

**MODELADO ACÚSTICO Y MIGRACIÓN PSPI EN
MEDIOS CON ANISOTROPÍA POLAR**

Por

Jairo Alberto Torres Peña
(Físico, Universidad Industrial de Santander)

**MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA
DEPARTAMENTO DE GEOLOGÍA
UNIVERSIDAD EAFIT
&
GRUPO DE GEOFÍSICA
INSTITUTO COLOMBIANO DEL PETRÓLEO (ICP)
ECOPETROL
2010**

MODELADO ACÚSTICO Y MIGRACIÓN PSPI EN MEDIOS CON ANISOTROPÍA POLAR

Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de
Magíster en Ciencias de la Tierra, con énfasis en Geofísica

Por

Jairo Alberto Torres Peña

(Físico, Universidad Industrial de Santander)

Director

PhD. FRANCISCO CABRERA ZAMBRANO

Codirectores

PhD. FLOR ALBA VIVAS MEJÍA

M.Sc. HERLING GONZALEZ ALVAREZ



MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA
DEPARTAMENTO DE GEOLOGÍA
UNIVERSIDAD EAFIT

&



GRUPO DE GEOFÍSICA
INSTITUTO COLOMBIANO DEL PETRÓLEO (ICP)
ECOPETROL

2010

DEDICADO A DIOS, A MIS PADRES: ANTONIO Y ROSALBA,
Y A MIS HERMANOS: ADRIANA, WILLIAM Y JAVIER.

Agradecimientos

A mis padres por todo el amor y el apoyo que me han dado para alcanzar mis metas, los amo con todo mi corazón.

A mi hermano William, de quien he aprendido que luchar vale la pena, gracias por enseñarme tanto, te amo.

A mi hermana Adriana, mi parte gemela, con la que he compartido desde el vientre mi madre, y la cual me ha enseñado que perseverar es la clave para el éxito.

A mi director, el Profesor Dr. Francisco Cabrera Zambrano, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Pamplona, por su acompañamiento, discusiones y enseñanzas a lo largo del proyecto.

A mi codirectora, la Profesora Dra. Flor Alba Vivas Mejía, del Departamento de Física y Geología de la Universidad de Pamplona, por su dirección en este proyecto.

A mi codirector, el Funcionario M.Sc. Herling Gonzalez Alvarez, del Grupo de Geofísica del Instituto Colombiano del Petróleo (ICP-Ecopetrol), por sus enseñanzas, respaldo y confianza para realizar este posgrado.

Al Grupo de Investigación en Geofísica del Instituto Colombiano del Petróleo (ICP-Ecopetrol) por el financiamiento de este posgrado.

Al Grupo de Investigación en Geofísica y Geología “PANGEA” del Departamento de Física y Geología de la Universidad de Pamplona, por el apoyo recibido para este proyecto.

Apéndice

.1 Deducción de la velocidad de fase para el medio elástico VTI con serie de Taylor

La serie de Taylor para una función f infinitamente derivable, real o compleja, se define:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (1)$$

Donde $f^{(n)}(a)(x-a)^n$ es la derivada n -ésima de la función f .

Las Series de Taylor de $\sqrt{1+x}$ en torno a $x = 0$ se pueden encontrar usando el Teorema del binomio:

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots \quad (2)$$

$|x| < 1$.

A partir de la Expresión de la Velocidad de Fase para el medio elástico VTI:

$$\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}} \quad (3)$$

Desarrollando el término al cuadrado en el interior del radical antes de expandir en

series de Taylor:

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \sqrt{1 + \frac{4\varepsilon \sin^2 \theta}{f} + \frac{4\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f^2} - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}} \quad (4)$$

Expandiendo el radical en series de Taylor de primer orden $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \left(\frac{f}{2} + 2\varepsilon \sin^2 \theta + \frac{2\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f} - 2(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) \quad (5)$$

Para la Onda P se considera el (+)

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta + 2\varepsilon \sin^2 \theta + \frac{2\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f} - 2\varepsilon \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2\delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (6)$$

Considerando la identidad $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta + 2\varepsilon \sin^2 \theta + \frac{2\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f} - 2\varepsilon \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) + 2\delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (7)$$

Simplificando y despreciando el término cuadrado para ε

$$\frac{\nu_p^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + 2\delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2\varepsilon \sin^4 \theta \quad (8)$$

Para la onda SV se considera el signo (-) obteniendo:

$$\frac{\nu_{sv}^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 - f + 2(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (9)$$

.2 Deducción de la relación de dispersión en el medio elástico anisótropo VTI 2D

A continuación se muestra con detalle, la deducción de la relación de dispersión, a partir de la expresión de Tsvankin, (1996).

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} + \frac{f}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}} \quad (10)$$

Donde

$$f = \left(1 - \frac{v_{s0}^2}{v_{p0}^2}\right) \quad (11)$$

y θ es el ángulo de fase.

Pasando los términos sin el radical al lado izquierdo de la ecuación en (10) y elevando al cuadrado toda la expresión obtenemos

$$\left[\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} - \left(1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}\right] \quad (12)$$

Desarrollando el cuadrado en el lado izquierdo y el interno del lado derecho en la ecuación:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2}\right)^2 - 2\left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2}\right)\left(1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2}\right) + \left(1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2}\right)^2 = \\ &+ \left(\frac{f}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{4\varepsilon \sin^2 \theta}{f} + \frac{4\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f^2}\right] - \left(\frac{f}{2}\right)^2 \left[\frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}\right] \end{aligned} \quad (13)$$

Desarrollando el cuadrado del tercer término del lado izquierdo y realizando los productos:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2}\right)^2 - 2\left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2}\right) - 2\left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2}\right)\varepsilon \sin^2 \theta + \left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2}\right)f + (1 + \varepsilon \sin^2 \theta)^2 \\ &- (1 + \varepsilon \sin^2 \theta)f + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 \frac{4\varepsilon \sin^2 \theta}{f} + \left(\frac{f}{2}\right)^2 \frac{4\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f^2} \\ &\quad - \left(\frac{f}{2}\right)^2 \left[\frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}\right] \end{aligned} \quad (14)$$

Desarrollando el último cuadrado y simplificando términos idénticos,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} \right) - 2 \left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} \right) \varepsilon \sin^2 \theta + \left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} \right) f + 1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta + \varepsilon^2 \sin^4 \theta \\
& - (1 + \varepsilon \sin^2 \theta) f + \left(\frac{f}{2} \right)^2 = \left(\frac{f}{2} \right)^2 + \varepsilon f \sin^2 \theta + \varepsilon^2 \sin^4 \theta - 2f(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta
\end{aligned} \tag{15}$$

Organizando y pasando todo los términos al lado izquierdo

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} \right) - 2 \left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} \right) \varepsilon \sin^2 \theta + \left(\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} \right) f \\
& + (1 - f) + 2\varepsilon \sin^2 \theta - 2\varepsilon f \sin^2 \theta + 2f(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

Considerando la expresión para la velocidad de fase $v = \frac{w}{|k|}$ y las componentes del número de onda, k_x y k_z en dirección x y z respectivamente en términos del ángulo de fase dadas por las siguientes expresiones:

$$k_x = |k| \sin \theta, \quad k_z = |k| \cos \theta \tag{17}$$

Considerando lo anterior

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{w^2}{v_{p0}^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{w^2}{v_{p0}^2} \right) (k_x^2 + k_z^2) - 2\varepsilon \left(\frac{w^2}{v_{p0}^2} \right) k_x^2 + f \left(\frac{w^2}{v_{p0}^2} \right) (k_x^2 + k_z^2) \\
& + (1 - f)(k_x^2 + k_z^2)^2 + 2\varepsilon k_x^2 (k_x^2 + k_z^2) - 2\varepsilon f k_x^2 (k_x^2 + k_z^2) + 2f(\varepsilon - \delta) k_x^2 k_z^2 = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

La ecuación anterior puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& (1 - f)k_z^4 + (1 - f)(1 + 2\varepsilon)k_x^4 + \left[2(1 - f)(1 + \varepsilon) + 2(\varepsilon - \delta)f \right] k_x^2 k_z^2 \\
& - \left(\frac{w^2}{v_{p0}^2} (2 - f) \right) k_z^2 - \left(\frac{w^2}{v_{p0}^2} (2(1 + \varepsilon) - f) \right) k_x^2 + \frac{w^4}{v_{p0}^4} = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Según lo anterior se puede expresar un polinomio de cuarto orden en k_z de la siguiente forma:

$$ak_z^4 + bk_z^2 + c = 0 \quad (20)$$

Donde

$$\begin{aligned} a &= 1 - f \\ b &= \left[2(1 - f)(1 + \varepsilon) + 2(\varepsilon - \delta)f \right] k_x^2 - \left(\frac{w^2}{v_{p0}^2} (2 - f) \right) \\ c &= \left[-\frac{w^2}{v_{p0}^2} (2(1 + \varepsilon) - f) + (1 - f)(1 + 2\varepsilon)k_x^2 \right] k_x^2 + \frac{w^4}{v_{p0}^4} \end{aligned} \quad (21)$$

Cuya solución es de la forma:

$$k_z = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad (22)$$

Para reducir las expresiones en (21) definimos las siguientes constantes.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \left[2(1 - f)(1 + \varepsilon) + 2(\varepsilon - \delta)f \right] \\ \beta_2 &= (2 - f) \\ \gamma_1 &= \left(2(1 + \varepsilon) - f \right) \\ \gamma_2 &= (1 - f)(1 + 2\varepsilon) \end{aligned} \quad (23)$$

Luego de definir estas constantes (23) y de sustituirlas en las ecuaciones (21) :

$$\begin{aligned} a &= 1 - f \\ b &= \beta_1 k_x^2 - \left(\frac{w^2}{v_{p0}^2} \right) \beta_2 \\ c &= \left[-\gamma_1 \left(\frac{w^2}{v_{p0}^2} \right) + \gamma_2 k_x^2 \right] k_x^2 + \left(\frac{w^4}{v_{p0}^4} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

Las expresiones (24) se pueden reducir a:

$$\begin{aligned}
 a &= 1 - f \\
 b &= -\beta_1 \left(\frac{w^2}{v_{p0}^2} \right) \left[1 - \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \frac{k_x^2 v_{p0}^2}{w^2} \right] \\
 c &= \frac{w^4}{v_{p0}^4} \left[1 - \gamma_2 \frac{k_x^2 v_{p0}^2}{w^2} \left(1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \frac{k_x^2 v_{p0}^2}{w^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{25}$$

Usando las constantes $\lambda_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ y $\lambda_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ junto con la variable $u^2 = \frac{k_x^2 v_{p0}^2}{w^2}$ las Ecuaciones en (25)

$$\begin{aligned}
 a &= 1 - f \\
 b &= -\beta_1 \left(\frac{w^2}{v_{p0}^2} \right) [1 - \lambda_1 u^2] \\
 c &= \frac{w^4}{v_{p0}^4} [1 - \gamma_2 u^2 (1 - \lambda_2 u^2)]
 \end{aligned} \tag{26}$$

Expresando la Ecuación (22) en términos de las nuevas variables de (26) se obtiene:

$$k_z = \pm \frac{w}{v_{p0}} \left[\frac{\beta_1}{2a} (1 - \lambda_1 u^2) \pm \frac{1}{2a} \sqrt{[\beta_1 (1 - \lambda_1 u^2)]^2 - 4a [1 - \gamma_2 u^2 (1 - \lambda_2 u^2)]} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

