzos equivalentes en el punzón. ....	87
Figura 43. Fuerzas de reacción en el contacto .....	88
Figura 44. Caso de carga del punzón.....	89
Figura 45. Factor de seguridad del punzón .....	90
Figura 46. Embutición cuadrada .....	90
Figura 47. Distancias para el desarrollo.....	91
Figura 48. Desarrollo de la chapa .....	92
Figura 49. Modelo CAD de la embutición rectangular.....	93
Figura 50. Esfuerzos equivalentes de la embutición rectangular.....	93

## LISTA DE ANEXOS

pág.

Anexo A. Planos de ensamble de un troquel para el desarrollo de embuticiones por goma.....	98
--	----

## INTRODUCCION

Este proyecto de grado describe el análisis por el método de elementos finitos de una pieza troquelada por embutición.

Desde el punto de vista de ingeniería, el proceso de embutición se realiza a partir de procedimientos empíricos, los cuales varían dependiendo de las características bajo las cuales se realizaron, como el material, el espesor y la geometría de la pieza.

Estos procedimientos impiden que se logre visualizar formas más eficientes de realizar ciertos productos y limitan la capacidad de los mismos para fabricar piezas más complejas. Este proyecto pretende explorar las capacidades de una herramienta CAE<sup>1</sup> como soporte para la manufactura de este tipo de piezas.

En el desarrollo de este proyecto se encontraran los temas que se mencionan a continuación, en relación a las actividades necesarias para la implementación de estas herramientas al proceso de producción.

- Teoría de mecánica de materiales: Se identifican los modelos apropiados dependiendo del tipo de recursos utilizados.
- Capacidades computacionales: se exponen las propiedades disponibles para la simulación del proceso.
- Generación de pasos a seguir para la elaboración de modelos virtuales.
- Construcción de casos prácticos para la simulación y análisis de formas y defectos en la embutición.
- Se concluye con los aspectos importantes que se requieren para realizar un análisis de este tipo y como puede afectar la producción.

---

<sup>1</sup> Siglas en ingles de Computer Aided Engineering

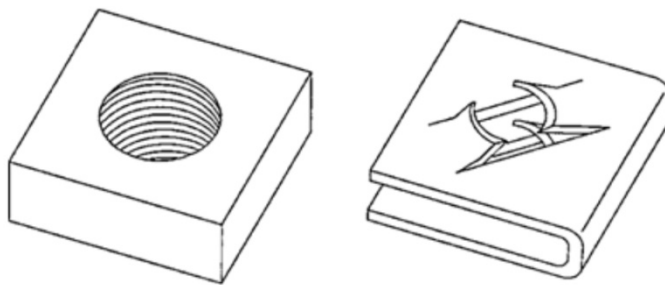
Por lo anterior se define el alcance del proyecto a la implementación del método de elementos finitos para analizar aspectos clave sobre procesos de embutición, de modo que se gane confianza en el modelo para la solución de problemas más complejos de la industria de la troquelería.

# 1 TROQUELERIA

## 1.1 GENERALIDADES

En el mundo moderno, las piezas hechas a partir de lámina metálica han reemplazado productos más costosos que fueron realizados por medios de manufactura más comunes, como la fundición, la soldadura y el maquinado (Figura 1). El motivo de esto es la capacidad de la producción en masa y de un mayor control de los parámetros técnicos y estéticos

Figura 1. Tuerca maquinada y su contraparte en lámina troquelada



SUCHY,2006, pag. 4

Se define como troquelado a aquel conjunto de operaciones con las cuales, sin producir virutas, se somete a una chapa a una o más transformaciones, con el fin de obtener una pieza de forma geométrica propia . La platina puede ser de varios materiales, como aluminio, latón, bronce, acero o titanio y su espesor constante en una de las mayores ventajas del proceso, ya que puede controlarse hasta un rango muy cerrado de tolerancia.

Los siguientes son algunos de los campos de acción del proceso de troquelado:

- Industria de alimentos y bebidas.
- Automóviles.
- Computadoras.

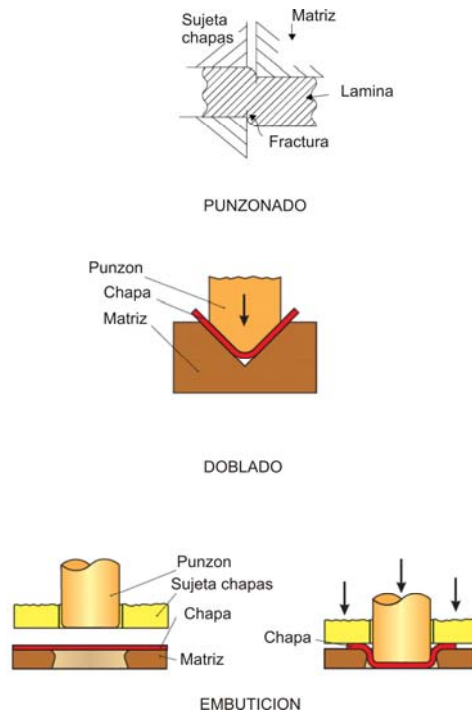
- Aeronáutica.
- Electrónica.

## 1.2 TIPOS DE TRANSFORMACIONES DE LA LAMINA

Aunque existen gran cantidad de métodos, estos pueden subdividirse en tres categorías principales, cuyas representaciones esquemáticas se muestran en la Figura 2.

- Corte o punzonado
- Doblez
- Embutición.

Figura 2. Procesos de troquelado



SCHULER,2002, pág. 119

## 2 TEORIA DE LA EMBUTICION

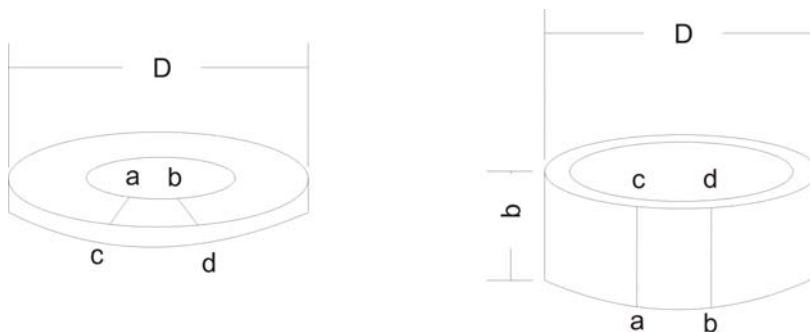
La embutición es un procedimiento para el conformado de piezas no desarrollables, que requiere generalmente del empleo de prensas y matrices; por ello está reservada a la fabricación en serie, en la cual se permite rebajar de forma importante el precio por unidad. Se emplea en la fabricación de objetos de uso corriente, como lavabos, automóviles, motocicletas, utensilios de cocina, etc.

Los costos que atraen la operación de una embutición en caliente (trabajos a temperaturas aprox. de  $800^{\circ}$ ), son generalmente mayores y a un ritmo de operación más alto, en comparación a trabajos en frío o temperatura ambiente. Sin embargo, en caliente no es posible lograr tolerancias tan precisas como en frío, debido a que el herramental se ha fabricado teniendo en cuenta la contracción, ocasionando que las piezas pueden variar dependiendo de la temperatura del material y de los útiles.

### 2.1 FENÓMENOS FÍSICOS DURANTE LA EMBUTICIÓN.

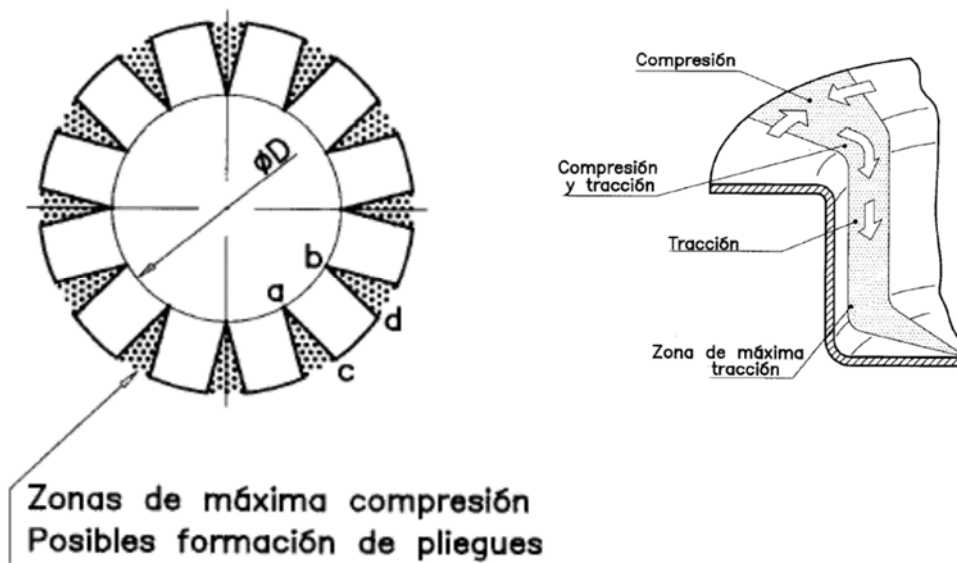
La deformación de la chapa se realiza por una compleja combinación de fuerzas a tensión y a compresión que se representan en un flujo del material. Las superficies elementales se transforman en otras equivalentes (Figura 3); siendo el volumen constante, el espesor también se mantiene constante.

Figura 3. Deformación de la chapa embutida



Además se producen pliegues en la chapa debido a la acción de la compresión, cuya magnitud será mayor en donde sea menor la distancia entre bordes externos (Figura 4), mientras la fuerza máxima a tensión está localizada en una zona próxima a la curvatura del canto.

Figura 4. Formación de pliegues en la embutición y zonas de carga.

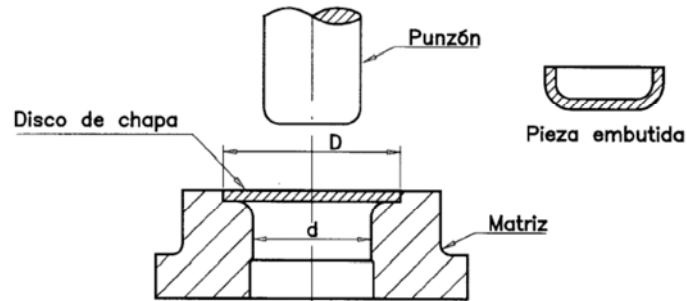


ASCAMM, 2004 @

## 2.2 PRINCIPIO DE LA EMBUTICIÓN CILÍNDRICA

La chapa, que ha sido cortada en forma de disco, es conformada por la acción de un punzón, que obliga a la lámina a penetrar en una matriz. Esto se ve representado esquemáticamente en la Figura 5.

Figura 5. Componentes principales de una embutición simple



ASCAMM, 2004 @

De acuerdo a las necesidades y posibilidades del proceso, se pueden diferenciar tres procedimientos de embutición:

2.2.1 Embutición de simple efecto. También conocido como embutición sin sujeta chapas. En este caso solo es posible embutir piezas que tengan poca profundidad, es decir, con una pequeña relación de embutición, donde la siguiente ecuación es normalmente aplicada.

$$D - d \leq 20 \times e \quad (1)$$

Donde  $D$  es el diámetro del disco,  $d$  el diámetro de la pieza final y  $e$  es el espesor. La altura de la pared lateral  $h$  que puede conseguirse sin prensa chapas está en función del espesor de la chapa  $e$  y del diámetro de embutición  $d$ , cumpliendo normalmente con la siguiente ecuación empírica para formas circulares.

$$h \leq 0.3 \times \sqrt[3]{d^2} \times \sqrt{e} \quad (2)$$

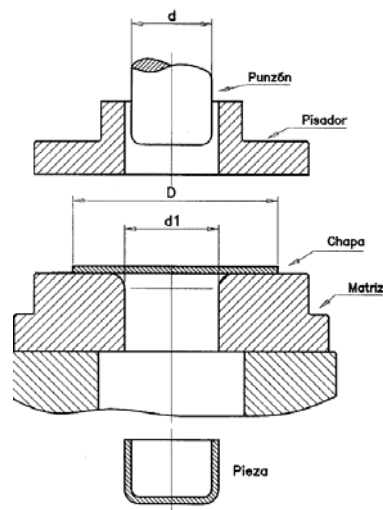
Para fondos de forma poligonal, se tiene que:

$$h \leq 0.3 \times \sqrt[3]{(2 \times r)^2} \times \sqrt{e} \quad (3)$$

Donde  $r$  es el radio redondeo de las esquinas del polígono.

2.2.2 Embutición de doble efecto. Es la operación que transforma una chapa plana, en una pieza de forma de cubeta, manteniendo el espesor de la chapa aproximadamente constante. Los elementos principales de este tipo de embutición se muestran en la Figura 6.

Figura 6. Componentes de una embutición de doble efecto



ASCAMM, 2004 @

Las operaciones realizadas durante este proceso son las siguientes:

- El material se coloca sobre la matriz, la cual tiene un dispositivo que ayuda a centrar la platina correctamente. Este centrador está formado por un alojamiento torneado o por una corona postiza.
- El sujeta chapas y el punzón descienden
- El pisa chapas es el primero que entra en contacto con el desarrollo y , ejerciendo una presión apropiada, mantiene la lamina sujeta sobre la matriz

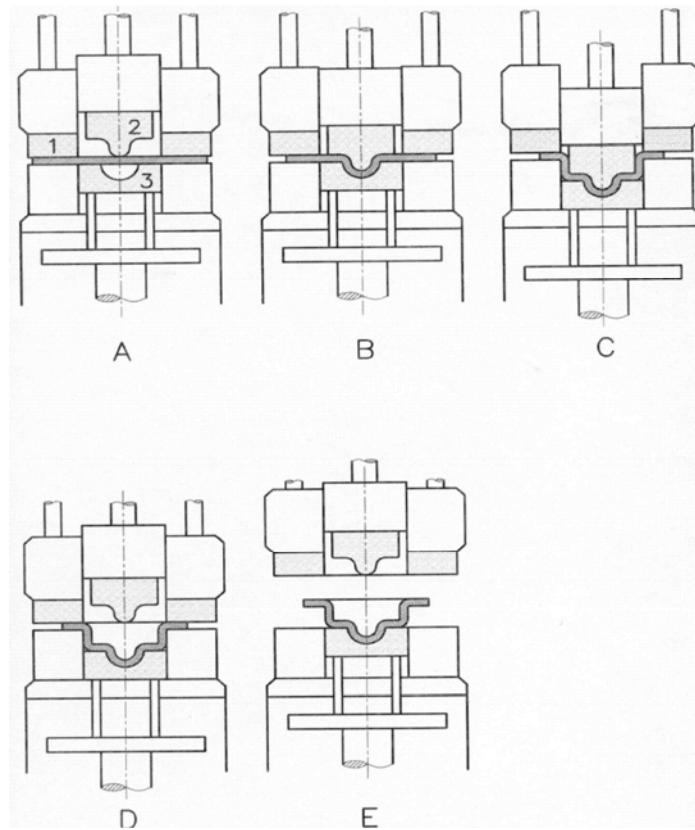
- El punzón, que se desliza por el interior del sujetador y choca con la chapa. La chapa resbala sobre el borde redondeado de la matriz sin formar pliegues, por impedirlo el pisa chapas, que ejerce la misma presión durante toda la operación. La parte de la lamina sujeta entre la matriz y el pisa chapas, forma un collar cuya anchura disminuye a medida que el punzón desciende.
- Después, el punzón y el pisa chapas vuelven a subir, pero la acción del sujetados no termina hasta que el punzón no se ha desprendido totalmente de la matriz. De persistir una parte de la pieza sin conformar, la acción del sujetador obliga a la pieza embutida a permanecer en la matriz en lugar de ser arrastrada por el punzón.

2.2.3 Embutición de triple efecto. Se denominan embuticiones de triple efecto a aquellas embuticiones que se realizan con la ayuda de prensas de doble efecto más la suma de un cojín neumático o hidráulico que realiza el que se denomina tercer efecto (Figura 7).

Este tipo de embuticiones son muy similares a las de doble efecto, pero se diferencian de las segundas en que el pisador esta comandado directamente por un pistón hidráulico o una biela de la propia prensa. Tanto el pistón o pistones, como la biela o bielast que mandan el pisador son independientes de las que mandan el punzón, de manera que podemos regular las primeras sin que se vean afectadas las segundas.

El tipo de pieza más característico que requiere ser embutida en prensas de triple efecto acostumbra a ser una pieza de gran tamaño donde se requiere un gran esfuerzo de pisado. Este esfuerzo es muy difícil de conseguir por medio de resortes o cilindros de gas, por lo que será más fácil la regulación de la presión por medio de la prensa que por otro sistema.

Figura 7. Representación de una embutición de triple efecto



ASCAMM, 2004 @

### 2.3 DETERMINACION DEL DIAMETRO DEL ELEMENTO A EMBUTIR

La determinación de las dimensiones de la chapa de la que ha de salir el objeto embutido se basa en la igualdad de los volúmenes de material del trozo de chapa inicial y el de la pieza embutida. La importancia de la determinación del desarrollo se basa en tres necesidades.

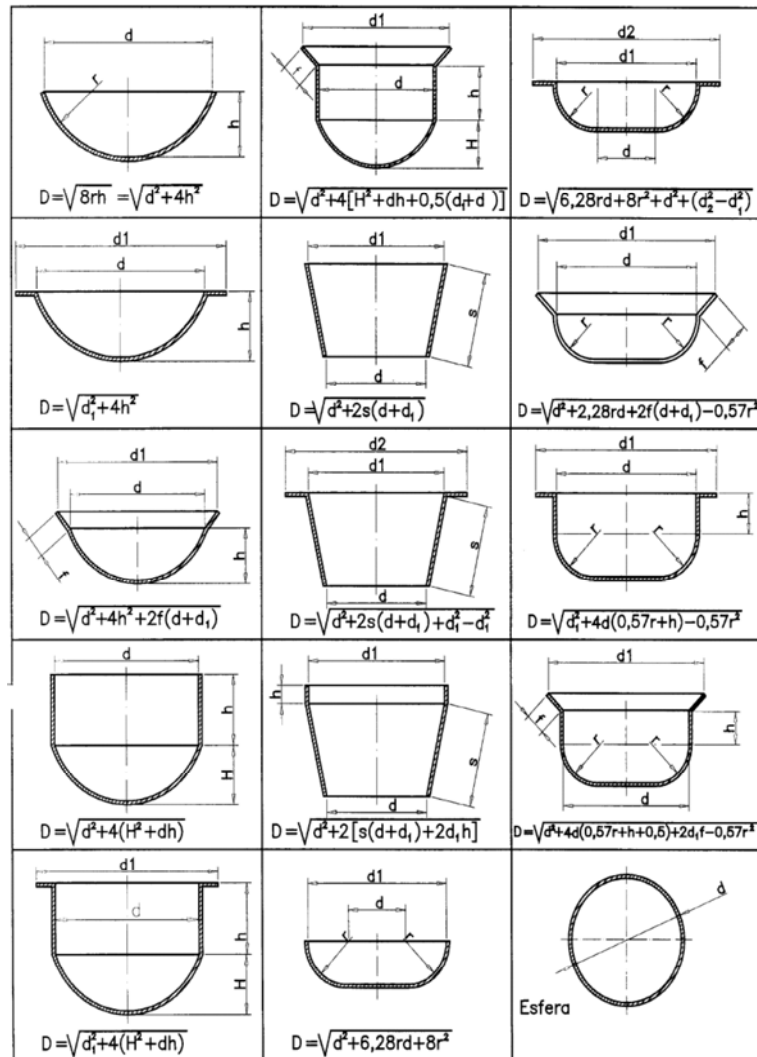
- Economía del material
- Facilidad de embutición
- Reducción del número de útiles.

