UNIVERSIDAD EAFIT
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE LA FUNCIÓN $q-$ EXPONENCIAL

Autores: Telvia Rosa Castilla Peñate
Freddy Antonio Vidal Esquivel
Tutores: Dr. Gabriel Ignacio Loaiza.
Dr. Gustavo Castañeda.

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la Universidad EAFIT para optar al título de Magister en Matemáticas Aplicadas.

Medellin, Colombia
30 de mayo de 2014

Índice general

Resumen

El presente trabajo está orientado en primer lugar a representar matricialmente a la función $q-$ exponencial a partir del desarrollo de series de potencias. Para esto se consideran matrices cuadradas diagonalizables. Además extenderemos las propiedades dadas para la matriz exponencial natural a la matriz $q-$exponencial de una matriz diagonalizable. Tambien se realiza una revisión de los resultados teóricos existentes sobre normas y series de matrices, y los desarrollados para la exponencial de una matriz cuadra A.

Introducción

El término funciones de matrices nos lleva a preguntarnos sobre el significado de expresiones tales como $\sin(A), \cos(A), e^A, \ln(A)$. El conjunto de estas funciones tiene una estructura de espacio métrico, por lo que podemos hablar de límites, derivadas, integrales, series, de funciones matriciales, y aademás es isomorfo al espacio euclideo $\mathbb{R}^2$ [**22**]. En las últimas décadas éstas funciones han recibido un gran impulso debido a su aplicación en numerosos campos de la ingeniería y de la matemática aplicada[**21**].

Una de las funciones matriciales más importante es la función exponencial, debido a su relación con la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales [**23**], [**24**] que aparecen en la solución de diversos modelos asociados a fenómenos físicos, biológicos, químicos, económicos, etc.

Dado que las propiedades de la matriz dependen del tipo de problema, generalmente encontrar la exponencial de una matriz consiste en desarrollar un método especıfico y óptimo, para cada situación, por ejemplo [**25**], [**26**] muestran que en el análisi de sistemas diferenciales de procesos de tiempo continuo en teoría de control moderno, los resultados invariablemente recurren a la expresión $e^{\alpha At}$, donde α es una constante y A es una matriz compleja cuadrada. Otro ejemplo de este tipo lo podemos encontrar en el á rea de mecánica clásica [**27**], donde el análisis de trayectorias de puntos de masas cuya dinámica sea lineal en dos dimensiones da como resultado que las trayectorias sean descritas por la exponencial de una matriz de Hamilton aplicada a un vector de condiciones iniciales.

El método analítico básico para definir funciones de matrices se basa en la existencia de la forma generalizada de Jordan, aunque también se ha desarrollado un método analítico alternativo y muy fácil de implementar, aplicables a funciones que admitan representación en series de Taylor. Más aún nosotros extenderemos el término de funciones de matrices a las funciones $q-$ deformadas y analizaremos el significado de la expresión e_q^A.

De otro lado, en 1998 con el fin de explicar el comportamiento de ciertos fenómenos anómalos según la mecánica estadística, C. Tsallis [**1**], introdujo un nuevo funcional de entropía que depende de un parámetro real q, llamado indice de entropía, de manera que cuando q tiende a 1 recupera al funcional de entropía de Shannon; y con ello una extensión de la mecánica estadística clásica (Boltzman y Gibbs) a la mecá nica estadística no esxtensiva, en la cual se considera que la entropía no es aditiva.

Con el desarrollo de dicha teoría, se han definido las funciones $q-$exponencial y $q-$logarítmica [**3**] que contienen como límite (cuando q tiende a 1) tanto a las funciones exponencial y logaritmo naturales como a sus respectivas propiedades. También muchos resultados matemáticos se han desarrollado a partir de q deformaciones. Una compilación de los resultados básicos, es dada en la tesis de Ernesto Borges Pinheiro, dirigida por T. Sallis. En dicho trabajo *Manifestaciones Dinámicas y Termodinámicas de Sistemas no Extensivos.* se propone como problema interesante, la defininición y estudio de propiedades de la $q-$exponencial de una matriz.

En el presente trabajo pretende dar la representación matricial de la función exponencial de una matriz cuadrada como el desarrollo de una serie de potencias, además se estudiarán las propiedades de la función q- exponencial, y así hacer una propuesta para la representación matricial de la función $q-$exponencial de una matriz y sus propiedades.

La memoria de tesis se presenta como sigue: El primer capítulo presenta una introducción al las funciones matriciales. Muestra una generalización de los conceptos de integral y derivada para estas funciones.

El segundo capítulo expone las normas matriciales. El uso de normas nos permite hablar de convergencia de sucesiones de vectores y por lo tanto de matrices. Estas también permite definir de forma precisa las series de potencias de matrices. Este capítulo abre el camino para definir ya en el capitulo 3 la exponencial de una matriz. En el capítulo 4 está dedicado a definir la $q-$exponencial de una matriz cuadrada usando representación en serie de potencias y se desarrollan propiedades análogas a la de la exponencial de una matriz.

Objetivos

OBJETIVO GENERAL

Introducir y estudiar las propiedades de la q -exponencial de una matriz, asi como divulgar el desarrollo teórico de las funciones q-exponencial y q-logarítmica.

ESPECIFICOS

- Realizar una revisión de los resultados teóricos existentes sobre normas y series de matrices.
- Estudiar las funciones exponencial y logaritmo q deformadas., así como sus propiedades y relaciones con las funciones exponencial y logaritmo respectivamente.
- Revisar los resultados teóricos existentes para la exponencial de una matriz mediante desarrollos en series de potencia.
- Definir la Matriz q-exponencial y obtener su expresión mediante desarrollos en series de potencias.
- Establecer las condiciones bajo las cuales la q-exponencial de una matriz A esta definida.
- Obtener la derivada de la matriz q-exponencial y algunas propiedades de esta semejantes a las de la matriz exponencial.

Capítulo 1

Cálculo de Funciones Matriciales

Los conceptos de continuidad, derivada e integral de funciones reales de variable real son ampliamente conocidos, así como las condiciones para que una función f sea continua, diferenciable e integrable en un intervalo I. Se presenta a continuación la generalización de los conceptos de integral y derivada para funciones matriciales [**9**], que son extensión natural de dichos conceptos para funciones reales de variable real.

Definición 1.1. Si $P(t) = [P_{ij}(t)]$; definimos la integral $\int_a^b P(t)dt$ por

$$\int_a^b P(t)dt = \left[\int_a^b p_{ij}(t)dt\right] \tag{1.1}$$

Esto es, la integral de la matriz $P(t)$ es la matriz obtenida integrando cada elemento de $P(t)$, suponiendo como es natural, que cada elemento sea integrable en $[a, b]$. Se puede comprobar que la linealidad para las integrales se puede generalizar a las funciones matriciales. Esto es:

$$\begin{aligned}
\int_a^b [\alpha P(t) + \beta Q(t)]\, dt &= \left[\int_a^b (\alpha p_{ij}(t) + \beta q_{ij}(t))\, dt\right] \\
&= \left[\int_a^b \alpha p_{ij}(t)dt + \int_a^b \beta q_{ij}(t)dt\right] \\
&= \left[\alpha \int_a^b p_{ij}(t)dt + \beta \int_a^b q_{ij}(t)dt\right] \\
&= \left[\alpha \int_a^b p_{ij}(t)dt\right] + \left[\beta \int_a^b q_{ij}(t)dt\right] \\
&= \alpha \left[\int_a^b p_{ij}(t)dt\right] + \beta \left[\int_a^b q_{ij}(t)dt\right] \\
&= \alpha \int_a^b P(t)dt + \beta \int_a^b Q(t)dt
\end{aligned}$$

La continuidad y derivabilidad de funciones matriciales se definen también en función de los elementos. Decimos que una función $P(t) = [p_{ij}(t)]$ es continua en t, si cada elemento p_{ij} es continua en t. La derivada $P'(t)$ se define derivando cada elemento

$$P'(t) = \left[p'_{ij}(t)\right] \tag{1.2}$$

siempre que existan todas las derivadas $p'_{ij}(t)$.
Se comprueban fácilmente las reglas de derivación básicas para sumas y productos. Por ejemplo, si P y Q son funciones matriciales derivables, tenemos

$$(P+Q)' = P' + Q' \quad \text{si} \quad P \text{ y } Q \quad \text{son del mismo orden} \tag{1.3}$$

$$(PQ)' = P'Q + PQ' \quad \text{si el producto} \quad PQ \text{ esta definido} \tag{1.4}$$

En efecto, sean $P(t) = [p_{ij}(t)]$ y $Q(t) = [q_{ij}(t)]$.

Luego $(P+Q)(t) = P(t) + Q(t) = [p_{ij}(t) + q_{ij}(t)]$

y

$$\begin{aligned}
\left[(P+Q)(t)\right]' &= (P(t)+Q(t))' = [p_{ij}(t)+q_{ij}(t)]' = \left[p'_{ij}(t)+q'_{ij}(t)\right] \\
&= \left[p'_{ij}(t)\right] + \left[q'_{ij}(t)\right] = P'(t) + Q'(t) = [P'+Q'](t)
\end{aligned}$$

Esto es $[(P+Q)(t)]' = [P'+Q'](t)$, para todo t.

Así que: $[P+Q]' = P' + Q'$

Veamos ahora la prueba para la derivada del producto, para esto tomamos P y Q matrices de orden $m \times n$ y $n \times p$ respectivamente, y sea $C(t) = P'(t)$; $D(t) = Q'(t)$; $H(t) = P(t)Q(t)$, donde $h_{ij}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)q_{kj}(t)$.
Luego:

$$\begin{aligned}
H'(t) &= \left[h'_{ij}(t)\right] = \left[\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)q_{kj}(t)\right] = \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(p_{ik}(t)q_{kj}(t)\right)\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n}\left(p'_{ik}(t)q_{kj}(t) + p_{ik}(t)q'_{kj}(t)\right)\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} p'_{ik}(t)q_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)q'_{kj}(t)\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(t)q_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)d_{kj}(t)\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(t)q_{kj}(t)\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)d_{kj}(t)\right] \\
&= C(t)Q(t) + P(t)D(t) = P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)
\end{aligned}$$

esto es $[[PQ](t)]' = [P'Q + PQ'](t)$, para todo t, luego $[PQ]' = P'Q + PQ'$

EJEMPLO 1.2. Si $P(t)$ es no singular, entonces:

$$\left(P^{-1}(t)\right)' = -P^{-1}(t)P'(t)P^{-1}(t) \tag{1.5}$$

DEMOSTRACIÓN. Como $P(t)$ es no singular, $P(t)P^{-1}(t) = \mathcal{I}_n$. Luego

$$\left[P(t)P^{-1}(t)\right]' = [\mathcal{I}_n]'$$

$$P'(t)P^{-1}(t) + P(t)\left[P^{-1}(t)\right]' = 0$$

$$P(t)\left[P^{-1}(t)\right]' = -P'(t)P^{-1}(t)$$

$$\left[P^{-1}(t)\right]' = -P^{-1}(t)P'(t)P^{-1}(t)$$

□

Esto es

$$(P^{-1})' = -P^{-1}P'P^{-1}$$

DEFINICIÓN 1.3. La función matricial $P(t)$ es una antiderivada de la función matricial $Q(t)$ en un intervalo $\mathcal{I}$ si

$$P'(t) = Q(t), \quad \text{para todo } \ t \in \mathcal{I} \tag{1.6}$$

TEOREMA 1.4 (Derivada Nula para Funciones Matriciales). *Si P es una función matricial tal que $P'(t) = 0$ para toda t en un intervalo $\mathcal{I}$, la función matricial P es constante en $\mathcal{I}$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $P'(t) = 0$ para toda t en $\mathcal{I}$. Entonces $p'_{ij}(t) = 0$ para toda t en $\mathcal{I}$ y para todo ij. Luego por el teorema de la derivada nula para funciones reales, $p_{ij}(t)$ es constante en $\mathcal{I}$, para todo ij, esto es

$$p_{ij}(t) = c_{ij}$$

Por lo tanto

$$P(t) = [p_{ij}(t)] = [c_{ij}] = C$$

□

TEOREMA 1.5. *Si P y Q son dos funciones matriciales definidas en el intervalo $\mathcal{I}$, tales que*

$$P'(t) = Q'(t) \quad \textit{para toda } \ t \in \mathcal{I},$$

entonces existe una matriz constante C tal que

$$P(t) = Q(t) + C \quad \textit{para toda} \;\; t \in \mathcal{I}$$

Demostración. Sea la función matricial H definida en $\mathcal{I}$ por

$$\begin{aligned} H(t) &= P(t) - Q(t) \;\text{ luego }\; H'(t) = P'(t) - Q'(t) = 0 \;\text{ para toda }\; t \in \mathcal{I} \\ H'(t) = 0 \;&\text{ para toda }\; t \in \mathcal{I} \\ H(t) = C \quad &\text{(por el Teorema 1.4)} \\ P(t) - Q(t) = C \;&\text{ para toda }\; t \in \mathcal{I} \\ P(t) = Q(t) + C \;&\text{ para toda }\; t \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

□

1. Teorema Fundamental del Cálculo para Funciones Matriciales

Teorema 1.6 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea P una función matricial continua sobre $[a, b]$ y $t \in [a, b]$ cualquiera. Si*

$$A(t) = \int_a^t P(s)ds \quad \textit{entonces} \quad A'(t) = P(t) \tag{1.7}$$

Demostración. Sean $A(t) = [a_{ij}(t)]$, $P(t) = [p_{ij}(t)]$.
Luego

$$A(t) = \int_a^t P(s)ds = \left[\int_a^t p_{ij}(s)ds\right]$$

Así

$$a_{ij}(t) = \int_a^t p_{ij}(s)ds \tag{1.8}$$

□

Ahora como P es continua en $[a, b]$, entonces cada p_{ij} es continua en $[a, b]$, luego por el primer teorema fundamental del cálculo para funciones reales (ver [**17**]) y (1.8)) se sigue que

$$a'_{ij}(t) = p_{ij}(t) \quad \text{para cada} \;\; i, j \;\text{ y cada }\; t \in [a, b]$$

esto es

$$A'(t) = P(t)$$

Teorema 1.7 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo). *Sean* P *una función matricial continua en* $[a,b]$ *y* A *una función matricial tal que*

$$A'(t) = P(t) \quad \textit{para todo} \;\; t \in [a,b],$$

entonces

$$\int_a^b P(t)dt = A(b) - A(a) \tag{1.9}$$

Demostración. Sean $A(t) = [a_{ij}(t)]$, $P(t) = [p_{ij}(t)]$. Como $A'(t) = P(t)$ para todo $t \in [a,b]$, entonces

$$a'_{ij}(t) = p_{ij}(t) \;\; \text{para cada} \;\; t \in [a,b]$$

Como P es continua en $[a,b]$, por el teorema fundamental del cálculo para funciones reales (ver [**17**]) tenemos que

$$\int_a^b p_{ij}(t)dt = a_{ij}(b) - a_{ij}(a) \quad \text{para cada} \;\; i,j$$

Luego

$$\int_a^b P(t)dt = \left[\int_a^b p_{ij}(t)dt\right] = [a_{ij}(b) - a_{ij}(a)] = [a_{ij}(b)] - [a_{ij}(a)] = A(b) - A(a)$$

Esto es

$$\int_a^b P(t)dt = A(b) - A(a).$$

□

Observación 1.8.

$$\int P(t)dt = \left[\int p_{ij}(t)dt + c_{ij}\right] = [a_{ij}(t) + c_{ij}] = [a_{ij}(t)] + [c_{ij}] = A(t) + C,$$

de donde

$$A'(t) = P(t)$$

Ejemplo 1.9. Para una función matricial $P(t)$, $\displaystyle\int_a^a P(t)dt = 0.$
En efecto,

$$\int_a^a P(t)dt = \left[\int_a^a p_{ij}(t)dt =\right] = [0] = 0$$

2. Formula de Integración por Partes para Funciones Matriciales

Sean $P(t)$ y $Q(t)$ funciones matriciales, entonces

$$\int P(t)Q'(t)dt = P(t)Q(t) - \int Q(t)P'(t)dt \tag{1.10}$$

En efecto

$$\frac{d}{dt}[P(t)Q(t)] = P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t), \quad \text{luego} \quad P(t)Q'(t) = \frac{d}{dt}[P(t)Q(t)] - P'(t)Q(t)$$

Integrando a ambos lados de la igualdad anterior respecto a t se tiene que

$$\int P(t)Q(t)'dt = [P(t)Q(t)] - \int Q(t)P'(t)dt \tag{1.11}$$

Capítulo 2

Normas Matriciales y Convergencia

En este capítulo estudiaremos lo referente a las normas matriciales y las series de matrices. El concepto de norma matricial es de gran utilidad para el estudio de las series de matrices, dado que un criterio de convergencia de una serie de matrices se establece en función de la norma de una matriz. Motivo por el cual este capítulo prepara la teoría necesaria para el estudio de las funciones de matrices que desarrollaremos en los capítulos siguientes.