.3 Relación de dispersión para el medio acústico anisótropo 2D

Para el caso acústico en donde la componente paralela al eje de simetría de la onda SV es nula ($v_{s0} = 0$),

$$f = \left(1 - \frac{v_{s0}^2}{v_{p0}^2} \right) = 1$$

por lo tanto los coeficientes (21) quedan de la forma:

$$\begin{aligned}
a &= 0 \\
b &= 2(\varepsilon - \delta)k_x^2 - \left(\frac{w^2}{v_{p0}^2}\right) \\
c &= -\frac{w^2}{v_{p0}^2} \left(1 + 2\varepsilon\right)k_x^2 + \frac{w^4}{v_{p0}^4}
\end{aligned} \tag{28}$$

Y el polinomio (20) queda expresado de la forma:

$$bk_z^2 + c = 0 \tag{29}$$

Cuya solución es:

$$k_z^2 = \frac{c}{-b} \tag{30}$$

Reemplazando los valores para los coeficientes en la expresión anterior

$$k_z^2 = \frac{\left[-\frac{w^2}{v_{p0}^2} \left(1 + 2\varepsilon\right)k_x^2 + \frac{w^4}{v_{p0}^4}\right]}{\left(\frac{w^2}{v_{p0}^2}\right) - 2(\varepsilon - \delta)k_x^2} \tag{31}$$

La expresión (31) se puede expresar en términos del parámetro de anisotropía $\eta = \frac{\varepsilon - \delta}{1 + 2\delta}$ y la velocidad NMO $v_{nmo} = v_{p0}\sqrt{1 + 2\delta}$ por la siguiente expresión:

$$k_z^2 = \frac{v_{nmo}^2}{v_{p0}^2} \left(\frac{1}{v_{nmo}^2} - \frac{k_x^2 + k_y^2}{1 - 2v_{nmo}^2\eta(k_x^2 + k_y^2)} \right). \tag{32}$$

Recordando la condición para el medio acústico isótropo en donde $\varepsilon = \delta = 0$ y definiendo la variable $u^2 = \frac{k_x^2 v_{p0}^2}{w^2}$ se obtiene, la tradicional relación de dispersión para el medio acústico isótropo:

$$k_z = \pm \frac{w}{v_{p0}} \sqrt{1 - u^2}, \tag{33}$$

y $\frac{k_x^2 v_{p0}^2}{\omega^2} < 1$ es la condición para que k_z tome valores reales.

Lista de Símbolos y abreviaturas

Símbolo	Definición
σ_{ij}	Tensor de esfuerzos
ε_{ij}	Tensor deformación
w	Frecuencia angular
ν	Velocidad de fase
ρ	Densidad de masa
θ	Ángulo medido desde el eje de simetría al vector número de onda
ϕ	Ángulo de inclinación en un medio TTI
λ	Parámetro de Lamé
μ	Parámetro de Lamé, también conocido como módulo de rigidez
ε	Parámetro de anisotropía definido por Thomsen para la onda P
δ	Parámetro de anisotropía definido por Thomsen para la onda P y SV
γ	Parámetro de anisotropía definido por Thomsen para la onda SH
η	Parámetro de anisotropía definido por Tsvankin
v_{nmo}	Velocidad NMO
c_{ijk}	Tensor de Elasticidad
C_{mn}	Matriz de Elasticidad, y parámetros de elasticidad
G_{ik}	Matriz de Christoffel
VTI	Siglas en inglés de medio transversalmente isótropo vertical o anisotropía polar vertical
TTI	Siglas en inglés de medio transversalmente isótropo inclinado o anisotropía polar inclinada
PS	Siglas en inglés de corrimiento de fase
PSPI	Siglas en inglés de corrimiento de fase más interpolación
DF	Diferencias finitas
OWWE	Siglas en inglés de ecuaciones de onda unidireccionales o de Sentido único

Resumen

En este trabajo se presentan los principios básicos de la anisotropía sísmica orientados a la comprensión de los dos tipos de anisotropía más usada en exploración de hidrocarburos: la anisotropía polar vertical o VTI y la anisotropía polar inclinada o TTI. Se realiza una comparación de las curvas obtenidas para las velocidades de fase de las ondas P y SV considerando la ecuación exacta del medio elástico, la aproximación acústica definida por Alkhalifah y una aproximación de anisotropía débil según los parámetros de Thomsen. Se desarrollaron algoritmos numéricos que resuelven la ecuación de onda del medio acústico con anisotropía VTI y TTI en términos de los parámetros η y v_{nmo} , en base a la técnica de diferencias finitas con operadores espaciales y temporales aproximados con DF de segundo orden. Dicho algoritmo numérico permite obtener el campo de onda y el sismograma sintético que auxilian el análisis de la propagación de las ondas en modelos con estos tipos de anisotropía.

En una segunda parte del trabajo se presentan los métodos de migración pre-apilado por continuación del campo de onda en profundidad, PS y PSPI, y la extensión propuesta de estos algoritmos para considerar anisotropía VTI. Se comparan las imágenes obtenidas a través de los algoritmos convencionales con los resultados de migración de los algoritmos propuestos en datos sintéticos correspondientes a modelos con reflectores planos, reflectores inclinados, y finalmente con el modelo Marmousi anisótropo desarrollado por Alkhalifah.

Introducción

La sísmica de reflexión para exploración de hidrocarburos ha sido uno de los métodos geofísicos más desarrollados por su profundidad de penetración, su resolución y por el interés económico que representa. Los geofísicos han desarrollado ampliamente el modelado de la propagación de ondas sísmicas en el subsuelo y la migración sísmica, con el objetivo de obtener imágenes del subsuelo con la mejor resolución y el mejor posicionamiento de los reflectores, de tal forma que contribuya a disminuir la incertidumbre de la interpretación sísmica.

Una de las propiedades del medio que debe ser tomada en cuenta para mejorar la resolución y el posicionamiento de los reflectores es la anisotropía sísmica, la cual es definida como la variación de la velocidad con la dirección en la cual se propagan las ondas y esta propiedad la exhiben ciertas rocas como las arcillas, estratos delgados de sedimentos intercalados y rocas con gran cantidad de fracturas (Jones and Wang, 1981; Thomsen, 1986; Johnston and Christensen, 1995; Leslie and Lawton, 1999).

La teoría de anisotropía polar esta basada en las ecuaciones del medio elástico continuo con anisotropía y según las simetrías del tensor de elasticidad se pueden obtener medios elásticos homogéneos VTI y TTI (Love, 1927). Obteniendo las ecuaciones de velocidad de fase para las ondas P y SV en medios con estos tipos de anisotropía, se pueden describir las diferentes expresiones para estas velocidades en términos de los coeficientes elásticos de la matriz de Voigt (Daley and Hron, 1977), en términos de los parámetros de Thomsen (Thomsen, 1986), una reformulación mas simplificada

presentada Tsvankin (1996) y una aproximación acústica (Alkhalifah and Tsvankin, 1998).

El modelado sísmico utiliza los métodos numéricos para resolver las ecuaciones que modelan la propagación de las ondas. Entre estos métodos se resaltan los métodos de: Diferencias Finitas, DF, (Kelly et al., 1976; Madariaga, 1990; Madariaga, 1976; Virieux, 1986; Levander, 1988; Levander, 1989), los métodos pseudoespectrales (PS) (Fornberg, 1998) y elementos finitos (Zienkiewicz, 1977) entre otros.

Dependiendo del tipo de medio a modelar se deben considerar las diferentes ecuaciones de onda. La ecuación acústica ó ecuación de presión considera el caso en donde solo se propaga un tipo de onda, la onda P. La ecuación de onda elástica isótropa considera dos tipos de onda, la onda P y la onda S, conocidas también como onda compresional y onda de corte para un medio isótropo. La ecuación de onda elástica con anisotropía considera tres tipos de ondas, la onda P, la onda SV y la onda SH, las dos últimas ondas polarizadas en diferentes planos. Conociendo las ecuaciones que gobierna la propagación de las ondas en el medio, las diferencias finitas proveen una solución aproximada para dicha ecuación, y de esta forma a través del modelado numérico se pueden modelar los diferentes fenómenos que se presentan en el subsuelo cuando las ondas sísmicas se propagan, tales como reflexión, refracción, difracción, dispersión geométrica , etc.

En este trabajo se considera una aproximación de la ecuación de onda elástica 2D para un medio con anisotropía tipo VTI y TTI, en donde se considera nulo el valor de la componente de la velocidad para la onda SV en dirección paralela al eje de simetría del medio (Alkhalifah, 2000; Zhang et al., 2005). La ecuación se modela usando operadores discretos en diferencias finitas con malla homogénea en un segundo orden de aproximación tanto para las derivadas espaciales como para las derivadas temporales, este tipo de esquema computacional calcula las variables del medio en cada nodo de la malla (Kelly et al., 1974a; Kelly et al., 1974b; Alkhalifah, 2000).

En la industria se realizan dos tipos de migración por extrapolación del campo de

onda, la que se realiza en dirección del tiempo y la extrapolación en dirección de la profundidad, las cuales pueden realizarse antes o después de apilar la información, que se conocen como migración pre-apilado y migración pos-apilado respectivamente. La extrapolación en dirección del tiempo es conocida como migración reversa en el tiempo o RTM y trabaja con ecuación de onda completa, solucionando la ecuación de onda acústica por diferencias finitas o métodos pseudoespectrales (Biondi, 2006). La migración por extrapolación en la dirección de la profundidad está basada en las ecuaciones de ondas unidireccionales o ecuaciones de sentido único OWWE (de sus siglas en inglés, One Way Wave Equations).

En este trabajo se describen dos tipos de solución a las ecuaciones de sentido único, la solución conocida como corrimiento de fase, (PS, siglas de Phase shift) desarrollado por (Gazdag, 1978) y la solución conocida como corrimiento de fase mas interpolación, (PSPI, siglas en ingles de Phase shift plus interpolation) desarrollado por (Gazdag and Sguazzero, 1984). Estas técnicas de solución son aplicadas en el dominio mixto $(x, w)/(k_x, w)$ y usan un operador llamado raíz cuadrada. Estas técnicas se basan en la continuación numérica de dos tipos de campos, un campo descendente, el cual es modelado desde la fuente y un campo ascendente, el cual corresponde al campo registrado en los receptores. Estos campos son correlacionados usando una condición de imagen, la cual construye el reflector en el punto donde los dos campos coinciden en el tiempo y en el espacio.

Estos dos tipos de métodos son extendidos para considerar anisotropía tipo VTI, reemplazando el operador raíz cuadrada o también llamada relación de dispersión isótropa, por la relación de dispersión para un medio acústico con anisotropía VTI (Alkhalifah, 2000), posteriormente se re define la interpolación tradicional (Etgen, 1994) para que esta considere mas de dos campos, según el calculo de parámetros de referencia en cada nivel de profundidad.

