¿AGREGA VALOR EL USO DE LA METODOLOGÍA SHRINKAGE EN LA ESTIMACIÓN DE LA MATRIZ DE COVARIANZAS PARA EL MERCADO ACCIONARIO COLOMBIANO?

POR:

TOMAS HERRERA PASSOS

ASESOR:

DIEGO ALONSO AGUDELO RUEDA

UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE ECONOMÍA Y FINANZAS

MEDELLÍN

2019

Índice

Abstract

This article proposes to estimate the covariance matrix of stock returns in Colombian case by an optimally weighted average of two existing estimators the sample covariance matrix and single-index covariance matrix proposed by Sharpe (1963) following the methodology of Ledoit and Wolf (2003). This method is generally known as Shrinkage, it is standard in decision theory and in empirical Bayesian statistics and allows to improve the calculation of the central values of the estimate. In this case we analyze this methodology for Colombian stocks returns listed at BVC (Bolsa de Valores de Colombia) and participants in the COLCAP composition from January 15, 2008 to May 2, 2019. We have found that the sample covariance matrix is superior in estimating risk than the structural methodology (based on Single Index Model) and Shrinkage, in any type of portfolio composition. However, when estimating the covariance matrix through the Shrinkage methodology in the portfolios of minimum risk and equally weighted have been observed a performance practically equal to the conventional (sample) methodology.

Resumen

Este artículo propone estimar la matriz de covarianza de los retornos accionarios en el caso colombiano a través de un promedio ponderado óptimo de dos estimadores tradicionales de la matriz de covarianza: la muestral y el método del módelo de índice único propuesto por Sharpe (1963) siguiendo la metodología de Ledoit y Wolf (2003). Este método se conoce generalmente como *Shrinkage*, es estándar en la teoría de decisión y en las estadísticas bayesianas empíricas y permite mejorar el cálculo de los valores centrales de la estimación. En este caso se analiza la metodología *Shrinkage* para estimar la matriz de covarianzas de las acciones colombianas que cotizan en la BVC (Bolsa de Valores de Colombia) y los participantes en la composición del índice COLCAP desde el 15 de enero de 2008 hasta el 2 de mayo de 2019. Hemos encontrado que la matriz de covarianzas muestral es superior a la hora de estimar el riesgo que la metodología estructural (basada en el Modelo de índice único) y *Shrinkage*, en cualquier tipo de composición de cartera. Sin embargo, al estimar la matriz de covarianzas a través de la metodología *Shrinkage* para portafolios de mínimo riesgo y de igual participación se observó un desempeño prácticamente igual a la metodología convencional (muestral).

1. Introducción

El objetivo del presente trabajo es analizar la capacidad de predecir el riesgo de portafolios accionarios por parte de la metodología *Shrinkage* propuesta por Ledoit y Wolf (2003), en comparación a la estimación muestral y estructural (derivada del modelo de índice único) en el caso colombiano. De esta manera se pretende identificar la mejor entre las tres estrategias para la medición del riesgo y la construcción de portafolios.

Las entidades administradoras de carteras colectivas y fondos de pensiones representan una parte fundamental del sistema financiero. Estas son grandes captadoras de ahorro público, a través de la construcción de portafolios en renta variable, los cuales son una de las alternativas de inversión más frecuentes (Fabozzi, Modigliani y Ferri, 1996). Lo que plantea una gran responsabilidad para estas gestoras de cartera, en cuanto al cumplimiento de su deber fiduciario y en función de afrontar los retos coyunturales como la problemática pensional descrita por ANIF (2017). Las prioridades de estas instituciones hacen innegable la necesidad de realizar mejoras en la construcción de portafolios, que permitan garantizar el cumplimiento por parte de las administradoras de cartera.

La misión principal de un gestor de cartera consiste en conformar el portafolio con mejor razón de Sharpe, pues esto le garantiza a sus clientes este será capaz de brindarle mejores resultados a través del tiempo (Sharpe, 1994). Para estimar esta razón se requiere de dos componentes fundamentales: el primero está relacionado con la construcción del vector de rendimientos esperados y el segundo con la matriz de covarianzas de los mismos. Este artículo está enfocado en la segunda parte mencionada, es decir, la construcción de la matriz de covarianzas de los activos. Se excluye la estimación de los retornos esperados, ya que es bien sabido que no son estimables por rendimientos históricos y que aún las metodologías de valoración de activos ampliamente aceptadas, como el CAPM o el modelo de tres factores de Fama y French no logran proyectarlos de manera efectiva (Bartholdy y Peare, 2005). Esto se debe a que el vector de rendimientos varía constantemente, debido a los frecuentes cambios en las expectativas, constituyendo más arte que ciencia. Sin embargo, la estimación de covarianzas es un tema con resultados más significativos desde el punto de vista empírico, ya que son mucho más predecibles con base en datos históricos. Esto se ha mostrado que los errores de estimación del rendimiento esperado son más de 10 veces el error en la estimación de la matriz de covarianzas.

Ledoit y Wolf (2003) señalan que el estimador tradicional (la matriz de covarianzas muestral) permite imponer muy poca estructura en la medición de las volatilidades y es un estimador insesgado cuando el número de períodos T es mayor al número de acciones N.[1] Por este motivo, se impondrá un mayor nivel de estructura a la matriz de covarianzas muestral, usualmente usada en el mercado colombiano, ya que nuestra hipótesis también sugiere que sí existen características del mercado que podrían sugerir el uso de metodologías alternativas para la estimación de la matriz, como lo es la mayor correlación promedio, en comparación a las acciones estadounidenses.[2] Sumado al alto ruido que trae consigo la matriz muestral debido a los efectos coyunturales, los cuales afectan las series de tiempo sobre activos con poca historia, como ejemplo se puede tomar la comparación entre la información accionaria colombiana y la estadounidense. Estos efectos coyunturales pueden ocasionar un sesgo al estimar las proyecciones del portafolio como se estima que sea en el presente caso.

Se decidió seguir la metodología introducida por Ledoit y Wolf (2003), en la que se impone un mayor nivel de estructura al estimador de la matriz. Esto permite reducir los problemas ocasionados por el ruido de la estimación muestral, sin dejar de lado la información que esta puede llegar a estregar, contenida en los rendimientos históricos. Dicha metodología es conocida en la literatura como *Shrinkage* datada por Stein (1956) y consiste en la combinación lineal de un estimador que parte de un componente muestral o histórico y uno estructural, basado en el modelo de índice único propuesto por Sharpe (1963), lo que permite obtener mejores aproximaciones a la hora de hacer proyecciones. La razón esencial está sustentada en su capacidad mejorada de captar los valores centrales de la estimación y no los coeficientes extremos que obtenemos generalmente en los *inputs* históricos, los cuales generan en algunas

[1] Cuando N es igual o superior a T, la estimación de la matriz de covarianzas presenta problemas de subespecificación que hacen que el número de parámetros a estimar sea del mismo orden del *data set*, cuando la dimensión de N es igual a la dimensión de T o que la matriz se haga siempre singular cuando N es mayor a T; a pesar de que es sabido que dicha matriz es estrictamente no singular (Jobson y Korkie, 1980).

[2] Este comportamiento se da por la limitada cantidad de acciones que se negocian en el mercado colombiano, lo que plantea una gran dependencia entre algunos activos, como lo son las acciones de las compañías pertenecientes al Grupo Empresarial Antioqueño (GEA).

ocasiones estimaciones con un alto grado de error, pues son representación de situaciones coyunturales que no necesariamente se generarán en el futuro (Ledoit y Wolf, 2004).

La metodología *Shrinkage* en este artículo se compondrá de un promedio ponderado de la matriz muestral y la estimación derivada del modelo de índice único, propuesto por Sharpe (1963). La razón por la que se utilizará el modelo de índice único como teórico de partida, radica en el amplio consenso sobre su uso. Sumado a que la incorporación del modelo de índice único permite obtener un mayor nivel de estructura, debido a la relación inversa entre el número de factores K a incorporar y el nivel de estructura del modelo. Esto evita las cuestiones prácticas que podrían quedar por fuera del análisis, relacionadas al nivel de estructura del modelo inherente del número de factores K a incorporar.[3]

El peso relativo a cada componente lo determina el α (entre cero y uno) asignado al modelo de índice único y fija la cantidad de estructura para la estimación; este se deducirá de la fórmula propuesta por Ledoit y Wolf (2003). Dicha metodología les ha permitido la construcción de portafolios más eficientes, llegando a mejores estimaciones del portafolio de mínimo riesgo. Esto se debe a que en el *Shrinkage* óptimo los autores deducen permite encontrar la combinación óptima entre el *input* muestral y estructural para cada *data set*, sin tener que observar el resultado por fuera de muestra, lo que remplaza el arte de seleccionar los factores, por un trabajo completamente automático. Sin embargo, el uso de está metodología para el caso colombiano constituye una indagación empírica, por lo que no se puede asegurar la superioridad de dicha metodología, dadas las condiciones particulares de su mercado accionario. Así mismo, se deja de lado otros estimadores *Shrinkage* como los sintetizados por Muirhead (1987), ya que estos sufren de dos desventajas generalizadas según Ledoit y Wolf (2003): En primer lugar, se desglosan cuando N>T y, en segundo plano, no se aprovechan del conocimiento de que las acciones tienden a estar correlacionadas positivamente entre sí. Así mismo Frost y Savarino (1986)