1. Normas Matriciales

Definición 2.1 (Norma Matricial). Una función $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ es llamada una norma matricial si para todo $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, se satisfacen las siguientes condiciones

N_1. $\|A\| \geq 0$
N_2. $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$
N_3. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$
N_4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
N_5. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Definición 2.2 (Normas Equivalentes). Sean $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_0$ dos normas en $\mathbb{C}^{n\times n}$, se dice que $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_0$ son equivalentes, si para cualquier matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existen constantes $a, b > 0$ tales que

$$a\|A\|_* \leq \|A\|_0 \leq b\|A\|_* \tag{2.1}$$

Para la prueba de que todas las normas en $\mathbb{C}^{n\times n}$, son equivalentes haremos uso del siguiente resultado.

Lema 2.3. *Si $\|\cdot\|$ es una norma matricial y $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una base para $\mathbb{C}^{n\times n}$, entonces dado un conjunto de escalares no todos nulos $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ existe una constante positiva k tal que*

$$\|\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_n A_n\| \geq k \tag{2.2}$$

Teorema 2.4. *Todas las normas en $\mathbb{C}^{n\times n}$ son equivalentes.*

Demostración. Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una base para $\mathbb{C}^{n\times n}$ y $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_0$ normas matriciales cualesquiera en $\mathbb{C}^{n\times n}$.
Ahora si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, es no nula (para $A = 0$ el resultado es inmediato), existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ no todos nulos tales que $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, \ldots, \alpha_n A_n$. Sea $\lambda = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$ y tomemos $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{\lambda}$. Luego por el lema 2.3 existe una constante positiva k tal que $\|\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_n A_n\|_* = \dfrac{1}{\lambda}\|\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n\|_* > k$, de donde se sigue que $\|A\|_* > k\lambda = k\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$, esto es:

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| < c\|A\|_* \qquad \text{donde} \quad c = \frac{1}{k} \tag{2.3}$$

Además $\|A\|_0 = \|\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, \ldots, \alpha_n A_n\|_0$. Sea $m = \max\limits_{1\leq i\leq n} \{\|A_1\|_0, \|A_2\|_0, \ldots, \|A_n\|_0\}$.

Así que

$$\begin{aligned}
\|A\|_0 &\leq |\alpha_1|\|A_1\|_0 + |\alpha_2|\|A_2\|_0 + \ldots + |\alpha_n|\|A_n\|_0 \\
&\leq |\alpha_1|m + |\alpha_2|m + \ldots + |\alpha_n|m \\
&= m\left(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|\right) = m\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|
\end{aligned}$$

es decir

$$\|A\|_0 \leq m\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \tag{2.4}$$

De (2.3) y (2.4) se sigue que

$$\|A\|_0 \leq b\|A\|_* \qquad \text{donde} \quad b = cm.$$

De igual forma se prueba que existe una constante positiva a tal que:

$$a\|A\|_* \leq \|A\|_0$$

Finalmente se tiene que

$$a\|A\|_* \leq \|A\|_0 \leq b\|A\|_*$$

y así tiene que $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_0$ son equivalentes. Como $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_0$ son arbitrarias, entonces el resultado es válido para dos normas cualesquiera, y por lo tanto todas las normas en $\mathbb{C}^{n\times n}$ son equivalentes. $\square$

Este teorema es de vital importancia, pues garantiza que la convergencia o divergencia de una serie de matrices, como veremos más adelante, es independiente de la elección de la norma.

Definición 2.5 (Norma de una Matriz). Si A es una matriz de orden $m \times n$ de números reales o complejos, la norma de A, designada por $\|A\|$, se define [**9**] como el número no negativo dado por la fórmula

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \tag{2.5}$$

Es decir, la norma de A es la suma de los valores absolutos de todos sus elementos. Algunas veces se usan otras definiciones de la norma, pero hemos elegido esta por la facilidad con la que podemos demostrar las propiedades de la norma.
En efecto

(i) Por la definición 2.5, es claro que $\|A\| \geq 0$ para toda matriz A.

(ii)

$$\begin{aligned}\|A\| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = 0 \Longleftrightarrow |a_{ij}| = 0. \quad (\forall i \in \{1,2,\ldots,m\} \text{ y } \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}) \\ &\Longleftrightarrow \quad a_{ij} = 0 \quad (\forall i \in \{1,2,\ldots,m\} \text{ y } \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}) \Longleftrightarrow A = 0\end{aligned}$$

(iii)

$$\|\alpha A\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|\alpha a_{ij}| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|\alpha||a_{ij}| = |\alpha|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = |\alpha|\|A\|$$

(iv)

$$\begin{aligned}\|A+B\| &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|+|b_{ij}|) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| + \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| = \|A\| + \|B\|\end{aligned}$$

(v) Sean A de orden $m \times n$ y B de orden $n \times p$.

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}b_{kj}| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}| \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\sum_{j=1}^{p}|b_{kj}| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\|B\| = \|A\|\|B\|\end{aligned}$$

Observación 2.6. En el caso especial $B = A$ la desigualdad para $\|AB\|$, se convierte en $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Por inducción tenemos que

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

Estas desigualdades se usarán en la discusión de la exponencial de una matriz.

Ejemplo 2.7. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\|A\| = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = |1| + |-2| + |3| + |5| = 11$

Ejemplo 2.8. Vemos que según (2.5) , $\|\mathcal{I}_n\| = n$.

En efecto
sea $\mathcal{I}_n = (\delta_{ij})$, donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ & \qquad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Luego $\|\mathcal{I}_n\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\delta_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} |\delta_{ii}| = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

Ejemplo 2.9. Si $\|\cdot\|$ una norma matricial en $\mathbb{C}^{n\times n}$, y si $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible, entonces

$$\|A\|_S = \|S^{-1}AS\| \tag{2.7}$$

es una norma matricial.

Demostración. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\|\cdot\|_*$ una norma matricial $in\mathbb{C}^{n\times n}$

(i) $\|A\|_S = \|S^{-1}AS\| \geq 0$, dado que $\|\cdot\|$ es una norma matricial en $\mathbb{C}^{n\times n}$.

(ii)

$$\begin{aligned} \|A\|_S = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \|S^{-1}AS\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad S^{-1}AS = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad SS^{-1}ASS^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_n A \mathcal{I}_n = 0 \Leftrightarrow A = 0 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \|\alpha A\|_S &= \|S^{-1}(\alpha A)S\| = \|\alpha(S^{-1}AS)\| \\ &= |\alpha|\|S^{-1}AS \\ &= |\alpha|\|A\|_S \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \|A+B\|_S &= \|S^{-1}(A+B)S\| = \|S^{-1}AS + S^{-1}BS\| \\ &\leq \|S^{-1}AS\| + \|S^{-1}BS \\ &= \|A\|_S + \|B\|_S \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} \|AB\|_S &= \|S^{-1}(AB)S\| = \|(S^{-1}AS)(S^{-1}BS)\| \\ &\leq \|S^{-1}AS\|\|S^{-1}BS\| \\ &= \|A\|_S\|B\|_S \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.10. Si una función matricial P es integrable en un intervalo $[a,b]$, entonces

$$\left\| \int_a^b P(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|P(t)\|dt \tag{2.8}$$

Demostración. Sea $P(t) = [p_{ij}(t)]$, entonces $\|P(t)\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |p_{ij}(t)|$.

Luego

$$\int_a^b P(t)dt = \left[\int_a^b p_{ij}(t)dt\right]$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b P(t)dt \right\| &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left| \int_a^b p_{ij}(t)dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_a^b |p_{ij}(t)|dt \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |p_{ij}(t)| \right) dt \\ &= \int_a^b \|P(t)\|dt \end{aligned}$$

Así

$$\left\| \int_a^b P(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|P(t)\|dt$$

□

2. Norma Matriciales Inducidas por una Norma Vectorial

Es usual que la norma matricial esté íntimamente ligada a una norma vectorial.
En esta sección mostraremos el procedimiento para construir una norma matricial sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$ compatible con una norma vectorial dada sobre $\mathbb{C}^n$.
Para esto comencemos definiendo lo que es una norma vectorial.

Definición 2.11 (Norma Vectorial). Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una norma vectorial en V es una función $\|\cdot\|$ definida de V al conjunto de los números reales no negativos tal que para todo $x, b \in V$, satisface las siguientes propiedades:

1). $\|x\| \geq 0$
2). $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3). $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
4). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

La norma de un vector x se puede considerar como la longitud o magnitud del vector x. El concepto de norma generaliza la noción de valor absoluto de un número real o complejo.

Es inmediato verificar usando la propiedad (4) de la definición 2.11 que:

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\| \tag{2.9}$$

Se pueden definir una infinidad de normas sobre $\mathbb{C}^n$.
Las siguientes son algunas de las normas de uso más frecuente en $\mathbb{C}^n$.

Ejemplo 2.12. La norma Euclidiana (o norma 2) se define por

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \tag{2.10}$$

Veamos que $\|x\|_2$ es una norma

- Es claro que $\|x\|_2 \geq 0$, dado que $|x_i| \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \cdot, n\}$.

-

$$
\begin{aligned}
\|x\|_2 = 0 \iff & \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \\
\iff & |x_i|^2 = 0, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \iff |x_i| = 0, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \\
\iff & x_i = 0, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \iff x = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

- $\|\alpha x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha|^2 |x_i|^2\right)^{1/2} = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = |\alpha| \|x\|_2$
- $\|x+y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2 + \|y\|_2$ Lo cual prueba que $\|\cdot\|_2$ es una norma sobre $\mathbb{C}^n$. El último resultado es un caso particular es la conocida **desigualdad de Minkowski** [**16**], la cual establece que para $p \geq 1$,

$$
\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \tag{2.11}
$$

Ejemplo 2.13. La norma Suma (o norma 1) definida por:

$$
\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \tag{2.12}
$$

Veamos que $\|\cdot\|_1$ una norma.

- Es claro que $\|x\|_1 \geq 0$, dado que $|x_i| \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \cdot, n\}$.
-

$$
\begin{aligned}
\|x\|_1 = 0 \iff & \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \iff |x_i| = 0, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \\
\iff & x_i = 0, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \iff x = 0
\end{aligned}
$$

- $\|\alpha x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha| |x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\alpha| \|x\|_1$
- $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

EJEMPLO 2.14. La norma p, definida por:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \ \ p \in \mathbb{R}, \ \ p \geq 1, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \tag{2.13}$$

Note que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son casos particulares de $\|\cdot\|_p$.
Veamos que $\|\cdot\|_p$ es en efecto una norma.

- Es claro que $\|x\|_p \geq 0$, dado que $|x_i| \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \cdot, n\}$.
-

$$\begin{aligned} \|x\|_p = 0 \iff & \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ \iff & |x_i|^p = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \iff |x_i| = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ \iff & x_i = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \iff x = \mathbf{0} \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha|^p |x_i|^p\right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \\ &= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = |\alpha| \|x\|_p \end{aligned}$$

- $\|x+y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p$, por (2.11).

EJEMPLO 2.15. La norma máxima (o norma ∞) o norma de Chebyschev, definida por

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \tag{2.14}$$

Se puede probar que

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p \tag{2.15}$$

Veamos que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma.

DEMOSTRACIÓN.

- Es claro que $\|x\|_\infty \geq 0$, dado que $|x_i| \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \cdot, n\}$.

- $$\begin{aligned} \|x\|_\infty = 0 &\iff \max_{1\le i\le n} |x_i| = 0 \iff |x_i| = 0, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \\ &\iff x_i = 0, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \iff x = \mathbf{0} \end{aligned}$$

- $$\|\alpha x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |\alpha x_i| = \max_{1\le i\le n} |\alpha||\alpha x_i| = |\alpha| \max_{1\le i\le n} |\ x_i| = |||x\|_\infty$$

- $$\begin{aligned} \|x+y\|_\infty &= \max_{1\le i\le n} |x_i + y_i| \le \max_{1\le i\le n} (|x_i| + |y_i|) \\ &= \left(\max_{1\le i\le n} |x_i|\right) + \left(\max_{1\le i\le n} |y_i|\right) = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

Lo cual prueba que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma. □

Observación 2.16. Note que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ satisfacen la siguiente relación

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1, \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{C}^n \tag{2.16}$$

En efecto

Sea $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Supongamos que el $\max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ ocurre en $i = k$, esto es $|x_k| = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i| = \|x\|_\infty$.

Ahora $|x_k|^2 \le |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2$, esto es $|x_k| \le \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2$,

de donde $|x_k|^2 \le \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$, es decir

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \tag{2.17}$$

Veamos ahora que $\|x\|_2 \le \|x\|_1$ En efecto, para esto debemos probar que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 \tag{2.18}$$

Miremos la prueba por inducción matemática.

- Para $n=1$, el resultado es claro.
- Supongamos que el enunciado es válido para n y veamos que se cumple para $n+1$. En efecto

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+|x_{n+1}|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2+|x_{n+1}|^2\\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)|x_{n+1}|+|x_{n+1}|^2\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|+|x_{n+1}|\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|\right)^2\end{aligned}$$

esto es $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|\right)^2$

lo cual prueba que el enunciado es válido para $n+1$ y por lo tanto se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se sigue la valides de (2.18).