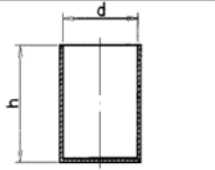
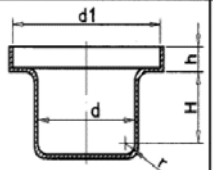
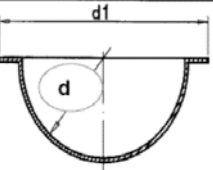
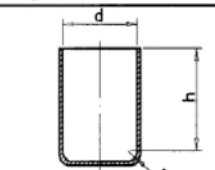
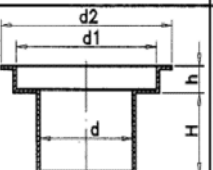
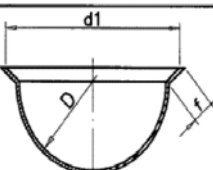
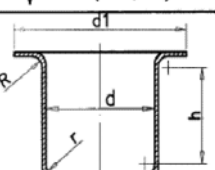
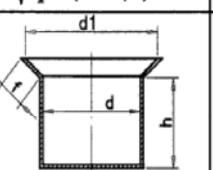
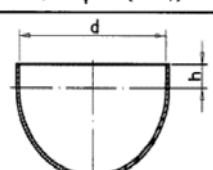
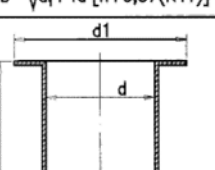
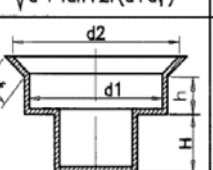
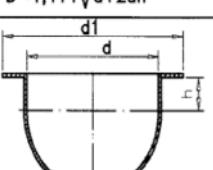
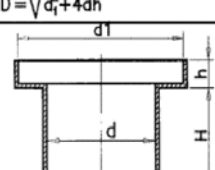
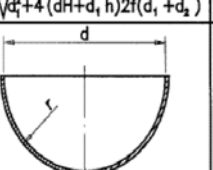
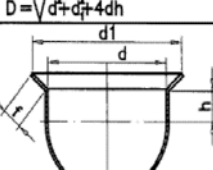
Los cálculos que se describen en los numerales siguientes son aplicables a cuerpos huecos que tengan forma geométrica regular y con sección circular. Para cuerpos irregulares no siempre se puede realizar un cálculo exacto.

Haciendo la aproximación de que el espesor no varía durante la embutición, será suficiente con encontrar la igualdad entre la superficie de la embutición y la de corte.

En la Figura 8 se tiene formulas simplificadas para algunas formas comunes de embutición cilíndrica.

Figura 8. Diámetro de la chapa para algunas formas comunes



 $D = \sqrt{d^2 + 4dh}$	 $D = \sqrt{d_1^2 + 4d(H + 0,57r) + 4d, h}$	 $D = \sqrt{d_1^2 + d_1^2}$
 $D = \sqrt{d^2 + 4d(h + 0,57r)}$	 $D = \sqrt{d_2^2 + 4(dH + d, h)}$	 $D = 1,414\sqrt{d^2 + f(d + d_1)}$
 $D = \sqrt{d_1^2 + 4d[h + 0,57(R + r)]}$	 $D = \sqrt{d^2 + 4dh + 2f(d + d_1)}$	 $D = 1,414\sqrt{d^2 + 2dh}$
 $D = \sqrt{d_1^2 + 4dh}$	 $D = \sqrt{d_1^2 + 4(dH + d, h)2f(d_1 + d_2)}$	 $D = \sqrt{d^2 + d_1^2 + 4dh}$
 $D = \sqrt{d_1^2 + 4(dH + d, h)}$	 $D = \sqrt{8r^2} = 2,828r = 1,414d$	 $D = 1,414\sqrt{d^2 + 2dh + f(d + d_1)}$

ASCAMM, 2004 @

## 2.4 DETERMINACION DEL NUMERO DE EMBUTICIONES

La determinación del número de operaciones, junto a la del diámetro del disco inicial son dos de las cuestiones más importantes de los procesos de embutición. La necesidad de realizar el embutido en dos o más pasadas viene determinada por la imposibilidad de que el material pueda resistir la elevada tensión radial a que se le somete durante el proceso de embutición debido a la relación existente entre el diámetro inicial del disco y el diámetro del recipiente a embutir.

Las piezas embutidas de gran profundidad, o de forma complicada, no pueden ser obtenidas en una sola operación. Estas deben ser deformadas en varias etapas y en matrices diferentes, acercándose progresivamente a la forma definitiva.

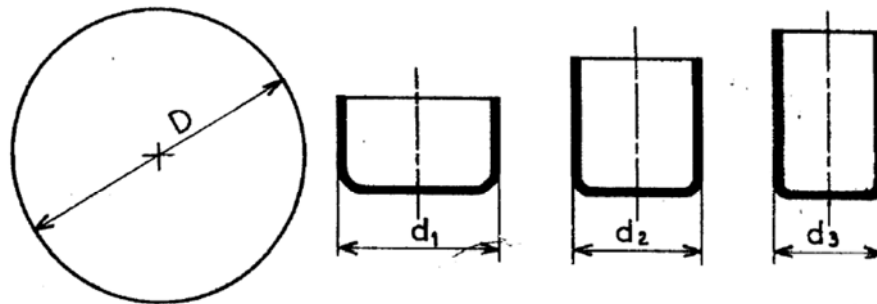
Cuanto más pequeño es el diámetro del punzón respecto al disco a embutir, tanto mayor será la presión necesaria para el embutido. Para que esta presión no provoque la rotura de la chapa, esta no debe superar los límites de resistencia del material. Los factores más importantes que influyen la calidad y la dificultad de las embuticiones son:

- Características del material: Propiedades, tamaño de grano.
- Espesor del material
- Tipo de embutición: simple, doble o triple efecto.
- Grado de reducciones
- Geometría de la embutición
- Calidad del herramental

Para la determinación de las operaciones por el método de coeficientes de reducción, se parte del cálculo de la chapa plana y se procede a multiplicar cada nuevo diámetro por un factor dependiente del tipo de chapa hasta alcanzar el valor deseado. En la Figura 9 se ilustra el proceso, donde  $D$  es el diámetro de desarrollo,  $d_1$  el diámetro de la primera embutición,  $d_2$  el de la segunda, etc.; se tiene en consecuencia lo siguiente:

$$\begin{aligned}d_1 &= K_1 \times D \\d_2 &= K_2 \times d_1 \\d_3 &= K_2 \times d_2\end{aligned}\tag{4}$$

Figura 9. Proceso de embutición en varias pasadas.



ASCAMM, 2004 @

Los coeficientes de reducción dependen de las propiedades del material y de su espesor, y estos son determinados a partir de pruebas experimentales. La siguiente tabla muestra valores promedio de coeficientes de reducción para embutición son sujeta chapas.

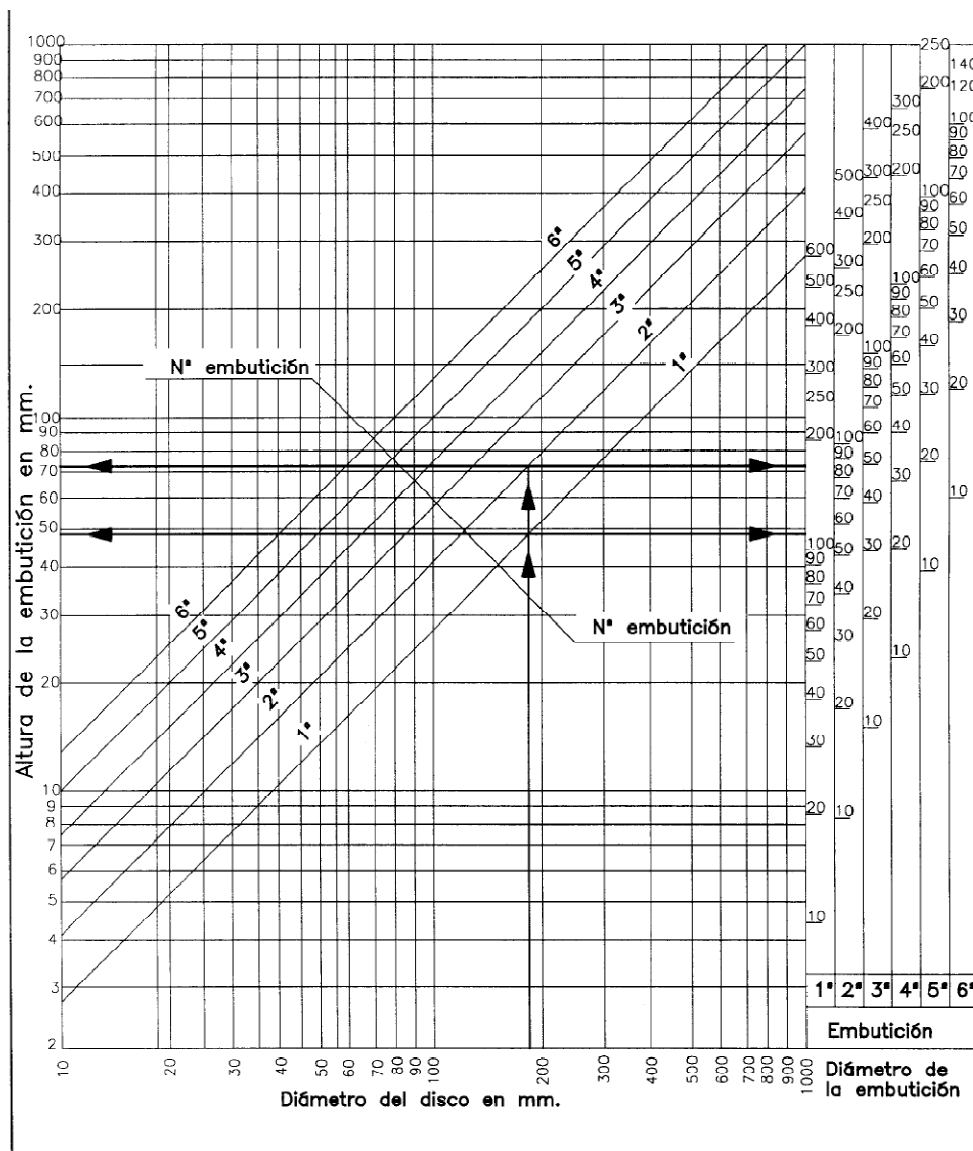
Tabla 1. Coeficientes de reducción para embutición

Material	$K_1$	$K_2$	$K_3$ y posteriores
Acero de embutición	0.6-0.65	0.8	0.37
Acero para embutición profunda	0.55-0.6	0.75-0.8	0.36
Acero inoxidable	0.52-0.58	0.75-0.8	0.4
Chapa de estaño	0.5-0.55	0.8-0.85	0.33
Cobre	0.55-0.65	0.85	0.32
Latón	0.5-0.55	0.75-0.8	0.31
Zinc	0.65-0.7	0.85-0.9	0.38
Aluminio	0.53-0.6	0.8	0.33
Duraluminio	0.55-0.6	0.9	0.34
Níquel	0.6-0.65	0.8	0.34

ASCAMM, 2004 @

También es posible calcular el número de pasadas por medio de una grafica (Figura 10). En este método, se traza una linera vertical en el valor correspondiente al diámetro del disco, luego se irán comprobando los diámetros y las alturas a cada lado de la grafica, hasta hallar el más aproximado a la pieza que se necesite fabricar.

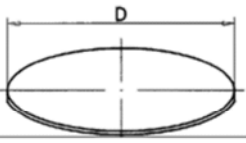
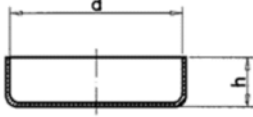
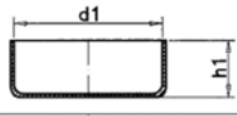
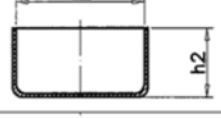

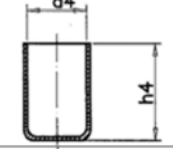
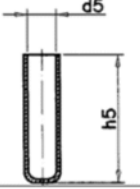
Figura 10. Método grafico para calcular el número de embuticiones



ASCAMM, 2004 @

Un método adicional, consiste en la utilización de la Tabla 2.

Tabla 2. Determinación del número de embuticiones y la altura

FASE N°	PASOS FORMA CILÍNDRICA	DIMENSIONES DEL VASO	
		DIÁMETRO	ALTURA
CORTAR DISCO		$D = \sqrt{d^2 + 4dh}$	
1ª		$d = 0,6 D$	$h = 0,266 D$
2ª		$d_1 = 0,48 D$	$h_1 = 0,401 D$
3ª		$d_2 = 0,384 D$	$h_2 = 0,555 D$
4ª		$d_3 = 0,307 D$	$h_3 = 0,737 D$
5ª		$d_4 = 0,245 D$	$h_4 = 0,959 D$
6ª		$d_5 = 0,196 D$	$h_5 = 1,225 D$

ASCAMM, 2004 @

## 2.5 RADIOS DE MATRIZ Y PUNZON

Los bordes del punzón y la matriz afectan la calidad de la pieza luego de la embutición, incluso pueden romperla (Figura 11). Por lo tanto, tanto el radio  $R$  de la matriz y como el radio  $r$  del punzón deben calcularse con cuidado. En el caso de  $R$ , su valor oscilara entre 3 y 8 veces el espesor  $e$  de la chapa. También se puede calcular por medio de la formula:

$$R = 0.8 \times \sqrt{(D - d) \times e} \quad (5)$$

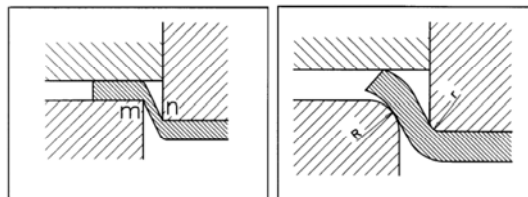
Existe otro método, el cual toma en cuenta el espeso de la chapa  $e$ , donde se tienen los siguientes valores

$e < 1mm$	$6 \times e \leq R \leq 8 \times e$	
$1mm < e < 3mm$	$4 \times e \leq R \leq 6 \times e$	
$1mm < e < 3mm$	$2 \times e \leq R \leq 4 \times e$	(6)

Para el radio  $r$  del punzón, este debe adaptarse progresivamente a la forma del recipiente embutido, pero en todo caso, no es prudente que este valor sea menor al espesor de la chapa. Experimentalmente, se ha hallado que por lo general

$$3 \times e \leq r \leq 5 \times e \quad (7)$$

Figura 11. Problemas de la chapa por radios inadecuados



ASCAMM, 2004 @

## 2.6 TOLERANCIA DE LA EMBUTICION

La tolerancia o huelgo  $u$  se entiende como la separación entre el punzón y el aro de embutición o matriz. Como resultado de pruebas realizadas, el huelgo de embutición en general está entre 1.1 y 1.4 veces el espesor de la lamina. Por lo general, el huelgo  $u$  se calcula partiendo del espesor de la chapa  $e$ , en mm, y de un coeficiente  $a$ , según las siguientes formulas

$$\begin{aligned}u &= e + 0.07 \times a \times \sqrt{10 \times e} && \text{Para acero} \\u &= e + 0.02 \times a \times \sqrt{10 \times e} && \text{Para aluminio} \\u &= e + 0.04 \times a \times \sqrt{10 \times e} && \text{Para metales no férreos (8)}\end{aligned}$$

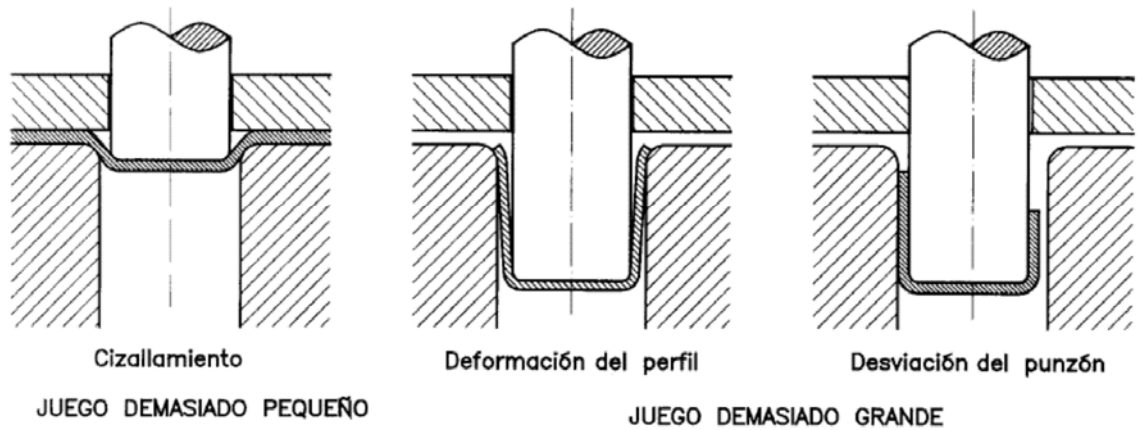
Los coeficientes de embutición  $a$  se eligen de acuerdo a los siguientes factores

- 1.2 para lamina muy dura
- 1.4 para lamina dura
- 1.6 para chapa de media dureza
- 1.8 para chapa blanda
- 2 para chapa muy dúctil

El menor porcentaje de la tolerancia (10% del espesor de la lámina), se utiliza para casos de embuticiones cilíndricas o las partes rectas de las embuticiones cuadradas o rectangulares. Los porcentajes mayores (14% de  $e$ ) si utilizan en zonas donde se sabe que el material va a estar sujeto a mayor compresión y en consecuencia van a aumentar su espesor, como por ejemplo los rincones de las embuticiones cuadradas o rectangulares.

Dificultades que se presentan debido a ajustes inadecuados se muestran en la Figura 12.