---

[3] En algunos casos, aun teniendo variables independientes que puedan tener interpretación económica, el planteamiento podría ser altamente cuestionado, pues el problema teórico sobre cuáles son los factores claves para explicar el comportamiento de los rendimientos accionarios aún es un dilema sin solución (Connor y Korajczyk 1995). Puesto que para cada data set puede existir por lo menos un modelo de factores K que opere muy bien, pero eso no implica necesariamente que existe una argumentación teórica con amplitud avalada o una gran técnica detrás de ese hecho, lo que plantea una gran dificultad a la hora de especificar un modelo sin conocer el resultado a futuro. Sumado a esto, al utilizar el mercado como la única variable explicativa se consigue un mayor nivel de estructura, pues se sabe que está tiene una relación negativa con el número de factores K del modelo (Ledoit y Wolf, 2003).

muestran que la solución al segundo problema es incorporar un objetivo al *Shrinkage* que incorpore el mercado, como lo hace el modelo de índice único.

Dada la importancia del indicador beta (es decir, la pendiente entre los retornos de una acción y el mercado) en la construcción del modelo de índice único, consideramos importante evaluar variantes en su estimación, ya que los criterios por los cuales Ledoit y Wolf (2003) plantean la beta estimado por Mínimos Cuadrados Ordinarios como la mejor alternativa no se cumplen a cabalidad para el presente caso, debido a la menor liquidez del mercado y a una mayor correlación promedio entre los activos y el índice, dada la limitada cantidad de acciones que se negocian en la BVC. Por tanto, se abrirá un espacio para la discusión sobre el beta con mejores resultados para un caso como el colombiano, en cuanto al tipo de estimación.

Una de las novedades teóricas más importantes demostradas por Ledoit y Wolf (2003) está en depender la intensidad del *Shrinkage* óptimo de la correlación entre el error de estimación en la matriz de covarianza de la muestra y en la matriz del modelo de índice único. Intuitivamente, definen que si los dos están correlacionados positivamente (negativamente), entonces el beneficio de combinar la información que contienen es más pequeña (más grande). Esta introducción, según ellos, resuelve una profunda inconsistencia lógica en la anterior teoría empírica bayesiana, donde se realiza una estimación a partir de los datos de la muestra, pero al mismo tiempo se asume independencia de ellos.

Finalmente, se encontró que el beta estimado por Mínimos Cuadrados Ordinarios también es el tipo de estimación mínimiza el error cuadrático medio y el error absoluto medio para el caso colombiano: en el período comprendido entre el 15 de Enero del 2009 y el 3 de Febrero del 2014. Así mismo, se encontró que la metodología *Shrinkage* propuesta Ledoit y Wolf (2003) no logra superar el desempeño de la matriz muestral, bajo ninguna de las métricas evaluadas. Sin embargo, su desempeño tiende a ser muy similar en la evaluación de los portafolios de mínimo riesgo y en los construidos con ponderaciones iguales para cada activo.

2. Marco contextual

En la teoría de portafolio existen dos insumos básicos en la construcción de carteras: el vector de rendimientos y la matriz de covarianzas. Como se mencionó previamente, el foco de esta investigación radica en aplicar la metodología *Shrinkage* propuesta por Ledoit y Wolf (2003) a la estimación de la matriz de covarianzas en el caso colombiano, por lo que se hace necesario el contraste de las diferentes corrientes teóricas para la construcción de la matriz de covarianzas. Pascual (2014) resalta, como es bien sabido, que los valores reales de los elementos de la matriz de covarianzas poblacional $\sum$ son desconocidos, lo cual hace necario la construcción de buenos estimadores que permitan hacer proyecciones más eficientes.

2.1. Matriz muestral: el estimador más usado es la matriz de covarianzas muestral, la cual supone que la variable se distribuye de manera normal $N(\mu,\sigma^2)$ y que el número de observaciones T es superior a la dimensión del número de acciones S. La forma canónica de este estimador se representa en la Ecuación 1, tal como sigue:

$$\sigma^2 = \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t}\left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_t - \overline{X}\right)^t \qquad (1)$$

Donde X_t representa el rendimiento en un momento del tiempo t y $\overline{X}$ su media.

Cabe resaltar que el estimador muestral es fácil de construir, insesgado, su valor esperado es igual a la verdadera matriz de covarianzas ($E(\sigma) = \sum$) y está basado en el estimador de máxima verosimilitud de Σ, por tanto, la matriz de precisión σ^{-1} se puede usar para estimar Σ^{-1}. Sin embargo, a pesar de las cualidades anteriormente mencionadas, el estimador es sesgado cuando la relación T/S, se encuentra entre 0 y 1, es decir, S>T o cuando hay problemas de condicionamiento sobre la matriz. Lo hace que dicha matriz no sea de rango máximo volviéndola singular en el primer caso y con posibles errores de estimación en el segundo, lo que conlleva a:

- Errores en la matriz de precisión Σ^{-1} que en algunos casos es de mayor importancia que Σ (Pascual, 2014).

- Fallos en los autovalores de σ, los cuales divergen de los de Σ (Johnstone, 2001), a pesar de ser un estimador insesgado y definido positivo.

Así mismo, cuando el cociente T/S es pequeño, no necesariamente menor a 1, bajo el supuesto de normalidad, el valor esperado de la inversa será $E(\sigma^{-1}) = \frac{t}{t-s-2}\Sigma^{-1}$. Esto genera que a pesar de que σ sea insesgada para Σ, σ^{-1} es altamente sesgada para Σ^{-1} lo cual se evidencia Bai y Shi (2011).

Siguiendo a Ledoit y Wolf (2003) entre los estimadores más comunes sugeridos por la literatura para estimar la matriz de covarianza de los retornos accionarios tenemos:

2.2. Matriz identidad: es el modelo más simple y parte de asumir que la matriz de covarianza es un múltiplo escalar de la matriz identidad. Esta es la suposición implícita en la ejecución de una regresión transversal ordinaria de los rendimientos accionarios, sobre las características de las acciones, como hacen Fama y MacBeth (1973) y sus sucesores. Curiosamente, produce las mismas ponderaciones para las carteras de mínima varianza que un modelo de dos parámetros en el que todas las varianzas y covarianzas son iguales entre sí. Este modelo de dos parámetros es discutido por Jobson y Korkie (1980), Frost y Savarino (1986).

2.3. Matriz de correlación constante: Elton y Gruber (1973) recomiendan un modelo donde cada par de acciones tiene el mismo coeficiente de correlación. Por lo tanto, hay parámetros N+1 para estimar: las N varianzas individuales y el coeficiente de correlación constante.

2.4. Matriz Pseudo inversa: como se mencionó previamente es imposible utilizar la matriz de covarianza muestral para la selección de carteras, cuando el número de acciones N excede el número de retornos históricos T o cuando se presenta alta correlación entre las variables que conforman la matriz, como se estima que sea el caso colombiano. Un posible truco para sortear este problema es usar la pseudo inversa, también llamado inverso generalizado o inverso Moore-Penrose y reemplazar la matriz de covarianza muestral inversa.

2.5. Matriz de Modelo de mercado: esta es la matriz de covarianzas derivada del modelo de índice único propuesto por Sharpe (1963) y parte de la premisa de que en un portafolio bien diversificado la varianza se puede expresar como un producto entre la varianza del mercado por los betas respectivos al cuadrado más los errores asociados a los mismos, este modelo será desarrollado posteriormente en el apartatado metodológico.

2.6. Matriz de Factores de la industria: es una extensión del modelo de índice único y supone que los residuos del mercado son generados por factores propios de cada una de las cuarenta y ocho industrias definidas por Fama y French (1997) y asume residuales independientes a las variables anteriormente mencionadas.

2.7. Matriz de Componentes principales: un enfoque alternativo a los modelos multifactoriales es extraer los factores de la propia matriz de covarianza muestral. Para este se útiliza un método estadístico como los componentes principales, los cuales se eligen únicamente por su capacidad de explicar el riesgo, pues se necesitan menos factores. Sin embargo, no tienen una interpretación económica directa.

2.8. Matriz *Shrinkage* hacia la identidad (Ledoit y Wolf, 2000): este estimador utiliza un múltiplo escalar de la matriz de identidad como objetivo de *Shrinkage*; se sugiere para situaciones generales en las que no existe un objetivo de contracción "natural". Esto parece sub óptimo para modelación de rendimientos accionarios, ya que en estas se tienen principalmente covarianzas positivas (Ledoit y Wolf, 2003). Por lo tanto, parece beneficioso utilizar un objetivo de contracción que incorpore este conocimiento, como la matriz de covarianza del modelo índice único.