Ahora, como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|, \qquad \text{es decir} \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \tag{2.19}$$

Luego de (2.17) y (2.19) se sigue que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

También se puede probar que para cualquier $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2, \quad \frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \tag{2.20}$$

Definición 2.17 (Normas Equivalentes). Dos normas N_1 y N_2 sobre $\mathbb{C}^n$ se dicen equivalentes si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$\forall\ x \in \mathbb{C}^n: \quad c_1N_1(x) \leq N_2(x) \leq c_2N_1(x) \tag{2.21}$$

Las desigualdades en (2.20) nos dicen que las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalente. Más aún se puede probar que cualquiera de dos normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes [ver [**8**]].

Ejemplo 2.18. Sea $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculemos $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ y $\|x\|_\infty$.

En efecto: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^4 |x_i|^2\right)^{1/2}$

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^4 |x_i|^2\right)^{1/2} = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2\right)^{1/2} \\ \|x\|_2 &= (1+4+9+0)^{1/2} = \sqrt{14} \\ \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^4 |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 1+2+3+0 = 6 \\ \|x\|_\infty &= \max_{1\le i\le 4} |x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4|\} = \max\{1,2,3,0\} = 3 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.19. Otro ejemplo de norma en $\mathbb{C}^n$ viene dado por:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n 2^{-i}|x_i| \qquad \text{con} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Veamos que (2.22) es en efecto una norma.

- Claramente $\|x\| \ge 0$, dado que $2^{-i}|x_i| \ge 0 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$
-

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\iff \sum_{i=1}^n 2^{-i}|x_i| = 0 \iff 2^{-i}|x_i| = 0 \iff |x_i| = 0 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \\ &\iff x_i = 0 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \iff x = \mathbf{0} \end{aligned}$$

- $\|\alpha x\| = \sum_{i=1}^n 2^{-i}|\alpha x_i| = \sum_{i=1}^n 2^{-i}|\alpha||x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^n 2^{-i}|x_i| = |\alpha|\|x\|$
-

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \sum_{i=1}^n 2^{-i}|x_i+y_i| \le \sum_{i=1}^n 2^{-i}\left(|x_i| + |y_i|\right) \\ &= \sum_{i=1}^n 2^{-i}|x_i| + \sum_{i=1}^n 2^{-i}|y_i| = \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Lo cual prueba que (2.22) es una norma en $\mathbb{C}^n$.

Definición 2.20 (Norma Matricial Inducida (subordinada) por una Norma Vectorial). Si se ha especificado una norma vectorial $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{C}^n$ y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ su norma matricial subordinada se define [**16**]como

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|, \qquad x \in \mathbb{C}^n \tag{2.23}$$

Esta también se conoce como la norma matricial asociada con la norma vectorial dada.

Teorema 2.21. *si $\|\cdot\|$ es cualquier norma sobre $\mathbb{C}^n$, entonces la ecuación* (2.23) *define una norma matricial sobre el espacio lineal de todas las matrices de orden $n \times n$.*

Demostración. Veamos que se satisface los axiomas correspondientes a la definición 2.1. En efecto:

- $\|A\| \geq 0$.
  sea $x_0 \in \mathbb{C}^n$, como $\|x_0\| = 1$ y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
  Luego $Ax_0 \in \mathbb{C}^n$ y así $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ax_0\| \geq 0$.
- $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = \mathbf{0}$.
  note que $A = 0 \Rightarrow \|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 0$, dado que $\|Ax\| = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n$.
  Así mismo $\|A\| = 0 \Rightarrow \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n, \quad \|x\| = 1$.

$$\Rightarrow \quad Ac_j = 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad c_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow A = \mathbf{0}; \quad \text{dado que cada columna de } A \text{ es nula}$$

  de lo anterior $\|A\| = \mathbf{0} \Rightarrow A = \mathbf{0}$, de lo cual se sigue que $\|A\| = \mathbf{0} \Longleftrightarrow A = \mathbf{0}$.
- $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.

$$\|\alpha A\| = \max_{\|x\|=1} \|(\alpha A)x\| = \max_{\|x\|=1} |\alpha|\|Ax\| = |\alpha| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\alpha|\|A\|$$

- $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$\begin{aligned}\|A+B\| &= \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\| \leq \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \\ &\leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|\end{aligned}$$

- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.
Veamos inicialmente que

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n \tag{2.24}$$

En efecto: Para $x = 0$, el resultado es obvio.
Ahora, para $x \neq 0$, sea $v = \dfrac{x}{\|x\|}$, así $\|v\| = 1$.
Por lo tanto de la definición 2.20, se sigue que:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Av\| = \left\| A\frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

esto es $\|A\| \geq \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$, de donde $\|A\|\|x\| \geq \|Ax\|$, es decir $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ lo cual prueba (2.24).

Luego

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max_{\|x\|=1} \|(AB)\| = \max_{\|x\|=1} \|A(Bx)\| \leq \max_{\|x\|=1} \|A\|\|Bx\| \\ &\leq \|A\| \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\|\|B\|\end{aligned}$$

así $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

$\square$

De lo anterior se sigue que (2.23) define una norma matricial sobre $\mathbb{C}^n$ Ṅótese que

$$\|\mathcal{I}_n\| = \max_{\|x\|=1} \|\mathcal{I}_n x\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

así que para toda norma matricial subordinada se tiene que $\|\mathcal{I}_n\| = 1$ y $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n$.

En general si $\|\cdot\|$ es una norma matricial cualquiera sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$, se cumple que:

$$\|\mathcal{I}n\| \geq 1 \tag{2.25}$$

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}, \qquad \text{para } A \text{ invertible} \tag{2.26}$$

estos resultados se pueden verificar fácilmente.

En efecto

$$\|\mathcal{I}n\| = \|\mathcal{I}n \cdot \mathcal{I}n\| \leq \|\mathcal{I}n\|\|\mathcal{I}n\| \Rightarrow \|\mathcal{I}n\| \leq \|\mathcal{I}n\|\|\mathcal{I}n\| \Rightarrow \|\mathcal{I}n\| \quad \geq \quad 1$$

dado que $\mathcal{I}n \neq 0, \quad \|\mathcal{I}n\| > 0.$

Luego: para A invertible,

$$1 \leq \|\mathcal{I}n\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$$

esto es $\|A\|\|A^{-1}\| \geq 1$, de donde $\|A^{-1}\| \geq \dfrac{1}{\|A\|}$

Veamos ahora como se definen explicitamente las normas matriciales inducidas por las normas vectoriales $\|\cdot\|_1 y \quad \|\cdot\|_\infty$.

Ejemplo 2.22. Sea $\|\cdot\|_1$ la norma matricial inducida por la norma vectorial $\|\cdot\|_1$.

Por definición 2.20,

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_1$$

Mostremos que si $A = [a_{ij}]$, entonces

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{2.27}$$

En efecto: si $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \right) \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) = \|x\|_1 \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)
\end{aligned}$$

esto es $\|Ax\|_1 \leq \|x\|_1 \left(\max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right), \quad \forall x \in \mathbb{C}^n,$ de donde

$$\|Ax\|_1 \leq \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right), \quad \text{con } \|x\|_1 = 1$$

Así que:

$$\|A\|_1 \leq \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \tag{2.28}$$

Supongamos ahora que el $\max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ ocurre para $i = k, \; k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, esto es

$$\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$$

y tomemos $x_0 = e_k = [0 \ldots 1 \ldots 0]^T$, entonces $\|x_0\|_1 = 1$.

Luego $\|Ax_0\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

Así que

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_1 \geq \|Ax_0\|_1$$

Es decir

$$\|A\|_1 \geq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{2.29}$$

Así de (2.28) y (2.45) se sigue que

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Esta norma $\|\cdot\|_1$ también es llamada norma máxima suma de las columnas o simplemente norma columna.

Por ejemplo, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}\|_1 &= \max_{1\le j\le 3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}| = \max\left\{\sum_{i=1}^{3}|a_{i1}|,\ \sum_{i=1}^{3}|a_{i2}|,\ \sum_{i=1}^{3}|a_{i3}|\right\}\\
&= \max\{|a_{11}|+|a_{21}|+|a_{31}|, |a_{12}|+|a_{22}|+|a_{32}|, |a_{13}|+|a_{23}|+|a_{33}|\}\\
&= \max\{|0|+|2|+|-5|, |1|+|1|+|2|, |-1|+|3|+|1|\}\\
&= \max\{7,4,5\} = 7
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.23. Sea $\|\cdot\|_\infty$ la norma matricial inducida por la norma vectorial $\|\cdot\|_\infty$. Por definición 2.20,

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|_\infty$$

Mostremos que si $A=[a_{ij}]$, entonces

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \tag{2.30}$$

En efecto, si $x=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T\in\mathbb{C}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_\infty &= \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right| \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left[|a_{ij}|\max_{1\le k\le n}|x_k|\right]\\
&\le \left(\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)\|x\|_\infty
\end{aligned}$$

esto es $\|Ax\|_\infty \le \left(\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)\|x\|_\infty, \quad \forall x\in\mathbb{C}^n$, de donde

$$\|Ax\|_\infty \le \left(\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right), \quad \text{con } \|x\|_\infty = 1$$

Así que:

$$\|A\|_\infty \le \left(\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right) \tag{2.31}$$

Veamos ahora que

$$\left(\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right) \le \|A\|_\infty \tag{2.32}$$

En efecto: note que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe el vector $x^i = \left[x_1^i, \ldots x_j^i, \ldots x_n^i\right]^T \in \mathbb{C}^n$, donde

$$x_j^i = \begin{cases} \frac{\overline{a_{ij}}}{|a_{ij}|}, & a_{ij} \neq 0 \\ \\ 1 & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

tal que $\|x^i\|_\infty = 1$ y $a_{ij}x_j^i = |a_{ij}|$.
Luego

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty \geq \|Ax^i\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^i \right| \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \end{aligned}$$

es decir $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \|A\|_\infty$.

lo cual prueba (2.32).

Por lo tanto de (2.31) y (2.32) se sigue

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Esta norma $\|\cdot\|_\infty$ también es llamada norma máxima suma de las filas o simplemente norma fila.

Por ejemplo, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| = \max \left\{ \sum_{j=1}^3 |a_{1j}|, \ \sum_{j=1}^3 |a_{2j}|, \ \sum_{j=1}^3 |a_{3j}| \right\} \\ &= \max \{|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}|, |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{23}|, |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{33}|\} \\ &= \max \{|0| + |1| + |-1|, |2| + |1| + |3|, |-5| + |2| + |1|\} \\ &= \max \{2, 6, 8\} = 8 \end{aligned}$$

A diferencia de las normas matriciales $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$, para la norma $\|\cdot\|_2$ no se dispone de una fórmula como (2.27) o (2.30) que exprese de manera sencilla $\|A\|_2$ en términos de las componentes de la matriz A. Para $\|\cdot\|_2$ se tiene que $\|A\|_2^2$ es el máximo de los valores propios de A^HA [**16**], es decir, $\|A\|_2 = \text{máx}\left\{\sqrt{\lambda}/\lambda \text{ es un valor propio de } A^HA\right\}$, la norma matricial $\|\cdot\|_2$ se conoce como norma espectral.

Definición 2.24 (Número de Condición de una Matriz). Para una matriz $A \in C^{n\times n}$ invertible, el número de condición de A notado $K(A)$, se define por

$$K(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \tag{2.33}$$

Su valor depende de la norma seleccionada y tiene sus aplicaciones en análisis numérico [**12**].

Propiedades del número de condición de una matriz.

- Para $A \in C^{n\times n}$, invertible
$$K(A) \geq 1 \tag{2.34}$$
En efecto: $1 = \|\mathcal{I}n\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$ esto es $K(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \geq 1$.
- Para $A \in C^{n\times n}$, $\lambda \neq 0$, A, invertible
$$K(\lambda A) = K(A) \tag{2.35}$$
En efecto:
$$\begin{aligned} K(\lambda A) &= \|\lambda A\|\|\left(\lambda A\right)^{-1}\| = |\lambda|\|A\|\|\frac{1}{\lambda}A^{-1}\| = |\lambda|\|A\|\frac{1}{|\lambda|}\|A^{-1}\| \\ &= \|A\|\|A^{-1} = K(A) \end{aligned}$$
- Para $A, B \in C^{n\times n}$, invertible
$$K(AB) \leq K(A)K(B) \tag{2.36}$$
En efecto:
$$\begin{aligned} K(AB) &= \|AB\|\|\left(AB\right)^{-1}\| = \|AB\|\|B^{-1}A^{-1}\| \leq \|A\|\|B\|\|B^{-1}\|\|A^{-1}\| \\ &= \left(\|A\|\|A^{-1}\|\right)\left(\|B\|\|B^{-1}\|\right) = K(A)K(B) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.25. Si $A \in C^{n\times n}$ tiene un punto fijo no trivial (es decir, $Ax = x$, $x \neq 0$), entonces $\|A\| \geq 1$.

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{C}^n$, $x_0 \neq 0$ tal que $Ax_0 = x_0$.
Luego $\|Ax_0\| = \|x_0\| \Rightarrow \|x_0\| = \|Ax_0\| \leq \|A\|\|x_0\|$ de donde $\|x_0\| \leq \|A\|\|x_0\|$ y así $\|A\| \geq 1$ dado que $\|x_0\| > 0$. □

3. Series de Matrices

El objetivo de esta sección es introducir las series de matrices. El uso de normas nos permite hablar de convergencia de sucesiones de vectores y por lo tanto de matrices.
El estudio de normas de matrices es necesario para definir de forma precisa series de potencias de matrices.

Definición 2.26. Sea $\{x_k\}$ una sucesión en $\mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^n$ y $\|\cdot\|$ una norma vectorial en $\mathbb{C}^n$.
Decimos que $\{x_k\}$ converge al límite x (lo cual notamos $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$ o $x_k \to x$ cuando $k \to +\infty$), si

$$(\varepsilon > 0)\,(\exists m \in \mathbb{N})\,(k \geq m \Longrightarrow \|x_k - x\| < \varepsilon) \tag{2.37}$$

Se satisfacen las siguientes equivalencias

i).

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x \Longleftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \|x_k - x\| = 0 \tag{2.38}$$

ii).

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x \Longleftrightarrow \lim_{k\to+\infty} x_j = x_j \tag{2.39}$$

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

La equivalencia dada por (2.39) dice que la noción de convergencia definida por (2.37) corresponde a la idea natural de convergencia "*componente a componente*".

Definición 2.27. Sea $\{A_k\}$, $A_k = \left[a_{ij}^k\right]$, una sucesión de matrices en $C^{n\times n}$ y sea $A = [a_{ij}]$ en $C^{n\times n}$.

Decimos que $\{A_k\}$ converge al límite A y lo notamos $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$ o también $A_k \longrightarrow A$ cuando $k \longrightarrow +\infty$, si

$$\lim_{k\to+\infty} a_{ij}^k = a_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{2.40}$$

se cumple que para cualquier norma matricial $\|\cdot\|$ sobre $C^{n\times n}$,

$$\lim_{k\to+\infty} A_k = A \Longleftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \|A_k - A\| = 0 \tag{2.41}$$

Definición 2.28. Sea $A \in C^{n\times n}$. Si $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = \mathbf{0}$, decimos que A es una matriz convergente.