Figura 12. Influencia de la tolerancia en el proceso



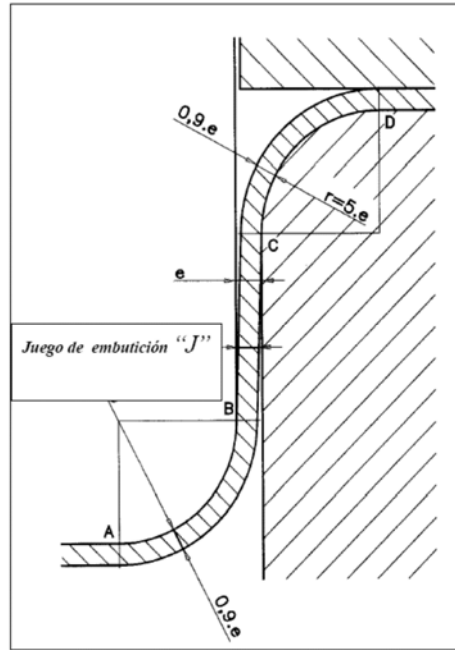
ASCAMM, 2004 @

Otros valores que pueden aplicarse para hallar el valor del juego radial  $J$ , como se muestra en la Figura 13 , se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 3. Valores de  $J$  para diferentes material y formas

Material	$J$
Latón, aluminio, plata y cobre	$1.1 \times e$ a $1.15 \times e$
Acero, hierro y duraluminio	$1.2 \times e$
Embuticiones rectangulares: Zonas rectas	$1.1 \times e$
Embuticiones rectangulares: zonas angulares con radio	$1.2 \times e$

Figura 13. Método alternativo para el cálculo de la tolerancia



ASCAMM, 2004 @

## 2.7 VELOCIDAD DE EMBUTICION

Por velocidad de embutición se entiende la velocidad en la que debe moverse la prensa en el momento en que el punzón entra en contacto con el material, es decir, cuando empieza la operación de embutición.

Según algunos estudios, el valor de la resistencia del material al cambio de forma viene influenciado por la recuperación y la recristalización y, en determinados materiales, también por su envejecimiento. Los procesos que tiene lugar, como por ejemplo, el deslizamiento o la nueva reagrupación de los granos de material son debido a la transposición y es por ello que estos procesos, que tienen lugar en

el interior de la estructura, se hacen patentes exteriormente al afectar a la curva de esfuerzo-deformación unitaria a través de la velocidad de deformación.

Pruebas realizadas con velocidades de embutición bajas, medias y altas, demuestran que la influencia de la velocidad de embutición cilíndrica es pequeña. Solo es importante realizar la embutición muy lentamente cuando se trata de láminas de o con contenido de zinc.

Existe una velocidad óptima para cada metal, a fin de que se le permite el tiempo necesario para que fluya plásticamente sin que el material se fracture o su espesor se reduzca demasiado.

Algunas velocidades para piezas cilíndricas, resultados de pruebas experimentales se muestran en la tabla a continuación:

Tabla 4. Velocidades de embutición

Material	Velocidad (mm/s)
Zinc y acero inoxidable	200
Acero dulce	280
Aluminio	500
Latón	750

ASCAMM, 2004 @

## 2.8 PRESION DEL SUJETA CHAPAS

El sujetador debe ejercer presión sobre la lámina de manera que permita su deslizamiento regular y uniforme sobre los radios de la matriz, ya que una presión

insuficiente provocaría la formación de arrugas, mientras que una presión excesiva causaría la rotura debido a que el material no se le dejaría fluir lo suficiente.

Por esta razón, es importante contar con una prensa que pueda mantener la presión constante durante la operación y que la lamina haya sido lubricada. Para hallar esta presión, se parte de las presiones específicas de cada material mostradas en la siguiente tabla:

Tabla 5. Presiones específicas para el sujetador

Material	Presión $p$ (Kg/cm <sup>2</sup> )
Aluminio	Entre 8 y 12
Acero	15
Inoxidable	25

ASCAMM, 2004 @

La presión del sujetador para embutición de cuerpos cilíndricos puede calcularse usando la siguiente ecuación

$$P_p = 0.785 \times (D^2 - d^2) \times p \quad (9)$$

Donde

D es el diámetro inicial de la lámina

d es el diámetro final de la operación

P es la presión específica según se muestra en la Tabla 5

## 2.9 FUERZA DE EMBUTICION

Para embuticiones cilíndricas, la siguiente ecuación toma en cuenta el cambio en la forma y el material utilizado para la operación, cuyos valores están representados en las siguientes tablas

Tabla 6. Resistencia de la chapa

Material	Resistencia de la lamina(k) en kgf/mm <sup>2</sup>
Acero	40
Acero inoxidable	70
Cobre	30
Aluminio	17
Duraluminio	45

ASCAMM, 2004 @

Tabla 7. Factor de relación

d/D	Factor de relación de embutición ( <i>f</i> )
0.55	1
0.575	0.93
0.6	0.86
0.625	0.79
0.65	0.72
0.675	0.66
0.7	0.6
0.725	0.55
0.75	0.5
0.775	0.45
0.8	0.4

ASCAMM, 2004 @

De donde se calcula la fuerza de embutición  $F_e$  en Kgf

$$F_e = d \times \pi \times e \times k \times f \quad (10)$$

## 2.10 LUBRICACION

Los lubricantes para el proceso de embutición deben tener una capa suficientemente fuerte para soportar las altas presiones y temperaturas asociadas

con las operaciones. La capacidad del lubricante de humedecimiento debe considerar también para tomar en cuenta la expansión de la superficie de la parte.

Los lubricantes no deben reaccionar agresivamente en contacto con la lámina, el herramental, la maquinaria y el operador. Deben poder ser aplicados y removidos de forma fácil y económica.

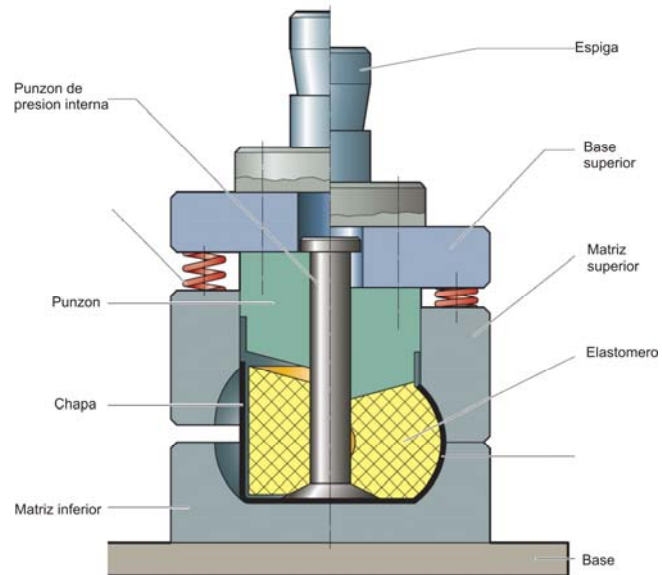
Existen variaciones con respecto a las propiedades del lubricante con respecto al material donde se está usando. Por ejemplo, las aleaciones de aluminio son más plásticas y permiten que sean embutidas a profundidades mayores sin que se fracturen, pero, también tiene un alto coeficiente de fricción, por lo que el lubricante debe poder reducir el efecto. Una lubricación excesiva causara un deslizamiento del material, posiblemente dañando tanto la parte como el troquel.

Cuando se selecciona el lubricante, se deben considerar todos los procesos de manufactura posteriores, como tratamientos térmicos y tratamientos superficiales. Algunos lubricantes, usualmente aquellos de altas características lubricantes, son altamente adherentes y por lo tanto difíciles de remover.

## 2.11 EMBUTICION POR GOMA

Esta operación consiste en la utilización de un elastómero para la formación de la chapa, como se muestra en la Figura 14. El elastómero, que viene en muchas formas y tamaños, es casi incompresible, se expande de modo que conforma la chapa a la forma de la matriz. Esta propiedad del elastómero indica que el volumen al cual es desplazado por el punzón, equivale al volumen de ensanchamiento lateral.

Figura 14. Esquema de una embutición con caucho



FIBRO, 2008 @

La característica que se debe tener en cuenta en el diseño, es la de permitir que el elastómero fluya adecuadamente, para que se pueda adaptar a la forma de la matriz y pueda regresar con facilidad a su estado original.

## 3 TEORIA DE PLASTICIDAD

### 3.1 INTRODUCCION

La teoría de plasticidad trata la fluencia de los materiales bajo complejos estados de esfuerzos. Le permite a uno decidir si un material presentara fluencia bajo un estado de esfuerzos y para determinar el cambio en la forma que ocurrirá si se presenta la fluencia. También permite que datos de pruebas a tensión se usen para predecir el endurecimiento durante la deformación bajo tales estados de esfuerzo. Estas relaciones son vitales para los códigos computacionales para predecir choques en automóviles y para el diseño de matrices.

### 3.2 DIAGRAMA DE ESFUERZO-DEFORMACION UNITARIA

Por medio de una prueba a tensión uniaxial de una probeta del material de interés, es posible graficar los resultados de los esfuerzos contra la deformación unitaria, de modo que se pueda apreciar el comportamiento elástico y plástico del material.

El esfuerzo graficado es el esfuerzo de ingeniería, el cual se calcula al dividir la fuerza  $F$  aplicada por la maquina entre el área de la sección transversal inicial de la probeta  $A$ . Este cálculo supone que el esfuerzo es constante en la sección transversal. Si tiene entonces que el esfuerzo es

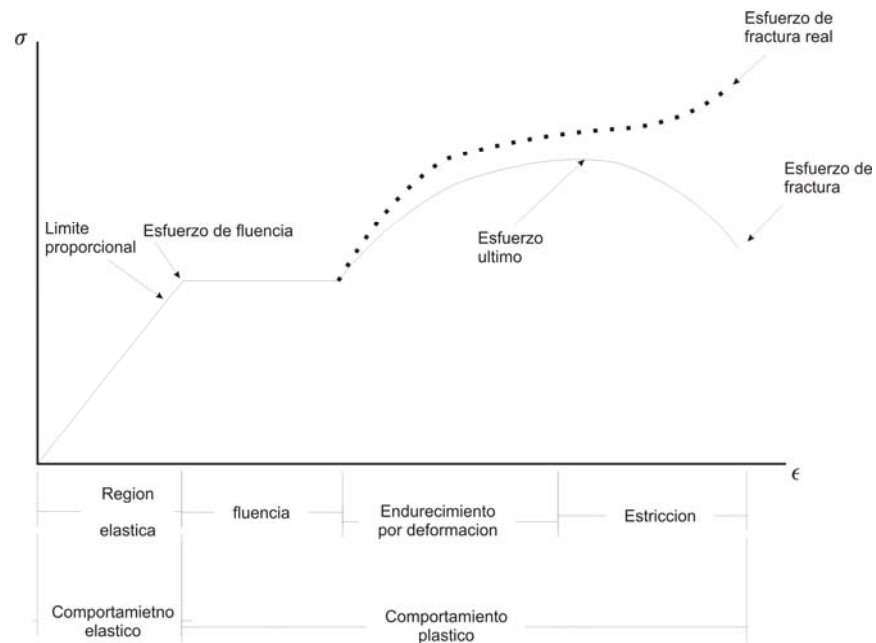
$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (11)$$

La deformación unitaria de ingeniería se determina midiendo el cambio en la longitud  $\delta$  con respecto a la longitud original de la probeta  $L$ .

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (12)$$

Al graficar los valores  $\sigma - \epsilon$ , se obtiene la curva de esfuerzo-deformación unitaria de ingeniería, el cual se muestra en la Figura 15.

Figura 15. Diagrama de esfuerzo-deformación unitaria para una probeta de acero



A continuación se explican los comportamientos más importantes del material que se muestran en la curva:

3.2.1 Comportamiento elástico. El objeto tiene un comportamiento elástico cuando después de aplicarse una carga, el objeto recupera su forma original al retirarse la carga. Este comportamiento ocurre en la región elástica que se muestra en la Figura 15. En esta zona, la relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria es lineal, por lo que se dice que en esta situación el material es linealmente elástico.

El límite superior del esfuerzo en esta relación se llama límite proporcional. A partir de este punto el material puede seguir respondiendo linealmente, pero la

pendiente se aplanan, mostrando un incremento mayor en la deformación unitaria con respecto al esfuerzo hasta llegar al límite elástico.

3.2.2 Fluencia. Un mayor esfuerzo al límite elástico, provocará una deformación permanente en el material, causando un cambio en sus propiedades. Este comportamiento se conoce como fluencia. El esfuerzo que causa la fluencia se llama punto de fluencia y la deformación se conoce como deformación plástica. El material en este estado, es perfectamente plástico.

3.2.3 Endurecimiento por deformación. Al terminar la fluencia, se puede aplicar una carga mayor, resultando en una curva que se eleva continuamente hasta llegar a un esfuerzo máximo. La elevación en la curva se llama endurecimiento por deformación en la Figura 15.

3.2.4 Estricción. En el esfuerzo último, el área de la sección transversal comienza a disminuir en una zona localizada de la probeta, en lugar de hacerlo a lo largo de su longitud. Como resultado, comienza a formarse un cuello, donde el área cada vez más pequeña solo puede soportar una carga siempre decreciente, por lo que la curva de ingeniería tiende a curvarse hacia abajo hasta que el material se rompe.

Sin embargo, debido a la formación del cuello, en realidad el material está sufriendo de un esfuerzo cada vez mayor, como se muestra en la Figura 15, ya que en la curva de ingeniería el esfuerzo se calcula con un área constante, pero en realidad el área transversal disminuye hasta romperse la probeta.

### 3.3 CRITERIO DE FLUENCIA

La preocupación aquí es describir matemáticamente las condiciones para que se presente la fluencia de esfuerzos complejos. Un criterio de fluencia es una

expresión matemática del estado de esfuerzos que causara fluencia o flujo plástico. La forma más general del criterio de fluencia es:

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = C \quad (13)$$

Donde C es una constante del material. Para materiales isotrópicos, esto puede ser expresado en términos de esfuerzos principales.

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C \quad (14)$$

La fluencia de la mayoría de sólidos es independiente del signo del estado de esfuerzo. Invertir los signos de todos los esfuerzos no tiene efecto en cuanto si un material fluye. Esto es consistente con la observación que en la mayoría de los materiales, el esfuerzo de fluencia en tensión y compresión es igual.<sup>2</sup>

Además, como con la mayoría de materiales, es razonable asumir que la fluencia es independiente del nivel del esfuerzo normal promedio:

$$\sigma_m = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \quad (15)$$

Se mostrara luego que esto equivale a asumir que la deformación plástica no causa un cambio en el volumen. Esta suposición de volumen constante es ciertamente razonable para materiales cristalinos que se deforman bajo los planos de corte porque estos mecanismos solo involucran cortante. En este caso solo el esfuerzo cortante es importante. Con esta simplificación, el criterio de fluencia debe ser de la forma

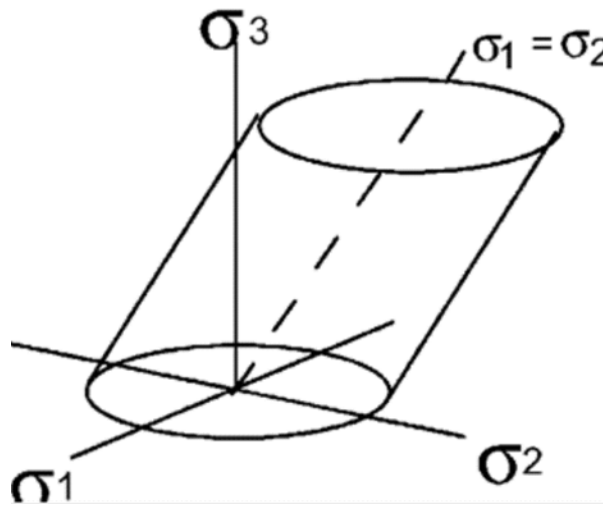
---

<sup>2</sup> Esto puede no ser igual cuando el camino de carga cambia durante la deformación. Las diferencias direccionales en el comportamiento de fluencia después de la deformación se llaman efecto Bauschinger.

$$f[(\sigma_2 - \sigma_3), (\sigma_3 - \sigma_1), (\sigma_1 - \sigma_2)] = C \quad (16)$$

En términos del diagrama del círculo de Mohr, solo los tamaños de los círculos, y no su posición, son de importancia en determinar cuando la fluencia ocurrirá. En el espacio tridimensional ( $\sigma_1$  vs.  $\sigma_2$  vs.  $\sigma_3$ ) el sitio puede ser representado por un cilindro paralelo a la línea  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , como se muestra en la Figura 16.

Figura 16. Representación tridimensional de la superficie de fluencia



@ANSYS, 1999

### 3.4 CRITERIO DE ESFUERZO CORTANTE MAXIMO DE TRESCA

El criterio más simple de fluencia es el propuesto por Tresca. Propone que la fluencia ocurrirá cuando el mayor esfuerzo cortante alcanza un valor crítico. El mayor esfuerzo cortante es

$$\tau_{max} = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})}{2} \quad (17)$$

De donde el criterio de Tresca puede ser expresado como

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = C \quad (18)$$

Si se mantiene la convención de que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\sigma_1 - \sigma_3 = C \quad (19)$$

La constante C puede encontrarse al considerar tensión uniaxial. En una prueba a tensión,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  y la fluencia es  $\sigma_1 = Y$ , donde Y es el esfuerzo de fluencia. Por lo tanto, el criterio de Tresca puede expresarse como

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y \quad (20)$$

Para cortante puro,  $\sigma_1 - \sigma_3 = Y$ . (6.7), donde k es el esfuerzo cortante de fluencia. Substituyendo la ecu 6.7 con  $k = Y/2$ ,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2 \times k = C \quad (21)$$

Parece razonable el de incorporar el efecto de un esfuerzo principal promedio en el criterio de fluencia. Uno puede intentar esto al asumir que la fluencia depende del promedio de los diámetros de los tres círculos de Mohr,  $\frac{[(\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_3)]}{3}$ , pero el término del esfuerzo intermedio,  $\sigma_2$ , sale del promedio, por lo tanto un criterio de diámetro promedio se reduce al criterio de Tresca.

### 3.5 CRITERIO DE ESFUERZO VON MISES

El efecto del esfuerzo principal intermedio puede ser incluido al asumir que la fluencia depende en la raíz cuadrada promedio de los tres círculos de Mohr <sup>3</sup>. Este es el criterio de von mises, el cual puede estar expresado como

$$\left\{ \frac{[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]}{3} \right\}^{1/2} = C \quad (22)$$

Se observa que cada término está al cuadrado, por lo que la convención  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  no es necesaria. La constante del material, C, puede ser evaluada al considerarse una prueba de tensión uniaxial. En la fluencia,  $\sigma_1 = Y$  y  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Substituyendo, se tiene lo siguiente:

$$[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] = 2Y^2 \quad (23)$$

Para el estado de cortante puro,  $\sigma_1 = -\sigma_3 = k$  y  $\sigma_2 = 0$ . Substituyendo en la ecuación 23, se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned} (-k)^2 + [-k - k]^2 + k^2 &= 2Y^2 \\ k &= \frac{Y}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (24)$$

La ecuación 23 puede ser simplificada si uno de los esfuerzos principales es cero, resultando en

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \times \sigma_2 = Y^2 \quad (25)$$

---

<sup>3</sup> esto equivale a asumir que la fluencia ocurrirá cuando la energía elástica distorsional alcanza un valor crítico.