2.9. Matriz *Shrinkage* hacia el modelo de índice único (Ledoit y Wolf, 2003): es el estimador que se utilizara en este articulo y parte de una composición entregada por la matriz de covarianzas del modelo de índice único y la matriz de covarianzas muestral, a partir de un α óptimo. Esto se presentará más adelante en el apartado metodológico.

2.10. Matriz *Shrinkage* hacia la matriz de correlación constante (Ledoit y Wolf, 2004): es el estimador que parte de un ponderado entre la matriz de correlación constante y la matriz muestral, este cuenta con una fácil implementación y su uso está centrado en la gestión activa de portafolios.

2.11. Matriz *Shrinkage* no lineal (Ledoit y Wolf, 2017): Es un estimador más flexible que los anteriores estimadores de *Shrinkage* lineales. Este estimador de contracción no lineal es asintóticamente óptimo para la selección de carteras cuando el número de activos es de la misma magnitud que el tamaño de la muestra. Esto se debe a que, en las pruebas de retroceso sobre los rendimientos accionarios, se desempeña mejor que las propuestas anteriores y, en particular, domina la contracción lineal. Sin embargo, aplicar esta metodología excede los alcances de esta investigación.

La importancia de utilizar la metodología el *Shrinkage* hacia el modelo de índice único, radica en su superioridad frente a las estimaciones convencionales previas, tal como lo muestra Ledoit y Wolf (2003). Para un mercado como el colombiano, donde el uso de alternativas para la estimación de portafolios es un tema con poca profundidad, parece una metodología pertinente. Su fácil implementación para los distintos portafolios, en comparación a las estimaciones no lineales que, para diferentes grupos de inversión, pueden resultar engorrosas y de difícil interpretación. Así, la hace parcialmente una herramienta poco útil, a pesar de que estás últimas puedan tener mejores resultados cuando S es igual T, tal como lo señala Ledoit y Wolf (2017).

Así mismo, no se abordaron las metodologías alternativas de contracción, ya que la revisión de la literatura hecha por Muirhead (1987) sobre los estimadores *Shrinkage* de la matriz de covarianzas muestra que todos estos sufren de al menos dos graves inconvenientes:

- Sufren de errores de estimación cuando N>T.
- No aprovechan el conocimiento *a priori* de que los rendimientos de las acciones tienden a estar positivamente correlacionados entre sí.

Frost y Savarino (1986) muestran que la solución al segundo problema es utilizar un objetivo de contracción que incorpore un factor de mercado, pero ignoran la correlación entre el error de estimación en el objetivo de contracción y en la matriz de covarianza, y siguen expuestos al primer problema.

3. Datos

3.1. Recolección de los datos

Los precios para el cálculo de los retornos accionarios fueron tomados de Bloomberg y de la BVC, para cada una de las acciones que se han listado en el mercado de renta variable desde enero 15 del 2008 a mayo 1 del 2019. Estas fechas conforman los 45 trimestres de rebalanceado el índice COLCAP. Los datos fueron extraídos en periodicidad diaria y fueron incluidos los días sin transacción que se presentan en algunas acciones. Estos, posteriormente, fueron transformados a valores equivalentes de 0, pues de otra manera estos huecos generan problemas de especificación matricial, que limitan el desarrollo de esta investigación.

Entre las posibles limitaciones que tienen los datos se encuentra la poca liquidez de algunas acciones, que ocasiona problemas de sincronización para las diferentes estimaciones. Estos pueden generar en ocasiones datos extremos, que afectan las métricas de desempeño evaluadas. Por este motivo, se tomaron filtros que permitieran generar consistencia en las métricas y dejar de lado los problemas de estimación.

3.2. Manejo de los datos

Para las estimaciones del beta se partió de composiciones en frecuencia diaria con longitud anual, siguiendo la conclusión metodológica hecha por Reeves y Wu (2013). Estos autores dan muestra de la superioridad de esta combinación de factores para realizar proyecciones trimestrales, en comparación al enfoque de Fama y Macbeth (1973), de frecuencia mensual con 5 años de longitud. Otro factor importante para tomar esta determinación metodológica es la baja cantidad de datos que podemos encontrar en las acciones colombianas, en comparación a las estadounidenses, lo que permite tener una mayor cantidad de períodos para la evaluación tanto de los betas como de las matrices de covarianzas.

Así mismo, para la estimación de los betas, se tomo a consideración el COLCAP como índice de referencia del mercado colombiano. Esto es algo que es importante señalar ya que difiere de la composición especificada por Ledoit y Wolf (2003), en donde se parte de un índice con estructura *equally weighted*, lo cual es algo que puede diferír bastante con las metodologías usadas normalmente en la estimación del beta. Los elementos teóricos considerados por los autores mencionan que los índices con igual ponderación explican mejor las variaciones del mercado bursátil que los índices ponderados por valor, lo cual representa una desviación de la intuición del CAPM. Lo anterior no es necesariamente aplicable para el caso colombiano, ya que constituye una aproximación empírica para el mercado estadounidense, donde el número de acciones es partircularmente grande. Sin embargo, está intuición no es fácil de acoplar en un mercado como el colombiano, donde la cantidad de acciones del indice tiende a ser tan limitada, lo que hace incierto el efecto que se puede tener. Por este motivo, consideramos que la exactitud en la composición de la cartera puede llegar a ser tan importante como lo es para el CAPM (Roll, 1977).

Por otro lado, las fechas de corte para las estimaciones anuales y sus respectivos trimestres realizados corresponden a las fechas de rebalanceo del índice COLCAP, tal como se mencionó previamente. Esto implica que, si se van a realizar estimaciones al comienzo del trimestre T, se toman las fechas de rebalanceo efectuadas de los últimos cuatro trimestres para la estimación anual. Es deducible, por tanto, que las cuatro fechas de rebalanceo previas al trimestre T, van desde la fecha de inicio del trimestre T-4, hasta el último día hábil de la composición hábil del trimestre T-1.

Otro elemento crucial para el manejo de los datos, son las cuatro restricciones para determinar si los datos de una acción en un trimestre determinado T eran válidos para ser incluidos en la estimación de los betas. Estas cuatro restricciones son: 1) contar mínimo con los dos últimos trimestres de la estimación anual, este elemento es importante para lograr captar el mayor número de activos listados; 2) contar con un dato realizado, de otra manera las métricas de desempeño serían inestimables; 3) se evaluó si los activos fueron negociados más del 50% de los días transados, ya que las betas de activos que incumplan está característica tenderían a estar muy sesgados por los ceros que se hicieron necesarios incluir, alejándolos así de su indicador de beta verdadero. 4) Descartar acciones con betas por fuera de un rango de [-3,3]. Estos valores se pueden considerar como normales a estimar, y, de no incluir está prueba, se generarían valores extremos como muestra de situaciones coyunturales que está atravesando la empresa y, por tanto, sesgar todo el análisis de los betas. Por otro lado, en la comparación de las matrices de covarianzas, se utilizó la prueba lógica de que el activo estuviera incluido en el portafolio COLCAP, lo cual permite consistencia entre los activos que existen en cada una de las composiciones evaluadas (portafolio Naive, Colcap y de mínimo riesgo).

3.3. Períodos importantes a tener en cuenta

Inicialmente se hará el análisis de los tipos de estimación del beta, para este se utilizará el periodo comprendido entre el 15 de enero del 2009 (debido a que el el primer año de datos, será utilizado para la primera estimación) y el 31 de enero del 2014. Por tanto, la segunda parte de esta investigación, sobre los tipos de estimación de la matriz de covarianzas, se evaluará entre el 1 de febrero del 2014 al 31 de abril de 2019. Las mediciones se harán a través de una ventana móvil. El uso de este tipo de comparación hace poco preciso establecer una fecha de corte para marcar la diferencia entre los períodos de muestra y fuera de está, debido a que estos últimos pueden variar a lo largo de toda las estimaciones. La lógica detrás de este factor se sustenta en que, para algunos períodos, el trimestre T puede ser una estimación fuera de muestra (que también denominamos como estimación realizada) y en el trimestre siguiente se convierte en uno de los trimestres en muestra para tratar de proyectar el cuarto de año siguiente (T+1). Sin embargo, establecer está distinción en las fechas de evaluación es importante, ya que permite la independencia de las dos partes más significativas y constitutivas de este trabajo. Lo anterior permite establecer que el objetivo central de esta investigación (analizar el valor agregado de la matriz de covarianza *Shrinkage* sobre las estimaciones tradicionales), no sea criticado por conocer los betas correctos para la composición de la matriz *Shrinkage* en los períodos evaluados.