Teorema 2.29. *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Si existe una norma matricial $\|\cdot\|$ tal que $\|A\| < 1$, entonces A es convergente*

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ una norma matricial tal que $\|A\| < 1$. Por (2.6) se tiene que $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, y dado que $\|A\| < 1$, entonces $\|A\|^k \longrightarrow 0$, cuando $k \longrightarrow +\infty$, esto significa que $\|A^k\| \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$, esto es $\lim\limits_{k\to+\infty} \|A^k\| = 0$, lo cual equivale a $\lim\limits_{k\to\infty} \|A^k - 0\| = 0$, de donde se sigue por (2.41) que $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$. □

Definición 2.30 (Serie Convergente de Matrices). Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión infinita de matrices con elementos en $C^{n\times n}$. Con esta sucesión se forma la sucesión de las sumas parciales

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} A_j, \quad k \geq 1 \tag{2.42}$$

la serie de matrices $\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ converge si la sucesión de sumas parciales converge.

Otra forma de ver la convergencia de una serie de matrices es la siguiente.
Designemos el elemento ij de A_k por a_{ij}^k si todas las $m \times n$ series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m\ ; \quad j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.43}$$

Son convergente, decimos entonces que la serie de la matriz $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^k$ es convergente, y su suma está definida como la matriz $n \times m$ cuyo elemento ij es la serie (2.43).
Un sencillo útil criterio de convergencia de una serie de matrices puede darse en función de la norma de una matriz.

El teorema que sigue nos da una útil condición suficiente para la convergencia de una serie de matrices.

TEOREMA 2.31 (Criterio de Convergencia para Series de Matrices). *Si* $\{A_k\}$ *es una serie de matrices* $m \times n$ *tales que* $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|_*$ *converge para alguna norma matricial* $\|\cdot\|_*$, *entonces la serie matricial* $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ *también converge.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\|\cdot\|_*$ una norma matricial tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|_*$ converge, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ también converge para la norma dada por (2.5) dado que todas las normas en $C^{m\times n}$ son equivalentes.

Ahora, designemos el elemento ij de A_k por $a_{ij}^{(k)}$. Dado que $|a_{ij}^k| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^{(k)}| = \|A_k\|$, y como $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ converge, entonces por criterio de comparación directa cada una de las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ converge absolutamente, lo que a su vez implica que cada una de las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ converge, por lo que la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ es convergente. □

En particular, para matrices cuadradas la serie de potencia $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\|A^k\|$ es convergente si lo es la serie numérica $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\|A\|^k$.

En efecto: Designemos el elemento ij de A_k por $a_{ij}^{(k)}$, así el elemento ij de c_kA^k es $c_ka_{ij}^{(k)}$.

Luego

$$|c_ka_{ij}^k| = |c_k||a_{ij}^k| \leq |c_k|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^{(k)}| = |c_k|\|A^k\| \leq |c_k|\|A\|^k$$

esto es $|c_ka_{ij}^k| \leq |c_k|\|A\|^k$.

Como $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\|A\|^k$ es convergente, entonces cada una de las series $\sum_{k=0}^{\infty} c_ka_{ij}^k$ converge absolutamente y por lo tanto cada una de ellas es convergente, lo cual prueba que las serie de matrices $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ también converge.

De lo anterior se sigue que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ es convergente si la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$ es convergente.

Teorema 2.32 (Series de Neumann). *Si* $A \in C^{n\times n}$ *y* $\|A\| < 1$ *para alguna norma matricial, entonces* $\mathcal{I}_n - A$ *es invertible y*

$$(\mathcal{I}_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \tag{2.44}$$

Además $\|(\mathcal{I}_n - A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|A\|}$

Demostración. Sean $A \in C^{n\times n}$ y $\|\cdot\|$ una norma matricial tal que $\|A\| < 1$. Como $\|A\| < 1$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$ es convergente y en consecuencia $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ también converge.

Sea $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$, luego

$$(\mathcal{I}_n - A)S_k = (\mathcal{I}_n - A)\sum_{j=0}^{k} A^j = (\mathcal{I} - A)\left(\mathcal{I}_n + A + A^2 + \ldots + A^k\right) = \mathcal{I}_n - A^{k+1}$$

Esto es $(\mathcal{I}_n - A)S_k = \mathcal{I}_n - A^{k+1}$, de lo cual

$$\lim_{k\to+\infty} (\mathcal{I}_n - A)S_k = \lim_{k\to+\infty} \mathcal{I}_n - A^{k+1} \tag{2.45}$$

Ahora como $\|A\| < 1$, entonces por el teorema 2.29 A es convergente, es decir, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} A^{k+1} = 0$ así de (2.4) se sigue que $(\mathcal{I}_n - A)B = \mathcal{I}_n$, esto último implica que $\mathcal{I}_n - A$ es invertible y $(\mathcal{I}_n - A)^{-1} = B$, lo cual prueba que $(\mathcal{I}_n - A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

Además note que $\|(\mathcal{I}_n - A)^{-1}\| = \left\|\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right\| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \dfrac{1}{1-\|A\|}$.

Así mismo por (2.44), $\|(\mathcal{I}_n - A)^{-1}\| \geq \dfrac{1}{\|(1-A)\|}$.

Como $\|(\mathcal{I}_n - A)\| \leq \|\mathcal{I}\| + \|A\|$, entonces $\dfrac{1}{\|(\mathcal{I}_n - A)\|} \geq \dfrac{1}{\|\mathcal{I}_n\| + \|A\|}$.

Ahora, si $\|\cdot\|$ es tal que $\|\mathcal{I}_n\| = 1$, entonces $\dfrac{1}{\|(\mathcal{I}_n - A)\|} \geq \dfrac{1}{1 + \|A\|}$, así

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(\mathcal{I}_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

□

Observación 2.33. Una forma equivalente del teorema 2.31 es la siguiente:

Sea $A \in C^{n\times n}$, si para alguna norma matricial se tiene que $\|\mathcal{I}_n - A\| < 1$, entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{I}_n - A)^k \tag{2.46}$$

Corolario 2.34. *Si $A \in C^{n\times n}$ es invertible y $B \in C^{n\times n}$ es tal que*

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Para alguna norma matricial, entonces B también es invertible.

Demostración. Note que

$$B = A - (A - B) = A\left[\mathcal{I}_n - A^{-1}(A - B)\right] \tag{2.47}$$

Probemos que la matriz $\mathcal{I}_n - A^{-1}(A - B)$ es invertible

En efecto, dado que:

$$\|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\|\|(A - B)\| < \|A^{-1}\| \cdot \frac{1}{\|A^{-1}\|} = 1,$$

es decir $\|A^{-1}(A - B)\| < 1$, entonces por el teorema 2.32 se sigue que $\mathcal{I}_n - A^{-1}(A - B)$ es invertible, lo cual prueba que B es invertible por ser el producto de matrices invertibles. □

Teorema 2.35. *Sea $A, B \in C^{n\times n}$ y $\|\cdot\|$ cualquier norma matricial sobre $C^{n\times n}$ tal que $\|\mathcal{I}_n - AB\| < 1$, entonces A y B son invertibles y además*

$$A^{-1} = B\sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{I}_n - AB)^k \quad y \quad B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{I}_n - AB)^k A$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\|\mathcal{I}_n - AB\| < 1$, la observación 2.33 nos garantiza que AB es invertible y su inversa es

$$(AB)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{I}_n - AB)^k.$$

Así mismo resulta que A y B son invertibles.
Además

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \mathcal{I}_n A^{-1} = BB^{-1}A^{-1} = B(AB)^{-1} = B\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{I}_n - AB)^k \\
B^{-1} &= B^{-1}\mathcal{I}_n = B^{-1}A^{-1}A = (AB)^{-1}A = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{I}_n - AB)^k A
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 2.36. *El conjunto de matrices* $C^{n\times n}$ *invertible es un conjunto abierto en el conjunto de todas las matrices* $C^{n\times n}$.
Esto es, si A *es invertible, existe un número positivo* ϵ *tal que toda matriz* B *que satisface* $\|A - B\| < \epsilon$ *también es invertible.*

DEMOSTRACIÓN. Sean S el conjunto de todas las matrices invertibles en $C^{n\times n}$ y E el conjunto de todas las matrices $C^{n\times n}$. Claramente $S \subseteq E$.

Para $A \in S$, sea $\epsilon = \dfrac{1}{\|A^{-1}\|} > 0$. De donde para cualquier matriz B en E para la cual $\|A - B\| < \epsilon = \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, se sigue por el corolario 2.34 que B es invertible. □

COROLARIO 2.37. *Si* $A \in C^{n\times n}$ *es tal que* $\|A\| < 1$ *para alguna norma matricial, entonces* $\mathcal{I}_n + A$ *es invertible y* $(\mathcal{I}_n + A)^{-1} = \mathcal{I} - A + A^2 - A^3 + \dots$ *además* $\|(\mathcal{I}_n + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

DEMOSTRACIÓN. $\|-A\| = \|(-1)A\| = |-1|\|A\| = \|A\| < 1$, luego por el teorema 2.32 $\mathcal{I}_n + A = \mathcal{I}_n - (-A)$ es invertible y $(\mathcal{I}_n + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-A)^k = \mathcal{I}_n - A + A^2 - A^3 + \dots$
además

$$\|(\mathcal{I}_n + A)^{-1}\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|(-A)^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|(-A)\|^k = \sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k = \frac{1}{1-\|A\|}$$

□

COROLARIO 2.38. *Sean* $A, B \in C^{n\times n}$, *A invertible y* $\|\cdot\|$ *una norma matricial tal que* $\|B - A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, *entonces*

$$B^{-1} = A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{I}_n - BA^{-1})^k$$

DEMOSTRACIÓN. Como A es invertible y $\|B - A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, entonces por el corolario 2.34 B es invertible. Ahora, como A^{-1} y B son invertibles y dado que $\|\mathcal{I}_n - BA^{-1}\| = \|AA^{-1} - BA^{-1}\| = \|(A - B)A^{-1}\| \leq \|(A - B)\|\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|A^{-1}\| = 1$
entonces

$$B^{-1} = A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{I}_n - BA^{-1})^k$$

□

Podemos obtener la formula para $(A+B)^{-1}$ a partir de la serie de Neumann de la siguiente manera.

COROLARIO 2.39. *Sean* $A, B \in C^{n\times n}$, *A invertible y* $\|A^{-1}B\| < 1$, *entonces* $(A+B)$ *es invertible y*

$$(A + B)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}B)^k\right)A^{-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Note que $A + B = A[\mathcal{I}_n - (-A^{-1}B)]$ y $\| - A^{-1}B\| = \|A^{-1}B\| < 1$
Dado que $\|A^{-1}B\| < 1$, por teorema 2.32 $\mathcal{I}_n - (-A^{-1}B)$ es invertible y así $A + B$ es invertible por ser el producto de matrices invertibles.

Por teorema 2.32 se tiene además que $[\mathcal{I}_n - (-A^{-1}B)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}B)^k$.

Luego $(A + B)^{-1} = \left[A[\mathcal{I}_n - (-A^{-1}B)]\right]^{-1} = [\mathcal{I}_n - (-A^{-1}B)]^{-1}A^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}B)^k\right)A^{-1}$

□

Capítulo 3

Exponencial de una Matriz

En este capítulo usaremos el concepto de series de matrices convergentes para abordar el problema de la exponencial de una matriz. La exponencial de una matriz cuadrada A se define por $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ lo cual nos lleva al problema de calcular las potencias de la matriz A, proceso que no es nada fácil a menos que A sea una matriz diagonalizable. Muchos de los resultados teóricos obtenidos para la exponencial de una matriz son de fácil deducción para las matrices diagonalizables.
Aplicando el teorema 2.31, es fácil demostrar que la serie matricial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{3.1}$$

converge para cualquier matriz cuadrada A con elementos reales o complejos.
En efecto, analicemos la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$.
Observe que

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Puesto que la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ converge para todo número real a (converge a e^a), entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge, luego por el criterio de la comparación la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$ converge y así por el teorema 2.31, la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, también converge para toda matriz cuadrada A.

Definición 3.1 (Exponencial de una Matriz). Dada una matriz cuadrada $A_{n\times n}$, con elementos reales o complejos, definimos la exponencial e^A, como la matriz $n \times n$ dada por la serie convergente (3.1), esto es

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.2. (1) Si $0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la matriz nula, entonces $e^0 = \mathcal{I}_n$.

Demostración. Es claro que $0^k = 0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, y dado que para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathcal{I}_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

En particular se tiene que

$$e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \mathcal{I}_n + 0 + \frac{0^2}{2!} + \frac{0^3}{3!} + \dots = \mathcal{I}_n$$

$\square$

(2) Calcule e^D para la matriz $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dada por

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Solución: Por inducción se puede probar que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix}$$

Ahora por (3.2) se tiene que

$$\begin{aligned}
e^D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \frac{D^0}{0!} + \frac{D^1}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2!}d_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{2!}d_n^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3!}d_1^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{3!}d_n^3 \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + d_1 + \frac{1}{2!}d_1^2 + \frac{1}{3!}d_1^3 + \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 + d_n + \frac{1}{2!}d_n^2 + \frac{1}{3!}d_n^3 + \dots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_1^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{d_n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Esto es, $e^D = diag\left\{e^{d_1}, \dots, e^{d_n}\right\}$.

NOTA 1. *Con la ayuda de las ecuaciones diferenciales se estudiarán otras propiedades de la exponencial.*

1. Ecuación Diferencial cuya solución es e^{tA}

Sean t un número real, A una matriz $n \times n$ y $E(t)$ la matriz $n \times n$ dada por $E(t) = e^{tA}$. Mantendremos A fijo y estudiaremos esa matriz como una función de t.
Primeramente hallaremos una ecuación diferencial a la que E satisface.