La estructura de este trabajo se compone de un primer capítulo donde se introduce que trata el tema de anisotropía sísmica, definiciones, causas y la teoría de anisotropía polar, finalmente se presentan las curvas obtenidas para las diferentes tipos de aproximaciones de la velocidad de fase. El segundo capítulo describe el efecto de la

anisotropía en el modelado de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la propagación de onda en medios acústicos con anisotropía VTI y para diferentes inclinaciones de la anisotropía denominada TTI. El tercer capítulo describe los métodos de migración pre-apilado por continuación de los campos en dirección de la profundidad: PS y PSPI de manera convencional y la extensión propuesta para considerar anisotropía sísmica tipo VTI, en este capítulo se muestran experimentos numéricos para reflectores planos, inclinados y con el modelo de Marmousi con anisotropía mostrando las diferencias entre las migraciones convencional y la migración anisótropa. Finalmente un capítulo de conclusiones y recomendaciones de este trabajo.

Fundamentos de Anisotropía Sísmica

2.1 Introducción

En este capítulo se presenta la definición de anisotropía sísmica, los tipos de anisotropía más usados en exploración de hidrocarburos, la teoría de anisotropía polar, la cual es la base para representar ciertas simetrías del tensor de elasticidad de un medio elástico anisótropo, como lo son la simetría VTI y TTI. También se presentan las ecuaciones de fase para las ondas P y SV en un medio elástico VTI y TTI, expresadas en términos de los coeficientes de la matriz de Voigt, donde esta matriz es una representación del tensor de elasticidad de un medio elástico anisótropo (Daley y Hron, 1977), las mismas expresiones, pero en términos de los parámetros de Thomsen (Thomsen, 1986), la re-formulación obtenida por Tsvankin (1996) y por último, la aproximación acústica (Du, 2007). Se obtienen curvas de las velocidades de fase de las diferentes representaciones, considerando anisotropía VTI, anisotropía elíptica VTI y anisotropía TTI. Finalmente se presentan las curvas de velocidad de fase en coordenadas polares para las ondas P y SV en un medio elástico TTI, y también LAS curvas para diferentes valores de la velocidad de la onda S en dirección paralela al eje de simetría, para de esta forma observar el comportamiento de esta onda, en la aproximación acústica (Alkhalifah, 2000).

2.2 Definición y algunas causas de Anisotropía sísmica

Inicialmente en la exploración sísmica se considera que, los estratos que componen la cuenca a explorar son medios isótropos, cuyas velocidades sísmicas no varían con la dirección en la cual se están propagando las ondas, sin embargo cuando las ondas se propagan en el interior del subsuelo, este exhibe anisotropía.

Se define la anisotropía sísmica como la variación de la velocidad con la dirección en la cual se propagan las ondas y esta se presenta en rocas como las arcillas, estratos delgados superpuestos y formaciones con alto grado de fracturamiento ((Jones and Wang, 1981) (Thomsen, 1986); (Johnston and Christensen, 1995); (Leslie and Lawton, 1999)).

Entre algunas causas de la anisotropía en rocas sedimentarias se encuentra:

- La secuencia de capas isótropas con escala más pequeña que la longitud de la onda sísmica (Backus, 1962)
- La orientación preferencial de los minerales como por ejemplo las arcillas (Winterstein, 1990)
- La orientación de las micro-grietas de las fracturas (Winterstein, 1990) y los esfuerzos in situ que modifican la forma de los poros y fracturas pre-existentes (Winterstein, 1990).

El tipo de anisotropía mas común que se tiene en cuenta en sísmica es la anisotropía polar, la cual posee un eje de simetría perpendicular a la dirección en la cual se depositan los sedimentos, y cuyas velocidades en el plano normal a este eje son idénticas. Cuando el eje de simetría es vertical, la anisotropía es llamada Anisotropía Polar Vertical o VTI (de las siglas en inglés de Vertically Transversely Isotropic) por lo que la isotropía es limitada al plano horizontal (Figura 2.1 (Armstrong, 1994)). Si el eje de simetría no es vertical es llamada Anisotropía Polar Inclinada ó TTI (de las siglas en inglés de Tilted Transversely Isotropic) y por último esta el tipo de

anisotropía en la cual el eje de simetría es horizontal comúnmente llamado Anisotropía Azimutal ó HTI (de las siglas en inglés de Horizontally Transeversely Isotropic) (Figura 2.1 (Armstrong, 1994)).

Según la disposición y el tipo de roca, un medio VTI se asocia típicamente a series de estratos conformados por lutitas y areniscas intercaladas o por un alto contenido arcilloso en el medio (Toldi et al., 1999). En este trabajo solo se estudiara los tipos de anisotropía indicadas anteriormente.

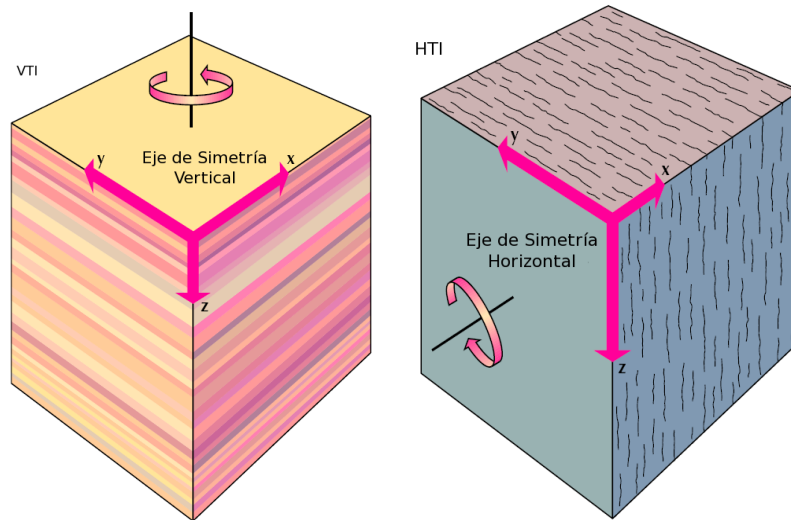


Figura 2.1: Medio con anisotropía polar vertical o VTI (izquierda) y anisotropía polar horizontal o HTI (derecha)

2.3 Teoría de anisotropía polar

La ley de Hooke permite expresar las componentes del tensor de esfuerzos, σ_{ij} , como una combinación lineal de las componentes del tensor de deformación, ε_{ij} , usando la siguiente ecuación:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (2.1)$$

donde c_{ijkl} son las componentes del tensor de elasticidad o tensor de rigidez, dado que i, j, k, l varían de 1 a 3, el número de componentes del tensor de elasticidad es

$3^4 = 81$, pero no todas las 81 componentes son diferentes, debido a la existencia de la simetría de los tensores de esfuerzo ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) y deformación ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$), y que además por ser un fenómeno adiabático $c_{ijkl} = c_{klij}$, esto implica que en el tensor c_{ijkl} , las constantes elásticas independientes se reduzcan a 21 (Love, 1927).

En vista de esto, se puede expresar como una matriz de 6×6 , si se toman parejas de los cuatro índices de c_{ijkl} asignando C_{mn} y haciendo corresponder (i, j) con m y (k, l) con n de la siguiente forma según la notación de Voigt (Thomsen, 2001):

$$(1, 1) \rightarrow 1, (2, 2) \rightarrow 2, (3, 3) \rightarrow 3, (2, 3) \rightarrow 4, (1, 3) \rightarrow 5, (1, 2) \rightarrow 6$$

La ecuación (2.1) se puede expresar de manera matricial como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & SYM & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

El modelo mas general de un medio anisótropo esta representado por 21 componentes independientes, tal y como se muestra en la matriz (2.2). Un medio con anisotropía polar se caracteriza por 5 constantes independientes, $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}$ y C_{44} (Love, 1927), donde:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

con

$$C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$$

. En un medio isótropo la matriz (2.3) depende de 2 coeficientes elásticos C_{11} y C_{44} , los cuales se expresan en términos de los parámetros de Lamé; λ y μ (Slawinski, 2003) definidos de la siguiente forma:

$$\lambda := C_{11} - 2C_{44}$$

$$\mu := C_{44},$$

según lo anterior, la matriz queda expresada como:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

A partir de las ecuaciones de movimiento de Cauchy para un elemento infinitesimal del continuo (Aki and Richards, 2002):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.5)$$

donde ρ es la densidad del medio, u_i son las componentes del vector desplazamiento, f_i son las fuerzas de cuerpo, t es el tiempo, y x_i son las coordenadas cartesianas, reemplazando la ecuación (2.1) en la ecuación (2.5) se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial c_{ijkl} \varepsilon_{kl}}{\partial x_j} = f_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.6)$$

donde el tensor de deformación ε_{kl} esta definido por (Slawinski, 2003):

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.7)$$

En la ecuación (2.6), despreciando las fuerzas de cuerpo ($f_i = 0$) y si el tensor de elasticidad se considera constante, se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = 0 \quad (2.8)$$

Una onda plana tipo armónica se usa para encontrar una solución de prueba de la ecuación (2.8).

$$u_k = U_k e^{iw \left(\frac{n_j x_j}{\nu} - t \right)}, \quad (2.9)$$

donde U_k son las componentes del vector polarización \mathbf{u} , w es la frecuencia angular, ν es la velocidad de propagación de la onda (comúnmente llamada velocidad de fase), \mathbf{n} es el vector unidad, que es ortogonal al plano del frente de onda.

Usando (2.9) en la ecuación (2.8), se obtiene a la ecuación de Christoffel de la velocidad de fase ν y el vector polarización \mathbf{U} (Du, 2007):

$$\begin{bmatrix} G_{11} - \rho\nu^2 & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} - \rho\nu^2 & G_{23} \\ G_{13} & G_{32} & G_{33} - \rho\nu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

G_{ik} es la matriz de Christoffel, la cual depende de las propiedades elásticas del medio y de la dirección de propagación:

$$G_{ik} = c_{ijkl} n_j n_l \quad (2.11)$$

Utilizando estas relaciones en las ecuaciones de movimiento se obtiene una ecuación de onda con tres soluciones independientes, una cuasi-longitudinal (qP), una

cuasi-transversal (qSV) y una transversal (SH), las tres ondas son polarizadas en direcciones mutuamente ortogonales. Daley y Hron (1977) (Daley and Hron, 1977) obtuvieron las relaciones de dispersión para estos tres tipos de onda, mostradas a continuación:

$$\rho\nu_p^2(\theta) = \frac{1}{2} \left[C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta + D(\theta) \right] \quad (2.12)$$

$$\rho\nu_{sv}^2(\theta) = \frac{1}{2} \left[C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta - D(\theta) \right] \quad (2.13)$$

$$\rho\nu_{sh}^2(\theta) = C_{66} \sin^2(\theta) + C_{44} \cos^2(\theta), \quad (2.14)$$

donde ρ es la densidad y θ es el ángulo entre el frente de onda normal y el eje vertical, $D(\theta)$ es una notación compacta para la combinación cuadrática:

$$D(\theta) \equiv \left\{ (C_{33} - C_{44})^2 + 2 \left[2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44}) \right] \sin^2 \theta + \left[(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})^2 - 4(C_{13} + C_{44})^2 \right] \sin^4 \theta \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14) denotan la velocidad de fase para la onda P, la onda SV y la onda SH respectivamente. Cuando la onda se propaga en la dirección vertical paralela al eje de simetría, ($\theta = 0^\circ$) y en la dirección horizontal perpendicular al eje de simetría, ($\theta = 90^\circ$) la velocidad de fase para la onda P esta dada por las expresiones:

$$\nu_p(0^\circ) = v_{p0} = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad (2.16)$$

$$\nu_p(90^\circ) = v_{p90} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}. \quad (2.17)$$

Donde v_{p0} corresponde a la velocidad de la onda P medida paralela al eje de simetría

de un medio VTI y v_{p90} , es la velocidad de la onda P perpendicular al eje de simetría de un medio VTI, similarmente para la componente vertical de la onda S se obtiene:

$$\nu_{sv}(0^\circ) = v_{s0} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (2.18)$$

$$\nu_{sv}(90^\circ) = v_{sv90} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (2.19)$$

La velocidad de la onda SV paralela al eje de simetría, v_{s0} y perpendicular, v_{sv90} son iguales para la onda SV.