4. Metodología

Inicialmente se hizo una revisión de la literatura y una descripción sobre la problemática que puede sufrir la estimación de la matriz de covarianzas. Esta se puede encontrar en el apartado de la introducción y el marco contextual del presente trabajo. La idea en esta revisión fue utilizar fuentes de alto ranking investigativo, como pueden ser revistas Scopus de calificación Q2 y superior o fuentes investigativas colombianas en caso de ser necesario, las cuales le brinden al lector el contexto para entender el desarrollo del presente trabajo investigativo.

4.1. Alternativas de estimación del indicador beta

Se identificó la mejor manera de estimar el beta para la construcción del modelo de índice único, comparando la metodología convencional de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) con el beta ajustado por Scholes-Williams (1977) y Blume (1975). El beta de Scholes-Williams (1977) se incluyó debido a que este tipo de medición obtuvo unos resultados significativos en la investigación de Katscher, Mac Cawley y Reyes (2019); en sus hallazgos se encuentra que este tipo de estimación es el segundo mejor en la jerarquía para la construcción del portafolio de máximo – mínimo riesgo en una cartera de ponderaciones iguales y el cuarto en una cartera agreagada por valor. Seguidamente, se incluyó el beta ajustado por Blume (1975), debido a su alto uso en plataformas como Bloomberg y cursos de alta importancia Certificate in Finance Administration (CFA). La intención de este inciso se encuentra en mejorar la matriz estructural, brindada por el modelo de índice único, que se puede encontrar en el artículo de Sharpe (1963) para el caso colombiano.

Como se mencionó previamente, para la evaluación de estás estimaciones se utilizará una frecuencia diaria con periodicidad anual siguiendo la conclusión metodológica hecha por Reeves y Wu (2013). A partir de esta se hará una minimización del Error Cuadrático Medio (RMSE, utilizando sus siglas en ingles) siguiendo lo datado por Katscher, Mac Cawley y Reyes (2019) y las demostraciones que validan su uso de Chai y Drexler (2014). La forma canónica del RMSE se puede observar en la Ecuación 2, tal como sigue:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}(\beta_{n,i}^{\mathrm{R}} - \hat{\beta}_{n,i}^{\mathrm{R}})^2} \quad (2)$$

Donde $\beta_{n,i}^{\mathrm{R}}$ es el beta realizado por MCO para el trimestre evaluado, $\hat{\beta}_{n,i}^{\mathrm{R}}$ representa el beta estimado por cada una de las metodologías propuestas. La intuición se encuentra en que entre más bajo el RMSE, mayor capacidad de dicha estimación para proyectar el beta realizado.

Sumado a esto se analizó el Error Absoluto Medio (MAE) como medida alternativa de corroboración, debido a las argumentaciones teóricas de Willmott y Matsuura (2005), sobre la posible superioridad del MAE sobre el RMSE, su forma analítica viene dada por la Ecuación 3:

$$MAE = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\left|\beta_{n,i}^{\mathrm{R}} - \hat{\beta}_{n,i}^{\mathrm{R}}\right| \quad (3)$$

Los términos representativos del MAE guardan concordancia con los mostrados en el RMSE.
La lógica de utilizar ambas métricas persigue un objetivo claro y es que si ambas coinciden en la jerarquización sobre el tipo de estimación, se permite establecer una conclusión clara sobre la mejor metodología para la estimación del beta. De otro modo, tal como señala Chai y Drexler (2014) sería necesario analizar la distribución que presenta el RMSE, para la toma final de la decisión. Si el RMSE distribuye normal se pueden lograr mejores conclusiones siguiendo está metrica, en otro caso es preferible el MAE.

4.2. Constante de intensidad *Shrinkage* óptima (α)

Tal como se mencionó previamente la constante de intensidad *Shrinkage* óptima (α), es fundamental para la estimación de la matriz de covarianzas *Shrinkage* propuesta por Ledoit y Wollf (2003). La forma estimada óptima para α viene dada por la Ecuación 4:

$$\widehat{\alpha^*} = \frac{K}{\mathrm{T}}, donde\ K = \frac{\pi - \rho}{\gamma} = \frac{p - r}{c} \quad (4)$$

Donde p es el estimador consistente de π y representa la sumatoria asintótica de la matriz de covarianzas muestral. r es el estimador consistente de ρ y mide la covarianza entre el error de estimación de las varianzas asintóticas de la matriz muestral con las respectivas varianzas del modelo de índice único. Estó ultimo es uno de los aportes más significativos introducidos por Ledoit y Wolf (2003). Finalmente, c es el estimador consistente de γ y señala la distancia del modelo de índice único y la matriz muestral.[4]

4.3. Alternativas de estimación de la matriz de covarianzas

Posteriormente se realizó la estimación de cada una de las matrices (matriz de covarianzas muestral, la derivada del modelo de índice único y la generada bajo la metodología *Shrinkage*). La forma matricial para la construcción de estas tres estimaciones, sigue la notación de Ledoit y Wolf (2003). Dicha representación matricial de la estimación muestral, la derivada del modelo de indice único y la metodología *Shrinkage* se pueden observar en las Ecuaciones 5, 6 y 7 respectivamente, tal como sigue:

$$S = \frac{1}{T}X\left(I - \frac{1}{T}11^t\right)X^t \quad (5)$$

Donde S representa la estimación de la matriz de covarianzas muestral, T representa el número de períodos, X es la matriz que contiene las observaciones para cada una de las acciones evaluadas y, por tanto, I y 1, representan la matriz identidad y el vector de unos conformable para X.

$$F = \sigma^2 m b b^t + D \quad (6)$$

En la Ecuación 6 se puede observar la representación matricial del modelo de índice único, donde F representa dicha matriz, $\sigma^2 m$ es la varianza del mercado, b representa el vector de betas (pendientes) de los retornos accionarios respecto al mercado y D es una matriz diagonal de los residuales de cada acción.

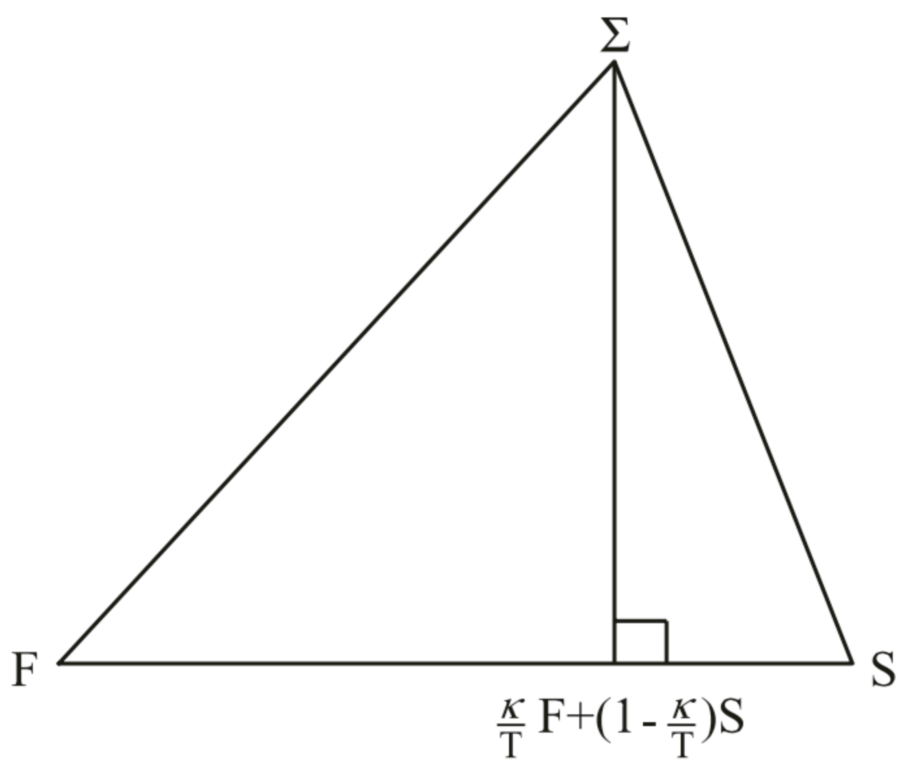
$$\hat{S} = \hat{\alpha}^* F + (1 - \hat{\alpha}^*)S \quad (7)$$

[4] Si se desea más información sobre las demostraciones asociadas a la constante *Shrinkage* óptima y sus respectivos parámetros, revise Ledoit y Wolf (2003), Pascual (2014).

En la ecuación 7 se puede observar la representación matricial de la matriz de covarianzas *Shrinkage* denotada por $\hat{S}$, donde $\hat{\alpha}^*$ es la constante de intensidad *Shrinkage* óptima. Esta constante equivale a $\frac{\kappa}{T}$ que muestra el estimador conscistente propuesto por Ledoit y Wolf (2003). Finalmente, F y S son las matrices del modelo de indice único y muestral respectivamente.

Finalmente, tal como señala Ledoit y Wolf (2003) la intuicíon detrás del *Shrinkage* óptimo se encuentra basada en la noción de ortogonalidad entre matrices simétricas N-dimensionales. Esta se encuentra definida por el producto interno asociado a la norma Frobenius y refleja la combinación óptima de la matriz de covarianzas del módelo de índice único y la matriz de covarianzas muestral. Esto se aprecia en la Figura 1, donde la combinación de la matriz estructural y muestral minimiza la distancia a la verdadera matriz de covarianzas poblacional.