### 3.6 REGLAS DE FLUJO

Cuando el material fluye, la rata de cambio de las deformaciones unitarias resultantes depende del estado de esfuerzos que causaron la fluencia. Las relaciones generales entre las deformaciones plásticas y los estados de esfuerzo se llaman reglas de flujo. Estas se pueden expresar como

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda \left( \frac{\delta f}{\delta \sigma_{ij}} \right) \quad (26)$$

Donde  $f$  es la función de fluencia correspondiente al criterio de fluencia de interés y  $\lambda$  es una constante que depende de la forma de la curva de esfuerzo-deformación unitaria. Para el criterio de von mises,

$$f = \frac{[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]}{4} \quad (27)$$

Por lo que la ecuación 26 da como resultado

$$\begin{aligned} d\epsilon_1 &= d\lambda \times \left[ \sigma_1 - \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2} \right] \\ d\epsilon_2 &= d\lambda \times \left[ \sigma_2 - \frac{(\sigma_3 + \sigma_1)}{2} \right] \\ d\epsilon_3 &= d\lambda \times \left[ \sigma_3 - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Estas últimas se conocen como las ecuaciones de Levy-Mises. Incluso si usualmente  $d\lambda$  no se conoce, estas ecuaciones son útiles para encontrar los incrementos de las deformaciones unitarias a partir de un estado de esfuerzos conocido.

La regla de flujo para el criterio de Tresca puede hallarse al aplicar la ecuación 26 con  $f = \sigma_1 - \sigma_3$ , obteniéndose

$$\begin{aligned}
 d\epsilon_1 &= d\lambda \\
 d\epsilon_2 &= 0 \\
 d\epsilon_3 &= -d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

### 3.7 ESFUERZO EFECTIVO Y DEFORMACION UNITARIA EFECTIVA

Estos son conceptos necesarios para analizar el endurecimiento que ocurre en historias de carga diferentes a la tensión uniaxial. El esfuerzo efectivo,  $\bar{\sigma}$ , y la deformación unitaria efectiva,  $\bar{\epsilon}$ , son definidos de tal forma que cumplen con los siguientes puntos:

- $\bar{\sigma}$  y  $\bar{\epsilon}$  se reducen a  $\sigma_x$  y  $\epsilon_x$  en una prueba a tensión cuyo eje principal es x.
- El incremento del trabajo por volumen hecho para deformar una pieza plásticamente es

$$dw = \bar{\sigma} \times d\bar{\epsilon} \tag{29}$$

- Se asume normalmente que la curva  $\bar{\sigma}$  vs  $\bar{\epsilon}$  describe el endurecimiento por deformación bajo un crecimiento constante del esfuerzo,  $\alpha$ , sin importar el valor de  $\alpha$ .

El esfuerzo efectivo, es una función de los esfuerzos aplicados que determinar si va a ocurrir fluencia. Cual este esfuerzo alcanza el punto de fluencia, comienza la deformación plástica del material.

Para el criterio de von Mises, se tiene que el esfuerzo es

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} \tag{30}$$

Mientras que para Tresca

$$\bar{\sigma} = (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (31)$$

La deformación unitaria efectiva, es una función matemática de los componentes de deformación, definidos de tal forma que  $\bar{\epsilon}$  pase a ser una deformación a tensión en dicha prueba y que el trabajo por volumen plástico sea

$$dw = \bar{\sigma} \times d\bar{\epsilon} = \sigma_1 \times d\epsilon_1 + \sigma_2 \times d\epsilon_2 + \sigma_3 \times d\epsilon_3 \quad (32)$$

En el caso de von Mises

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times (d\epsilon_1^2 + d\epsilon_2^2 + d\epsilon_3^2) \quad (33)$$

Para Tresca,  $d\bar{\epsilon}$  es la deformación unitaria máxima

$$d\bar{\epsilon} = |d\epsilon_i|_{max} \quad (34)$$

Aunque la ecuación no se usa mucho, es importante ya que permite chequear fácilmente el valor obtenido por el criterio de von Mises, ya que no pueden ser muy diferentes entre sí, cumpliéndose siempre la siguiente formula

$$|d\epsilon_i|_{max} \leq |d\bar{\epsilon}|_{Mises} \leq 1.15 \times |d\epsilon_i|_{max} \quad (35)$$

Debido a que en una prueba a tensión,  $\bar{\epsilon}$  y  $\bar{\sigma}$  son la deformación unitaria y esfuerzo a tensión respectivamente, la curva  $\sigma$  vs  $\epsilon$  a tensión es la misma curva  $\bar{\sigma}$  vs  $\bar{\epsilon}$ . Por lo tanto la curva esfuerzo vs deformación puede ser usada para predecir el comportamiento material bajo otras formas de carga.

### 3.8 PLASTICIDAD ANISOTROPICA

A pesar de que es práctica corriente asumir que los materiales son isotrópicos<sup>4</sup>, pocos lo son en realidad. Existen dos causas principales de anisotropía, la primera es por las orientaciones preferidas de los granos o textura cristalográfica<sup>5</sup>. Y la otra debido a imperfectos en el material, como las inclusiones. La anisotropía plástica se debe casi siempre por orientaciones preferidas.

R. Hill fue el primero en proponer un criterio de fluencia anisotrópico, el cual es una generalización del de von Mises

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + R \times (\sigma_x - \sigma_y)^2 = (R + 1) \times X^2 \quad (36)$$

Donde  $X$  es el esfuerzo de fluencia a tensión uniaxial. Las reglas de flujo correspondientes son obtenidas al aplicar la ecuación 26, donde  $f(\sigma_{ij})$  esta dado por la ecuación 36

$$\begin{aligned} d\epsilon_x &= [(R + 1) \times \sigma_x - R\sigma_y - \sigma_z] \\ d\epsilon_y &= [(R + 1) \times \sigma_y - R\sigma_x - \sigma_z] \\ d\epsilon_z &= [2\sigma_z - \sigma_y - \sigma_x] \end{aligned} \quad (37)$$

Esto implica que para un estado de esfuerzo plano,  $\rho = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}$ , y  $\alpha = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ , están relacionadas por las siguientes ecuaciones

$$\rho = \frac{[(R+1)\alpha - R]}{[(R+1) - R\alpha]} \quad (38)$$

---

<sup>4</sup> Materiales que poseen las mismas propiedades en todas direcciones.

<sup>5</sup> Los cuales son debidos a los procesos de fabricación de la lamina.

$$\alpha = \frac{[(R+1) \times \rho + R]}{[(R+1) + R \times \rho]} \quad (39)$$

En este caso, el esfuerzo efectivo es:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + R \times (\sigma_x - \sigma_y)^2}{(R+1)}} \quad (40)$$

Para la deformación unitaria efectiva se tiene:

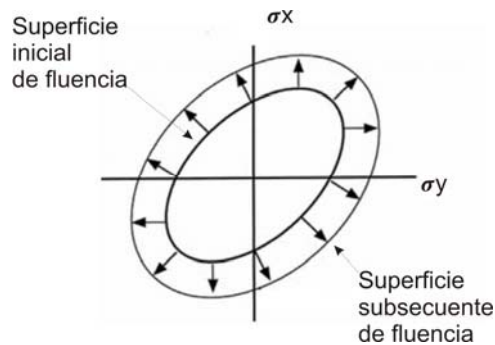
$$\bar{\epsilon} = \left(\frac{\sigma_x}{\bar{\sigma}}\right) \times (1 + \alpha \times \rho) \quad (41)$$

### 3.9 EFECTOS DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN EN LA SUPERFICIE DE FLUENCIA

Existen dos modelos para describir como las superficies de fluencia cambia durante el flujo plástico. Esta determina cuando el material volverá a fluir si la carga continua creciendo o es retirada

3.9.1 Modelo isotrópico. Este modelo predice una expansión en todas las direcciones desde la superficie de fluencia inicial durante el flujo plástico (Figura 17). En este caso se ignora el efecto de Baushinger, por lo que este modelo se usa para grandes deformaciones unitarias y no para cargas cíclicas. También debe notarse que a pesar del nombre, puede utilizarse para materiales anisotrópicos.

Figura 17. Modelo isotrópico

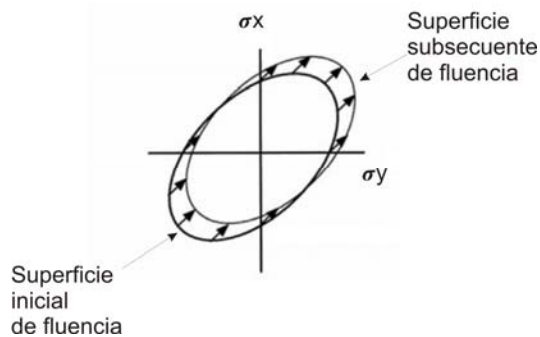


HOSFORD, 2005, pag 52

### 3.9.2 Modelo cinemático

De acuerdo a este modelo, la deformación plástica desplaza rígidamente la superficie de fluencia (Figura 18). A partir de esto se observa que un material que fue inicialmente isotrópico, dejó de serlo al incluir el efecto Bauschinger. Este tipo de análisis se emplea para problemas de deformaciones unitarias pequeñas y cargas cíclicas.

Figura 18. Modelo cinemático



HOSFORD, 2005, pag 53

## 4 PRUEBAS EXPERIMENTALES PARA COMPORTAMIENTO PLASTICO

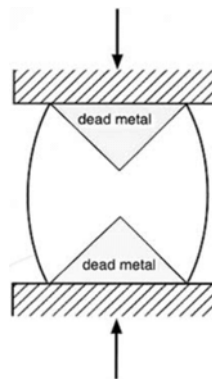
### 4.1 INTRODUCCION

La formación del cuello limita la elongación uniforme en tensión, haciendo difícil el estudio de las relaciones de esfuerzo-deformación a altas deformaciones. Deformaciones mucho mayores pueden ser alcanzadas en compresión y torsión. Los resultados de estas pruebas pueden ser usados, junto con la teoría de plasticidad, para predecir el comportamiento esfuerzo-deformación bajo otras formas de carga. Pruebas de deflexión son usadas para evitar el problema de agarrar materiales quebradizos sin romperlos. Pruebas de dureza eliminan tiempo y esfuerzo considerable para maquinar especímenes para prueba a tensión.

### 4.2 PRUEBA A COMPRESION

Mayores compresiones pueden ser alcanzadas en pruebas a compresión que en tensión. Sin embargo, dos problemas limitan la utilidad de pruebas a compresión: fricción y pandeo. La fricción en los límites del espécimen tiende a suprimir la transmisión lateral de material cerca de los extremos (Figura 19).

Figura 19. Abarrilamiento debido a la fricción



HOSFORD, 2005, pag 58

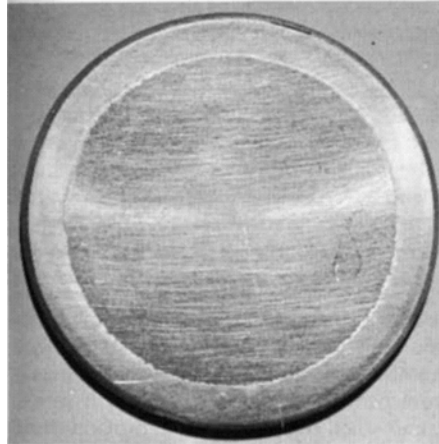
Una región en forma de cono de metal muerto (Material que no se está deformando) puede formarse a cada extremo, con el resultado de que el espécimen se abarrila. La fricción se puede reducir con lubricación y el efecto que produce la fricción puede disminuirse al incrementar la relación altura-diámetro  $\frac{h}{d}$ , del espécimen.

Si el coeficiente de fricción,  $\mu$ , entre el espécimen y las platinas, es constante, y si además se cuenta con una capa de un material suave que permite que el esfuerzo cortante sea constante, la presión promedio para causar la deformación es

$$P_{prom} = Y + \left(\frac{1}{3}\right) \times k \times \left(\frac{d}{h}\right) \quad (42)$$

Donde  $k$  es la resistencia al cortante del material suave. Sin embargo, estas ecuaciones usualmente no describen precisamente el efecto de la fricción porque ni el coeficiente de fricción ni la interface de esfuerzo cortante es constante. La fricción es usualmente más alta en los extremos, donde los lubricantes líquidos se pierden y las capas delgadas pueden romperse durante la prueba por los extremos filosos de las probetas. Un abarrilado severo causado por fricción puede causar que los laterales se doble hacia afuera y se conviertan en parte de los extremos superior e inferior, como se muestra en la Figura 20

Figura 20. Foto de uno de los extremos en una prueba a compresión



HOSFORD, 2005, pag 62

Si se incrementa a la relación  $\frac{h}{d}$  para reducir el efecto de la fricción, la probeta se pandeara si es demasiado larga o esbelta. El pandeo es muy posible si la relación entre altura y diámetro es mayor que 3. Si la prueba es lo suficientemente lubricada tal que los extremos de la probeta pueden deslizarse relativamente con respecto al pistón de la maquina, el pandeo puede ocurrir para  $\frac{h}{d} \geq 1.5$

Una manera de sobreponerse a los efectos de la fricción es la de probar probetas con diferentes relaciones de altura-diámetro. Las deformaciones a diferentes niveles de esfuerzo pueden graficarse contra  $\frac{d}{h}$ . Al extrapolar los esfuerzos a  $\frac{d}{h} = 0$ , los niveles de esfuerzos pueden encontrarse para una probeta infinitamente larga, en donde los efectos de la fricción son despreciables.

Durante la compresión la sección transversal que lleva la carga se incrementa. Por lo tanto, en contraste a la prueba a tensión, el valor absoluto de esfuerzo de ingeniería es mayor que el esfuerzo verdadero.

La forma de la curva de ingeniería de esfuerzo-deformación en compresión puede ser predicha por la curva de esfuerzo-deformación verdadero para una prueba a tensión usando las siguientes aproximaciones

$$\sigma_{tension} = \sigma_{ingenieria}(1 + \epsilon_{ingen}) \quad (43)$$

$$\epsilon_{tension} = \ln(1 + \epsilon_{ingen}) \quad (44)$$

$$\epsilon_{comp} = e^{\epsilon_{ingen}} - 1 \quad (45)$$

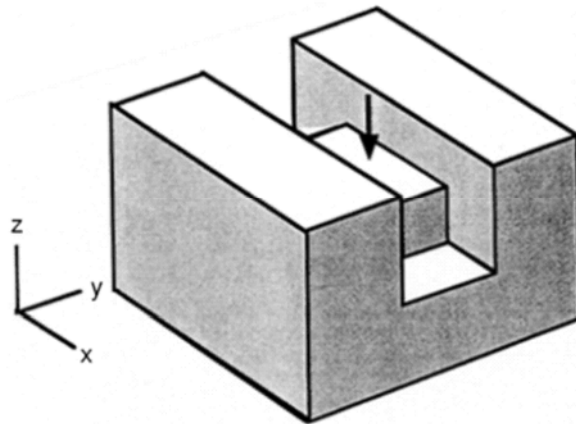
$$\sigma_{comp} = \frac{\sigma_{ingen}}{1 + \epsilon_{ingen}} \quad (46)$$

### 4.3 DEFORMACION UNITARIA PLANAS

4.3.1 Prueba por compresión. En este caso existen dos métodos para realizar la prueba. El primero consiste en la utilización de probetas pequeñas que son comprimidas en un canal para evitar que se ensanche (Figura 21). En este caso, se presenta fricción tanto en el pistón de la maquina como en las paredes del canal, por lo que el efecto de fricción será mayor que el que se presenta en compresión uniaxial.

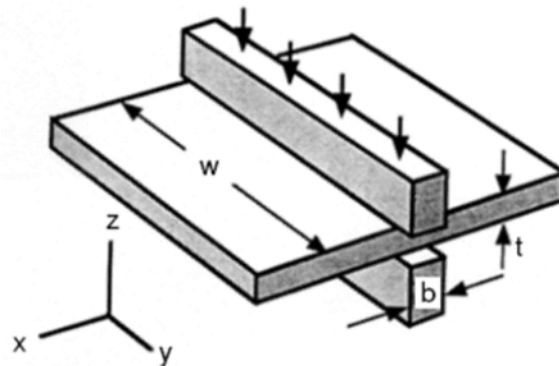
Otra alternativa es la de utilizar una platina que es mucho más ancha con relación a la luz de las mordazas (Figura 22). Aquí se elimina la fricción lateral, pero las deformaciones en y cerca de los extremos dejan de ser consecuentes con una deformación plana.

Figura 21. Primera alternativa para la prueba a compresión



HOSFORD, 2005, pag 71

Figura 22. Segunda alternativa para la prueba a compresión



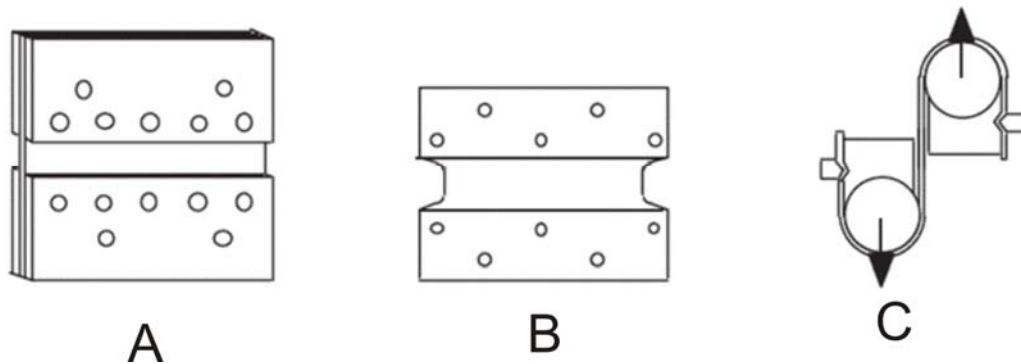
HOSFORD, 2005, pag 71

Para minimizar este efecto, se recomienda que la relación entre el ancho del material ( $w$  en la Figura 22) con respecto al ancho del cabezal ( $b$ ),  $\frac{w}{b}$ , sea de aproximadamente 8. También puede incrementarse la relación del ancho del cabezal con el espesor de la platina, aunque esto incremente el efecto de la fricción.

Los dos métodos anteriores simulan las condiciones plásticas que prevalecen durante el rolado de una platina, por lo que ayudan a obtener datos para el comportamiento anisotrópico del material.

4.3.2 Prueba por tensión. La deformación plana puede obtenerse en tensión con platinas que son muchos más anchas que largas. La Figura 23 muestra posibles arreglos de probetas y sujeciones.

Figura 23. Pruebas de deformación plana por tensión



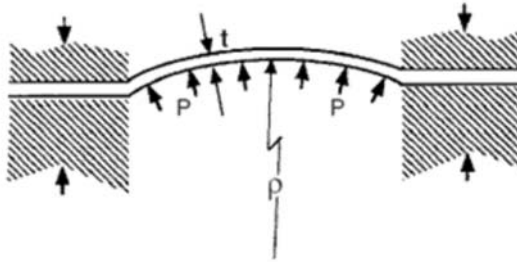
HOSFORD, 2005, pag 83

Tales pruebas evitan la complicación debida a la fricción de la deformación plana por compresión. Sin embargo, las regiones cerca de los filos carecen de restricciones necesarias para imponer una deformación plana. En el filo, la contracción que previene esfuerzos desaparece, por lo que el estado de esfuerzos está en tensión uniaxial. Se deben hacer correcciones para alejarse del flujo de deformación plana cerca de los ejes.