Para la onda SH se obtiene:

$$\nu_{sh}(0^\circ) = v_{sh0} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \quad (2.20)$$

$$\nu_{sh}(90^\circ) = v_{sh90} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}, \quad (2.21)$$

La velocidad de la onda SH paralela al eje de simetría, v_{sh0} y perpendicular al eje de simetría, v_{sh90} son diferentes. Sí se considera un medio isótropo las componentes del tensor de rigidez $C_{44} = C_{66}$ y $C_{11} = C_{33}$, por lo tanto las velocidades $v_{sh0} = v_{sh90}$ y $v_{p0} = v_{p90}$.

Las ecuaciones de la velocidad de fase fueron simplificadas por Thomsen (1986), quien definió tres parámetros ε , γ , y δ^* , los cuales él mismo, escribió apropiadamente como combinaciones de los coeficientes elásticos del tensor, los definió adimensionales y de tal forma que se redujeran a cero en el caso isótropo. Algunos materiales con valores pequeños de anisotropía ($\ll 0.2$) se llaman materiales con anisotropía débil, (ver Tabla 1 en (Thomsen, 1986)), los parámetros ε y γ son definidos en la forma:

$$\varepsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}}, \quad (2.22)$$

$$\gamma = \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}}. \quad (2.23)$$

En la ecuación (2.22) y (2.23) estos parámetros ε y γ , permiten describir diferencias entre la velocidad de la onda P y la onda SH en dirección paralela y en dirección perpendicular al eje de simetría del medio respectivamente. El tercer parámetro δ^* carece de significado físico y Thomsen lo definió como:

$$\delta^* \equiv \frac{2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})}{2C_{33}^2} \quad (2.24)$$

Las relaciones de dispersión (2.12), (2.13) y (2.14) fueron escritas por Thomsen incluyendo los tres parámetros ε , δ^* y γ en la forma:

$$\nu_p^2(\theta) = v_{p0}^2 \left[1 + \varepsilon \sin^2 \theta + D^*(\theta) \right], \quad (2.25)$$

$$\nu_{sv}^2(\theta) = v_{sv0}^2 \left[1 + \frac{v_{p0}^2}{v_{sv0}^2} \varepsilon \sin^2 \theta - \left(\frac{v_{p0}^2}{v_{sv0}^2} \right) D^*(\theta) \right], \quad (2.26)$$

$$\nu_{sh}^2(\theta) = v_{sv0}^2 \left[1 + 2\gamma \sin^2 \theta \right], \quad (2.27)$$

donde el factor $D^*(\theta)$ esta dado por la siguiente expresión:

$$D^*(\theta) \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} \right) \left\{ \left[1 + \frac{4\delta^* \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\left(1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} \right)^2} + \frac{4\varepsilon \sin^4 \theta \left(1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}. \quad (2.28)$$

Es importante tener claridad y distinguir las diferencias entre el ángulo θ , y el ángulo ϕ , el primero se refiere al ángulo que forma la dirección de propagación dada por el vector número de onda (\mathbf{k}) y el eje de simetría, el segundo es el ángulo que forma el vector velocidad para el rayo, por donde la energía se propaga y el eje de simetría. El frente de onda a nivel local es perpendicular al vector de propagación (\mathbf{k}), ya que este apunta en la dirección de la tasa máxima de aumento de la fase, la velocidad de fase ν también se llama velocidad del frente de onda, ya que mide la velocidad

del frente de onda a lo largo de \mathbf{k} . En el caso isotrópico los ángulos son iguales y por lo tanto se obtienen frentes esféricos (imagen izquierda de la Figura 2.2). Para el caso que existen diferencias entre dirección de la velocidad normal (equivalente a la dirección del número de onda) y la velocidad del rayo, se presentan frentes no esféricos (imagen derecha en la Figura 2.2).

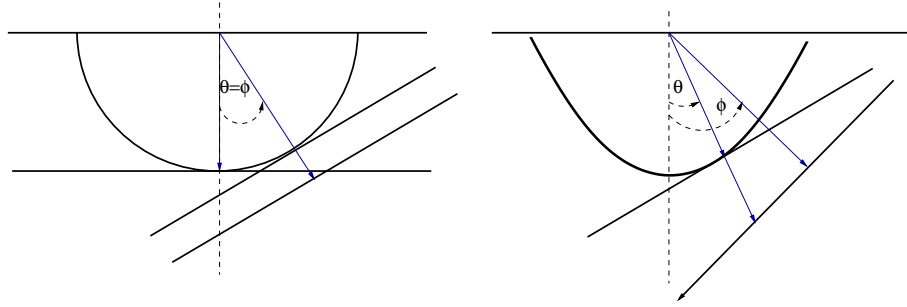


Figura 2.2: Diferencia entre el frente de onda esférico de un medio isotrópico y el frente de onda no esférico en un medio anisótropo

Se requiere en ciertos casos expresar la relación de dispersión en términos de la frecuencia ω , y el número de onda, para esto se introduce la siguiente notación, el vector número de onda \mathbf{k} representa:

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z}, \quad (2.29)$$

con sus componentes en dos dimensiones, dadas por:

$$k_x = k(\theta) \sin \theta \quad y \quad k_z = k(\theta) \cos(\theta), \quad (2.30)$$

y su magnitud :

$$k(\theta) = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \omega / \nu(\theta). \quad (2.31)$$

En (2.31), donde ω determina la frecuencia angular de la onda, y $\nu(\theta)$ la velocidad fase. La velocidad de grupo para el medio dispersivo corresponde a:

$$\vec{V} = \frac{\partial(k\nu)}{\partial k_x} \hat{x} + \frac{\partial(k\nu)}{\partial k_z} \hat{z}, \quad (2.32)$$

de donde la magnitud escalar de V es expresada en términos de la magnitud de la velocidad de fase ν en la forma:

$$V^2(\psi(\theta)) = \nu^2(\theta) + \left(\frac{\partial(\nu)}{\partial\theta} \right)^2, \quad (2.33)$$

para $\theta = 0$ y $\theta = 90$ el segundo término del lado derecho la ecuación (2.33) desaparece, de tal forma que la velocidad de grupo es equivalente a la velocidad de fase, característica de un medio de no dispersivo.

2.4 Anisotropía débil

Thomsen en su artículo de 1986 realizó nuevas consideraciones para obtener unas expresiones mas sencillas de las ecuaciones (2.25-2.28), de acuerdo a los resultados experimentales. Él notó que las mediciones de sus parámetros en ciertas rocas sedimentarias, estaban por debajo de 0.2 a lo que él llamo rocas con anisotropía débil, según esto él linealizó las ecuaciones de la velocidad de fase para valores pequeños de ε y δ mediante una expansión en serie de Taylor, y obtuvo las siguientes expresiones:

$$\nu_p(\theta) = v_{p0}(1 + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^4 \theta) \quad (2.34)$$

$$\nu_{sv}(\theta) = v_{s0} \left[1 + \frac{v_{p0}^2}{v_{sv0}^2} (\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] \quad (2.35)$$

$$\nu_{sh}(\theta) = v_{s0} (1 + \gamma \sin^2 \theta), \quad (2.36)$$

donde la nueva expresión para δ (Thomsen, 1986) quedó en la forma:

$$\delta \equiv \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})}. \quad (2.37)$$

La aproximación obedece al truncamiento de las series de Taylor, estas expresiones posibilitan el análisis físico correspondiente a la propagación de la onda en el medio anisótropo. Para el caso en que $\theta = 0$, se obtiene

$$\nu_p(0) = v_{p0} \quad (2.38)$$

$$\nu_{sv}(0) = v_{s0} \quad (2.39)$$

$$\nu_{sh}(0) = v_{s0}, \quad (2.40)$$

que son las velocidades de fase en dirección paralela al eje de simetría y corresponden a las velocidades establecidas en un medio isótropo, según las ecuaciones (2.16), (2.18) y (2.20).

2.5 Velocidad de fase en un medio elástico VTI

Tsvankin (Tsvankin, 1996) reformulo la expresión de la velocidad de fase en un medio elástico con anisotropía polar vertical en términos de los parámetros de Thomsen:

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \sqrt{1 + \frac{4 \sin^2 \theta}{f} (2\delta \cos^2 \theta - \varepsilon \cos 2\theta) + \frac{4\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f^2}}, \quad (2.41)$$

donde f es:

$$f = \left(1 - \frac{v_{s0}^2}{v_{p0}^2}\right) = \left(1 - \frac{C_{44}}{C_{33}}\right), \quad (2.42)$$

y θ es el ángulo que forma la dirección de propagación con el eje de simetría vertical. En la ecuación (2.41), el signo “+” esta relacionado con la velocidad de fase para la onda P y el signo “-”, corresponde a la velocidad de fase para la onda SV . La ecuación (2.41) puede ser simplificada bajo la condición de anisotropía débil ($\varepsilon < 0.2$ y $\delta < 0.2$), al expandir el radical en la ecuación (2.41) en una serie de Taylor, despreciando los términos cuadráticos en los parámetros ε y δ , se obtiene para la onda P (Ver sección A.1 del Apéndice):

$$\frac{\nu_p^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + 2\delta \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + 2\varepsilon \sin^4(\theta), \quad (2.43)$$

tomando la raíz cuadrada y linealizando la ecuación (2.43), resulta la expresión dada anteriormente en la ecuación (2.38), de la aproximación de anisotropía débil (Thomsen, 1986):

$$\frac{\nu_p(\theta)}{v_{p0}} = 1 + \delta \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + \varepsilon \sin^4(\theta). \quad (2.44)$$

Similarmente para la onda SV, se obtiene la velocidad de fase teniendo en cuenta la anisotropía débil, equivalente a la expresión (2.34):

$$\frac{\nu_{sv}(\theta)}{v_{p0}} = 1 - f + 2(\varepsilon - \delta) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \quad (2.45)$$

o

$$\frac{\nu_{sv}(\theta)}{v_{s0}} = 1 + 2\sigma \sin^2(\theta) \cos^2(\theta), \quad (2.46)$$

donde σ es una expresión que combina los parámetros de Thomsen (Tsvankin, 1996) y las componentes en dirección paralela al eje de simetría de las ondas P y S, mostrada en la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{v_{p0}^2}{v_{s0}^2} (\varepsilon - \delta). \quad (2.47)$$

2.6 Velocidad de fase en un medio elástico TTI

Para obtener las velocidades de fase en un medio con anisotropía polar inclinada, se reemplaza $\theta = \theta - \phi$, en donde ϕ representa la inclinación de los estratos dentro de una configuración con un eje de simetría inclinado TTI, de tal forma que de la ecuación (2.43) (Du, 2007) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\nu^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi) - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \sqrt{1 + \frac{4 \sin^2(\theta - \phi)}{f} (2\delta \cos^2(\theta - \phi) - \varepsilon \cos 2(\theta - \phi)) + \frac{4\varepsilon^2 \sin^4(\theta - \phi)}{f^2}}. \quad (2.48)$$

De la ecuación (2.48) se obtienen las expresiones para la velocidad de fase de la onda P y SV en un medio con anisotropía débil TTI, similarmente como fueron obtenidas las ecuaciones en (2.44) y (2.45), mostradas a continuación:

$$\frac{\nu_p^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = 1 + 2\delta \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi) + 2\varepsilon \sin^4(\theta - \phi), \quad (2.49)$$

y

$$\frac{\nu_s^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = 1 - f + 2(\varepsilon - \delta) \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi), \quad (2.50)$$

donde f esta relacionado con las velocidades v_{s0} y v_{p0} , θ es el ángulo entre la dirección de propagación y el eje de simetría inclinado, y ϕ es el ángulo de inclinación del eje de simetría.