Figura 1: Interpretación geométrica de la constante *Shrinkage* óptima.



Fuente: Ledoit y Wolf (2003)

4.4. Conformación y evaluación de los portafolios

FEn la última etapa, se emplean cada una de las matrices (estructural, muestral y *Shrinkage*), en tres tipos de composiciones de portafolio: El portafolio *equally weighted*, el COLCAP como referencia y el portafolio de mínimo riesgo.

Para la evaluación de los dos primeros tipos de portafolios (igual participación a cada activo y COLCAP), se hizo un análisis similar a la estimación de los betas, es decir, se realizó una comparativa basada en el RMSE y el MAE del riesgo estimado vs el riesgo realizado. En contraste, para el portafolio de mínimo riesgo la comparación se basa en la capacidad de cada una de las matrices de covarianzas de estimar las participaciones óptimas en la conformación del portafolio de mínimo riesgo. Estas composiciones se analizan con los datos del trimestre realizado, para evaluar cuál logra proyecta el menor riesgo. Esto hace necesario hacer algunas aclaraciones sobre la construcción y especificación en la construcción de dicho portafolio, siguiendo la notación de Markowitz (1952):

Se considera el universo de acciones N cuyos rendimientos se distribuyen con el vector medio de rendimientos esperados μ y su matriz de covarianza viene dada por ∑ se define el problema de la selección de carteras de mínimo riesgo, como se muestra en la Ecuación 8:

$$\min_{w} w'\sum w \qquad (8)$$

Sujeto a:

$$w'1 = 100\%$$

$$w'\mu = q$$

Donde 1 denota un vector conformable de unos y q es la tasa de rentabilidad esperada por el inversionista o la cartera. La solución analítica viene dada por:

$$w = \frac{C - qB}{AC - B^2}\Sigma^{-1}1 + \frac{qA - B}{AC - B^2}\Sigma^{-1}\mu \qquad (9)$$

Donde A=1’$\sum^{-1}$1, B=1’$\sum^{-1}$ μ y C= μ’$\sum^{-1}$ μ.

En la Ecuación 9, se muestra tal como señala Ledoit y Wolf (2003) que las ponderaciones óptimas de la cartera dependen de la inversa de la matriz de covarianzas. Este artículo se complica si la matriz de covarianza no es invertible o si se encuentra mal condicionada, lo que implica que al invertirlo se aumenta el error de estimación (Michaud, 1989). Es de notar que el estimador de la matriz de covarianzas *Shrinkage* $\hat{S}$ es el promedio ponderado de dos matrices semi definidas positivas y se sabe que ambas para el caso colombiano son invertibles, ya que S<T para este caso, lo que permite obtener una matriz invertible. Sin embargo, es posible esperar errores de estimación en algunos casos sobre la matriz de covarianzas muestral, cuando correlación promedio es alta, lo que puede llevar a que la matriz este mal condicionada. Esto hace que la evaluación, desde la perspectiva de mínimo riesgo, sea una métrica más completa para la comparación de las tres matrices. Lo que permite a su vez que las estimaciones sobre los datos nos hablen por sí mismas sobre su capacidad de aproximarse al menor riesgo realizado.

5. Resultados

5.1. Evaluación del tipo de estimación del beta

Como se mencionó previamente, nuestro primer caso a analizar fue el tipo de estimación del beta, para esto se utilizaron las métricas de desempeño del RMSE y el MAE. Se presentan los resultados sintetizados para el Error Cuadrático Medio y el Error Absoluto Medio en la Tabla 1 y 2 respectivamente:

Tabla 1: Resumen de la evaluación del RMSE sobre el tipo de estimación de los betas

RMSE Beta por MCO	RMSE Beta por Blume (1975)	RMSE Beta por Scholes y William (1977)
0.392737616	0.40951644	0.453935713

Fuente: Elaboración propia, datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

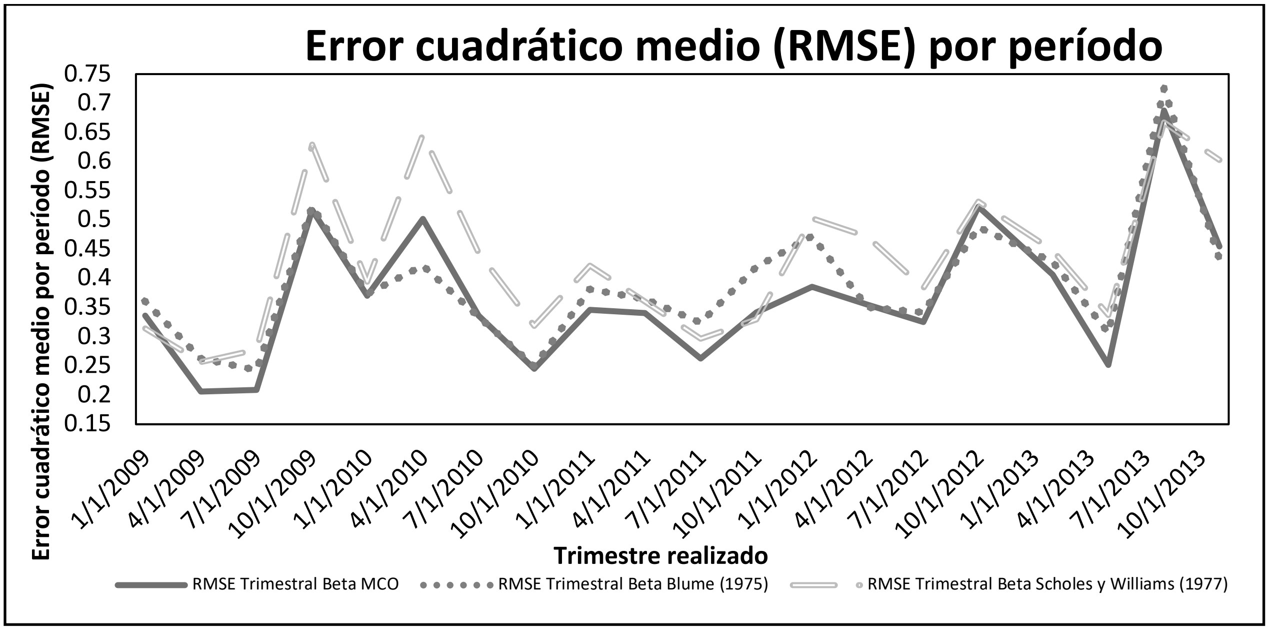
Tabla 2: Resumen de la evaluación del MAE sobre el tipo de estimación de los betas

MAE Beta por MCO	MAE Beta por Blume (1975)	MAE Beta por Scholes y William (1977)
0.287263226	0.313654601	0.330279803

Fuente: Elaboración propia, datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

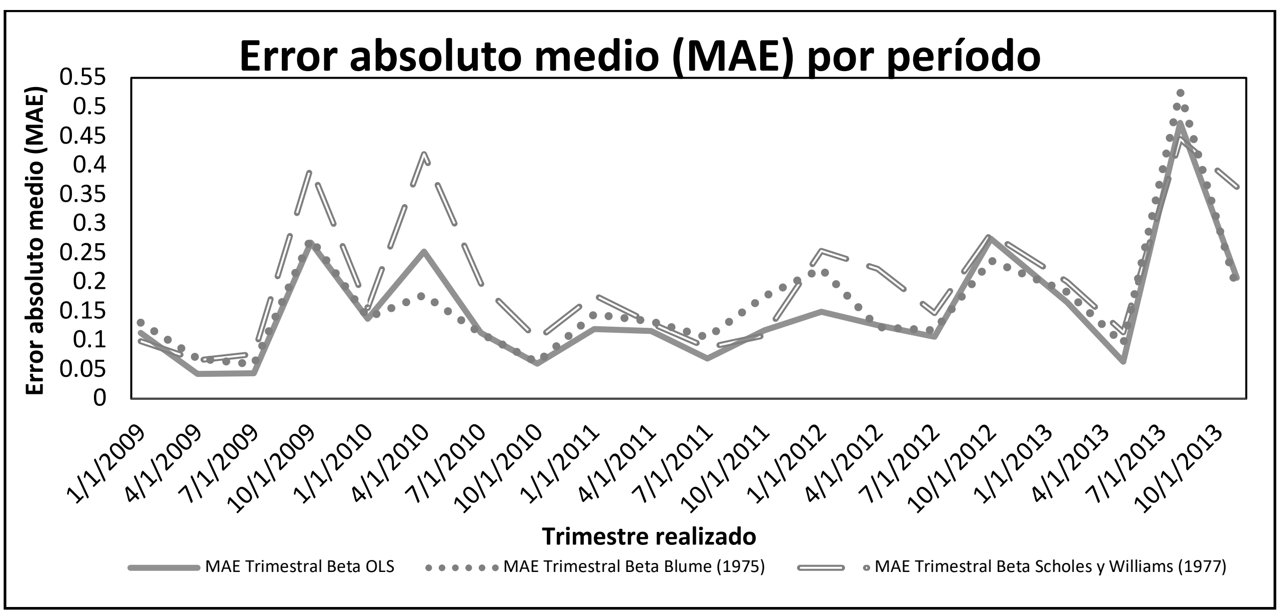
Es de observar, que la estimación hecha por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) obtiene el menor valor para las métricas RMSE y MAE, lo que muestra que este tipo de estimación es la mejor para la construcción del modelo de índice único para el caso colombiano, entre los tres evaluados. Las gráficas 1 y 2 complementan está información y muestran el comportamiento de cada uno de los tipos de estimación en función a ambas métricas para los veinte períodos evaluados.