TEOREMA 3.3. *Para todo real t la función matricial E definida por $E(t) = e^{tA}$ satisface la ecuación diferencial*

$$E'(t) = E(t)A = AE(t) \tag{3.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$E(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

sea a_{ij}^k el elemento ij de A^k, entonces el elemento ij de $\dfrac{t^k A^k}{k!}$ es $\dfrac{t^k a_{ij}^k}{k!}$. Luego de la definición de serie matricial tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{t^k}{k!} a_{ij}^k \right] \tag{3.4}$$

Nótese que cada elemento del segundo miembro en (3.4) es una serie de potencia en t, converge para todo t, cuya derivada viene dada por

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_{ij}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} t^{k-1} a_{ij}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} a_{ij}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_{ij}^{k+1}$$

esto demuestra que existe la derivada $E'(t)$ y viene dado por la serie matricial

$$E'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^{k+1}}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right) A = E(t)A$$

Dado que $A^{k+1} = A^k A = AA^k$ podríamos escribir $A^{k+1} = AA^k$ y así obtener la relación $E'(t) = AE(t)$. Esto completa la demostración
En resumen

$$\frac{d}{dt} \left(e^{tA} \right) = Ae^{tA} = e^{tA} A$$

□

Teorema 3.4 (No Singularidad de e^{tA}). *Para toda* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y para todo t real, tenemos*

$$e^{tA}e^{-tA} = \mathcal{I}_n \tag{3.5}$$

Demostración. Sea F la función matricial definida para todo número real t mediante la ecuación

$$F(t) = e^{tA}e^{-tA}$$

Debemos ver que $F(t)$ es la matriz identidad $\mathcal{I}_n$, donde la derivada $F'(t)$ es la matriz nula. Derivando F como un producto y recordando el resultado del teorema 3.3 tenemos

$$\begin{aligned} F'(t) &= \left(e^{tA}\cdot e^{-tA}\right)' = e^{tA}\left(e^{-tA}\right)' + \left(e^{tA}\right)' e^{-tA} = e^{tA}\left(-Ae^{-tA}\right) + Ae^{tA}e^{-tA} \\ &= -Ae^{tA}e^{-tA} + Ae^{tA}e^{-tA} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Por consiguiente según el teorema 1.4 F es una función constante. Pero $F(0) = e^{0A}\cdot e^{-0A} = e^0 \cdot e^0 = \mathcal{I}_n\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_n$ por lo cual para todo real t, $F(t) = \mathcal{I}_n$, lo cual demuestra (3.5). □

Luego e^{tA} es no singular, y su inversa es e^{-tA} esto es $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$

Teorema 3.5 (Unicidad Para la ecuación Diferencial Matricial $F'(t) = AF(t)$). *Sean* A *y* B *dos matrices constantes* $n\times n$. *La única función matricial* F, $n\times n$ *que satisface el problema de valor inicial*

$$F'(t) = AF(t), \qquad F(0) = B, \qquad \textit{para} \quad -\infty < t < \infty$$

es

$$F(t) = e^{tA}B$$

Demostración. Note que $e^{tA}B$ es una solución.
En efecto

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}B\right) = \left(Ae^{tA}\right)B = A\left(e^{tA}B\right)$$

Sea ahora F una solución cualquiera y consideremos la función matricial

$$G(t) = e^{-tA}F(t)$$

derivando este producto tenemos

$$G'(t) = -Ae^{-tA}F(t) + e^{-tA}F'(t) = -Ae^{-tA}F(t) + e^{-tA}AF(t) = 0$$

Por consiguiente G es una matriz constante,

$$G(t) = G(0) = e^{-0A}F(0) = \mathcal{I}_nF(0) = F(0 = B$$

es decir

$$e^{-tA}F(t) = B$$

Luego

$$e^{tA}e^{-tA}F(t) = e^{tA}B \quad \text{y así,} \quad \mathcal{I}_n F(t) = e^{tA}B, \quad \text{esto es,} \quad F(t) = e^{tA}B$$

□

Observación 3.6. El mismo tipo de demostración hace ver que $F(t) = Be^{tA}$ es la única solución del problema de valor inicial

$$F'(t) = F(t)A, \qquad F(0) = B$$

2. Ley de exponentes para exponenciales de matrices

La ley de los exponentes $e^{A+B} = e^A e^B$, no siempre es válida para exponenciales de matrices. No obstante la fórmula es válida para matrices permutables.

Teorema 3.7. *Sean* A *y* B *dos matrices de orden* $n \times n$, *permutables, esto es* $AB = BA$, *entonces*

$$e^{A+B} = e^A e^B \tag{3.6}$$

Demostración. Dado que $AB = BA$, por inducción se puede demostrar que $A^k B = BA^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$.
Escribiendo e^{tA} en forma de serie de potencias encontramos que

$$Be^{tA} = e^{tA}B \qquad \text{para todo real } t$$

Ahora, sea F la función matricial definida por la ecuación

$$F(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}$$

Derivando $F(t)$ y teniendo en cuenta que B es permutable con e^{tA} se tiene

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{tB} - e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{t(A+B)} - (A+B)e^{tA}e^{tB} \\ &= (A+B)\left[e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}\right] = (A+B)F(t) \end{aligned}$$

Según el teorema 3.5 tenemos

$$F(t) = e^{t(A+B)}F(0)$$

Pero $F(0) = 0$, así $F(t) = 0$ para todo t. Luego

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$$

Cuanto $t = 1$,

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

□

Ejemplo 3.8. Las matrices sA y tA son permutables para todos los escalares s y t. Luego

$$e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$$

Ejemplo 3.9. Sean $A, B \in C^{n\times n}$ y B invertible se cumple que

$$e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$$

En efecto, es fácil probar que $(BAB^{-1})^n = BA^n B^{-1}$. Por lo que

$$e^{BAB^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(BAB^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(BA^n B^{-1}\right) = B \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) B^{-1} = Be^A B^{-1}$$

3. El Problema de Calcular e^{tA}

Si se trata de calcular e^{tA} directamente, a partir de la definición de serie, tendríamos que calcular todas las potencias de A^k y la suma de cada serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k a_{ij}^{(k)}}{k!}$, donde a_{ij}^k es el elemento ij de A^k. En general este es un trabajo que presenta muchas dificultades, salvo si A es una matriz cuyas potencias puedan calcularse fácilmente. Veamos ahora un caso especial de matrices para las cuales resulta mucho más sencillo el cálculo de cualquier función

3.1. Funciones de Matrices Diagonalizables.

El término función de matrices nos lleva a preguntarnos sobre el significado de expresiones tales como $\sin(A)$, $\cos(A)$, e^A, $\ln(A)$, entre otras. Una idea sencilla para este cálculo de una función f de la matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ seria simplemente aplicar la función f a cada entrada de la matriz A de la siguiente manera

$$f(A) = (f\,[a_{ij}]) \tag{3.7}$$

Pero nos gustaría que de la definición presentada resultaran funciones de matrices que satisfagan la mayoría de las propiedades de sus funciones homólogas escalares y es claro que en general una función definida mediante la ecuación (3.7) no implicaría esta condición.

El método analítico básico para definir una función de matrices se basa en la existencia de la forma generalizada de Jordan [**18**], aunque también se ha desarrollado un método analítico alternativo y muy fácil de implementar, aplicable a funciones que admitan representación en serie de Taylor. Más aún nosotros extenderemos el término de funciones matriciales y desarrollaremos propiedades correspondientes a dicha matriz. Nos limitaremos a la función exponencial dado que es la más importante debido a su gran número de aplicaciones.

3.1.1. *Funciones de Matrices.*

NOTACIÓN 3.10. Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un escalar $\alpha \neq 0$, escribimos A/α para representar la matriz $B = (a_{ij}/\alpha)$ donde cada componente de A se divide por α.

Una forma de definir una función de matrices con propiedades semejantes a su función homóloga escalar, es usando la expansión en series infinitas. Por ejemplo, considerando la función exponencial.

En los siguientes ejemplo hallaremos la matriz exponencial.

3.1.2. *Funciones de Matrices Diagonalizables.*

DEFINICIÓN 3.11 (Matrices Semejantes). Sea $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se dice que A es semejante a B si existe un matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = PBP^{-1}$.

DEFINICIÓN 3.12 (Matrices Diagonal). Se dice que $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz diagonal si $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

DEFINICIÓN 3.13 (Matrices Diagonalizable). Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagnalizable si existe una matriz diagonal $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que A es semejante a D.

DEFINICIÓN 3.14. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, Se dice que λ es un valor propio de A si existe un vector no nulo $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. El vector x se conoce como vector propio de A asociado al valor propio λ.

DEFINICIÓN 3.15. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, Se define el espectro de A, denotado $\sigma(A)$ como

$$\sigma(A) = \{\lambda : \lambda \quad \text{es un valor propio de} \quad A\}$$

DEFINICIÓN 3.16. El radio espectral de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, Se define como

$$\delta(A) = \text{máx}\,\{|\lambda| : \lambda \quad \text{es un valor propio de} \quad A\}$$

TEOREMA 3.17. *Si* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y* $\|\cdot\|$ *es cualquier norma matricial entonces*

$$\delta(A) \leq \|A\|$$

Demostración. Sea λ un valor propio de A. Luego existe un vector no nulo $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Ax = \lambda x$.
Sea $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la matriz no nula formada por el vector propio x en su primera columna y el vector nulo en las demás, $AX = \lambda X$. Luego si $\|\cdot\|$ es una norma matricial cualquiera, entonces

$$|\lambda|\|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\|\|X\|$$

de lo cual se sigue que

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

y dado que $\lambda \in \sigma(A)$, es cualquiera, se sigue que

$$\delta(A) \leq \|A\|$$

□

Teorema 3.18. *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable si y solo si, tiene n vectores propios linealmente independientes, en este caso es semejante a una matriz diagonal D que tiene los valores propios de A en la diagonal.*

Demostración. supongamos que A es diagonalizable, entonces existen P en $\mathbb{C}^{n\times n}$ invertible y D diagonal, tal que $A = PDP^{-1}$, de donde $AP = PD$. Supongamos que $D = diag\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\right)$ Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las columnas de P, es claro que la $i-$ésima columna de PD es $\lambda_i x_i$, así la $i-$ésima columna de AP es $Ax_i = \lambda_i x_i$, por lo tanto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto de n vectores linealmente independientes para A. Recíprocamente, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n vectores propios L.I. de A asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente, entonces la matriz $P = [x_1 x_2 \ldots x_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible y la $i-$ésima columna de AP es $Ax_i = \lambda_i x_i$, que coincide con la $i-$ésima columna de PD, donde $D = diag\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\right)$. Tenemos entonces que $AP = PD$, así $A = PDP^{-1}$ y por lo tanto A es diagonalizable. Del teorema anterior se tiene que si A es diagonalizable, con espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, entonces $A = PDP^{-1} = Pdiag\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) P^{-1}$ y $A^k = PD^kP^{-1} = Pdiag\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\right) P^{-1}$. □

Teorema 3.19. *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe una norma matricial $\|\cdot\|$ tal que*

$$\delta(A) \leq ||\cdot\|_* \leq \delta(A) + \varepsilon$$

Demostración. Sea $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$ donde cada valor propio este repetido según su multiplicidad algebraica. El teorema de Schur garantiza la existencia de una matriz unitaria U y una matriz triangular superior $T = [t_{ij}]$ tales que

$$A = UTU^H \quad \text{y} \quad t_i = \lambda_i$$

Sea

$$D_K = diag\{1, k, k^2, \ldots, k^{n-1}\}$$

y notemos que

$$D_K T D_K^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & k^{-1}t_{12} & \cdots & k^{-n+1}t_{1n} \\ \vdots & \lambda_2 & \ldots & k^{-n+2}t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Así, tomando $k > 0$ suficientemente grande, podemos hacer que la suma de los valores absolutos de los elementos fuera de la diagonal de $D_K T D_K^{-1}$ sea menor que ε. En particular podemos hacer que

$$\|D_K T D_K^{-1}\| \leq \delta(A) + \varepsilon$$

Ahora definamos

$$\begin{aligned} \|A\|_* &= \|(UD_k^{-1})^{-1})A(UD_k^{-1})\| = \|(UD_k^{-1})^{-1}UTU^H(UD_{k^{-1}})\| \\ &= \|(D_kU^H)^{-1}UTU^H(UD_{k^{-1}})^{-1}\| = \|D_kTD_k^{-1}\| \leq \delta(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

ademas se sabe que

$$\delta(A) \leq \|A\|_*$$

y así

$$\delta(A) \leq \|A\|_* \leq \delta(A) + \varepsilon$$

$\square$

TEOREMA 3.20. *Si la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$$

converge para $|z - z_0| < r$ *y* $|\lambda_i - z_0| < r$ *para cada valor propio* λ_i *de una matriz* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *entonces la serie infinita de matrices*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(A - z_0 I)^k$$

también converge.

Demostración. Sea λ_i un valor propio de A. Es claro que λ_i un valor propio de A si y sólo si $\lambda_i - z_0$ es un valor propio de $A - z_0 I$. Ahora dado que $|\lambda_i - z_0| < r$ para cada valor propio de A. en particular $\delta(A - z_0 I) < r$. de aquí se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \|A - z_0 I\|^k$ es convergente y luego por el teorema 2.31 se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (A - z_0 I)^k$ es convergente. $\square$

Definición 3.21. Si la función

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

converge para $|z - z_0| < r$ y para cada valor proppio de λ_i de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, se tiene que $|\lambda_i - z_0| < r$ entonces se define

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (A - z_0 I)^k$$

Nota 2. *En la definición si $z_0 = 0$*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad |z| < r \quad y \quad |\lambda_i| < r$$

Es decir, para definir $f(A)$ necesitamos que la función $f(z)$ esté definida en cierto conjunto que contenga el espectro de A.

Definición 3.22. Sea $f(t)$ una función de valores escalares con representación en series de potencias

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \dots$$

con radio de convergencia R.
Si A es una matriz $n \times n$ y $\delta(A) < R$ la serie de matrices

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = a_0 + a_1 A + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \dots$$

converge con respecto a cada norma sobre el conjunto de matrices $n \times n$ y su suma es denotada por la **matriz función** $f(A)$.

Teorema 3.23. *Sea $A \in C^{n\times n}$, $f(z)$ una función analítica definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ que contiene el espectro de A, si $A = XBX^{-1}$, entonces $f(A) = Xf(A)X^{-1}$*

Demostración. Sea $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Como $A = XBX^{-1}$ entonces $A^k = XB^kX^{-1}$, así $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k XB^kX^{-1}$, esto es $f(A) = X\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k\right)X^{-1}$ y por tanto $f(A) = Xf(B)X^{-1}$ □

Teorema 3.24. *Sea $A = RDR^{-1}$, con $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n\}$ donde λ_i son los valores propios de A, y suponga que $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^k$ y $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$. entonces*

a). $det f(A) = det f(D) = \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$

b). $Traza f(A) = Traza f(D) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$

Demostración.

a). sabemos que $f(A) = Rf(D)R^{-1}$ luego

$$\begin{aligned} det f(A) &= det(Rf(D)R^{-1}) = detR \cdot det f(D) \cdot detR^{-1} = detR \cdot (detR)^{-1} \cdot det f(D) = det f(D) \\ &= det f\{diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}\} = f(\lambda_1)\cdot f(\lambda_2)\cdot \ldots f(\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned} Traza f(A) &= Traza(Rf(D)R^{-1}) = Traza(RR^{-1}f(D)) \\ &= Traza f(D) = f(\lambda_1) + f(\lambda_2) + f(\lambda_3) + \ldots + f(\lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.25. Sea $f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$ y $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k = e^A$.
Luego, para $A = PDP^{-1}, D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \in \sigma(A), f(A) = Pf(D)P^{-1} = Pe^DP^{-1} = Pdiag\{e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}, \ldots e^{\lambda_n}\}P^{-1}$.
Ahora,

$$\begin{aligned} det f(A) &= det e^A = det(Pe^DP^{-1}) = detP \cdot det f(D) \cdot detP^{-1} = detP \cdot (detP)^{-1} \cdot det f(D) \\ &= det f(D) = e^{\lambda_1}\cdot e^{\lambda_2}\cdot e^{\lambda_3}\cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} = e^{trazaA} \end{aligned}$$