2.7 Velocidad de fase en un medio acústico VTI y TTI

La ecuación (2.43) se puede reescribir considerando $v_{s0} = 0$, y de esta forma obtener la velocidad de fase de un medio acústico homogéneo con anisotropía VTI, en términos de los parámetros de Thomsen y la componente de la onda P en dirección paralela al eje de simetría vertical (Du, 2007):

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta)^2 - 8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \quad (2.51)$$

similarmente en medio TTI según la ecuación (2.48) se obtiene:

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi) + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2\varepsilon \sin^2(\theta - \phi))^2 - 8(\varepsilon - \delta) \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi)} \quad (2.52)$$

La ecuación (2.52) esta expresada en términos del ángulo θ , el ángulo de inclinación ϕ , de los parámetros de anisotropía y de la velocidad de onda P en dirección paralela al eje de simetría v_{p0} .

2.8 Curvas de velocidad de fase para las ondas P y SV

2.8.1. Medio elástico VTI y TTI

Las curvas de velocidad de fase exacta se obtienen según las ecuación (2.41) y (2.43), estas curvas son obtenidas para las ondas P y SV en un medio elástico con anisotropía polar vertical (VTI), considerando los siguientes valores para las velocidades, $v_{p0} = 3000(m/s)$, $v_{s0} = 1500(m/s)$, los parámetros de anisotropía de Thomsen, $\varepsilon = 0.25$ y $\delta = 0.1$ (Ver Figura 2.3).

Se obtiene también las curvas de velocidad de fase según la ecuación (2.48) y (2.49) para las ondas P y SV en un medio elástico con anisotropía polar inclinada (TTI), teniendo en cuenta los siguientes valores para las velocidades, $v_{p0} = 3000(m/s)$, $v_{s0} = 1500(m/s)$, los parámetros de anisotropía, $\varepsilon = 0.25$ y $\delta = 0.1$. Las curvas se presentan para diferentes valores de ϕ , para un ángulo $\phi = 30^\circ$, para un ángulo $\phi = 45^\circ$, para un ángulo $\phi = 60^\circ$ y para un ángulo $\phi = 90^\circ$ (Ver Figuras (2.4)-(2.7)).

2.8.2. Anisotropía elíptica

Las curvas de velocidad de fase se obtienen de la ecuación (2.43), en la Figura (2.8) se observa el comportamiento de las velocidades de la onda P y SV cuando se considera anisotropía elíptica, ($\varepsilon = \delta$), con valores que se encuentran entre $0 < \varepsilon < 0.25$ y $0 < \delta < 0.25$, según esto, el frente de onda para la onda P es elíptico y para la onda SV es esférico. Se obtiene en la Figura (2.9), las curvas de velocidad de fase de las ondas P y SV en el caso donde, $\varepsilon = 0$ y δ tiene valores que se encuentra en el rango, $0 < \delta < 0.25$ mostrado en la Figura (2.10), similarmente se obtiene las curvas de velocidad de fase de las ondas P y SV en el caso donde $\delta = 0$ y ε tiene valores que se encuentra entre $0 < \varepsilon < 0.25$.

2.8.3. Medio acústico homogéneo TTI

En la Figuras (2.11) y (2.12) se compara las tres velocidades de fase para la onda P para diferentes valores de inclinación $\phi = 30^\circ$, $\phi = 45^\circ$, $\phi = 60^\circ$ y $\phi = 90^\circ$ respectivamente; usando la fórmula exacta de la velocidad (ecuación 2.45), la aproximada (ecuación 2.46) y la fórmula de Alkhalifah (2.48). Los valores de anisotropía son $\varepsilon = 0.2$, $\delta = 0.1$, la densidad $\rho = 1000(kg/m^3)$, la velocidad de la onda P $v_{p0} = 3000(m/s)$ y la velocidad de la onda SV , $v_{s0} = 1500(m/s)$.

2.9 Velocidad de fase de las ondas P y SV en coordenadas polares para el medio VTI y TTI

En las Figuras (2.13) - (2.15) se obtienen las velocidades de fase en coordenadas polares para las ondas P y SV en un medio VTI, y TTI considerando ángulos de inclinación, $\phi = 30^\circ$, $\phi = 45^\circ$, $\phi = 60^\circ$, y $\phi = 90^\circ$ respectivamente, los valores de la velocidad de la onda P $v_{p0} = 3000(m/s)$, onda SV $v_{s0} = 1500(m/s)$, los parámetros de anisotropía, $\varepsilon = 0.2$ y $\delta = 0.1$. En la Figura (2.16) se presenta las curvas de velocidad de fase en coordenadas polares de la onda SV , en el cual se consideran

diferentes valores de velocidad, $v_{s0} = 1000$ (m/s), $v_{s0} = 500$ (m/s), $v_{s0} = 50$ (m/s) y $v_{s0} = 0.0$ (m/s). Los valores de anisotropía para estas curvas de velocidad son $\varepsilon = 0.2$ y $\delta = 0.1$ y la velocidad de la onda P de $v_{p0} = 3000$ (m/s).

En el próximo capítulo se describen las ecuaciones diferenciales para el medio acústico con anisotropía polar vertical (VTI) e inclinada (TTI), se desarrollan esquemas explícitos en diferencias finitas y finalmente se presentan los resultados correspondientes al modelado con anisotropía en diferentes casos.

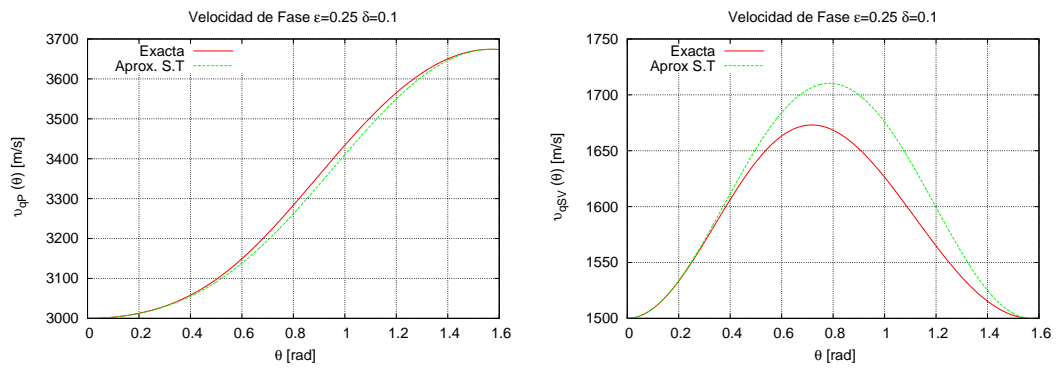


Figura 2.3: Curvas de velocidad de fase para la onda P (izquierda) y para la onda SV (derecha) en un medio VTI, la línea roja continua corresponde a la relación exacta de la velocidad y la línea verde corresponde a la aproximación con la serie de Taylor, los valores del medio son: $v_{p0} = 3000(m/s)$, $v_{s0} = 1500(m/s)$, $\varepsilon = 0.25$ y $\delta = 0.1$.

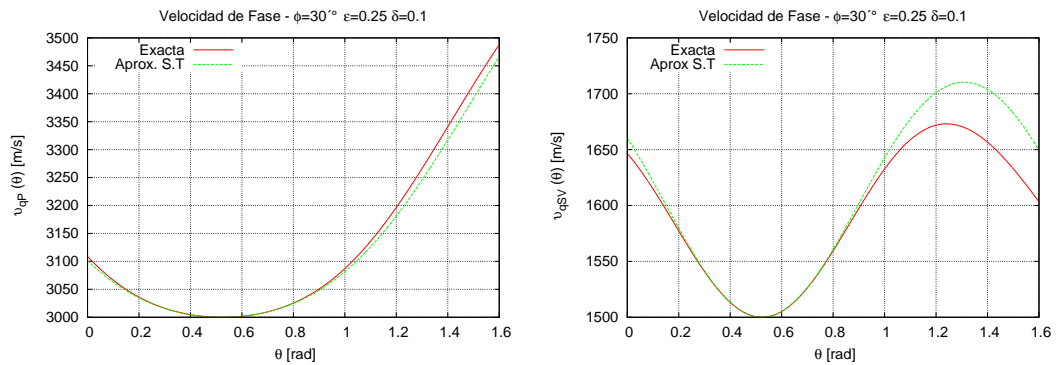


Figura 2.4: Curvas de velocidad de fase para la onda P (izquierda) y para la onda SV (derecha) en un medio TTI, la línea roja continua corresponde a la relación exacta de la velocidad y la línea verde corresponde a la aproximación con la serie de Taylor, los valores del medio son: $v_{p0} = 3000(m/s)$, $v_{s0} = 1500(m/s)$, $\varepsilon = 0.25$, $\delta = 0.1$ y $\phi = 30^\circ$.

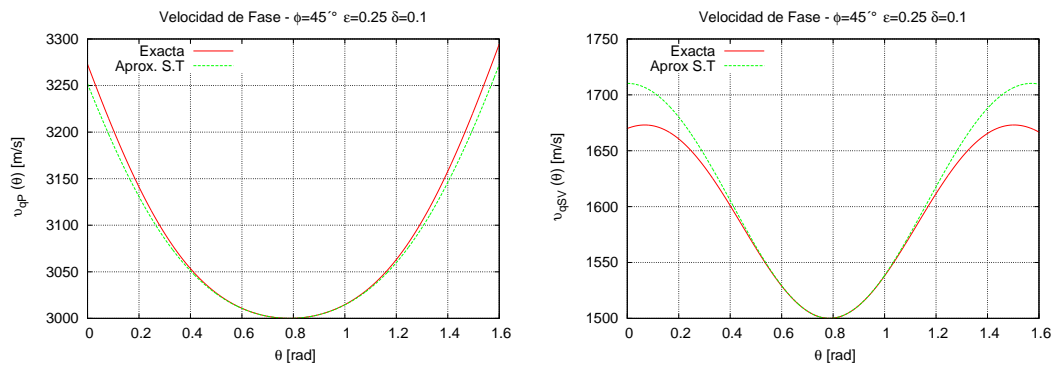


Figura 2.5: Curvas de velocidad de fase para la onda P (izquierda) y para la onda SV (derecha) en un medio TTI, la línea roja continua corresponde a la relación exacta de la velocidad y la línea verde corresponde a la aproximación con la serie de Taylor, los valores del medio son: $v_{p0} = 3000(m/s)$, $v_{s0} = 1500(m/s)$, $\varepsilon = 0.25$, $\delta = 0.1$ y $\phi = 45^\circ$.