#### 4.4 PRUEBA DE TENSION BIAXIAL

También conocida como prueba de inflado hidráulico. Esta prueba permite que puedan alcanzarse deformaciones mucho mayores que pruebas a tensión uniaxial. Un montaje de este tipo de prueba se muestra en la Figura 24

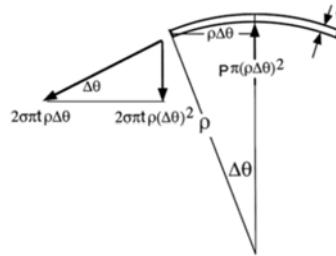
Figura 24. Esquema de una prueba de inflado hidráulico



HOSFORD, 2005, pag 85

En este caso, una platina de pruebas es colocada sobre un agujero circular, se agarra y se infla hacia afuera con una presión hidráulica que actúa de un lado. Considere el equilibrio de fuerzas sobre un elemento circular pequeño de radio  $\rho$  cerca del polo cuando  $\Delta\theta$  es pequeño ( Figura 25). Para un ángulo pequeño, el radio del elemento es  $\rho\Delta\theta$ . El esfuerzo,  $\sigma$ , actúa sobre un área de  $2\pi\rho t\Delta\theta$  y crea a su vez una fuerza tangencial igual a  $2\sigma\pi\rho\Delta\theta$ . Igualando las fuerzas verticales de la Figura 25, se obtiene el esfuerzo

Figura 25. Equilibrio de fuerzas cerca del domo



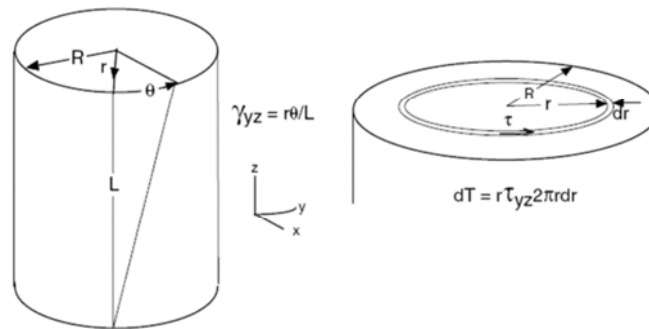
HOSFORD, 2005, pag 88

$$\sigma = \frac{P\rho}{2 \times t} \quad (46)$$

#### 4.5 PRUEBA DE TORSION

En este caso, la forma de la probeta permanece constante, por lo que no se presentaran dificultades como el abarrilamiento, el encuellamiento, además de no presentarse fricción. Por lo anterior, este tipo de prueba es utilizado para estudiar las relaciones de esfuerzo y deformación a altas deformaciones. Aquí cada elemento del material se deforma en cortante puro, como se muestra en la Figura 26.

Figura 26. Esquema de una prueba a torsión



HOSFORD, 2005, pag 90

Usando las convenciones que se muestran en la figura, La deformación unitaria cortante esta dado por

$$\gamma = \frac{r\theta}{L} \quad (47)$$

El esfuerzo cortante,  $\tau$ , no puede ser medido directamente del torque, ya que este depende de la deformación unitaria, que a su vez varia con la posición radial  $r$ . Para saber entonces como el esfuerzo puede obtenerse del torque, se considera el área infinitesimal mostrada en la parte derecha de la Figura 26, aquí el torque  $T$

se debe de la fuerza cortante aplicada sobre el área, y la distancia  $r$  desde el eje longitudinal

$$dT = r\tau 2\pi r^2 dr \quad \text{ó} \quad T = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr \quad (48)$$

Si se asume que el material es elástico lineal, puede aplicarse la ley de Hooke, la ecuación 48 puede simplificarse a

$$\tau = \frac{2 \times T}{\pi R^3} \quad (49)$$

Cuando el elemento no es elástico, no es posible saber como el esfuerzo cambia con la posición radial. Una manera de resolver esto es la de probar un tubo de pared delgada, en donde la variación del esfuerzo con respecto a  $r$  puede ignorarse. En este caso, la ecuación 48 puede aproximarse a

$$T = 2\pi r^2 \Delta r \tau \quad (50)$$

Donde  $\Delta r$  es el espesor de pared. Como los tubos de pared delgada tienden a colapsar a tensión, se pueden usar dos ejes de diámetro un poco diferente. La diferencia entre las dos curvas es la curva de torque-torcedura para un eje cuyo espesor de pared es la mitad de la diferencia de los diámetros.

La principal ventaja de las pruebas a torsión es la posibilidad de alcanzar altas deformaciones unitarias, incluso a altas temperaturas. Sin embargo, el material rota relativo a los ejes principales de esfuerzo, por lo que el historial de deformación unitaria cambia constantemente.

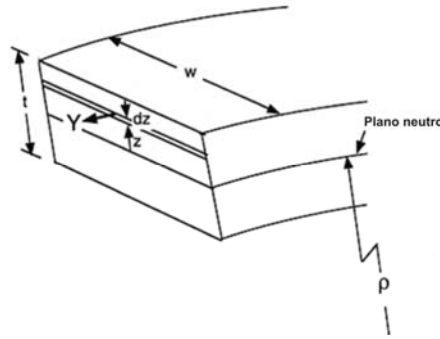
#### 4.6 PRUEBA DE FLEXION

Este tipo de pruebas son usadas en materiales que son muy frágiles o difíciles de maquinar en probetas. En flexión, el esfuerzo y la deformación varían con la ubicación. La deformación unitaria de ingeniería,  $e$ , varía linealmente con la distancia  $z$  desde el eje plano neutro, es decir

$$e = \frac{z}{\rho} \quad (51)$$

Donde  $\rho$  es el radio de curvatura en el plano neutro, tal y como se muestra en la Figura 27 . En base a esto, se llega que el momento flector total es:

Figura 27. Esquema de la variación del momento flector sobre un elemento



HOSFORD, 2005, pag 92

$$M = 2 \int_0^{t/2} \sigma w z dz \quad (52)$$

Si el elemento es elástico, se puede aproximar la ecuación 52 a

$$M = 2w \left( \frac{E}{\rho} \right) \int_0^{t/2} z^2 dz \quad (53)$$

## 5 HIPERELASTICIDAD

### 5.1 INTRODUCCION

Los materiales hiperelásticos son aquellos que pueden recuperar su forma original luego de una gran deformación. Este comportamiento es diferente a los que muestran los materiales cristalinos. El elastómero es un polímero flexible es donde las cadenas moleculares están entrecruzadas. La extensión elástica ocurre al estirar estos segmentos encadenados. Entre más de estos segmentos hallan, los segmentos de cadena serán más cortos y tendrán menos libertad de movimiento, por lo que el caucho se endurece.

Una vez que la carga que estira los segmentos es retirada, el elastómero regresa a su configuración inicial. El entendimiento de este comportamiento se basa en consideraciones estadísticas usando termodinámica básica, algunos modelos se muestran a continuación:

- La teoría básica de mecánica estadística se basa en la exanimación de la orientación aleatoria de las cadenas en la región Gaussiana de extensión

$$W = \frac{1}{2} NkT(\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 - 3) \quad (54)$$

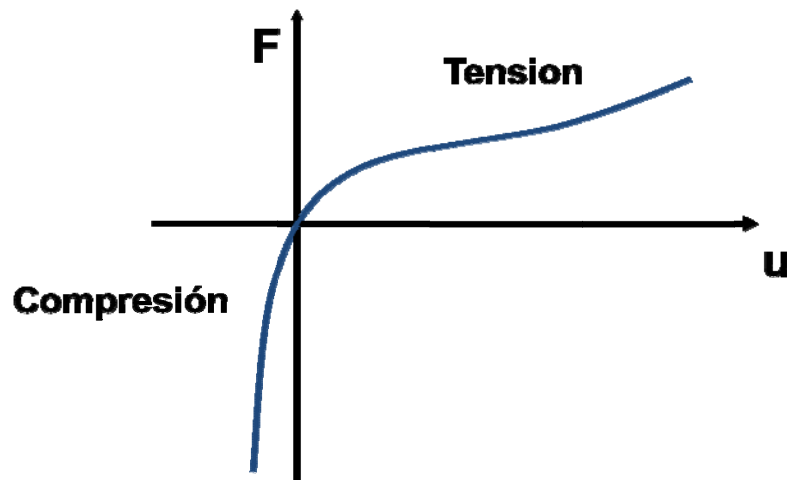
Donde  $N$  es el número de cadenas por unidad de volumen,  $k$  es la constante de Boltzman y  $T$  es la temperatura absoluta.

- Para grandes deformaciones, son necesarios modelos micromecánicos o métodos estadísticos no Gaussianos para considerar la extensibilidad finita de la cadena.
- Los modelos fenomenológicos son aquellos cuyo acercamiento se basa en la mecánica del medio continuo.

Entre las características macroscópicas más importantes de los elastómeros, cabe rescatar que pueden sufrir deformaciones recuperables de entre el 100% y 300%, además son materiales casi incompresibles, por lo que durante la deformación no hay cambios apreciables en el volumen. Estos materiales generalmente tienen un coeficiente de Poisson entre 0.48 y 0.5.

En la Figura 28 se muestra que en tensión, el caucho se suaviza para luego volver a endurecerse, mientras que en compresión el material se endurece inmediatamente.

Figura 28. Grafica típica de Fuerza-desplazamiento de un elastómero



ANSYS, 1999, pag 3-16

En el caso de materiales hiperelásticos, la relación entre esfuerzo y deformación está definida a través del potencial de energía de deformación unitaria ( $W$ ) que pueden expresarse por medio de las invariantes de deformación unitarias ( ) o razones principales de elongación ( ):

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\
I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\
I_3 &= \lambda_1^2 \times \lambda_2^2 \times \lambda_3^2
\end{aligned} \tag{55}$$

En el caso de un cubo de goma sometido a tensión biaxial, las razones principales de elongación son

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \lambda = \frac{L}{L_0} \\
\lambda_2 &= \lambda = \frac{L}{L_0} \\
\lambda_3 &= \frac{t}{t_0} = \frac{L_0 \times L_0}{L \times L}
\end{aligned} \tag{56}$$

## 5.2 DEFORMACION UNITARIA ELASTICA FINITA

Se dice que un material es hiperelástico si hay una función de potencial elástica  $W$  (o también llamada función de densidad de energía de deformación unitaria), la cual es una función escalar de uno de los tensores de deformación unitaria, que si se deriva con respecto a un componente de deformación, se puede determinar el esfuerzo para esa misma componente. Lo anterior se puede expresar en la siguiente ecuación:

$$S_{ij} = \frac{\delta W}{\delta E_{ij}} \tag{57}$$

Donde [E] son las deformaciones conocidas de Green-Lagrange y [S] son los segundos esfuerzos computados de Piola-Kirchoff. W esta en términos de energía por unidad de volumen.

### 5.3 HIPERELASTICIDAD ISOTROPICA

A continuación se muestran varios modelos de potencial de energía de deformación para la simulación de elastómeros que son casi incompresibles:

#### 5.3.1 Neo-Hookean

La forma de la energía potencial de deformación en este caso es:

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (58)$$

Donde:

- $\mu$  es el modulo inicial de cortante del material
- $d$  es el parámetro de compresibilidad del material
- $J$  es la razón volumétrica

$$J = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \quad (59)$$

Desde el punto de vista del cálculo, se utiliza el modulo volumétrico inicial  $K$  en lugar de  $d$

$$K = \frac{2}{d} \quad (60)$$

### 5.3.2 Mooney-Rivlin

Para este modelo, la función polinomial está dada por

$$W = \sum_{k+l=1}^N a_{kl} (I_1 - 3)^k \times (I_2 - 3)^l + \frac{1}{2} \times K (I_3 - 1)^2 \quad (61)$$

Donde:

- $a_{kl}$  son las constantes de los nueve parámetro de la relación Mooney-Rivlin
- $K$  es el modulo volumétrico
- $I_n$  son las invariantes de deformación

$$K = \frac{2(a_{10}+a_{01})}{(1-2\nu)} \quad (62)$$

Para dos constantes, el modelo genera la siguiente función

$$W = a_{10}(I_1 - 3) \times a_{01}(I_2 - 3) + \frac{1}{2} \times K (I_3 - 1)^2 \quad (63)$$

### 5.3.3 Ogden

En esta forma, el potencial puede describirse de la siguiente forma:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k} (J - 1)^{2k} \quad (64)$$

Donde:

- $N, \mu_i, \alpha_i, d_k$  son constantes del material

#### 5.3.4 Blatz-Ko

Esta opción se utiliza para elastómeros que son compresibles, donde la función es

$$W = \frac{G}{2} \left( \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right) \quad (65)$$

Donde el modulo a cortante inicial  $G$  es

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (66)$$

## 6 ANALISIS NO LINEAL

En un análisis lineal, se asume que los desplazamientos son linealmente dependientes de las cargas aplicadas, y que el comportamiento de la estructura es completamente reversible. Esto implica que las soluciones para varios casos de carga pueden ser superimpuestos. En muchos casos de ingeniería, sin embargo, el comportamiento de la estructura puede depender de la historia de carga o puede resultar en deformaciones que van más allá del límite elástico.

Para tales problemas no lineales, el usuario debe considerar con cuidado como acercarse al análisis, como modelar el problema por medio de elementos finitos y el uso de resultados del análisis.

La principal característica del análisis lineal es en que todas las cargas pueden ser aplicadas instantáneamente y la historia de carga es irrelevante. En otras palabras, los desplazamientos son linealmente dependientes de las cargas y, si requiere, la solución puede ser escalada. En problemas no lineales, sin embargo, la historia de carga es usualmente importante las propiedades y cargas actuales sin escalar deben ser especificadas. Un análisis no lineal de elementos finitos involucra la solución de un sistema grande de ecuaciones no lineales.

Antes de discutir las consecuencias del análisis no lineal, es conveniente identificar los tres tipos de clasificaciones principales no lineales que han sido usados tradicionalmente en los problemas de ingeniería.

### 6.1 NO LINEALIDAD DEL MATERIAL

Aquí las relaciones constitutivas de esfuerzo-deformación son no lineales. Tales no linealidades del material son usualmente clasificadas dentro de tres categorías.

- Comportamiento independiente del tiempo tal como el comportamiento elasto-plástico de metales en donde la estructura es cargada más allá del punto de fluencia.
- Comportamiento dependiente del tiempo tales como el creep<sup>6</sup> de metales a alta temperatura en donde los efectos de variación esfuerzo-deformación con el tiempo es de interés y una ley de potencia para relaciones esfuerzo-deformación es usada por lo general.
- Comportamiento viscoplástico-viscoelástico en donde tanto los efectos de plasticidad y creep son exhibidos. Aquí el esfuerzo es dependiente en la rata de deformación y el comportamiento del material puede ser representado por una combinación de un resorte y un amortiguador.

## 6.2 NO LINEALIDAD DE LA GEOMETRIA

Esta ocurre cuando los cambios en la geometría de la estructura debida a su desplazamiento bajo carga son tomados en cuenta en el análisis de su comportamiento. El cambio en la geometría afecta tanto el equilibrio como la cinemática, esto es, la relación entre esfuerzo deformación. En geometría no lineal, las ecuaciones de equilibrio toman en cuenta la forma deformada, donde en el análisis lineal las ecuaciones de equilibrio siempre se basan en la forma original (sin deformación). Como consecuencia de esto, las relaciones de deformación y desplazamiento deban ser redefinidas para tomar en cuenta la nueva forma deformada de la pieza.

Debe notarse que desplazamientos grandes y pequeños, deformación o rotaciones son posibles, por lo que cuando se habla de geometría no lineal no siempre se habla de largos desplazamientos. En muchas estructuras de lamina delgada, por ejemplo, desplazamientos del orden del espesor de la platina causarn

---

<sup>6</sup> Fluencia en el tiempo, especialmente en casos de alta temperatura,

no linealidades geométricas. Más aun, grandes desplazamientos no siempre se asocian con grandes deformaciones.

### 6.3 NO LINEALIDAD DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA

Estas ocurren en la mayoría de los problemas de contacto, en donde dos superficies entran en contacto o se separan. Los desplazamientos y los esfuerzos de los cuerpos en contacto usualmente no son linealmente dependientes de las cargas aplicadas.

Este tipo de no linealidad puede presentarse incluso si se asume un comportamiento lineal del material y los desplazamientos son infinitesimales, debido al hecho de que el tamaño del área en contacto es usualmente no es linealmente dependiente de las cargas aplicadas, es decir, si se duplica la carga aplicada esto no necesariamente produce un desplazamiento doble.

Si se incluyen los efectos de la fricción en el análisis, entonces un comportamiento de deslizamiento se presentara en el área de contacto que presenta una no linealidad más compleja la cual es dependiente de la historia de carga.

En problemas reales, una combinación de las no linealidades mencionadas pueden ocurrir, por ejemplo, en problemas donde la relación entre el esfuerzo y la deformación son no lineales y la estructura sufre de grandes desplazamientos y deformaciones. Ejemplos de la combinación de no linealidades geométricas y de materiales son análisis de choques y de formado de metales.

La aplicación del método de elementos finitos a problemas no lineales usualmente involucra el reemplazo de una historia de carga no lineal por una secuencia de incrementos lineales o ligeramente no lineales. Esto implica que en vez de aplicar la carga completa en un paso, esta debe dividirse en incrementos de carga pequeños. Adicionalmente, es necesario realizar iteraciones en cada incremento

de carga para asegurar que la solución sea convergente y que el error de aproximación sea aceptablemente pequeño.

#### 6.4 PROCEDIMIENTOS NO LINEALES EN ELEMENTOS FINITOS

La principal estrategia es la de dividir la historia de carga en una serie de pasos de carga lineales. La combinación de incrementos de carga y procedimientos iterativos son usados por códigos FEA comerciales para llegar a la solución final. La robustez y la precisión de estos procedimientos de solución tienen una larga influencia en la confiabilidad de la solución.

En un análisis convencional de problemas elásticos lineales, el sistema de ecuaciones algebraicas lineales a solucionar por el computador pueden expresarse de la siguiente forma.

$$[K][u] = [F] \quad (67)$$

Donde  $[K]$  es la matriz de rigidez,  $[u]$  es el vector de desplazamientos y  $[F]$  es el vector de fuerzas externas que son aplicadas.

6.4.1 Método iterativo de Newton-Raphson. Este es un método numérico bien establecido para soluciones sistemas de ecuaciones no lineales. Funciona al asumir una solución de prueba, para luego mejorarla a usar la pendiente de la curva de carga-desplazamiento. La curva no lineal es aproximada por una serie de tangentes. La Figura 29 muestra una representación esquemática del método.