Esto es

$$det e^A = e^{trazaA}$$

Ademas $traza f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) = f(\lambda_1) + f(\lambda_2) + \ldots + f(\lambda_n) = e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} + \ldots + e^{\lambda_n}$ esto es

$$traza e^{A} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}$$

Ejemplo 3.26. para A invertible se tiene que: $\int e^{tA}\,\mathrm{d}t = A^{-1}e^{tA} + C$

$$\frac{d}{dt}[A^{-1}e^{tA} + C] = A^{-1}Ae^{tA} + 0 = e^{tA}$$

Caso particular para $A = PDP^{-1}$, entonces $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$ luego

$$\int e^{tA}\,\mathrm{d}t = P\left(\int e^{tD}\,\mathrm{d}t\right)P^{-1} = P(D^{-1}e^{tD})P^{-1} + C$$

Cálculo que es mas cómodo, ya que e^{tD} es mucho más fácil de calcular que e^{tA}. Note que

$$\begin{aligned} P(D^{-1}e^{tD})P^{-1} + C &= PD^{-1}P^{-1}Pe^{tD}P^{-1} + C = (PD^{-1}P^{-1})(Pe^{tD}P^{-1}) + C \\ &= (PDP^{-1})^{-1}e^{tA} + C = A^{-1}e^{tA} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3.27. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} \int e^{tA}\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \int e^t\,\mathrm{d}t & \int te^t\,\mathrm{d}t \\ 0 & \int e^t\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^t + C_1 & te^t - e^t + C_2 \\ 0 + C_3 & e^t + C_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & te^t - e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.28. Para A diagonalizable $A = PDP^{-1}$,

$$-A = P(-D)P^{-1}$$

luego,

$$e^{A} = Pe^{D}P^{-1} \text{ y } [e^{A}]^{-1} = Pe^{-D}P^{-1}$$

Además
$$tA = t[PAP^{-1}] = PtAP^{-1}$$
entonces
$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$$
Por lo tanto
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[e^{tA}] &= \frac{d}{dt}[Pe^{tD}P^{-1}] = P\frac{d}{dt}[e^{tD}]P^{-1} = PDe^{tD}P^{-1} = PDP^{-1}Pe^{tD}P^{-1} \\
&= (PDP^{-1})(Pe^{tD}P^{-1}) = Ae^{tA}
\end{aligned}$$

Capítulo 4

La Matriz $q-$ Exponencial

En este capitulo definimos la matriz $q-$exponencial de una matriz cuadrada A que notaremos $\exp_q(A)$, usando representaciones en serie de matrices convergente y obtendremos algunos resultados teóricos para dicha matriz. En dicho desarrollo cuando q tiende a 1 recuperamos la función $\exp(A)$ estudiada en el capítulo anterior. Primero se presentará algunos aspectos matemáticos de la teoría de Tsallis, lo cual se hará en la primera sección.

1. q Matemáticas

En esta sección, estudiaremos las funciones $q-$ Exponencial y $q-$ Logarítmica, propias de la teoría de Tsallis [**3**], el cual en 1994 las definió y les dio este nombre.
Se presentarán algunas propiedades que pueden ser encontradas en [**2**], [**14**], [**18**].

1.1. $q-$ Exponenciales y $q-$ Logarítmicas. Tsallis [**3**] y Borges [**14**] definen las $q-$deformaciones de la siguiente manera:

$$\ln_q(x) :\equiv \frac{x^{1-q}-1}{1-q}; \qquad x \in \mathbb{R}^+, q \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

$$\exp_q(x) = e_q^x \equiv e_q(x) :\equiv \begin{cases} [1+(1-q)\,x]^{\frac{1}{1-q}} & \text{si} \quad 1+(1-q)\,x > 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad 1+(1-q)\,x \leq 0 \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

Muchas veces la función $q-$ exponencial se escribe en forma más compacta como:

$$\exp_q(x) = [1+(1-q)\,x]_+^{\frac{1}{1-q}} \tag{4.3}$$

donde

$$[A]_+ \equiv \begin{cases} A & \text{si} \quad A > 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad A \leq 0 \end{cases}$$

La primera observación es que las funciones tradicionales $\ln(x)$ y $\exp(x)$ (que con la presente generalización, puede ser notadas por $\ln_1(x)$, $\exp_1(x)$), son casos particulares de las funciones $q-$ desformadas:

$$\ln(x) := \ln_1(x) = \lim_{q \to 1} \ln_q(x) \tag{4.4}$$

$$\exp(x) := \exp_1(x) = \lim_{q \to 1} \exp_1(x) \tag{4.5}$$

Por otro lado, es inmediato verificar que las funciones $\ln_q(x)$ y $\exp_q(x)$ son funciones inversas una de la otra, esto es

$$\exp_q\left(\ln_q(x)\right) = x, \quad \text{y} \quad \ln_q\left(\exp_q(x)\right) = x \tag{4.6}$$

Note que la relación $\ln_q\left(\exp_q(x)\right) = x$ está definida cuando $\exp_q(x)$ es distinta de cero o $+\infty$.
Se tiene a demás que

$$\ln_q(1) = 0 \quad \text{y} \quad \exp_q(0) = 1, \qquad \text{para todo } q. \tag{4.7}$$

1.2. Propiedades. Diversos autores [**2, 3, 11, 14, 18**] han presentado propiedades interesantes de las funciones $q-$ exponencial y $q-$ logaritmo.
A continuación se listan algunas de ella, las demostraciones son inmediatas. Naturalmente todas ellas se reducen a las expresiones habituales cuando $q \longrightarrow 1$

1). $q-$ logaritmo de un producto

$$\ln_q(xy) = \ln_q x + \ln_q y + (1-q)\ln_q x \ln_q y \tag{4.8}$$

2). $q-$ logaritmo de una razón

$$\ln_q\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\ln_q(x) - \ln_q(y)}{1 + (1-q)\ln_q(y)} \tag{4.9}$$

En particular el $q-$ logaritmo para el inverso de un número no nulo x, es

$$\ln_q(x^{-1}) = -\frac{1}{x^{1-q}}\ln_q(x) \tag{4.10}$$

3). $q-$ logaritmo de una potencia

$$\ln_q\left(x^a\right) = \frac{a}{1-q}\left[\ln_{1-a}\left(x^{1-q}\right)\right] \tag{4.11}$$

Otra forma de $q-$ logaritmo de una potencia que no aparece en ninguna de las referencias bibliográficas es la siguiente:

$$\ln_q\left(x^n\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(x^{1-q}\right)^{k-1}\right)\ln_q x, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.12}$$

Note que cuando $q \longrightarrow 1$, la igualdad (4.12) se convierte en

$$\ln_q\left(x^n\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)\ln x = \underbrace{(1+1+1+1+\ldots+1)}_{n-\text{ veces}}\ln x = n\ln x$$

Veamos la prueba de (4.12) (por inducción matemática). En efecto: para $n = 1$, el resultado es claro, dado que

$$\ln_q\left(x^1\right) = \left(\sum_{k=1}^{1}\left(x^{1-q}\right)^{k-1}\right)\ln_q x = 1\ln_q x = \ln_q x$$

supongamos ahora que el enunciado es cierto para n y veamos que cumple para $n+1$. En efecto:

$$
\begin{aligned}
\ln_q\left(x^{n+1}\right) &= \ln_q\left(x^n x\right) \\
&= \ln_q\left(x^n\right)+\ln_q(x)+(1-q)\ln_q\left(x^n\right)\ln_q(x) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(x^{1-q}\right)^{k-1}\right)\ln_q(x)+(1-q)\left[\frac{(x^n)^{1-q}-1}{1-q}\right]\ln_q(x)+\ln_q(x) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(x^{1-q}\right)^{k-1}\right)\ln_q(x)+\left((x^n)^{1-q}-1\right)\ln_q(x)+\ln_q(x) \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n}\left(x^{1-q}\right)^{k-1}+\left((x^n)^{1-q}-1\right)+1\right]\ln_q(x) \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n}\left(x^{1-q}\right)^{k-1}+\left((x^n)^{1-q}\right)\right]\ln_q(x) \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n}\left(x^{1-q}\right)^{k-1}+\left(x^{1-q}\right)^{n}\right]\ln_q(x) \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n+1}\left(x^{1-q}\right)^{k-1}\right]\ln_q(x)
\end{aligned}
$$

Lo cual prueba que el enunciado es válido para $n+1$, por lo tanto por el principio de inducción matemática se sigue que el enunciado es válido para tod $n\in\mathbb{N}$.

4). Derivada de un $q-$ logaritmo

$$\frac{d}{dx}\left(\ln_q x\right)=\frac{1}{x^q} \tag{4.13}$$

5). Integral de un $q-$ logaritmo

$$\int \ln_q x\,dx=\frac{x\ln_q x-x}{2-q} \tag{4.14}$$

6). La medida de la diferencia entre la función $q-$ logaritmo y la fución logaritmo natural usual puede escribirse como

$$\ln_q(x)-\ln_1(x)=(1-q)\left[\frac{d}{dq}\ln_q x+\ln_q x\ln_1 x\right] \tag{4.15}$$

7). Algunas propiedades equivalentes de la $q-$ exponencial

(a)

$$\exp_q(x)\exp_q(y) = \exp_q(x + y + (1 - q)xy) \tag{4.16}$$

(b)

$$\exp_q(x)\exp_q(-y) = \exp_q(x - y - (1 - q)xy) \tag{4.17}$$

8) $q-$ exponencial de una suma

$$\exp_q(x \pm y) = \exp_q(x)\exp_q\left(\frac{\pm y}{1 + (1 - q)\,x}\right), \quad \forall x \neq \frac{1}{q - 1} \tag{4.18}$$

(9) la inversa de la $q-$ exponencial viene dada por

$$\left[\exp_q(x)\right]^{-1} = \exp_q\left(\frac{-x}{1 + (1 - q)\,x}\right) \quad \forall x \neq \frac{1}{q - 1} \tag{4.19}$$

10) Razón entre $q-$ exponenciales

$$\frac{\exp_q(x)}{\exp_q(y)} = \exp_q\left(\frac{x - y}{1 + (1 - q)\,y}\right) \tag{4.20}$$

11) Potencia de una $q-$ exponencial

$$\left(\exp_q(x)\right)^a = \exp_{1 - \frac{1-q}{a}}(ax) \tag{4.21}$$

En general

$$\left(\exp_q(f(x))\right)^a = \exp_{1 - \frac{1-q}{a}}(af(x)) \tag{4.22}$$

12) Derivada de una $q-$ exponencial

$$\frac{d}{dx}\left(\exp_q(x)\right) = \left(\exp_q(x)\right)^q \tag{4.23}$$

Además para a constante

$$\frac{d}{dx}\left(\exp_q(ax)\right) = a\left(\exp_q(ax)\right)^q \tag{4.24}$$

Es decir

$$\left(\exp_q(ax)\right)^q = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}\left(\exp_q(ax)\right) \tag{4.25}$$

En general, si f es una función diferenciable,

$$\frac{d}{dx}\left(\exp_q f(x)\right) = f'(x)\left(\exp_q f(x)\right)^q = \left(\exp_q f(x)\right)^q f'(x) \tag{4.26}$$

De una manera más general, la $n-$ ésima derivada de $\exp_q(x)$ está dada por

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\exp_q(x)\right) = Q_{n-1}(q)\left(\exp_q(x)\right)^{nq-(n-1)}, \quad \text{para } n \geq 1 \tag{4.27}$$

donde

$$Q_n(q) = \prod_{m=0}^{n}\left[mq-(m-1)\right] = 1 \cdot q\,(2q-1)\,(3q-2)\ldots\left[nq-(n-1)\right] \tag{4.28}$$

Note que $Q_n(1) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, y $Q_0(q) = 1, \quad \forall q$

13) La expansión en serie de Taylor de la función $q-$ exponencial en torno en $x = 0$, viene dada por

$$\exp_q(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}Q_{n-1}(q)x^n, \qquad |x| < \frac{1}{|1-q|} \tag{4.29}$$

Demostración. La serie de Taylor centrada en $x = 0$ para una función f que tiene derivada de todos los ordenes viene dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^n(0)x^n + \ldots$$

donde se considera $f^0(0)$ como $f(0)$ y $0! = 1$.
Ahora bien, para $f(x) = \exp_q(x)$, $f^n(x) = Q_{n-1}(q)\left(\exp_q(x)\right)^{nq-(n-1)}$, $(n \geq 1)$.
Luego $f^n(0) = Q_{n-1}(q)\left(\exp_q(0)\right)^{nq-(n-1)} = Q_{n-1}(q)$, dado que $\exp_q(0) = 1$, para $n \geq 1$. Así que

$$\exp_q(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}Q_{n-1}(q)x^n$$

Determinamos ahora los valores de x para los cuales la serie de potencias para $\exp_q(x)$, es convergente.
En efecto, es claro que dicha serie converge solo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}Q_{n-1}(q)x^n$ es convergente.
Aplicamos el criterio del cociente para determinar cuando converge dicha serie.
Sea $a_n = \dfrac{1}{n!}Q_{n-1}(q)x^n$, luego

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}Q_{(n+1)-1}(q)x^{n+1} = \frac{1}{(n+1)n!}Q_n(q)x^{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)n!}Q_{n-1}(q)\left[nq-(n-1)\right]x^n x \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)n!}Q_{n-1}(q)\left[nq-(n-1)\right]x^n x}{\frac{1}{n!}Q_{n-1}(q)x^n} = \frac{nq-(n-1)}{n+1}x$$

$\square$

Así,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nq-(n-1)}{n+1}x\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nq-(n-1)}{n+1}\right|\cdot|x| \\ &= |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{q-\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}\right| = |x||q-1| \end{aligned}$$

Luego la serie converge absolutamente si $|x||q-1|<1$, esto es, si $|x|<\dfrac{1}{|q-1|}$ es decir $|x|<\dfrac{1}{|1-q|}$ y como convergencia absoluta implica convergencia, la serie converge para $|x|<\dfrac{1}{|1-q|}$. Resumiendo se tiene que

$$\exp_q(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}Q_{n-1}(q)x^n, \qquad |x|<\frac{1}{|1-q|}$$

14). La integral de una $q-$ exponencial

$$\int \exp_q(ax)dx = \frac{1}{(2-q)a}\left[\exp_q(ax)\right]^{2-q} \tag{4.30}$$

2. Matriz q-exponencial

En esta sección se presentan los resultados propios del trabajo de tesis. Partamos de la sección anterior, donde estudiamos la función $q-$ exponencial y sus propiedades, recordemos que

$$\exp_q(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) x^k, \qquad |x| < \frac{1}{|1-q|},$$

donde $Q_{k-1}(q)$ viene dado por

$$Q_{k-1}(q) = \prod_{m=0}^{k} [mq - (m-1)] .$$

Si remplazamos el argumento escalar x por A la matriz A tenemos la serie de matrices

$$\begin{aligned} \exp_q(A) &:= \mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) A^n \qquad (4.31) \\ &= \mathcal{I}_n + Q_0(q)A + \frac{1}{2!} Q_1(q)A + \frac{1}{3!} Q_1(q)A + \dots \end{aligned}$$

La cual llamaremos matriz $q-$ exponencial.

Determinemos ahora bajo que condiciones la serie dada por (4.31) es convergente.

TEOREMA 4.1. *La serie matricial* $\mathcal{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) A^k$ *converge si* $\|A\| < \frac{1}{|1-q|}, \quad q \neq 1.$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que la serie $\mathcal{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) A^k$ converge si $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) A^k$ converge.