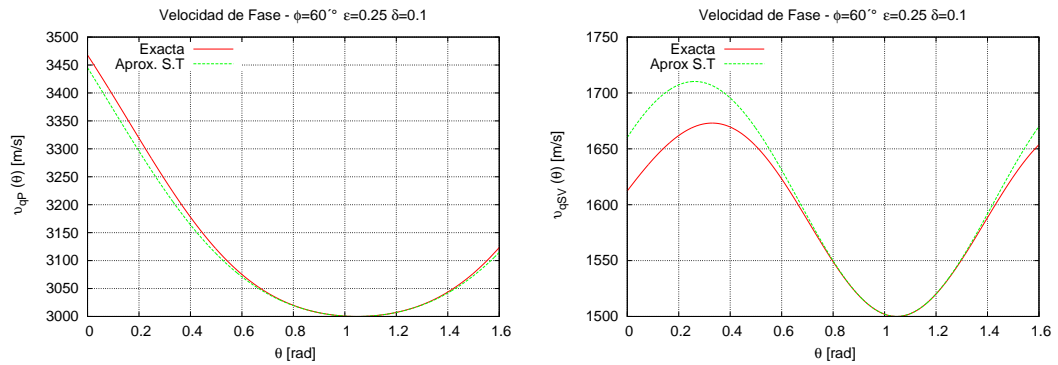


Figura 2.6: Curvas de velocidad de fase para la onda P (izquierda) y para la onda SV (derecha) en un medio TTI, la línea roja continua corresponde a la relación exacta de la velocidad y la línea verde corresponde a la aproximación con la serie de Taylor, los valores del medio son: $v_{p0} = 3000(m/s)$, $v_{s0} = 1500(m/s)$, $\varepsilon = 0.25$, $\delta = 0.1$ y $\phi = 60^\circ$.

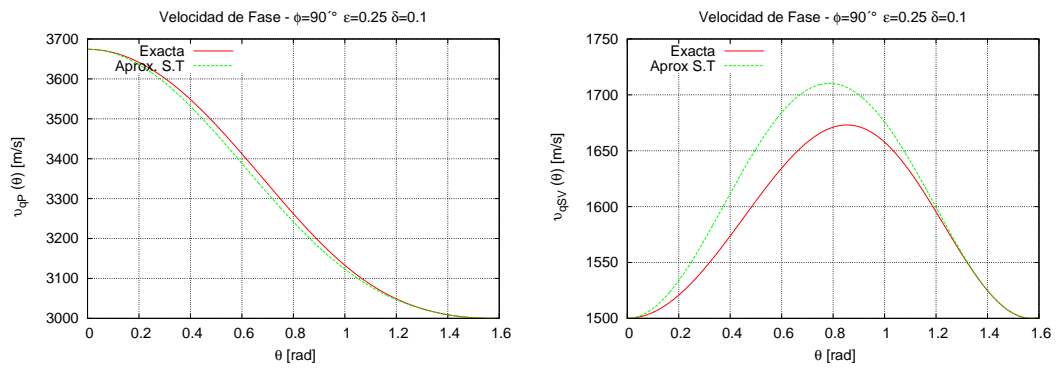


Figura 2.7: Curvas de velocidad de fase para la onda P (izquierda) y para la onda SV (derecha) en un medio TTI, la línea roja continua corresponde a la relación exacta de la velocidad y la línea verde corresponde a la aproximación con la serie de Taylor, los valores del medio son: $v_{p0} = 3000(m/s)$, $v_{s0} = 1500(m/s)$, $\varepsilon = 0.25$, $\delta = 0.1$ y $\phi = 90^\circ$.

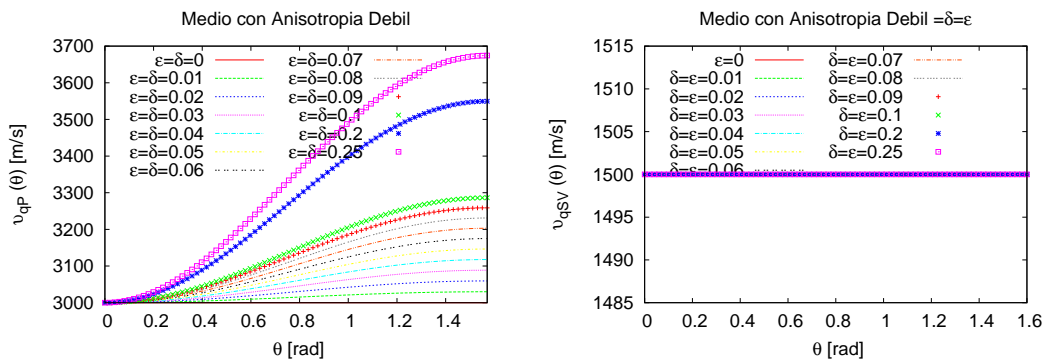


Figura 2.8: Curvas de velocidad de fase para la Onda P (izquierda) y para la onda SV (derecha), considerando anisotropía elíptica en donde los valores de anisotropía se encuentran entre $0 < \varepsilon = \delta < 0.25$ en un medio VTI.

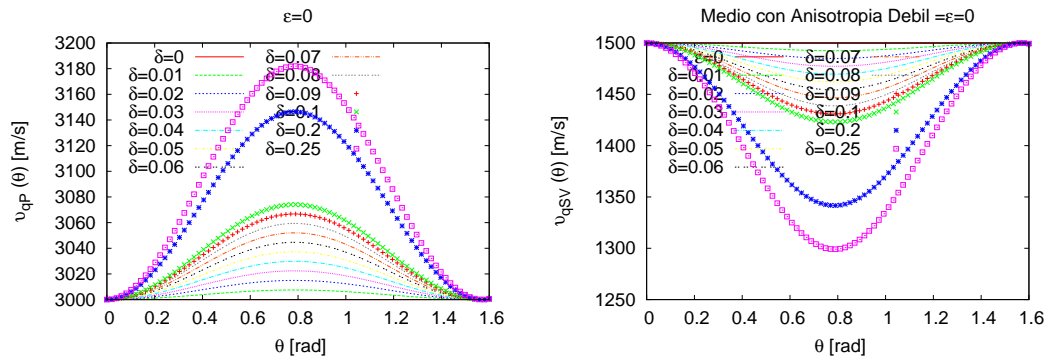


Figura 2.9: Curvas de velocidad de fase para la onda P (izquierda) y para la onda SV (derecha), considerando la aproximación de anisotropía débil, en donde los valores de anisotropía son $\epsilon = 0$ y $0 < \delta < 0.25$ en un medio VTI.

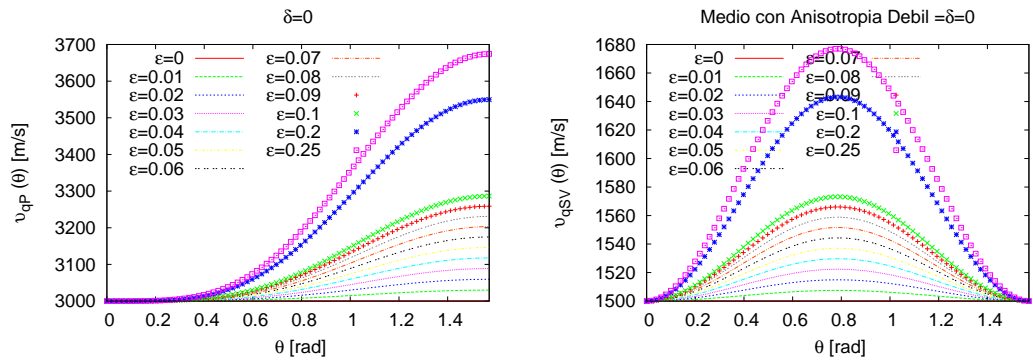


Figura 2.10: Curvas de velocidad de fase para la onda P (izquierda) y para la onda SV (derecha), considerando la aproximación de anisotropía débil, en donde los valores de anisotropía son $\delta = 0$ y $0 < \epsilon < 0.25$ en un medio VTI.

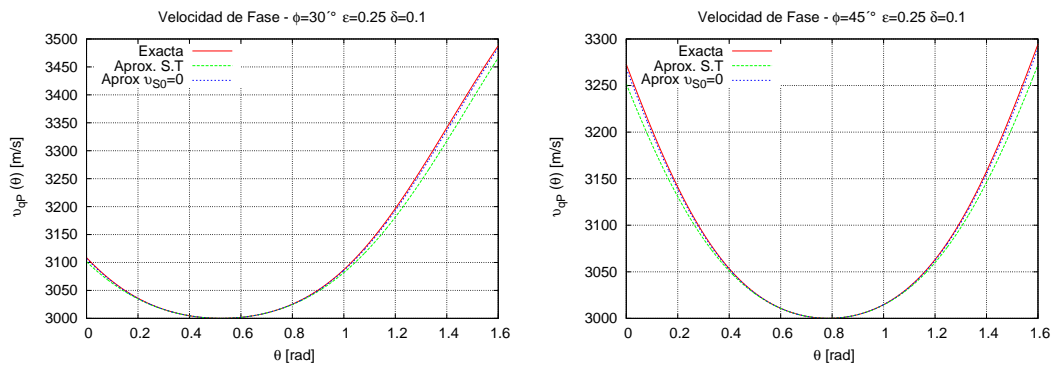


Figura 2.11: Velocidad de fase exacta (línea roja), la aproximada (línea verde), y fórmula de Alkhalifah (línea azul) para la onda P en un medio TTI donde $\phi = 30^\circ$ (izquierda) y $\phi = 45^\circ$ (derecha).

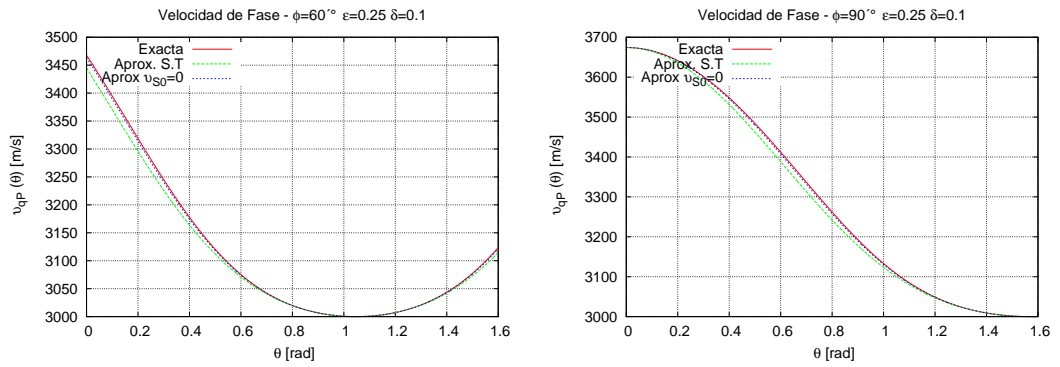


Figura 2.12: Velocidad de fase exacta (línea roja), la aproximada (línea verde), y fórmula de Alkhalifah (línea azul) para la onda P en un medio TTI donde $\phi = 60^\circ$ (izquierda) y $\phi = 90^\circ$ (derecha).