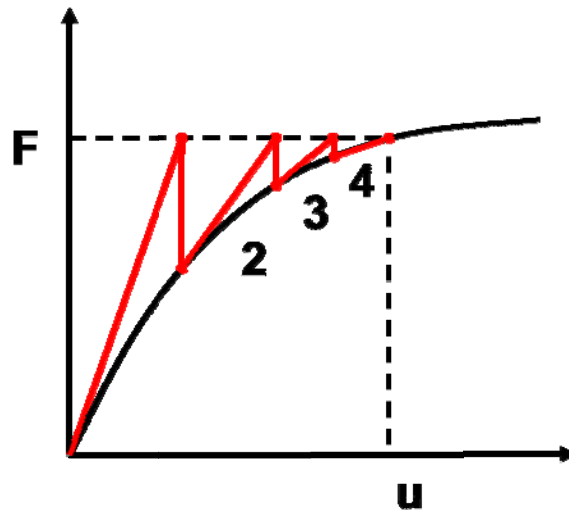
La experiencia ha mostrado que el método N-R puede ser aplicado exitosamente para análisis no lineales, siempre y cuando las dos condiciones siguientes se cumplan.

- La suposición inicial no está muy lejos de la solución exacta.
- La pendiente de la curva no cambia de signo.

Si estas condiciones no se cumplen, es posible que la solución no converja.

Desde que el método N-R necesita calcular la pendiente de la curva, es decir, la matriz de rigidez, esto puede convertirse en un gasto considerable en recursos computacionales si la pendiente debe actualizarse después de cada iteración. Sin embargo, si la pendiente se mantiene constante durante las iteraciones, una convergencia mas lenta se presentara, pero a un costo computacional. En la práctica, una mejor alternativa es la de dejar la pendiente constante por un numero de iteraciones antes de actualizarla. Esto se conoce como el método de Newton-Raphson modificado.

Figura 29. Método Newton-Raphson



ANSYS. 1999, pag 2-28

6.4.2 Procedimiento de incremento de carga. En este procedimiento, la carga total aplicada es dividida en pequeños incrementos y cada incremento es aplicado

individualmente. Al proveer de incrementos pequeños, el comportamiento del material puede asumirse lineal durante el incremento de carga, y una nueva matriz de rigidez puede ser usada en cada incremento. El historial de carga es entonces tratado como una serie de polilíneas.

De modo de que se satisfaga el equilibrio, se deben realizar iteraciones en cada incremento de carga para asegurar que las fuerzas desequilibrantes se mantengan dentro de una tolerancia especificada. El procedimiento termina cuando se alcanza la carga inicial y se satisface el equilibrio. La deformación total del cuerpo es la suma de las deformaciones asociadas a cada incremento de carga.

La matriz de rigidez calculada para cada incremento se conoce comúnmente como matriz de rigidez tangencial, es decir, la tangente de la curva de carga-desplazamiento. El procedimiento incremental es similar a la técnica matemática conocida como método de Euler.

6.4.3 Control de desplazamiento. En el procedimiento de incremento de carga, la solución es manejada por un control de carga, esto significa que la estructura solo se deforma por un solo incremento de carga a la vez. Esto no funciona cuando la tangente a la curva de carga-desplazamiento es casi horizontal, porque la carga debe permanecer constante o disminuir de modo de que se satisfaga el equilibrio. En tales problemas, el control de desplazamiento debe ser usado donde el desplazamiento de un nodo o conjunto de nodos está limitado a un valor pequeño. Esto permite a la solución a seguir el camino de carga correctamente.

6.4.4 Procedimiento iterativo. Es importante realizar un chequeo, en cada incremento de carga, para asegurarse que se cumpla el equilibrio, antes de proceder al siguiente incremento. Esto se realiza al calcular las fuerzas desequilibrantes dentro de la estructura, y reduciéndolas a un valor despreciable.

6.4.5 Convergencia de soluciones. Esta se alcanza si se satisface el equilibrio, es decir, cuando las fuerzas desequilibrantes no existen o son despreciables. Típicamente, la convergencia se chequea al revisar la magnitud de la norma del vector de fuerzas desequilibrantes.

Si las fuerzas residuales no son más pequeñas que la tolerancia especificada, entonces se requerirá de otra iteración para corregir el vector de desplazamiento. La fuerza residual puede ser usada para obtener una corrección del desplazamiento el cual puede ser usado para obtener un nuevo valor mejorado del vector de desplazamiento.

## 6.5 ANALISIS DINAMICO

Los análisis dinámicos, del modo en que son aplicados en elementos finitos, involucran cargas y sus correspondientes respuestas estructurales que varían con el tiempo. Los análisis de respuesta de tiempo y vibración pueden dividirse en las siguientes 3 categorías. (Adams,1999 , pag. 72)

- Análisis de frecuencia natural o modal
- Análisis de respuesta de frecuencia
- Análisis de respuesta transitoria.

La primera categoría involucra la vibración libre de un sistema dinámico. Este análisis caracteriza el sistema sin considerar fuerzas externas y sirve para encontrar sus propiedades dinámicas. Las dos siguientes se conocen como análisis de respuesta forzada, los cuales involucran sistemas bajo funciones de cargas aplicadas externamente, siendo estas cargas dependientes del tiempo o de la frecuencia. En el caso actual, es de interés trabajar con el análisis de respuesta transitoria.

6.5.1 Ansys-Lsdyna. Es un programa en el cual es posible resolver problemas transitorios altamente no lineales, usando el método de integración explícita. Algunas aplicaciones industriales que tiene este software son las siguientes

- Pruebas de impacto.
- Embutición
- Hidroformado.
- Rolado
- Extrusión
- Estampado
- Maquinado
- Taladrado
- Propagación de ondas sónicas

6.5.2 Método de integración Implícito. Es el método de integración más común en los paquetes de elementos finitos actuales. En este método, la solución de la ecuación 68 tiene las siguientes características:

$$[M]\{a\} + [C]\{v\} + [K]\{x\} = [F] \quad (68)$$

- Usualmente no se incluyen los efectos de la matriz [C] y [M].
- Los desplazamientos evaluados en el tiempo  $t + \Delta t$  es

$$\{u_{t+\Delta t}\} = [K]^{-1}\{F_{t+\Delta t}^a\} \quad (69)$$

- Los problemas lineales siempre son estables mientras la matriz [K] es lineal y pueden tomarse pasos largos de tiempo ( $\Delta t$ ).

- Para problemas no lineales se obtiene la solución mediante aproximaciones lineales, se requiere de la inversión de la matriz  $[K]$ , se necesita de pasos pequeños de tiempo para alcanzar convergencia, la cual no se puede garantizar si el problema es altamente lineal.

6.5.3 Método de integración explícito. Es el usado por Ansys-Lsdyna y resuelve la ecuación (68) de la siguiente manera

Las aceleraciones se evalúan en el tiempo  $t$  de la siguiente forma

$$\{a_t\} = [M]^{-1}([F_t^{ext}] - [F_t^{int}]) \quad (70)$$

Donde  $[F_t^{ext}]$  es el vector de fuerzas externas y  $[F_t^{int}]$  es el vector de fuerzas internas dado por:

$$F_t^{int} = \sum \left( \int_{\Omega} B^T \sigma_n d\Omega + F^{hg} \right) + F^{contacto} \quad (71)$$

Donde  $F^{hg}$  es la fuerza que resiste el hourglassing<sup>7</sup> y  $F^{contacto}$  es la fuerza de contacto. Luego las velocidades ( $v$ ) y los desplazamientos ( $u$ ) se calculan de la siguiente forma

$$\left\{ v_{\frac{\Delta t_t + \Delta t_t + \Delta t}{2}} \right\} = \left\{ v_{\frac{\Delta t_t - \Delta t_t + \Delta t}{2}} \right\} + \{a_t\} \Delta t_t \quad (72)$$

$$\{u_{t+\Delta t}\} = \{u_t\} + \{a_t\} \Delta t_t \quad (73)$$

---

<sup>7</sup> Ver definición en la página 78

Finalmente, la geometría es actualizada al adicionar los incrementos de desplazamiento (ecuación 73) a la geometría inicial

$$\{x_{t+\Delta t}\} = \{x_0\} + \{u_{t+\Delta t}\} \quad (74)$$

6.5.4 Limite de estabilidad. Para la integración implícita del tiempo, se tienen las siguientes características de estabilidad

- Para problemas lineales, el paso de tiempo puede ser bastante grande (siempre es estable).
- En el caso de problemas no lineales, el paso de tiempo puede volverse muy pequeño si hay problemas de convergencia.

En la integración explícita, por su parte:

- Siempre es estable mientras el paso de tiempo es más pequeño que un valor crítico

$$\Delta t \leq \Delta t^{crit} = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (75)$$

Donde  $\omega_{max}$  es la frecuencia natural circular máxima, definida por:

$$\omega_{max} = 2 \times \frac{c}{l} \quad (76)$$

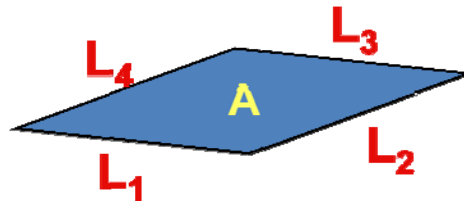
En el caso de elementos tipo Shell (Figura 30) los valores de  $c$  y  $l$  son

$$l = \frac{A}{\max(L_1, L_2, L_3, L_4)} \quad (77)$$

==

(78)

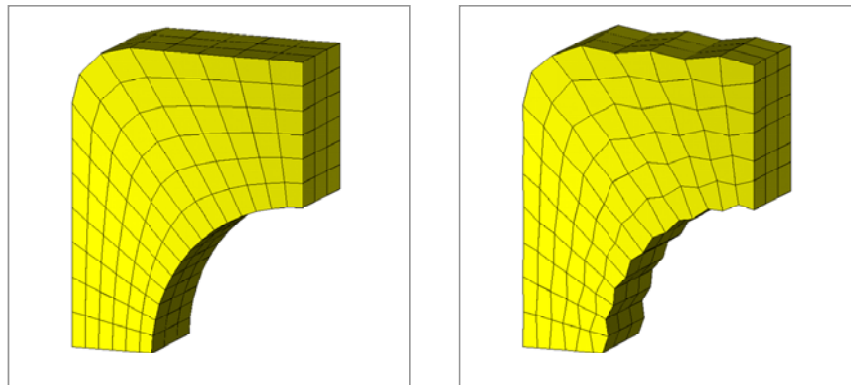
Figura 30. Elemento tipo shell



ANSYS,1999, pag 1-43

6.5.5 Hourglassing. Es un modo de deformación de cero energía que oscila a una frecuencia más alta que la respuesta global de la estructura. Modos de hourglassing resultan de un estado estable matemático que no es posible físicamente. Ellos típicamente no tienen rigidez y dan una apariencia de zigzag en la deformación de la malla.

Figura 31. Deformaciones debidas a hourglassing



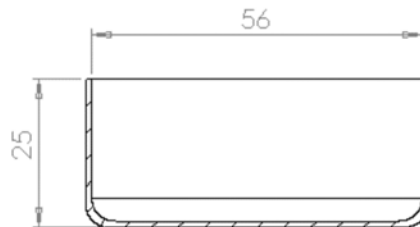
ANSYS,1999, pag 2-26

## 7 SIMULACIONES

### 7.1 EMBUTICION PROFUNDA CILINDRICA

El objetivo es el de simular el comportamiento de la chapa a partir de valores teóricos, para luego iterar los parámetros que permitan adquirir el producto. El elemento a manufactura se muestra en la Figura 32.

Figura 32. Producto a embutir



El material de la chapa es aluminio, de 1 mm de espesor, cuyas propiedades plásticas son tomadas de un ejercicio numérico y se muestran en la siguiente

Tabla 8. Propiedades de la chapa

Propiedad	Valor(unidades)
Modulo de elasticidad	100 (kN/mm <sup>2</sup> )
Razón de Poisson	0.35
Densidad	2.73e-6(kg/ mm <sup>2</sup> )
Coefficiente de resistencia <i>k</i>	0.598
Coefficiente de endurecimiento( <i>n</i> )	0.216

ANSYS, 2003, pag 10-19

Por medio de la Tabla 2, se tiene que el diámetro de chapa a recortar es:

$$D = \frac{d}{0.6} = \frac{56}{0.6} = 93$$

Para saber si se requiere del uso de un sujetador para la chapa, se usa la ecuación 1

$$D - d \leq 20 \times e$$

$$37 \leq 20$$

Como la igualdad no se cumple, se concluye que la operación requiere de un sujetador. Luego se calcula el radio de la matriz y del punzón en base a las siguientes ecuaciones

$$R = 0.8 \times \sqrt{(D - d) \times e}$$

$$R = 0.8 \times \sqrt{(D - d) \times e} = 4.9 \text{ mm}$$

$$r = 4 \times e = 4 \text{ mm}$$

A continuación, se calcula la tolerancia que debe haber entre el punzón y la matriz

$$u = e + 0.02 \times a \times \sqrt{10 \times e} \quad \text{Para aluminio}$$

$$u = 1.14$$

Según la Tabla 4, en el caso del aluminio, la velocidad de embutición es 500 mm/s. Para calcular la presión de la prensa chapas, se sabe de la Tabla 5 que la presión específica para el aluminio es

$$P = 8 \text{ kg/cm}^2$$

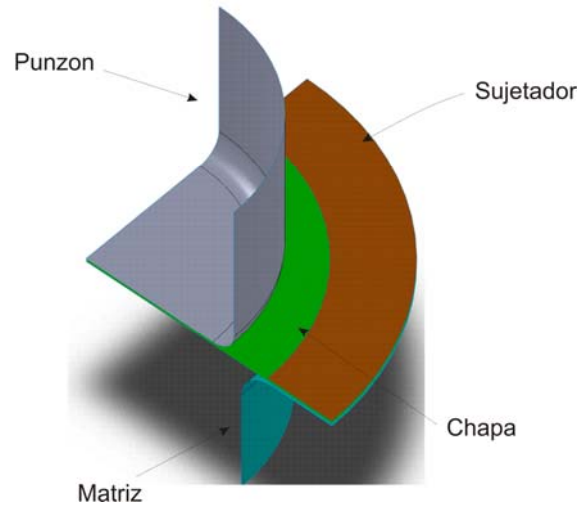
Con lo que se obtiene

$$P_p = 0.785 \times (D^2 - d^2) \times p$$

$$P_p = 0.785 \times (9.3^2 - 5.6^2) \times 8 = 346.21 \frac{kg}{cm^2} = 3.46 \frac{kg}{mm^2}$$

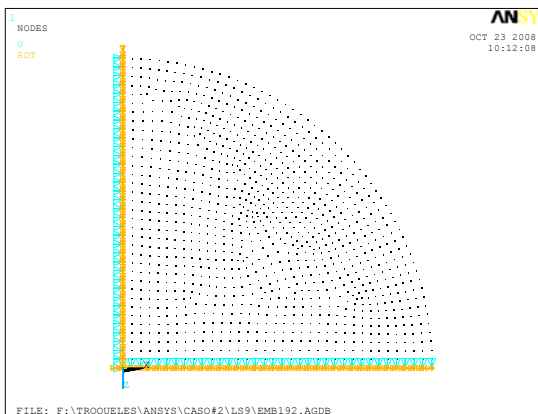
Paso siguiente, se realiza el modelo CAD del herramental (Figura 33), con el fin de realizar el modelo de elementos finitos.

Figura 33. Modelo CAD del troquel



Aprovechando las características geométrica y de carga del problema, se usa un cuarto del troquel para su representación (Figura 35) con los elementos mostrados en la Tabla 9. Este modelo usa condiciones de simetría para la chapa, restringiendo los nodos que harían parte de la chapa completa (Figura 34)

Figura 34. Condiciones de frontera de la chapa



En cuanto a los demás elementos, se asumen que son rígidos (en comparación a la chapa), facilitando así el cálculo. Las condiciones de frontera para cada elemento son los siguientes:

- Punzón: se restringen todos las rotaciones y los desplazamientos excepto en dirección Y (dirección en donde actúa la velocidad de embutición).
- Sujetador: se restringen todos las rotaciones y los desplazamientos excepto en dirección Y (dirección en donde actúa la fuerza de sujeción).
- Matriz: se le restringen todas las rotaciones y los desplazamientos.

Figura 35. Modelo discretizado del troquel

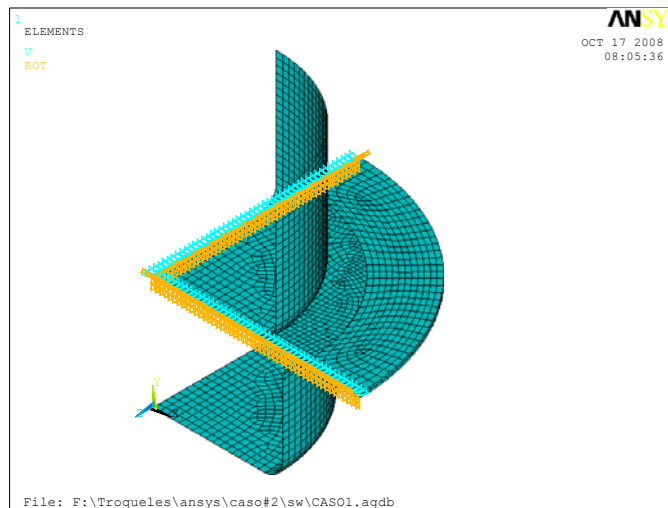


Tabla 9. Elementos definidos para el modelo

Parte	Nombre	Elemento	Formulación	Areas
1	Chapa	Shell163	Belytschko-Wong-Chiang	1
2	Punzón	Shell163	Belytschko-Tsay	8,9,10
3	sujetador	Shell163	Belytschko-Tsay	2
4	Matriz	Shell163	Belytschko-Tsay	3,4,5,6,7

La formulación Belytschko-Wong-Chiang el cual se utiliza para la chapa (material flexible) tiene las siguientes características

- Permite establecer que el material cambie de espesor en relación a los esfuerzos que sufre la pieza.
- Tiene un costo computacional 25% mayor que el Belytschko-Tsay.
- Es el más robusto para grandes deformaciones.

Los elementos con formulación Belytschko-Tsay se usaron para los materiales rígidos por la gran velocidad en la que pueden calcularse.

El paso siguiente es el de definir las condiciones de frontera de los elementos que actúan sobre la chapa. Para este fin, se utiliza una función coseno para simular las velocidades del punzón, ya que se requiere que este inicie y termine con velocidad cero, además se necesita que alcance el valor teórico sobre el cual puede trabajar sobre una chapa de aluminio.