Gráfico 1: Períodos de la evaluación del RMSE en el tipo de estimación de los betas



Fuente: Elaboración propia, datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

Gráfico 2: Gráfico por períodos de la evaluación del MAE en el tipo de estimación de las betas



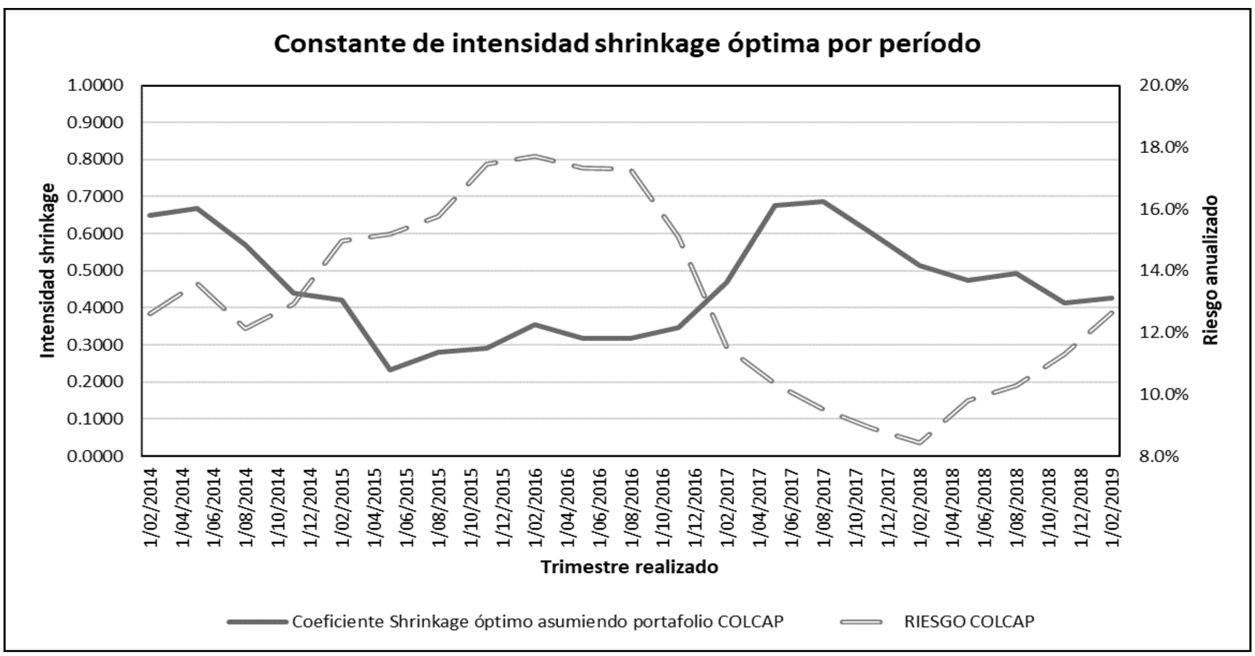
Fuente: Elaboración propia, datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

Es fácil notar que la estimación hecha a través de Mínimos Cuadrados Ordinarios tiende a ser superior durante la mayoría de períodos evaluados (al ser la menor de todas). Los únicos trimestres en los que este tipo de estimación resulta ser inferior son los trimestres iniciados el 15 de julio del 2010 y el 1 de octubre del 2013, en las que se ve superada la estimación hecha a través de MCO por la corrección de Blume (1975).

5.2. Evaluación de la constante *Shrinkage* óptima

Por otro lado, se calculó la constante *Shrinkage* óptima para cada uno de los trimestres de evaluación. El código base para el cálculo de este estimador fue tomado de la página http://www.ledoit.net propiedad de los autores Ledoit y Wolf. Se puede observar que para el caso colombiano esta es bastante volátil y tiende a alimentarse más de la matriz de covarianzas del modelo de índice único en los períodos de menor volatilidad del mercado. Por otro lado, en condiciones de alta volatilidad la metodología le da más importancia a la muestral. Sin embargo, puede observarse que la constante nunca toma alguno de sus posibles valores extremos [0] y [1], lo que implica que los cálculos hechos sobre el *data set* encuentran productiva la existencia de una matriz *Shrinkage*.

Gráfico 3: Análisis de la constante *Shrinkage* óptima.



Fuente: Elaboración propia, cálculos realizados en MATLAB a partir del código dispuesto por Ledoit y Wolf. Datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

5.3. Evaluación de las matrices de covarianzas.

Finalmente, la evaluación de las matrices de covarianzas se realizó a través de un análisis sobre tres tipos posibles de composición de portafolio: composición de igual ponderación (Naive), agregada por valor (COLCAP) y de mínimo riesgo. En las Tablas 3 y 4 se pueden encontrar los resultados de las métricas RMSE y MAE, obtenidos a través de la composición de igual participación de los activos respectivamente.

Tabla 3: Tabla resumen del RMSE sobre la estimación del riesgo de un portafolio Naive.

RMSE RIESGO ESTIMADO MATRIZ MUESTRAL	RMSE RIESGO ESTIMADO MATRIZ MODELO DE INDICE ÚNICO	RMSE RIESGO ESTIMADO MATRIZ *SHRINKAGE*
4.289%	4.327%	4.302%

Fuente: Elaboración propia, datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

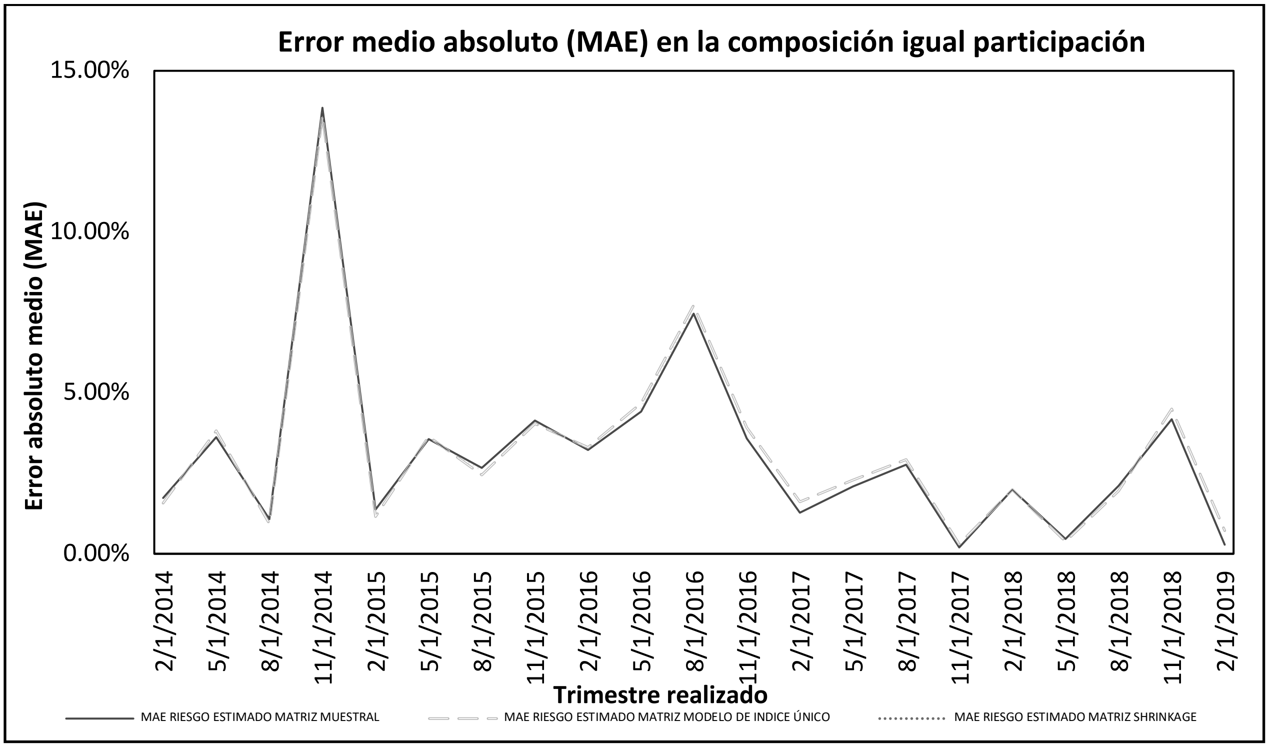
Tabla 4: Tabla resumen del MAE sobre la estimación del riesgo de un portafolio Naive.