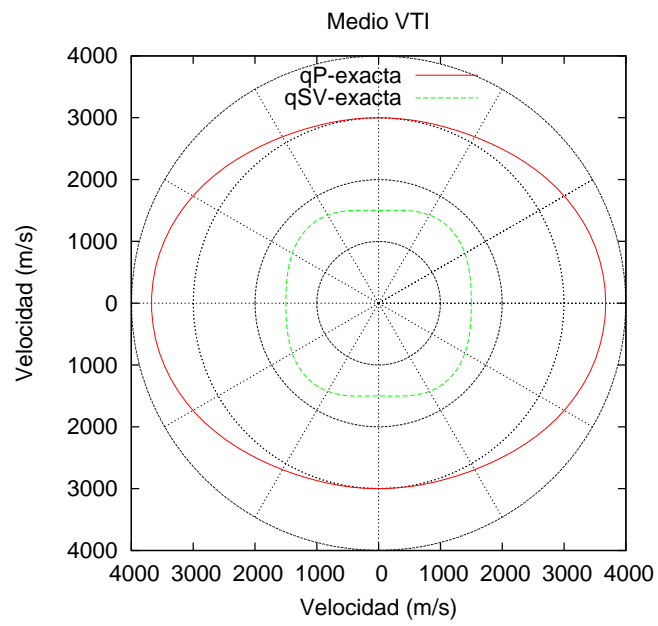


Figura 2.13: Velocidad de fase exacta en coordenadas polares para la onda P (línea roja continua) y la onda SV (línea verde a trazos) con $v_{p0} = 3000(m/s)$, $v_{s0} = 1500(m/s)$, $\varepsilon = 0.25$ y $\delta = 0.1$ en un medio VTI.

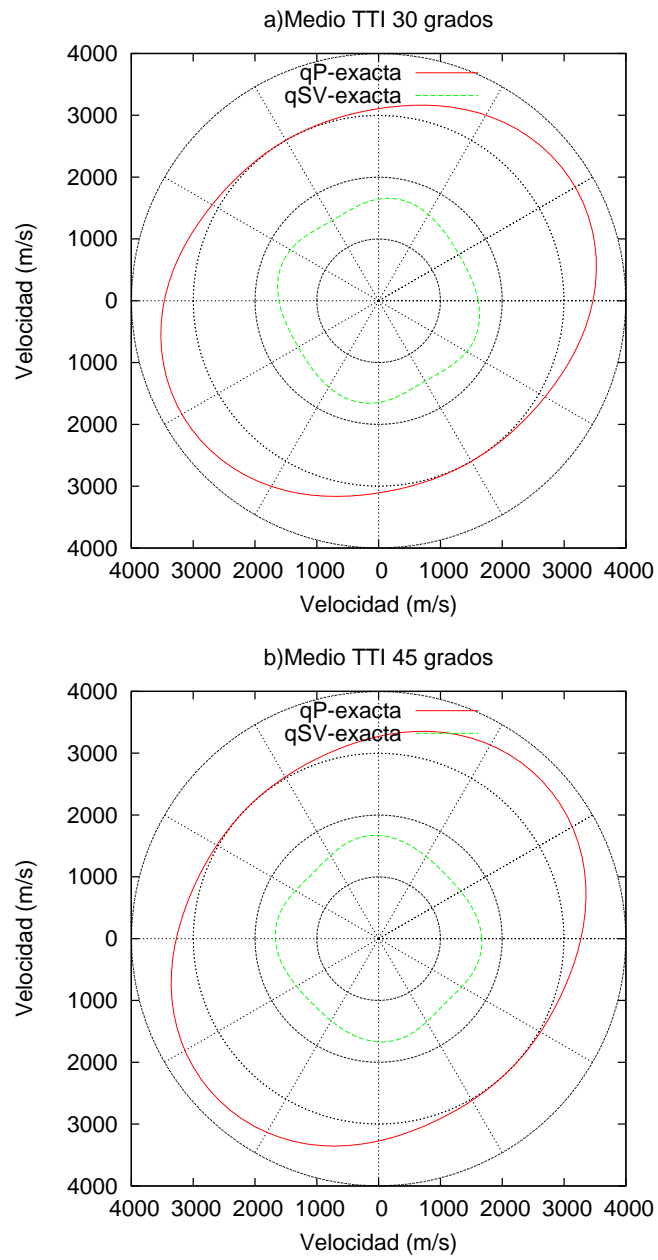


Figura 2.14: Velocidad de fase exacta en coordenadas polares para la onda P (línea roja continua) y la onda SV (línea verde a trazos) con $v_{p0} = 3000(m/s)$, $v_{s0} = 1500(m/s)$, $\varepsilon = 0.25$ y $\delta = 0.1$ en un medio TTI, a) $\phi = 30^\circ$, y b) $\phi = 45^\circ$, respectivamente

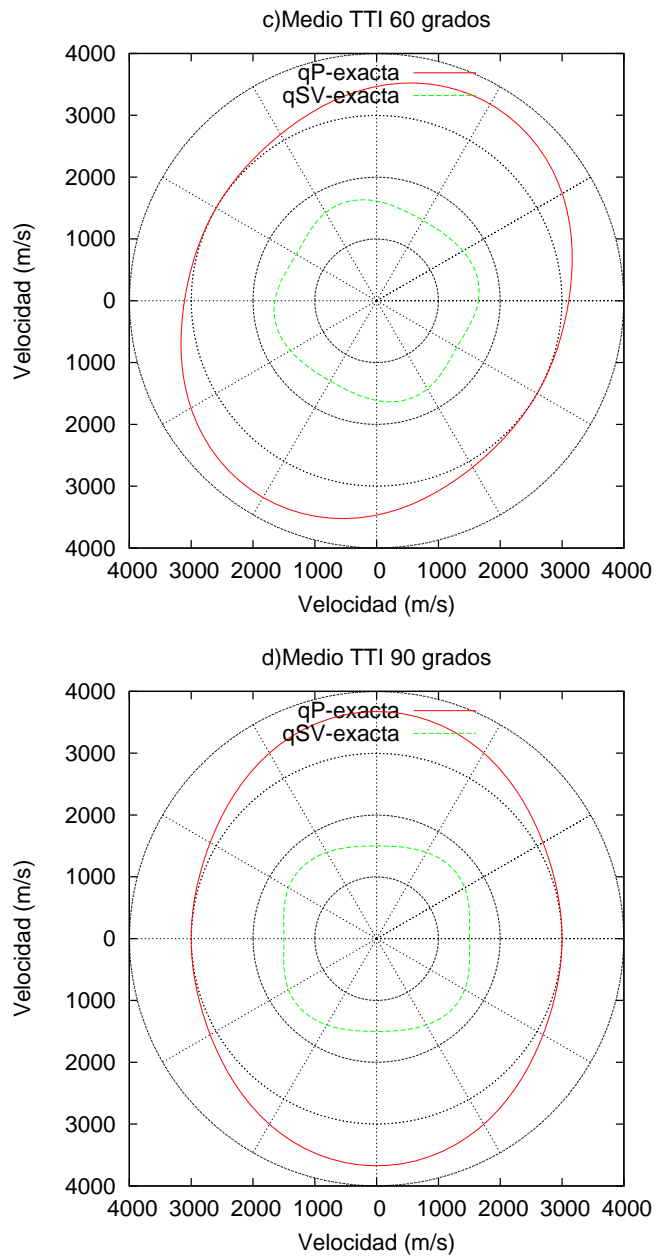


Figura 2.15: Velocidad de fase exacta en coordenadas polares para la onda P (línea roja continua) y la onda SV (línea verde a trazos) con $v_{p0} = 3000(m/s)$, $v_{s0} = 1500(m/s)$, $\varepsilon = 0.25$ y $\delta = 0.1$ en un medio TTI, c) $\phi = 60^\circ$ y d) $\phi = 90^\circ$ respectivamente

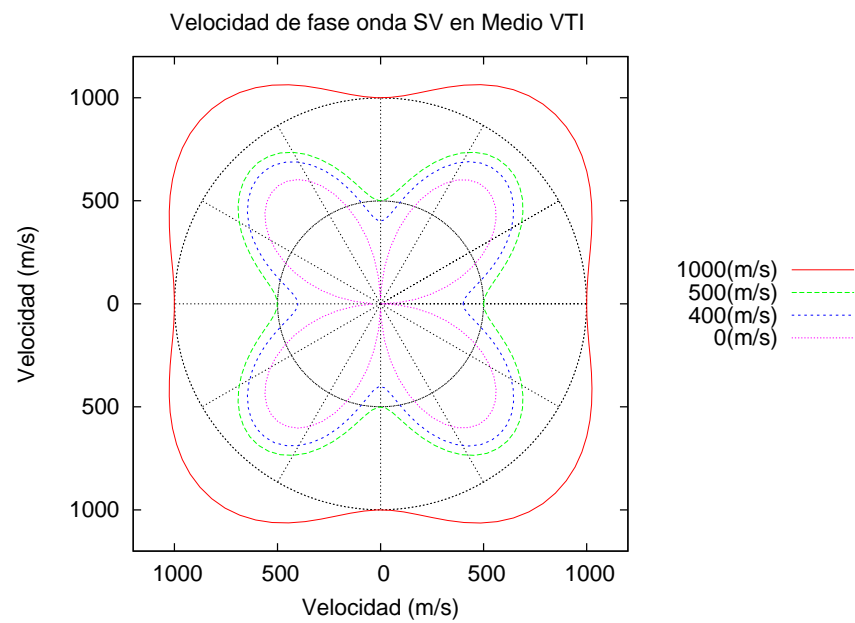


Figura 2.16: Velocidad de fase aproximada de Alkhalifah en coordenadas polares para la onda SV con diferentes valores de v_{s0} ; $v_{s0} = 1000(m/s)$ (línea roja continua), $v_{s0} = 500(m/s)$ (línea verde), $v_{s0} = 50(m/s)$ (línea azul), y $v_{s0} = 0.0(m/s)$ (línea rosada), los parámetros $\varepsilon = 0.25$ y $\delta = 0.1$ en un medio VTI.

Modelado acústico en medios con anisotropía polar vertical (VTI) e inclinada (TTI)

3.1 Introducción

En este capítulo se presentan las ecuaciones diferenciales que modelan un medio acústico homogéneo VTI y un medio acústico homogéneo TTI (Zhang, 2005). La primera ecuación de onda fue obtenida por Alkhalifah (2000) a partir de la relación de dispersión para un medio con velocidad, $v_{s0} = 0$, en donde esta fue asumida después de considerar el caso elástico VTI, según Tsvankin (1996). Además se obtienen esquemas explícitos en diferencias finitas para solucionar estos tipos de ecuaciones diferenciales expresadas en derivadas parciales de cuarto orden. Finalmente se presentan los resultados correspondientes al modelado acústico anisótropo.