Figura 36. Grafica de la velocidad del punzón

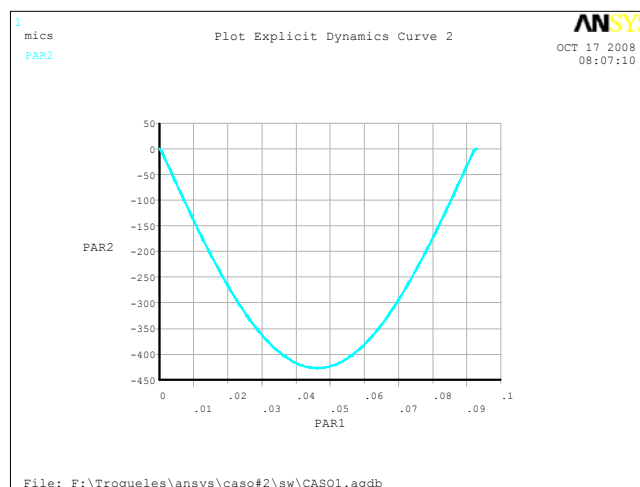


Figura 37. Grafica del desplazamiento del punzón

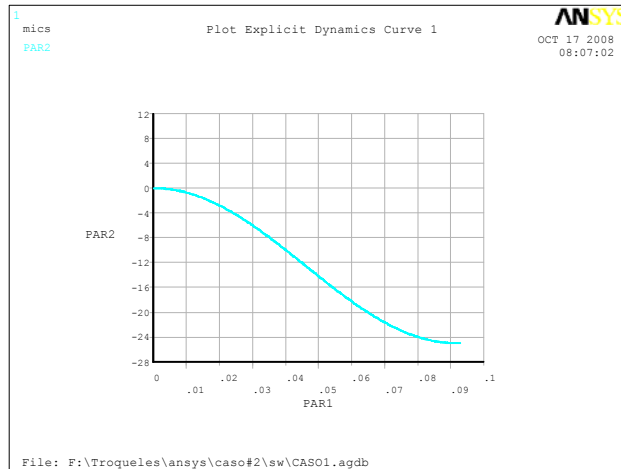
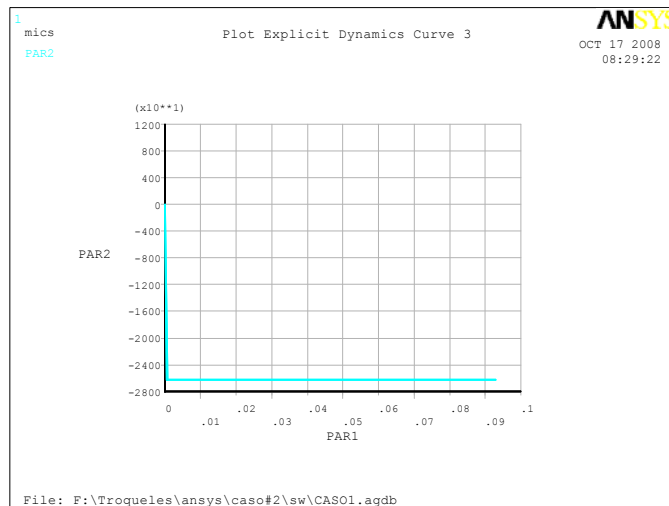


Figura 38. Grafica de la fuerza ejercida por el sujetador



Con lo anterior establecido, se procede a resolver el problema, dando como resultado los esfuerzos equivalentes mostrados en la Figura 39. Aquí se tiene la escala hasta 0.46 GPa (si se el material se trata de un aluminio 2014-T6, cuya

resistencia ultima es de 469 MPa) cerca del esfuerzo máximo del material, con el objeto de comprobar si es posible la operación sin destruir la pieza.

En la figura se observan áreas grises en donde se ha superado el valor de la escala, indicando la ruptura del material, esto indica que usando las propiedades expuestas, el cálculo teórico no predice adecuadamente el comportamiento del material, por lo que con los parámetros establecidos, no puede construirse la pieza de un solo golpe.

Mediante la misma simulación, es posible establecer cuál será la profundidad máxima a la cual se puede realizar la operación, cuyo valor es de 16.5 mm en lugar de 25 mm con el espesor actual de chapa (Figura 39)

Figura 39. Esfuerzos equivalentes en la chapa

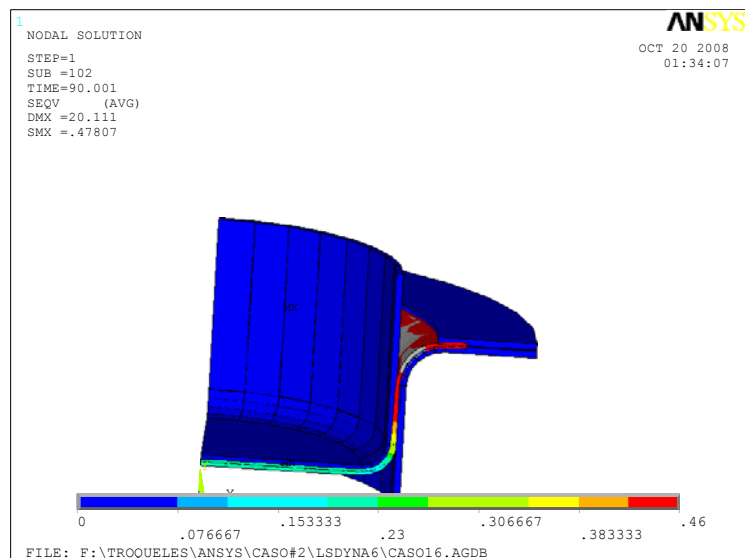
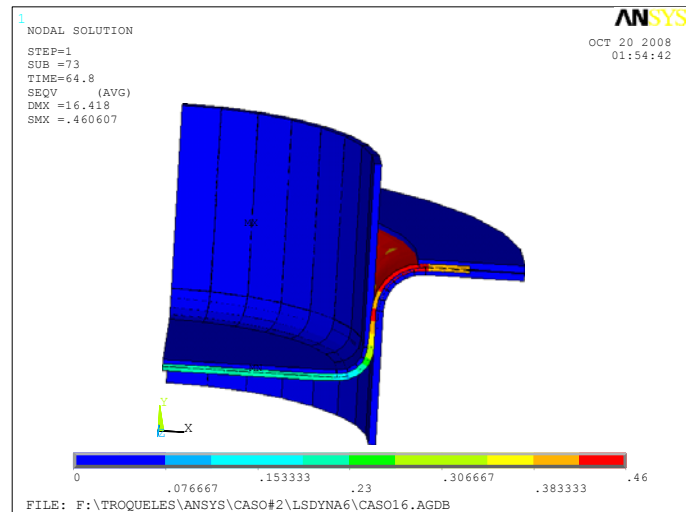


Figura 40. Altura máxima de embutición



### 7.1.1 Cálculo de la fatiga en el punzón

Uno de los aspectos más importantes de la vida útil del troquel, son los ciclos de operación que puede realizar el punzón. Para lograr esto, se requiere de las fuerzas de reacción que se originaron en la interface del contacto durante la operación.

Para realizar esto, se debe volver a realizar la simulación anterior, con la diferencia de utilizar un punzón flexible en lugar de uno rígido, para conocer cuál es el esfuerzo que se genera en este (Figura 41). Usando las mismas condiciones de frontera del numeral anterior, se obtienen los esfuerzos equivalentes mostrados en la Figura 42.

Figura 41. Nuevo modelo de embutición cilíndrica

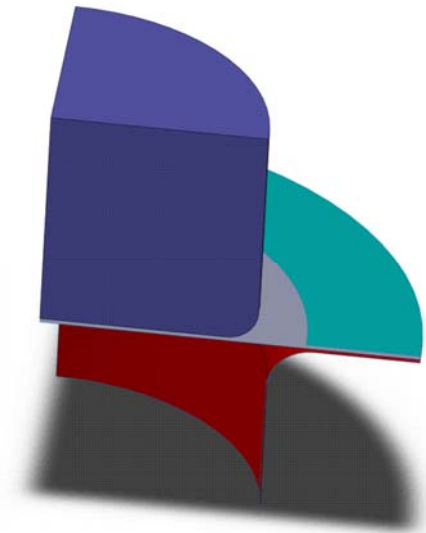
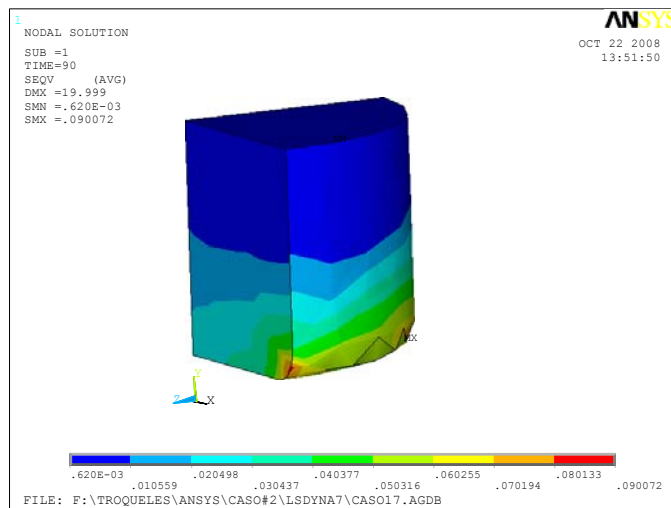
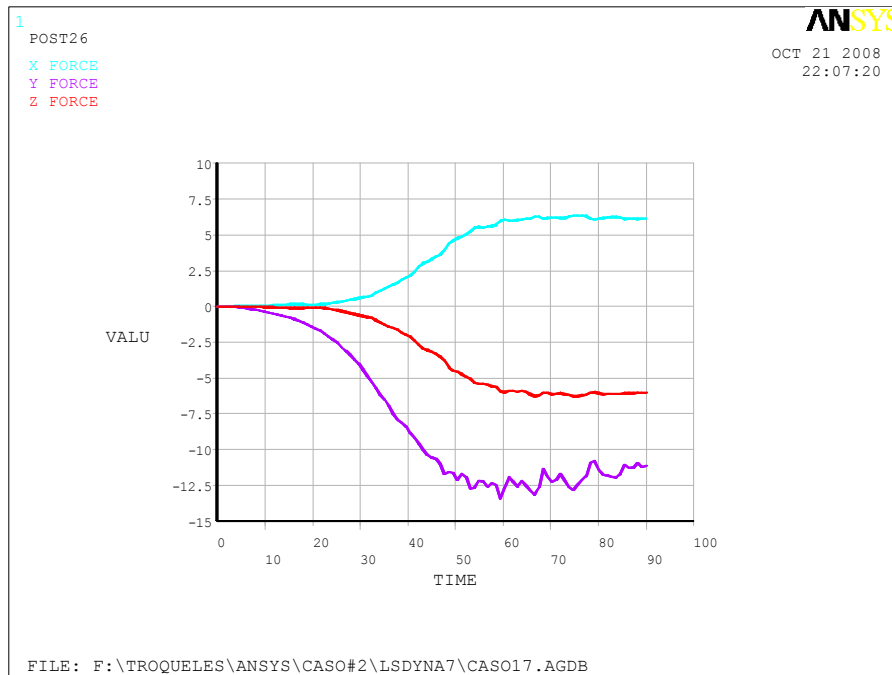


Figura 42. Esfuerzos equivalentes en el punzón.



Luego del análisis, se obtienen las fuerzas de reacción en la interface del contacto entre el punzón de la chapa, para luego utilizar los valores más altos en el análisis de fatiga. Las componentes en X, Y y Z se grafican en la Figura 43.

Figura 43. Fuerzas de reacción en el contacto



Las fuerzas en X y Z son las resultantes de las restricciones de simetría de la geometría (se utilizo un cuarto del modelo) por lo que desde el punto de vista estatico, estas fuerzas se anulan, pero estas fuerzas deforman el material, por lo que se utilizaran para el cálculo. La fuerza en dirección Y es la cuarta parte (por simetría) de la fuerza necesaria para realizar la embutición, por lo que se debe tener cuidado al utilizarla en la fatiga.

Tabla 10. Fuerzas de reacción sobre el punzón

Componente	Valor (N)
X	6300
Y	-13000
Z	-6300

Con las fuerzas de reacción, se selecciona el modelo de fatiga de Goodman para tomar en cuenta mejor los efectos a compresión y se establece el caso de carga. En este caso, el esfuerzo va de cero al máximo a compresión (1 en la Figura 44).

Luego de solucionar el problema, se obtiene un factor de seguridad mínimo de 1.97, donde el factor de seguridad ( $F_s$ ) se define como:

$$F_s = \frac{S_{limite}}{\sigma} \quad (78)$$

Donde  $S_{limite}$  es el esfuerzo de fluencia del material y  $\sigma$  es el esfuerzo actual a la que está sometida la pieza.

Figura 44. Caso de carga del punzón

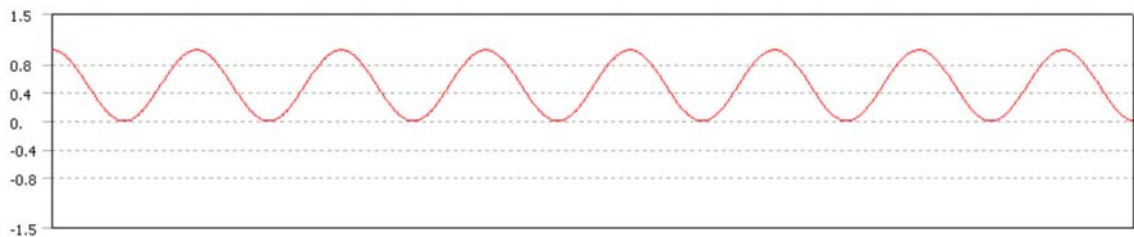
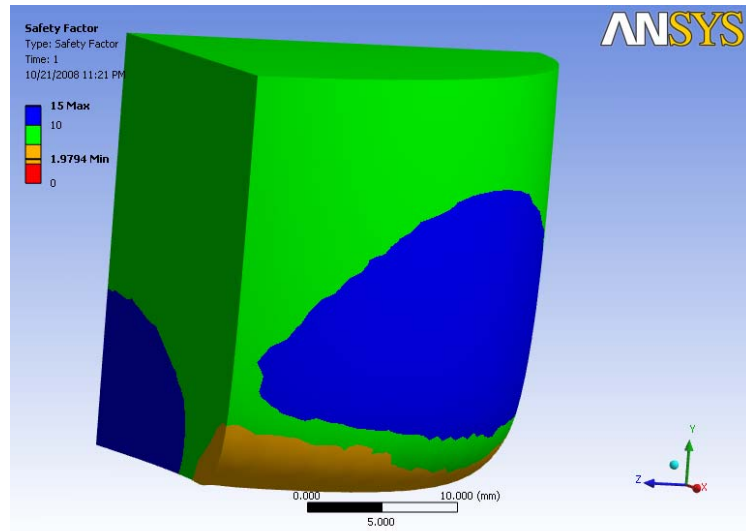


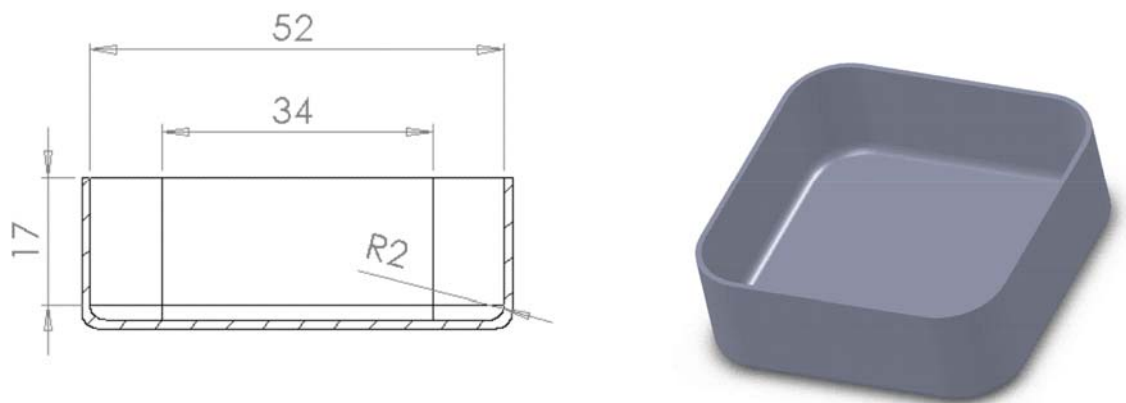
Figura 45. Factor de seguridad del punzón



## 7.2 EMBUTICION PROFUNDA RECTANGULAR

En este caso, la pieza que se desea manufactura se muestra en la Figura 46. Desde el punto de vista teórico, solo se tiene una metodología para realizar el desarrollo de la chapa, el cual se indica a continuación:

Figura 46. Embutición cuadrada



- Se parte del fondo cuadrado de la pieza de lado 50 x 50
- Luego se adicionan la longitudes L y 17, como se muestra en la Figura 47.
- Se determina el diámetro D de un cilindro imaginario de diámetro 20, altura 17 y radio de fondo 2mm
- A partir de la Figura 8, se calcula este diámetro D, el cual es

$$D = \sqrt{d^2} + 4 \times d \times (h + 0.57 \times r) = 43$$

- El límite de los chaflanes se determinan al restar el diámetro D la razón g

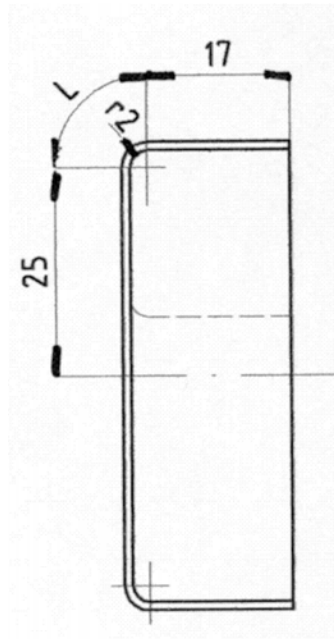
$$g = \frac{D}{32} = \frac{43}{32} = 1.3437$$

- El último paso consiste en unir las caras mediante el angulo Rz

$$Rz = \frac{91.8 - 34}{2} = 28.9$$

Los ítems anteriores se representan gráficamente en la Figura 48.

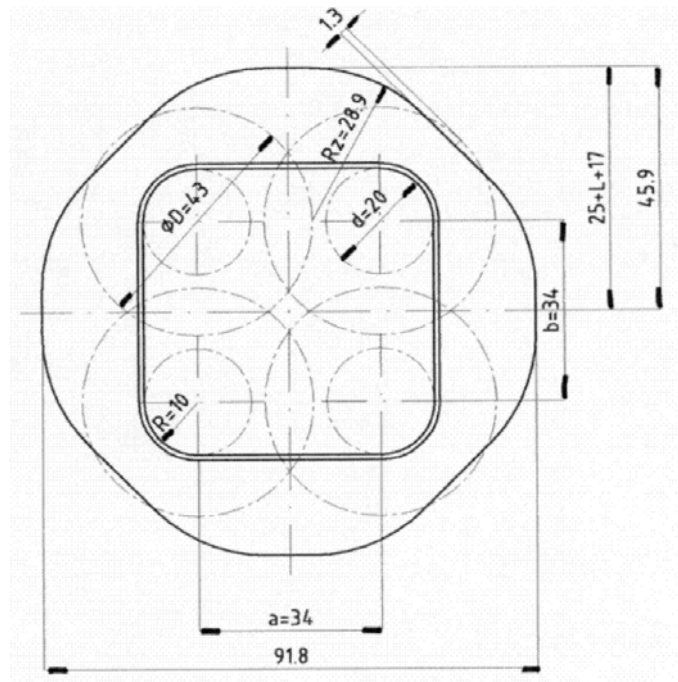
Figura 47. Distancias para el desarrollo



Fuente: ASCAMM, 2004 @

Una vez con el modelo CAD (Figura 49), se procede a realizar el mismo procedimiento del numeral anterior, obteniendo el resultado mostrado en la Figura 50. Aquí se observa que el desarrollo obtenido teóricamente es demasiado corto, impidiendo que el sujetador pueda mantener la forma de la chapa.