MAE RIESGO ESTIMADO MATRIZ MUESTRAL	MAE RIESGO ESTIMADO MATRIZ MODELO DE INDICE ÚNICO	MAE RIESGO ESTIMADO MATRIZ *SHRINKAGE*
3.145%	3.216%	3.177%

Fuente: Elaboración propia, datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

Se puede observar que el mejor tipo de estimación a la hora de predecir un portafolio con composición de igual participación es el proveniente de la matriz de covarianzas muestral. Sin embargo, la diferencia no parece ser lo suficientemente grande respecto a la estimación *Shrinkage*. Esto a en la Gráfica 4, en la cual se muestra el error absoluto medio por períodos. En este caso no se incluye la gráfica del RMSE, ya que en el caso estudiado solo se tiene una estimación por cada período y, por tanto, se producirían los mismos resultados que en el MAE.

Gráfica 4: MAE sobre la estimación del riesgo del portafolio Naive por períodos.



Fuente: Elaboración propia, datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

Por otro lado, en la Tabla 5 y 6 se puede encontrar el RMSE y el MAE de los resultados obtenidos a través de la composición COLCAP, en esta se puede observar que la estimación muestral si presenta un diferencial superior en comparación a lo mostrado en la composición de igual ponderación. Así mismo, esta diferencia sustancial puede ser apreciada a través de la Gráfica 5, donde se observa una superioridad más evidente por parte de la matriz muestral.

Tabla 5: Tabla resumen del RMSE sobre la estimación del riesgo de un portafolio COLCAP.

RMSE RIESGO ESTIMADO MATRIZ MUESTRAL	RMSE RIESGO ESTIMADO MATRIZ MODELO DE INDICE ÚNICO	RMSE RIESGO ESTIMADO MATRIZ *SHRINKAGE*
4.923%	5.258%	5.067%

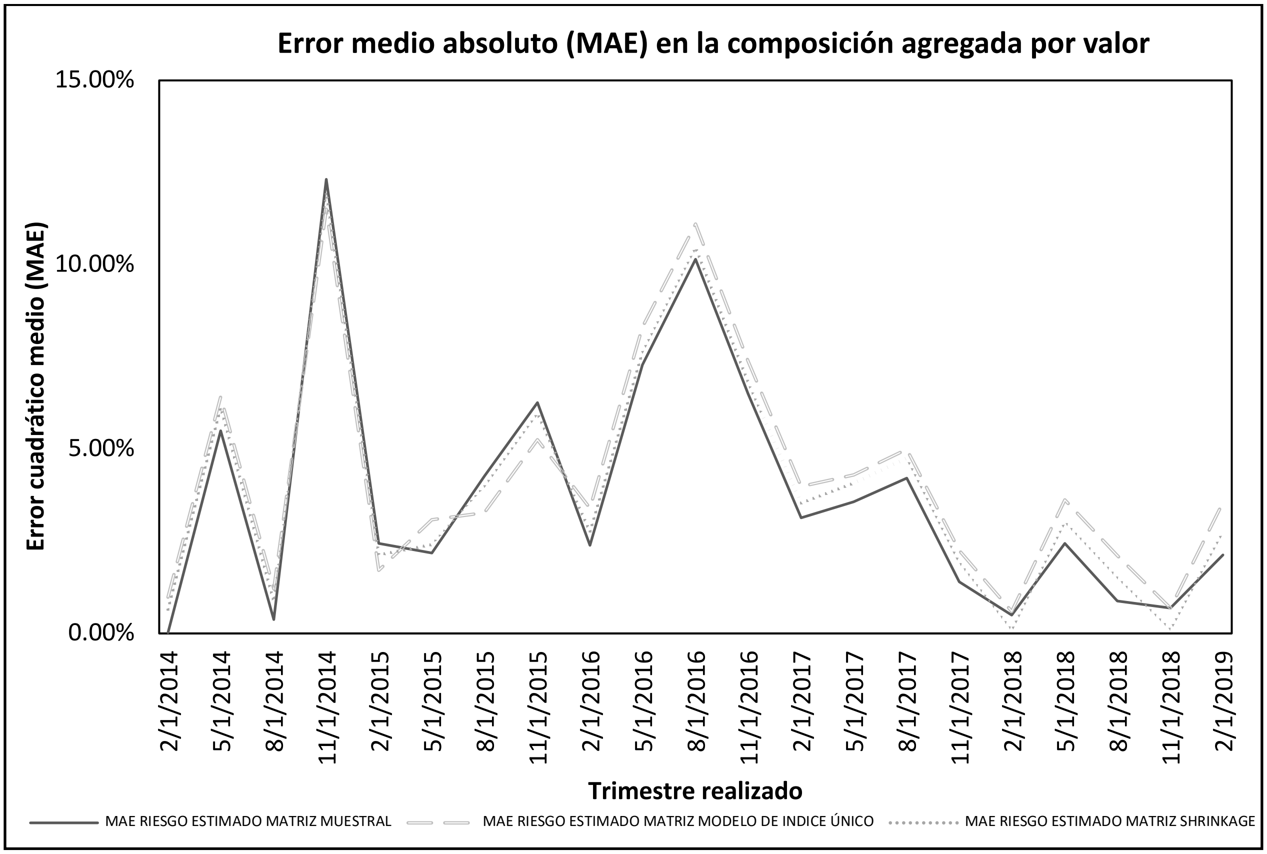
Fuente: Elaboración propia, datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

Tabla 6: Tabla resumen del MAE sobre la estimación del riesgo de un portafolio COLCAP.

MAE RIESGO ESTIMADO MATRIZ MUESTRAL	MAE RIESGO ESTIMADO MATRIZ MODELO DE INDICE ÚNICO	MAE RIESGO ESTIMADO MATRIZ *SHRINKAGE*
3.747%	4.273%	3.974%

Fuente: Elaboración propia, datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

Gráfica 5: MAE sobre la estimación del riesgo del portafolio COLCAP por períodos.



Fuente: Elaboración propia, datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

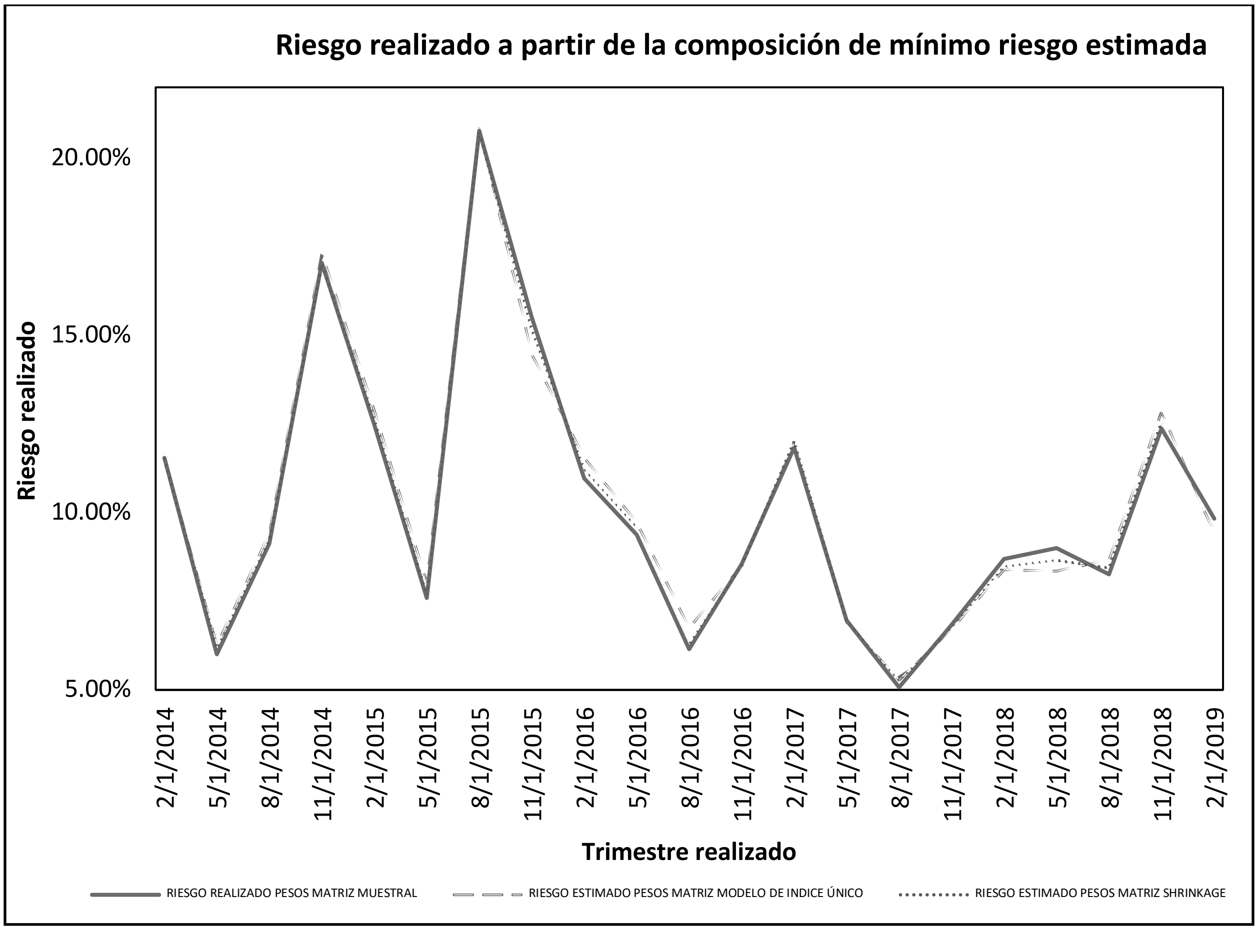
Finalmente, para la evaluación del portafolio de mínimo riesgo, se analizó que la estimación sobre los pesos del portafolio permitieran el menor riesgo realizado. De esta manera, los datos brindarían la información por si mismos y no haría falta el uso de métricas de desempeño como el RMSE y el MAE en este caso. En la Tabla 7, se puede observar que, en promedio, para la construcción de un portafolio de mínimo riesgo, la matriz de covarianzas muestral obtuvo el mejor desempeño. Sin embargo, este riesgo promedio es prácticamente igual al entregado por la matriz *Shrinkage*, pues solo difieren en un 0.012%. Así mismo, en la Gráfica 6, se puede observar un comportamiento similar entre el riesgo realizado por la composición estimada muestral y la *Shrinkage*.