Determinemos bajo que condiciones la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) A^k$ converge.

Note que $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) A^k \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) \|A^k\|$, además $\frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) \|A^k\| \leq \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) \|A\|^k$.

Pero la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) \|A^k\|$ converge para

$$\|A\| < \frac{1}{|1-q|}, \quad q \neq 1 \qquad (4.32)$$

Veamos la validez de (4.32).

Sean $b_k = \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) \|A\|^k$ y $b_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} Q_k(q) \|A\|^{k+1}$, así

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| &= \left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}Q_k(q)\|A\|^{k+1}}{\frac{1}{k!}Q_{k-1}(q)\|A\|^k}\right| = \left|\frac{\frac{1}{k!(k+1)}Q_k(q)\|A\|^k\|A\|}{\frac{1}{k!}Q_{k-1}(q)\|A\|^k}\right| = \left|\frac{Q_k(q)\|A\|}{(k+1)Q_{k-1}(q)}\right| \\
&= \left|\frac{Q_{k-1}(q)\left[kq-(k-1)\right]\|A\|}{(k+1)Q_{k-1}(q)}\right| = \left|\frac{[kq-(k-1)]}{k+1}\|A\|\right| \\
&= \left|\frac{kq-(k-1)}{k+1}\right|\|A\| = \left|\frac{(q-1)k+1)}{k+1}\right|\|A\|
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(q-1)k+1)}{k+1}\right|\|A\| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(q-1)+\frac{1}{k})}{1+\frac{1}{k}}\right|\|A\| \\
&= |q-1|\|A\| = |1-q|\|A\|
\end{aligned}
$$

De donde, $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{b_{k+1}}{b_k}\right| < 1$, implica que $|1-q|\|A\| < 1$, es decir $\|A\| < \dfrac{1}{|1-q|}$, $\quad q \neq 1.$

por lo tanto (4.32) es válido. De lo cual se sigue por el criterio de comparación que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k!}Q_{k-1}(q)\|A^k\|$ converge para $\|A\| < \dfrac{1}{|1-q|}$, $\quad q \neq 1.$

Por el teorema 2.31 la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k!}Q_{k-1}(q)A^k$ también converge para $\|A\| < \dfrac{1}{|1-q|}$, $\quad q \neq 1.$
Lo cual prueba el teorema 4.1.

□

Definición 4.2 ($q-$ Exponencial de una Matriz). Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $\|A\| < \dfrac{1}{|1-q|}$, $\quad q \neq 1$. Definimos la $q-$ exponencial $\exp_q(A)$ como la matriz $n\times n$ dada por la serie convergente

$$
\exp_q(A) := \mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}(q)A^k \tag{4.33}
$$

Del capítulo 3 tenemos que $\delta(A) \leq \|A\|$, así

$$
\exp_q(A) := \mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}(q)A^k, \quad \delta(A) < \frac{1}{|1-q|}, \quad q \neq 1
$$

.
Para las matrices A con $\|A\| < \dfrac{1}{|1-q|}$.

Note ademas que si A es una matriz nilpotente, entonces existe un entero positivo k tal que $A^k = 0$, en tal caso $\exp_q(A)$ es una serie finita y por lo tanto converge, esto es $\exp_q(A)$ converge siempre que A sea nilpotente.

Ejemplo 4.3. Si $0 \in C^{n\times n}$ es la matriz nula, entonces $\exp_q(0) = \mathcal{I}_n$.

En efecto: Es claro que $0^k = 0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y ademas $\|0\| = 0 < \dfrac{1}{|1-q|}$.

Luego $\exp_q(0) := \mathcal{I}_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) 0^k = \mathcal{I}_n$

Ejemplo 4.4. Si $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz diagonal, $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, con $\delta(D) < \frac{1}{|1-q|}$, entonces $\exp_q(D)$ converge y también es una matriz diagonal, con

$$exp_q(D) = \mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q) D^k = diag\left\{\exp_q(\lambda_1), \exp_q(\lambda_2), \ldots, \exp_q(\lambda_n)\right\}.$$

SOLUCIÓN:

sea

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Por inducción se prueba que

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Designemos con $d_{ij}^{(k)}$ el elemento ij de D^k. Entonces el elemento ij de $\frac{1}{k!} Q_{k-1} D^k$ es $\frac{1}{k!} Q_{k-1} d_{ij}^{(k)}$. El elemento ij de $\mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1} D^k$ es

$$e_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1} d_{ij}^{(k)} = \left\{ \begin{array}{c} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1} \lambda_i^{(k)}; i = j \\ 0; i \neq j \end{array} \right. = \exp_q(\lambda_i) \text{ si } |\lambda_i| < \frac{1}{1-q}$$

donde

$$e_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{array} \right. \qquad \mathcal{I}_n = (e_{ij})$$

Así la serie matricial $\mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1} D^k$, converge a la matriz A, donde

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} \exp_q^{(\lambda i)}; i = j \\ 0; i \neq j \end{array} \right.$$

esto es

$$A = (a_{ij}) = diag\left\{\exp_q(\lambda_1), \exp_q(\lambda_2), \ldots, \exp_q(\lambda_n)\right\}$$

Así

$$\exp_q(D) = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1} D^k = diag\left\{\exp_q(\lambda_1), \exp_q(\lambda_2), \ldots \exp_q(\lambda_n)\right\}$$

Ejemplo 4.5. Calcula $\exp_q(tA)$ para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ & \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Solución: Inductivamente se prueba que para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$(tA)^k = \begin{pmatrix} (ta)^k & kt^k a^{k-1} \\ & \\ 0 & (ta)^k \end{pmatrix}.$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\exp_q(tA) &= \mathcal{I}_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q)\,(tA)^k = \mathcal{I}_2 + \frac{1}{1!} Q_0(q) tA + \frac{1}{2!} Q_1(q)(tA)^2 + \frac{1}{3!} Q_2(q)(tA)^3 + \ldots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} Q_0(q) \begin{pmatrix} ta & t \\ & \\ 0 & ta \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} Q_1(q) \begin{pmatrix} (ta)^2 & 2t^2 a \\ & \\ 0 & (ta)^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} Q_2(q) \begin{pmatrix} (ta)^3 & 3t^3 a^2 \\ & \\ 0 & (ta)^3 \end{pmatrix} + \ldots \\
& \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{1!} Q_0(q) ta + \frac{1}{2!} Q_1(q)(ta)^2 + \ldots & Q_0(q) t + \frac{1}{1!} Q_1(q) ta + \frac{1}{2!} Q_2(q)(ta)^2 + \ldots \\ & \\ 0 & 1 + \frac{1}{1!} Q_0(q) ta + \frac{1}{2!} Q_1(q)(ta)^2 + \ldots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q)\,(at)^k & t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_k(q)\,(at)^k \\ & \\ 0 & 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(q)\,(at)^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \exp_q(at) & t\left(\exp_q(at)\right)^q \\ & \\ 0 & \exp_q(at) \end{pmatrix}, \quad \text{para} \quad |at| < \frac{1}{|1-q|}, \quad q \neq 1.
\end{aligned}$$

Note que cuando $q \to 1$, $Q_k(q) \to 1$, así $\exp_q(tA) \to \exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(at) & t\exp(at) \\ & \\ 0 & exp(at) \end{pmatrix} =$ $exp(tA)$, tal como se mostró en el capítulo 3.

EJEMPLO 4.6. La derivada de la exponencial $\exp_q(tA)$ viene dada por

$$\frac{d}{dt}\left[\exp_q(tA)\right] = A\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(tA)^k\right) \tag{4.34}$$

En efecto: por (4.33) tenemos que

$$\exp_q(tA) := \mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}(q)(tA)^k = \mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}(q)t^kA^k$$

Ahora sea $a_{ij}^{(k)}$ el elemento ij de A^k, entonces el elemento ij de $\dfrac{t^kA^k}{k!}$ es $\dfrac{t^k}{k!}a_{ij}^k$. Por tanto, de la definición de serie de matriz,

$$\exp_q(tA) = \left[e_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}(q)t^ka_{ij}^{(k)}\right], \quad \text{donde} \quad e_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ \\ 0, & i\neq j \end{cases} \tag{4.35}$$

$$\exp_q(tA) = \left[e_{ij} + \frac{1}{1!}Q_0(q)ta_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2!}Q_1(q)t^{(2)}a_{ij}^2 + \frac{1}{3!}Q_2(q)t^{(3)}a_{ij}^3 + \frac{1}{4!}Q_3(q)t^{(4)}a_{ij}^4 + \dots\right]$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\exp_q(tA)\right] &= \left[Q_0(q)a_{ij}^(1) + \frac{1}{1!}Q_1(q)ta_{ij}^{(2)} + \frac{1}{2!}Q_2(q)t^2a_{ij}^{(3)} + \frac{1}{3!}Q_3(q)t^3a_{ij}^{(4)} + \dots\right] \\
&= \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(q)t^ka_{ij}^{(k+1)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(q)t^kA^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(q)t^kA^kA \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(q)t^kA^k\right)A = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(q)(tA)^k\right)A = A\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(q)(tA)^k\right)
\end{aligned}$$

esto es $\dfrac{d}{dt}\left(\exp_q(tA)\right) = A\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(q)(tA)^k\right)$.

EJEMPLO 4.7. Para $D = diag\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, la derivada de la matriz $q-$ exponencial $\exp_q(tD)$ viene dada por

$$\frac{d}{dt}\left[\exp_q(tD)\right] = D\begin{pmatrix} (\exp_q(td)_1)^q & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & (\exp_q(td)_n)^q \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

En efecto: Veamos inicialmente que

$$(\exp_q(at))^q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_k(q)(at)^k \tag{4.37}$$

Haciendo uso de (4.24) y (4.29) se tiene que

$$\begin{aligned}
(\exp_q(at))^q &= \frac{1}{a}\cdot\frac{d}{dt}(exp(at)) = \frac{1}{a}\cdot\frac{d}{dt}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}(q)(at)^k\right] \\
&= \frac{1}{a}\cdot\frac{d}{dt}\left[1+\frac{1}{1!}Q_0(q)(at)+\frac{1}{2!}Q_1(q)(at)^2+\frac{1}{3!}Q_2(q)(at)^3+\frac{1}{4!}Q_3(q)(at)^4+\dots\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{0!}Q_0(q)a+\frac{1}{1!}Q_1(q)a(at)+\frac{1}{2!}Q_2(q)a(at)^2+\frac{1}{3!}Q_3(q)a(at)^3+\dots\right] \\
&= \frac{1}{0!}Q_0(q)+\frac{1}{1!}Q_1(q)(at)+\frac{1}{2!}Q_2(q)(at)^2+\frac{1}{3!}Q_3(q)(at)^3+\dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(q)(at)^k
\end{aligned}$$

Esto es

$$(\exp_q(at))^q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_k(q)(at)^k$$

Veamos ahora la prueba de (4.36)

Para $D = diag\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(tD)^k &= \frac{1}{0!}Q_0\mathcal{I}_n + \frac{1}{1!}Q_1(tD) + \frac{1}{2!}Q_2(tD)^2 + \frac{1}{3!}Q_3(tD)^3 + \ldots \\
&= \frac{1}{0!}Q_0\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!}Q_1\begin{pmatrix} td_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & td_n \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2!}Q_2\begin{pmatrix} (td_1)^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & (td_n)^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}Q_3\begin{pmatrix} (td_1)^3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & (td_n)^3 \end{pmatrix} + \ldots \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{0!}Q_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \frac{1}{0!}Q_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{1!}Q_1td_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \frac{1}{1!}Q_1td_n \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{1}{2!}Q_2(td_1)^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \frac{1}{2!}Q_2(td_n)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3!}Q_3(td_1)^3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \frac{1}{3!}Q_3(td_n)^3 \end{pmatrix} + \ldots
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{0!}Q_0 + \frac{1}{1!}Q_1td_1 + \frac{1}{2!}Q_2(td_1)^2 + \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \frac{1}{0!}Q_0 + \frac{1}{1!}Q_1td_1 + \frac{1}{2!}Q_2(td_1)^2 + \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(td_1)^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(td_n)^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\exp_q td_1)^q & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & (\exp_q td_n)^q \end{pmatrix} \quad ; \text{por } (4.37)$$

Esto es

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(tD)^k = \begin{pmatrix} (\exp_q(td_1))^q & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & (\exp_q(td_n))^q \end{pmatrix}$$

Ahora, dado que

$$\frac{d}{dt}\left(\exp_q(tD)\right) = D\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(tD)^k$$

se sigue que

$$\frac{d}{dt}\left(\exp_q(tD)\right) = D\begin{pmatrix} (\exp_q(td_1))^q & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (\exp_q td_n)^q \end{pmatrix}$$

note que por (4.25), $(\exp_q(td_i))^q = \frac{1}{d_i}\cdot\frac{d}{dt}\left(\exp_q(td_i)\right)$. Así

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} (\exp_q(td_1))^q & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (\exp_q(td_n))^q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1}\cdot\frac{d}{dt}(\exp_q(td_1)) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{d_n}\cdot\frac{d}{dt}(\exp_q(td_n)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{d_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(\exp_q(td_1)) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{d}{dt}(\exp_q(td_n)) \end{pmatrix} \\ &= D^{-1}\frac{d}{dt}\exp_q(tD)\end{aligned}$$

Observe

1). Para, $E(t) = \exp_q(tA)$, para todo A. $E'(t) = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(q)(tA)^k$

cuando $q \longrightarrow 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_k(q)(tA)^k \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(tA)^k = \exp tA; \quad Q_k(1) = 1$$

Así $E'(t) = A\exp tA$.

2). Para

$$D = \begin{pmatrix} d_i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}, \qquad \exp_q(tD) = \begin{pmatrix} \exp_q(td_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \exp_q(td_n) \end{pmatrix}$$

su inversa viene dada por

$$[\exp_q(tD)]^{-1} = \begin{pmatrix} [\exp_q(td_1)]^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & [\exp_q(td_n)]^{-1} \end{pmatrix}$$

donde

$$[\exp_q(td_i)]^{-1} = \exp_q(\frac{-td_i}{1+(1-q)td_i}), \quad td_i \neq \frac{1}{q-1} \tag{4.38}$$

Esto es, para $t = 1$

$$\exp_q(D) = \begin{pmatrix} \exp_q(d_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e_q^{d_n} \end{pmatrix}, \qquad [\exp_q(D)]^{-1} = \begin{pmatrix} [\exp_q(d_1)]^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & [\exp_q(d_n)]^{-1} \end{pmatrix}$$

donde

$$[\exp_q(d_i)]^{-1} = \exp_q(\frac{-d_i}{1+(1-q)d_i}, \quad d_i \neq \frac{1}{q-1}$$

Ahora si denotamos $-D_q$ por

$$-D_q = \begin{pmatrix} \frac{-d_1}{1+(1-q)d_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{-d_n}{1+(1-q)d_n} \end{pmatrix}$$

entonces

$$[\exp_q(D)]^{-1} = \exp_q(-D_q)$$

y así cuando $q \longrightarrow 1$, $-D_q \longrightarrow -D$ y $[\exp D]^{-1} = \exp -D$.