Figura 48. Desarrollo de la chapa



ASCAMM, 2004 @

Figura 49. Modelo CAD de la embutición rectangular

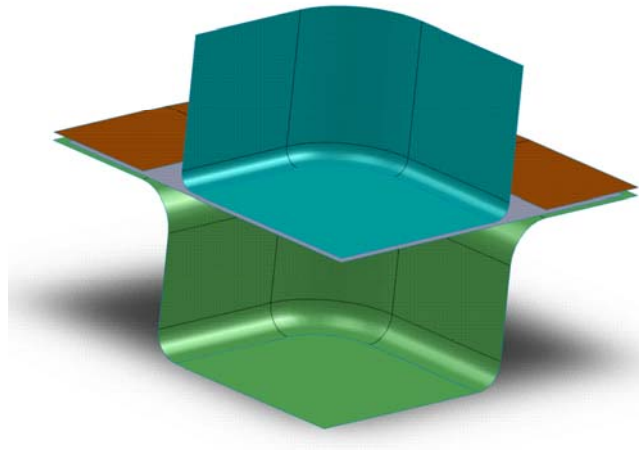
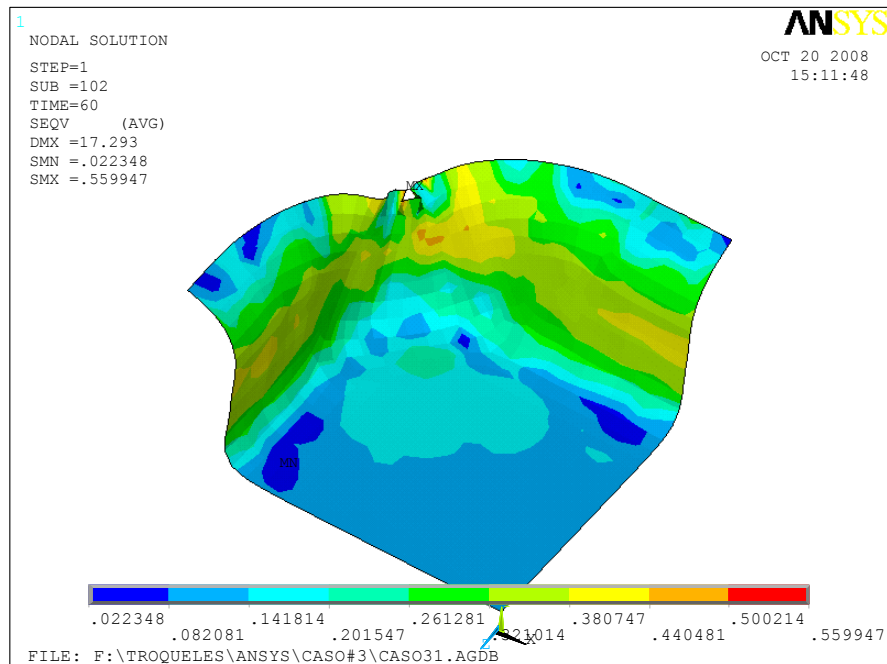


Figura 50. Esfuerzos equivalentes de la embutición rectangular



## 8 CONCLUSIONES

Existen diferentes maneras de calcular un mismo dato y todas ellas pueden ser correctas y satisfactorias. La razón de todo ello la podemos encontrar en que los valores reales hallados casi nunca serán exactos y en la mayoría de casos su exactitud dependerá de factores tales como el material, el herramental y en cualquier caso, casi siempre deben ser corregidos. He aquí la posibilidad económica de la simulación, ya que pueden ser probados diferentes parámetros de forma rápida para obtener la pieza requerida sin necesidad de incurrir en sobrecostos de manufactura.

Sin duda la parte más importante del análisis se basa en los datos obtenidos de material, ya que la naturaleza de estos datos permite:

- Establecer el rango de acción de la simulación: aunque es posible extrapolar, fácilmente puede llegarse a errores considerables y como consecuencia la invalidación de los datos.
- Identificar el tipo de carga que puede simularse: las pruebas son importantes ya que dependiendo del tipo de prueba se tienen relaciones de esfuerzo-deformación unitaria diferentes y por lo tanto, un modelo de cálculo diferente.
- Cuando se elige el modelo para representar el material que sufre plasticidad, es de mayor importancia elegir aquel tipo que represente mejor el tipo de carga y deformación (isotrópico o cinemático), en lugar de la exactitud de los datos del material probado.

Al igual que en las simulaciones estáticas, se debe tener cuidado en las unidades seleccionadas para definir el modelo, ya que de estas unidades depende el tiempo de solución sea en segundos o milisegundos.

El método de integración explícita tiene la ventaja de poder realizar simulaciones dinámicas complejas con gran efectividad en cuanto al costo computacional y a las

posibilidades de uso, sin embargo, solo puede ser usado en eventos de muy corta duración, debido al pequeño intervalo de tiempo requerido para la convergencia del problema.

El uso del tamaño de elementos difiere un poco del usado en el método implícito, ya que aunque están disponibles, los elementos triangulares afectan el resultado notablemente. Además, el uso de elementos pequeños debe reducirse al límite, ya que esto afecta el cálculo del paso de tiempo mínimo para que la solución converja.

La posibilidad de programar en ANSYS permite realizar el mismo procedimiento rápidamente para diferentes tipos de troquel, ya que cada uno posee los mismos cuatro elementos: la chapa, el punzón, el sujetador y la matriz.

Durante las simulaciones, se lograron identificar los siguientes ítems para caracterizar el comportamiento de la matriz y de los componentes del troquel:

- Cambio en el espesor de la chapa
- Fuerzas de reacción en las interfaces de contacto definidas
- Coeficientes de fricción estáticos y dinámicos en los contactos de piezas
- Calculo de fatiga a partir de fuerzas de reacción del proceso
- Especificaciones de las condiciones de frontera (Velocidades, fuerzas) en el tiempo.
- Recuperación elástica del material.
- Esfuerzos y deformaciones en los componentes del troquel.

## BIBLIOGRAFIA

ADAMS, Vince, ASKENAZI, Abraham. Building better products with finite element analysis. Nuevo México, EUA. Primera edición. OnWord press. 1999. ISBN 1-566690-160X

ANSYS. Explicit dynamics with Is-dyna. Workshop for release 7.1. Segunda edición. 2003

-----, -----, Training manual for release 5.5. Segunda edición. 1999

-----, Advanced structural nonlinearities Training manual for release 7.0. Segunda edición. 2003

-----, Advanced structural nonlinearities Workshop for release 7.0. Segunda edición. 2003

-----, Theory reference for ansys and ansys workbench. Ansys release 11. 2007. Disponible para clientes ansys en: <http://www.ansys.com>

ASCAMM. Tecnología de matrices.[citada el 10 de julio de 2008].Disponible en <http://josemguerrero.iespana.es/>

BECKER, A. Understanding non-linear finite element analysis through illustrative benchmarks. Glasgow, Escocia. Nafems. 2001. ISBN 1-874376-35-2

BOLJANOVIC, Vukota. Sheet metal forming processes and die design. Nueva York, EUA. Industrial press. 2004. ISBN 0-8311-3182-9

HIBBELER, R. Mecánica de materiales. Juarez, Méjico. Tercera edición. Editorial prentice hall. 1997. ISBN 0-13-256983-3

HILL, R. The mathematical theory of plasticity. Oxford, Inglaterra. Primera edición. Oxford press.1950. ISBN 1183517247

HOSFORD, William. Mechanical behavior of materials. Detroit, EUA. Primera edición. Cambridge university press. 2005. ISBN 0-521-84670-6

MARCINIAK, Z., DUNCAN, J., HU, S. Mechanics of sheet metal forming. Oxford, Inglaterra. Segunda edición. Editorial Butterworth-Heinemann. 2002. ISBN 0-7506-5300-0

OEHLER, Gerhard. Herramientas de troquelar, estampar y embutir. Barcelona, España. Edición española. Editorial Gustavo Gili. 1977. ISBN 84-252-0640-5

ROSSI, Mario. Estampado en frio de la chapa. Madrid, España. Novena edición. Editorial dossat.1979

SCHULER. Metal forming handbook. Gotinga, Alemania. Editorial Springer. 2002 ISBN 3-540-61185-1

SUCHY, Ivana. Handbook of die design. New york, EUA. Segunda edición. McGraw-hill. 2006 ISBN 0-07-146271-6

WU, Han-Chin. Continuum mechanics and plasticity. Boca Raton, EUA. Primera edición. CRC press. 2000. ISBN 1-58488-363-4

## ANEXOS

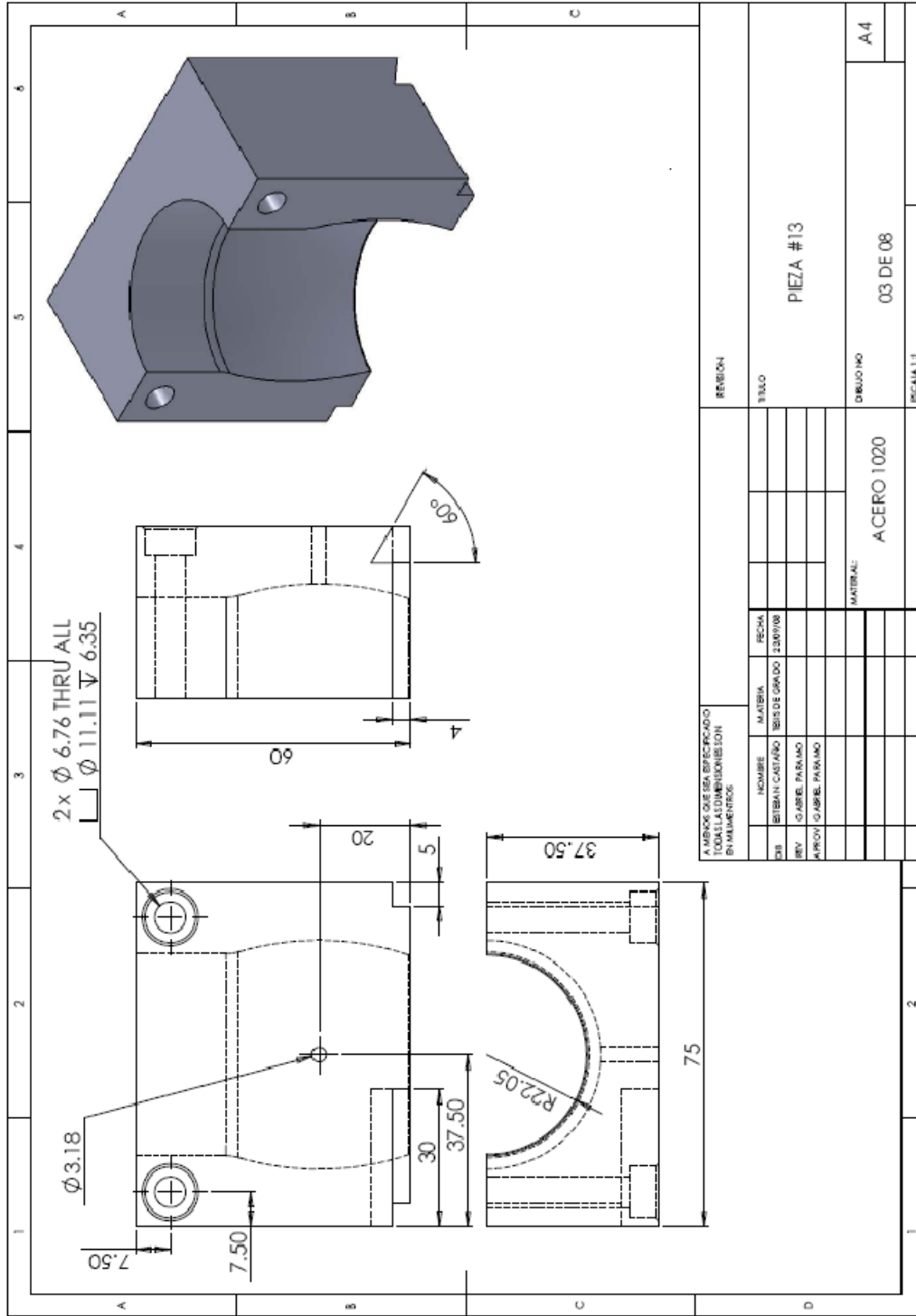
Anexo A. Planos de ensamble de un troquel para el desarrollo de embuticiones por goma

1		2		3		4		5		6	
A		B		C		D					
ITEM	Parte	Cantidad	Plano	MATERIAL							
1	base_inferior_v2	1	05	ACERO 1020							
2	embulicion	1		ALUMINIO							
3	Punzon_interno	1	08	ACERO 1020							
4	fibroflex	1		ACERO 1020							
5	Base	1	07	ACERO 1020							
6	Guia	2	06	ACERO 1020							
7	Base2	1	07	ACERO 1020							
8	arandela1	1	08	ACERO 1020							
9	buje	2	06	ACERO 1020							
10	buje_superior	2	02	LATON							
11	Eje2	2	02	ACERO 1020							
12	base_superior_2_v2	1	03	ACERO 1020							
13	base_superior_v2	1	04	ACERO 1020							
14	cuña	2		ACERO 1020							
15	arandela2	2		ACERO 1020							
16	Soporte	12	06	ACERO 1020							

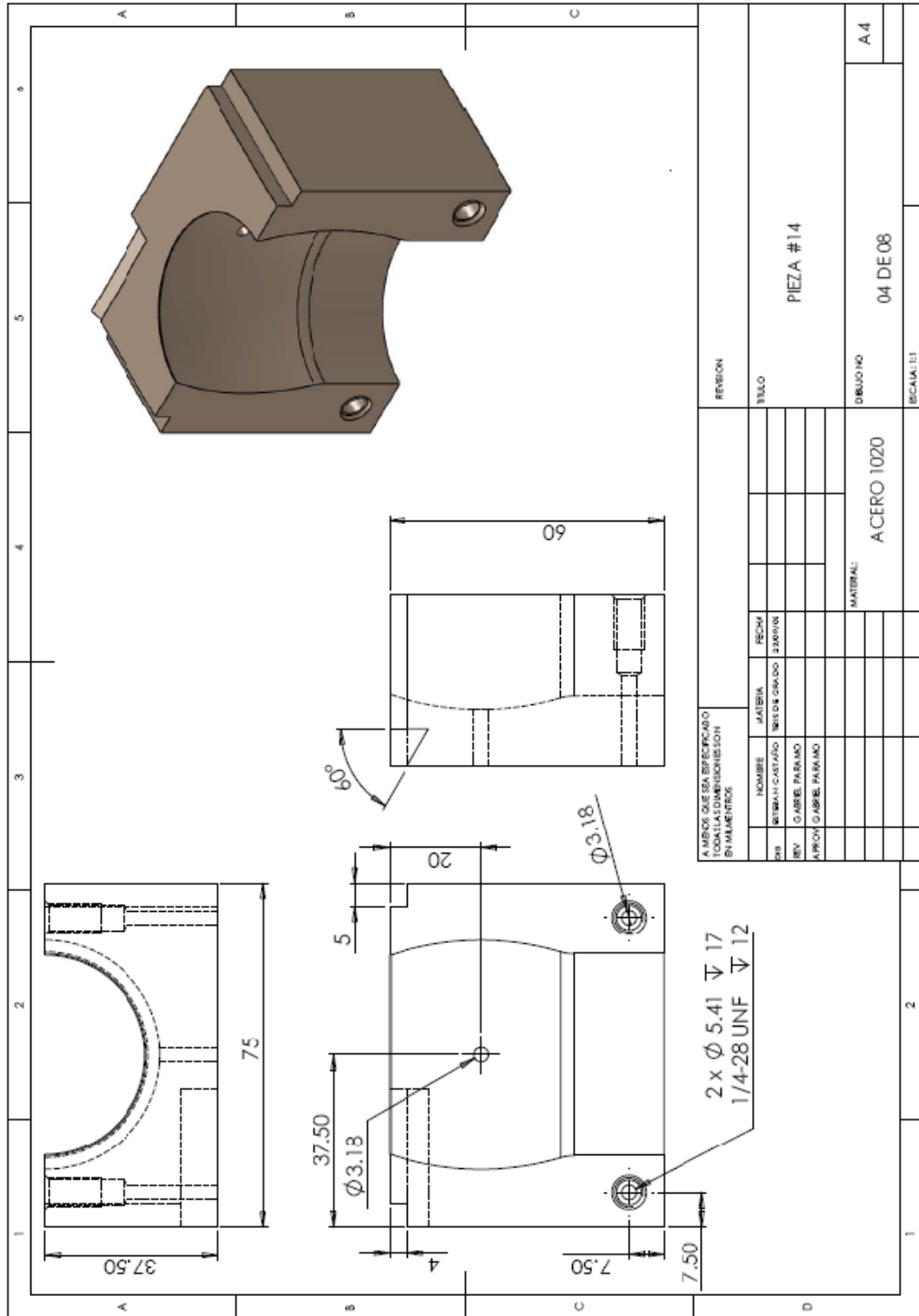
  
  

REVISION			
NOMBRE	MATERIA	FECHA	TIPO
DES	ESTIMAN CASTAÑO	TESE DE GRADO	REVISAR
REV	GABRIEL PARRADO		
APROV	GABRIEL PARRADO		
MATERIAL: ACERO 1020			
DIBUJO NO			01 DE 08
ESCALA INDICADA			A4





A MENOR QUE SEA ESPECIFICADO TODA LA DIMENSION EN MILIMETROS				REVISION	
NO.	NOMBRE	MATERIA	FECHA	TIPO	
01	BITBAN CASTAÑO	BIT DE GRADO	23/01/08		
02	GABRIEL PARRAO				PIEZA #13
03	GABRIEL PARRAO				
04	GABRIEL PARRAO				
MATERIAL:					
ACERO 1020					
				DIBUJO NO	03 DE 08
				ESCALA 1:1	A4



ALMBROS QUE SEA ESPECIFICADO  
 TODAS LAS DIMENSIONES SON  
 EN MILIMETROS

REVISION	TITULO			
	PIEZA #14			
	DIBUJADO 04 DE 08			
	A4			
	MATERIAL: ACERO 1020			
	ESCALA: 1:1			
	NOMBRE	MATERIA	FECHA	
	ESTRUCHICADO	REVISOR	ELABORADO	
	REV	Q. ASBE.	PAR. NO	
	APROV	Q. ASBE.	PAR. NO	
	MATERIAL: ACERO 1020			