Tabla 7: Resumen del riesgo realizado con base en la composición de mínimo riesgo.

RIESGO REALIZADO PESOS MATRIZ MUESTRAL	RIESGO ESTIMADO PESOS MATRIZ MODELO DE INDICE ÚNICO	RIESGO ESTIMADO PESOS MATRIZ *SHRINKAGE*
10.191%	10.275%	10.203%

Fuente: Elaboración propia, datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

Gráfica 6: Riesgo realizado por períodos con base en la composición de mínimo riesgo.



Fuente: Elaboración propia, datos de precios tomados de Bloomberg y la BVC.

6. Conclusiones

En este artículo se presenta la aplicación de la metodología *Shrinkage* propuesta por Ledoit y Wolf (2003) para el caso colombiano, el cual constituye un método flexible para imponer estructura a la estimación de la matriz de covarianzas muestral, a través de la matriz estructural derivada del modelo de índice único propuesto por Sharpe (1963). La idea central se basa en realizar una composición de la matriz de covarianza de la muestra (no sesgada pero muy variable) y la matriz de covarianza del modelo de índice único (la cual es sesgada pero menos variable). Así, se buscaba obtener un estimador de la matriz de covarianzas más eficiente en la medición de los riesgos, y que, a su vez, fuera invertible en todos los casos.

Como condición previa se evaluaron alternativas de estimación de los betas. Este análisis seguía el objetivo de encontrar el mejor tipo de estimación para la construcción de la matriz del modelo de índice único. Se encontró que la metodología tradicional de Mínimos Cuadrados Ordinarios supera los tipos de estimación propuestos por Blume (1975) y Sholes y Williams (1977) en el caso colombiano, al minimizar el error cuadrático medio y el error absoluto medio en los trimestres evaluados.

Por otro lado, se mostró la alta volatilidad presente en la constante *Shrinkage* óptima. Esta se observó como función de las situaciones coyunturales en algunos de los períodos analizados. Se logró evaluar que esta constante toma más participación de la matriz muestral en momentos de alta volatilidad y de la estructural en el caso opuesto. Sin embargo, se pudo observar que el estimador propuesto por Ledoit y Wolf (2003) encontró ganancia en usar la matriz de covarianzas *Shrinkage* al no tomar sus valores extremos, los que inducirían unicamente al uso de la mátriz muestral o estructural.

Finalmente, se encontró que el mejor tipo de estimación es la matriz de covarianzas muestral, tanto en portafolios de igual ponderación, agregados por valor y portafolios de mínimo riesgo. No obstante, se encontró que las estimaciones realizadas por la matriz de covarianzas *Shrinkage* no tiene una diferencia sustancial respecto a la muestral, lo cual no desvalida totalmente su uso para el caso colombiano.

Bibliografía

ANIF. (2017). *ANIF*. Recuperado el 24 de Julio de 2019, de ANIF: anif.co/sites/default/files/investigaciones/anif-refpensional0917.pdf

Bai, J., & Shi, S. (2011). Estimating high dimensional covariance matrices and its applications. *Annals of Economics and finance 12(2)*, 199-215.

Bartholdy, J., & Peare, P. (2005). Estimation of expected return: CAPM vs. Fama and French. *International Review of Financial Analysis*, 407-427.

Betancur, J., Díaz, A., & Fernández, A. (2017). Estimación robusta de betas y el ratio de cobertura sobre futuros de índices bursátiles en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA). *21*(44), 37-71.

Blume, M. E. (1975). Betas and their regression tendencies. *30*(3), 785-795.

Chai, T., & Draxler, R. R. (2014). Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)?–Arguments against avoiding RMSE in the literature. . *Geoscientific model development,*, 1247-1250.

Connor, G., & Korajczyk, R. A. (1995). The arbitrage pricing theory and multifactor models of asset returns. *Handbooks in operations research and management science, 9*, 87-144.

Elton, E. J., & Gruber, M. J. (1973). Estimating the dependence structure of share prices implications for portfolio selection. *The Journal of Finance, 28(5).*, 1203-1232.

Fabozzi, F. J., Modigliani, F., & Ferri, M. G. (1996). *Mercados e instituciones financieras.* Pearson Education.

Fama, E. F., & French, K. R. (1997). Industry costs of equity. *Journal of financial economics, 43(2)*, 153-193.

Fama, E. F., & MacBeth, J. D. (1973). Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *Journal of political economy., 81*(3), 607-636.

Frost, P. A., & Savarino, J. E. (1986). An empirical Bayes approach to efficient portfolio selection. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 21(3)*, 293-305.

Jobson, J. D., & Korkie, B. (1980). Estimation for Markowitz efficient portfolios. *ournal of the American Statistical Association, 75* (371), 544-554.

Johnstone, I. M. (2001). On the distribution of the largest eigenvalue in principal components analysis. . *The Annals of statistics, 29(2)*, 295-327.

Kandel, S., & Stambaugh, R. F. (1995). Portfolio inefficiency and the cross-section of expected returns. *The Journal of Finance, 50*(1), 157-184.

Katscher, A., Mac Cawley, A., & Reyes, T. (2019). Properly estimating risk in emerging markets: a comparison of beta adjustment techniques. . *Emerging Markets Finance and Trade,* , 1-37.

Ledoit, O., & Wolf, M. (2000). A well-conditioned estimator for large dimensional covariance matrices. *Working paper, Departamento de Estadı´stica y Econometrı´a, Universidad Carlos III de Madrid.*

Ledoit, O., & Wolf, M. (2003). Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of empirical finance, 10*(5), 603-621.

Ledoit, O., & Wolf, M. (2004). Honey, I shrunk the sample covariance matrix. *The Journal of Portfolio Management, 30*(4), 110-119.

Ledoit, O., & Wolf, M. (2017). Nonlinear Shrinkage of the Covariance Matrix for Portfolio Selection: Markowitz Meets Goldilocks. *Review of Financial Studies, 30(12)*, 4349–4388.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance, 7*(1), 77-91.

Michaud, R. O. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is 'optimized'optimal? *Financial Analysts Journal*, 31-42.

Muirhead, R. J. (1987). Developments in eigenvalue estimation. . *In Advances in Multivariate Statistical Analysis.*, 277-288.

Pascual, R. (2014). Estimación de matrices de covarianzas: nuevas perspectivas.

Reeves, J. J., & Wu, H. (2013). Constant versus Time-Varying Beta Models: Further Forecast Evaluation. *32*(3), 256-266.

Scholes, M., & Williams, J. (1977). Estimating betas from nonsynchronous data. *Journal of financial economics, 5*(3), 309-327.

Sharpe, W. F. (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management science, 9*(2), 277-293.

Sharpe, W. F. (1994). The sharpe ratio. *Journal of portfolio management, 21*(1), 49-58.

Stein, C. (1956). Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution. *University of California, Berkeley*, 197-206.

Willmott, C. J., & Matsuura, K. (2005). Advantages of the mean absolute error (MAE) over the root mean square error (RMSE) in assessing average model performance. *Climate research*, 79-82.