3). Para A diagonalizable, $A = PDP^{-1}$,

$$-A = -(PDP^{-1}) = P(-D)P^{-1}$$

Luego, $\exp_q(A) = P\exp_q(D)P^{-1}$ y $[\exp_q(A)]^{-1} = [P^{-1}\exp_q(D)P]^{-1} = P[\exp_q(D)]^{-1}P^{-1} = P\exp_q(-D_q)P^{-1}$.

Además $tA = t[PDP^{-1}] = P(tD)P^{-1}$, por lo cual

$$\exp_q(tA) = P\exp_q(tD)P^{-1}$$

Así mismo,

$$\frac{d}{dt}[\exp_q(tA)] = \frac{d}{dt}[P\exp_q(tD)P^{-1}] = P\frac{d}{dt}[\exp_q(tD)]P^{-1} = PD\begin{pmatrix} [\exp_q(td_1)]^q & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & [\exp_q(td_n)]^q \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ahora bien, por otro lado.

Si A es diagonal, $A = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, entonces toda potencia de A también es una matriz diagonal, donde $A^k = diag\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k\}$.

Por consiguiente en este caso $\exp_q(A)$ es matriz diagonal dada por

$$\begin{aligned} \exp_q(A) &= \mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}Q_{k-1}A^k = diag\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}Q_{k-1}{\lambda_1}^k, \dots, 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}Q_{k-1}{\lambda_n}^k\right\} \\ &= diag\left\{\exp_q(\lambda_1), \dots, \exp_q(\lambda_n)\right\}; \quad \text{si} \quad |\lambda_i| < \frac{1}{|1-q|} \end{aligned}$$

Otro caso fácil de manejar es cuando A es diagonalizable en tal caso

$$A = PDP^{-1} = P\cdot diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}P^{-1}$$

Luego

$$\begin{aligned} \exp_q(tA) &= \mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}t^kA^k = \mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}t^kPD^kP^{-1} \\ &= P\left(\mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}t^kD^k\right)P^{-1} = P\left(\mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}(tD)^k\right)P^{-1} \\ &= P\cdot diag\left\{\exp_q(t\lambda_1), \dots, \exp_q(t\lambda_n)\right\}P^{-1}; \quad \text{si} \quad |t\lambda_i| < \frac{1}{|1-q|} \\ &= P\exp_q(tD)P^{-1} \end{aligned}$$

De lo anterior $\exp_q(A) = P\cdot diag\left\{\exp_q(\lambda_1), \dots, \exp_q(\lambda_n)\right\}P^{-1}$ si $|\lambda_i| < \frac{1}{|1-q|}$ (para cada $i = 1, 2, \dots, n$), esto es $\exp_q(A)$ y convergente si $\delta(A) < \frac{1}{|1-q|}$ (A diagonalizable).
Ahora, si A es tal que $\|A\| < \frac{1}{|1-q|}$ y dado que $\delta(A) < \|A\|$, entonces $\exp_q(A)$ es convergente. Note que

$$\begin{aligned} \|A\| &< \frac{1}{|q-1|} \Longleftrightarrow \|A\||q-1| < 1 \Longleftrightarrow |q-1| < \frac{1}{\|A\|} \Longleftrightarrow -\frac{1}{\|A\|} < q-1 < \frac{1}{\|A\|} \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{\|A\|} < q < 1 + \frac{1}{\|A\|} \end{aligned}$$

De lo anterior resumimos que:

Para A matriz diagonalizable, $\exp_q(A)$ es convergente si $1 - \dfrac{1}{\|A\|} < q < 1 + \dfrac{1}{\|A\|}$.
Observe que

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} \qquad \text{y} \qquad \exp_q(A) = P\exp_q(D)P^{-1}$$

Esta idea puede ser generalizada a cualquier función $f(z)$ que esté definida en los valores propios λ_i de una matriz diagonalizable $A = PDP^{-1}$, será suficiente tomar

$$f(D) = diag\,\{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)\}$$

y finalmente tener $f(A) = P \cdot diag\,\{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)\}\, P^{-1}$.

Ejemplo 4.8. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con valores propios λ_i. Suponga que

$$f(A) = \mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1} A^k = \exp_q(A)$$

Entonces

(i) Si $A = RDR^{-1}$, $D = diag\,\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$

$$\begin{aligned} f(A) &= \mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1}(RDR^{-1})^k = RI_nR^{-1} + R\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1} D^k\right) R^{-1} \\ &= R\left(\mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_{k-1} D\right) = Rf(D)R^{-1} = R\exp_q(D)R^{-1} \end{aligned}$$

(ii) $det\, f(A) = det\, f(D) = det\, \left\{diag\left\{\exp_q(\lambda_1), \exp_q(\lambda_2), \ldots, \exp_q(\lambda_n)\right\}\right\} = \exp_q(\lambda_1), \exp_q(\lambda_2), \ldots$

$$det\ \exp_q(\left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k + \sum_{k=1}^{n-1} (1-q)^k \lambda_1 \ldots \lambda_{k+1} + (1-q) \sum_{k=2}^{n-1} (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)\lambda_{k+1} + (1-q)^2 \sum_{k=2}^{n-2} (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)\lambda\right.$$

Cuando $q \longrightarrow 1$ tenemos $det \exp_q(A) = det\ \exp(A) = \exp(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) = \exp(\text{traza}(A))$

Recuerde que $\exp_q(\lambda_1)\exp_q(\lambda_2) = \exp(\lambda_1+\lambda_2+(1-q)\lambda_1\lambda_2) = \exp(\lambda_1\oplus\lambda_2)$; $\lambda_1\oplus\lambda_2 = \lambda_1+\lambda_2+(1-q)\lambda_1\lambda_2$.

(iii) Traza $f(A)$ = Traza $\exp_q(A) = \sum_{i=1}^{n}\exp_q(\lambda_i) = \exp_q(\lambda_1)+\exp_q(\lambda_2)+\ldots+\exp_q(\lambda_n)$

Para $D = diag\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$

$$\frac{d}{dt}\exp_q(tD) = D\begin{pmatrix}(\exp_q(td)_1)^q & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & (\exp_q(td)_n)^q\end{pmatrix}$$

Luego

$$\int\begin{pmatrix}(\exp_q(td_1))^q & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & (\exp_q(td_n))^q\end{pmatrix}dt = D^{-1}\exp_q(tD)+C$$

dado que

$$\frac{d}{dt}(D^{-1}\exp_q(tD)+C) = D^{-1}D\begin{pmatrix}(\exp_q(td)_1)^q & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & (\exp_q(td)_n)^q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\exp_q(td)_1)^q & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & (\exp_q(td)_n)^q\end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.9. Sea $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ luego, $exp(tA) = \begin{pmatrix}\exp_q(t) & 0\\ 0 & \exp_q(t)\end{pmatrix}$ y

$$\begin{aligned}\int\exp_q(tA)dt &= \begin{pmatrix}\int\exp_q(t)dt+C_1 & C_2\\ C_3 & \int\exp_q(t)dt+C_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2-q}(\exp_q(t))^{2-q} & 0\\ 0 & \frac{1}{2-q}(\exp_q(t))^{2-q}\end{pmatrix} + \\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{2-q} & 0\\ 0 & \frac{1}{2-q}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}(\exp_q(t))^{2-q} & 0\\ 0 & (\exp_q(t))^{2-q}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

En el caso $q \longrightarrow 1$

$$\int\exp_q(tA)dt = \exp_q(tA)dt + C$$

Ejemplo 4.10.

$$\begin{aligned}
\|\exp_q(A)\| &= \left\|\mathcal{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}A^k\right\| \leq \|\mathcal{I}\| + \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}A^k\right\| \\
&\leq \|\mathcal{I}_n\| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}\|A^k\| \leq \|\mathcal{I}_n\| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q_{k-1}\|A\|^k
\end{aligned}$$

esto es $\|\exp_q(A)\| \leq \|\mathcal{I}_n\| + \exp_q(\|A\|)$.
Ahora si $\|\cdot\|$ es una norma matricial subordinada, entonces $\|\mathcal{I}_n\| = 1$, en tal caso $\|\exp_q(A)\| \leq 1 + \exp_q(\|A\|)$.

3. Ecuación Diferencial que se Satisface por $\exp_q tA$

Teorema 4.11. *Para todo real t la función matricial E definida por*

$$E(t) = \exp_q tA$$

satisface la ecuación diferencial

$$E'(t) = [E(t)]^q A = A[E(t)]^q \qquad \textit{para} \quad A \ \textit{diagonal}$$

Es decir

$$\frac{d}{dt}\left[\exp_q tA\right] = \left[\exp_q tA\right]^q A = A\left[\exp_q tA\right]^q$$

Observación 4.12. Notemos las siguientes relaciones

$$E(t) = \exp at \Longrightarrow E'(t) = a\exp at = \exp ata = aE(t) = E(t)a$$

$$E(t) = \exp tA \Longrightarrow E'(t) = A\exp tA = \exp tAA = AE(t) = E(t)A \quad A \quad \text{matriz cualquiera}$$

Ahora para la función q exponencial tenemos:

$$E(t) = \exp_q at \Longrightarrow E'(t) = a\left(\exp_q at\right)^q = \left(\exp_q at\right)^q a = aE(t) = E(t)a$$

$$E(t) = \exp_q tA \Longrightarrow E'(t) = A(\exp_q(tA))^q = (\exp_q(tA))^q A = A(E(t))^q = (E(t))^q A, \quad A \text{ matriz diagona}$$

Conclusiones

El presente trabajo ha mostrado que las funciones exponencial y logaritmo natural, y así mismo sus propiedades son casos particulares de las funciones q-exponencial y q-logaritmo respectivamente las cuales se obtienen en el límite cuando q tiende 1. Ver (4,10) y (4,11)

De igual forma se puede observar que se da esta misma relación para las funciones exponencial de una matriz y q-exponencial de una matriz cuadrada A. Esta última se definió a partir de la exponencial de un matriz y el de desarrollo de series de potencias y además se estudiaron propiedades analogas a las dadas en el capítulo 3

Es claro que hallar la exponencial y q-exponencial de una matriz cuadrada A es un problema nada sencillo dado que se deben calcular las potencias de A. Pero al considerar matrices diagonalizables, la dificultad se reduce ya que debemos hallar las potencias de matrices diagonales las cuales son fáciles de calcular, esto es en la práctica hallar la exponencial y la q-exponencial de una matriz no es nada fácil a menos que la matriz A sea diagonalizable.

Problemas abiertos

Obtener resultados para la existencia de la inversa de la matriz q-exponencial, su expresión en serie de potencias y propiedades análogas a la de la matriz exponencial. También desarrollar problemas de aplicación cuya solución involucre a la matriz q-exponencial.

Bibliografía

[1] Tsallis C. *Nonextensive statistical mechanics and nonlinear dynamics, in Interdisciplinary* 3

[2] Tsallis C. *Nonextensive statistical machanics and themodynamics: historical back-ground and present status, in nonextensive statistical mechanics and its applications.* eds S. Abe e Y. Okamoto, (Series Lectures notes in Physics), Springer Verlag Heidelberg, 2001, P. 3 49, 50

[3] Tsallis C. *averiguar.* Quim Nova 17 (1994) 468 (Aclarar esta referencia) 3, 49, 50

[4] Tsallis C. *Possible Generalization of Bolzmann-Gibbs Statistics*, J. Stat. Phys. 52, 479. (1998)

[5] Tsallis C. *Nonextensive statistical mechanics and nonlinear dynamics, in Interdisciplinary. Aspects of Turbulence*, eds. W. Hillebrandt and F. Kupka, Lecture Notes in Physics 756, 21 (Springer, Berlin, 2008).

[6] Tsallis C, *Umarov S, Steinberg S. A generalization of the central limit theorem consistent with nonextensive mechanics*

[7] Marmolejo M. *Sobre la Exponencial de una Matriz. Matemáticas: Enseñanza Universitaria* Vol. XII No.2, Dic. (2004)

[8] Asmar A. *Topicos en Teoria de Matrices. Facultad de Ciencias.* Universidad Nacional de Colombia. (1995) 20

[9] Apostol T. *Cálculo con Funciones de Varias Variables y Álgebra Lineal con Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales y a las Probabilidades.* Vol 2 Editorial Reverté Colombia S.A. (1988) 5, 13

[10] Yamano T. *Some properties of q-logarithm and q-exponential functions in Tsallis statistics.* Physica A 305 (2002) 486-496.

[11] Dukkipati A, Narasimha M, Bhatnagar S. *Nonextensive triangleequality and other properties of tsallis relative - entropy minimization.* Physica A 361 (2006) 124 - 138 50

[12] Kincaid D. *Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico.* The University of Texas en Austin. Addison - Wesley Iberoamericana. 1994 28

[13] E. Borges P. *Averiguar titulo* J. Phys. A: Math. Gen. 31, 5281 (1998) (Aclarar esta referencia) 49, 50

[14] Borges P. *Manifestacoes Dinamicas e Termodinamicas deSistemas Nao - Extensivos.* Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro, (2004) 49, 50

[15] E. Borges P. *A Possible Deformed Algebra And Calculus Inspired In Nonextensibe Thermostatistics*, [http://arXiv.org/cond-mat/0304545](aceptado para publicación en Physica A, 2004)

[16] Meyer Carl D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* Siam, Abril 19, 2000 17, 22, 28

[17] Wade W. *An Introduction To Analysis. Pag.125*, Printice Hall, 1999 8, 9

[18] Naudts J. *Deformed exponentials and logarithms in generalized thermostatistics.* Physica A 316 (2002) 323-334. *Department Natuurkunde*, Universiteit Antwerpen UIA, Universiteitsplein 1, 2610 Antwerpen, Belgium, (2002) 42, 49, 50

[19] Martinez A, Silva R, Espíndola A. *Generalized exponential function and discrete growth models*. Physica A 388 (2009) 2922-2930

[20] Hernández V, Ibáñez J. *Funciones de Matrices*. Departamento de Sistemas Informáticos y Computación. *Universidad Politécnica de Valencia* (2006)

[21] Rodríguez B, Lara H, Moya C, Viana S. *Por qué y cómo Encontramos Funciones de Matrices: Entropía en Mecánica Cuántica. Revista Mexicana de Física E 51(2) 87-98.* (2005) 2

[22] Molero M, Salvador A, Menárguez M, Garmendia L. *Análisis Matemático para Ingeniera. Pag. 456-459.* Ed. Pearson Prentice Hall. (2007) 2

[23] Moler C. y Loan V. *Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix*, SIAM Review 20, 801-36, (1978) 2

[24] Bellman R. *On the Calculation of Matrix Exponential*, Linear and Multilinear Álgebra, 41:73-79 (1983). 2

[25] K. Ogata, *Modern control engineering*, 3rd Ed. (Prentice Hall,1997) 2

[26] W. Brogan, *Modern Control Theory*, 3rd Ed. (Prentice Hall, 1991) 2

[27] Goldstein H. *Classical mechanics*, 3rd Ed. (Prentice Hall,2002) 2

[28] Boyce W. Diprima R. *Elementary Diferential Equations and Boundary Value Problems*, (John Wiley & Sons, 2 ed.), New York, (1969)

[29] Kreyszig E. *Advanced Engineering Mathematics*, (John Wiley & Sons, 7 ed.), New York, (1993)