3.2 Ecuación de onda para un medio acústico con anisotropía polar vertical (VTI)

Recordando la expresión que describe la velocidad de fase para las ondas P y SV en un medio con anisotropía polar vertical (VTI), mostrada con anterioridad en

la ecuación (2.41). Esta ecuación fue re-formulada (Tsvankin, 1996) y escrita en términos de los parámetros de Thomsen, ε y δ (Thomsen, 1986), junto con las componentes de la velocidad en dirección paralela al eje de simetría, v_{p0} y v_{s0} :

$$\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}}, \quad (3.1)$$

con

$$f = \left(1 - \frac{v_{s0}^2}{v_{p0}^2}\right), \quad (3.2)$$

donde θ es el ángulo que forma el eje de simetría con la dirección de propagación, considerando la ecuación (3.1), Alkhalifah y Tsvankin (Alkhalifah and Tsvankin, 1998) obtuvieron la relación de dispersión para el medio acústico VTI (Ver Apéndice **B**, sección *B.2*)

$$k_z^2 = \frac{v_{nmo}^2}{v_{p0}^2} \left(\frac{\omega^2}{v_{nmo}^2} - \frac{\omega^2(k_x^2 + k_y^2)}{\omega^2 - 2v_{nmo}^2\eta(k_x^2 + k_y^2)} \right), \quad (3.3)$$

donde k_x y k_z son las componentes del vector número de onda \mathbf{k} , w es la frecuencia, v_{p0} , es la componente en dirección paralela al eje de simetría de la onda P, v_{nmo} es la velocidad NMO y η es un parámetro de anisotropía, que serán definidos mas adelante.

Multiplicando a ambos lados de la ecuación (3.3) por el campo $F(k_x, k_y, k_z, \omega)$, en el dominio de Fourier y aplicando la transformada inversa de Fourier en el campo k_z ($k_z \rightarrow -i\frac{d}{dz}$) se obtiene (Alkhalifah, 2000) :

$$\frac{d^2 F(k_x, k_y, z, \omega)}{dz^2} = -\frac{v_{nmo}^2}{v_{p0}^2} \left(\frac{\omega^2}{v_{nmo}^2} - \frac{\omega^2(k_x^2 + k_y^2)}{\omega^2 - 2v_{nmo}^2\eta(k_x^2 + k_y^2)} \right) F(k_x, k_y, z, \omega). \quad (3.4)$$

Tomando la transformada inversa de Fourier en k_x y k_y ($k_x \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial x}$, $k_y \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial y}$), se obtiene (Alkhalifah, 2000) :

$$v_{p0}^2 \omega^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2\eta v_{nmo}^2 v_{p0}^2 \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \omega^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \omega^4 F(x, y, z, \omega) = 0 \quad (3.5)$$

Finalmente, aplicando la transformada inversa de Fourier en ω ($\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$), se obtiene la ecuación de onda acústica homogénea de un medio VTI (Alkhalifah, 2000):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) + v_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2\eta v_{nmo}^2 v_{p0}^2 \left(\frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial y^2 \partial z^2} \right), \quad (3.6)$$

donde

$$F(x, y, z, t) = \int_0^t \int_0^{t'} P(x, y, z, t) d\tau dt'. \quad (3.7)$$

La ecuación (3.6), esta expresada en derivadas parciales de cuarto orden, representa un medio acústico en presencia de anisotropía polar vertical o VTI, con la condición, $v_{s0} = 0$ (Alkhalifah and Tsvankin, 1998).

Cabe aclarar que en la ecuación (3.6) el parámetro v_{nmo} (Alkhalifah and Tsvankin, 1995) es la velocidad NMO para un reflector horizontal, dada por la siguiente expresión:

$$v_{nmo}(0) = v_{p0} \sqrt{1 + 2\delta}, \quad (3.8)$$

y el parámetro de anisotropía esta dado como una combinación de los parámetros de Thomsen:

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{v_h^2}{v_{nmo}^2(0)} - 1 \right) = \frac{\varepsilon - \delta}{1 + 2\delta}. \quad (3.9)$$

La ecuación (3.6) hace referencia a un hipotético medio acústico con anisotropía donde considera un eje de simetría vertical (VTI) y aunque físicamente es imposible, es una buena aproximación cinemática a la ecuación de onda elástica anisótropa

(Alkhalifah and Tsvankin, 1998). Esta ecuación es de cuarto orden y tiene dos conjuntos de soluciones complejas conjugadas, el primer conjunto de soluciones es para la onda acústica, y la segunda describe un tipo de onda que se propaga a una velocidad más lenta que la onda P, para un parámetro de anisotropía positivo η , este parámetro crece de manera exponencial, llegando a ser inestable para valores negativos de η (Alkhalifah and Tsvankin, 1998). Afortunadamente los valores correspondientes a η en el subsuelo son valores positivos y ubicando la fuente sísmica en una capa isótropa, algo muy común en exploración sísmica marina, elimina la mayor parte de la energía de este tipo de ondas (Alkhalifah and Tsvankin, 1998).

Si en la ecuación (3.6) se fija $\eta = 0$ y $v_{nmo} \neq v_{p0}$ se obtiene la expresión para medios con anisotropía “elíptica” con eje de simetría vertical en 3D:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v_{nmo}^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) + v_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \quad (3.10)$$

y si $v_{nmo} = v_{p0} = v$ la ecuación (3.10) queda de la forma clásica para un medio acústico homogéneo isótropo 3D:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \quad (3.11)$$

3.3 Ecuación de onda para un medio acústico con anisotropía polar inclinada (TTI)

La ecuación diferencial en derivadas parciales para el medio acústico considerando anisotropía polar con el eje de simetría inclinado en un ángulo ϕ (TTI) (Zhang et al., 2005) esta dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = & [v_{P_0}^2 \sin^2 \phi + (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \cos^2 \phi] v_{nmo}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \\
& + [v_{P_0}^2 \cos^2 \phi + (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \sin^2 \phi] \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \\
& + [v_{P_0}^2 - (1 + 2\eta) v_{nmo}^2] \sin(2\phi) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} \\
& - v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta (2 - 3 \sin^2(2\phi)) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} \\
& - \frac{1}{2} v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin^2(2\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} + v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin(4\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial z^3} \\
& - v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin(4\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial z} - \frac{1}{2} v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin^2(2\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial x^4},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

donde v_{p0} , es la componente de la velocidad de la onda P en dirección del eje de simetría del medio, v_{nmo} es la velocidad NMO (ver ecuación 3.8), η es el parámetro de anisotropía definido por Alkhalifah (ver ecuación 3.9), ϕ , es el ángulo de inclinación, θ , es el ángulo que forma el eje de simetría con la dirección de propagación, F es un campo auxiliar (ver ecuación 3.7), ε y δ son los parámetros de anisotropía (Thomsen, 1986).

3.4 Solución en diferencias finitas de la ecuación acústica

VTI

La ecuación que modela el campo en un medio acústico 2D considerando anisotropía polar vertical, (ecuación (3.6)), es resuelta usando la técnica numérica de Diferencias Finitas (FD, de sus siglas en inglés), la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.6) se aproxima por medio de un operador explícito en diferencias finitas de segundo orden, dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \approx \frac{P_{i,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^n + P_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2}. \tag{3.13}$$

Las derivadas de segundo orden de P con respecto a x y z de la ecuación (3.6) se aproximan de forma similar:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \approx \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \approx \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta z^2}, \quad (3.15)$$

para la derivada de cuarto orden cruzada de F se aproxima con el siguiente operador :

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} = \frac{4F_{i,j} - 2(F_{i-1,j} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j} + F_{i,j+1}) + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j-1} + F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1}}{\Delta x^2 \Delta z^2}, \quad (3.16)$$

donde $x = i\Delta x$, $z = j\Delta z$, pasos en la malla en dirección x y z , $N = n\Delta t$, al paso en el tiempo. F en la ecuación (3.6) se calcula usando la siguiente fórmula (Alkhalifah, 2000):

$$F_{i+1}(x, y, z) = 2F_i(x, y, z) - F_{i-1}(x, y, z) + \Delta t^2 P_i(x, y, z), \quad (3.17)$$

y P es calculada a través de:

$$P_{i+1}(x, y, z) = 2P_i(x, y, z) - P_{i-1}(x, y, z) + \Delta t^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right)_{i,j}. \quad (3.18)$$

Donde $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ es la aproximación en diferencias finitas del nuevo laplaciano en (3.14). Teniendo en cuenta los operadores diferenciales, descritos por las ecuaciones (3.13 - 3.18), la ecuación (3.6) que representa el medio acústico VTI 2D de manera continua, se expresa con el siguiente esquema discreto en diferencias finitas, en el cual la malla se es homogénea ($\Delta x = \Delta z = \Delta h$) junto con los campos calculados en (3.17) y (3.18)

$$\begin{aligned}
 P_{i,j}^{n+1} = & a_1 C [P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n] + a_2 C [P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n] \\
 & - \frac{a_3 C}{\Delta h^2} \left[4F_{i,j} - 2(F_{i-1,j} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j} + F_{i,j+1}) \right. \\
 & \quad \left. + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j-1} + F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1} \right] \\
 & \quad + 2P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n-1},
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde

$$a_1 = (1 + 2\eta) v_{nmo}^2,$$

$$a_2 = v_{p0}^2,$$

$$a_3 = 2\eta v_{nmo}^2 v_{p0}^2$$

y

$$C = \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta h^2} \right)$$

. El anterior esquema se programa considerando condiciones de estabilidad y dispersión numérica adecuadas (Zhang et al., 2005). La ondícula que simula la fuente del pulso está dada por la expresión (Scales, 1997):

$$f_s(t) = \left[1 - 2 \left(\frac{w_0(t - t_0)}{2} \right)^2 \right] e^{-\left(\frac{w_0(t - t_0)}{2} \right)^2}, \tag{3.20}$$

donde w_0 y t_0 , es la frecuencia y el tiempo inicial del pulso.

3.5 Solución en diferencias finitas de la ecuación acústica

TTI

La ecuación (3.12) representa la propagación de ondas sísmicas en un medio acústico homogéneo con anisotropía polar con el eje inclinado cierto ángulo ϕ (TTI) (Zhang et al., 2005).

Para resolver la ecuación, las derivadas de segundo orden de P con respecto a t , x y z , se aproximan con operadores en diferencias finitas según las ecuaciones (3.13-3.15) respectivamente.

Para las derivadas cuartas de $F_{i,j}$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^2} = \frac{F_{i+2,j} - 4F_{i+1,j} + 6F_{i,j} - 4F_{i-1,j} + F_{i-2,j}}{\Delta x^2}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2} = \frac{F_{i,j+2} - 4F_{i,j+1} + 6F_{i,j} - 4F_{i,j-1} + F_{i,j-2}}{\Delta z^2}. \quad (3.22)$$

Para la derivada cruzada de P

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} = \left[\frac{1}{4\Delta h^2} \right] (P_{i+1,j+1}^n - P_{i+1,j-1}^n - P_{i-1,j+1}^n + P_{i-1,j-1}^n), \quad (3.23)$$

y para las derivadas cruzadas de F

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} = \left[\frac{1}{\Delta h^4} \right] & (4F_{i,j} - 2(F_{i-1,j} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j} + F_{i,j+1}) \\ & + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j-1} + F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial z^3} = \left[\frac{1}{4\Delta h^4} \right] & (F_{i+1,j+2} - 2F_{i+1,j+1} + 2F_{i+1,j-1} - F_{i+1,j-2} \\ & - F_{i-1,j+2} + 2F_{i-1,j+1} - 2F_{i-1,j-1} + F_{i-1,j-2}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial z} = \left[\frac{1}{4\Delta h^4} \right] & (F_{i+2,j+1} - F_{i+2,j-1} + 2F_{i+1,j+1} + 2F_{i+1,j-1} \\ & + F_{i-1,j+1} - 2F_{i-1,j-1} - F_{i-2,j+1} - F_{i-2,j-1}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

usando los anteriores operadores en diferencias finitas en la ecuación (3.12), obtiene un esquema explícito para modelar el campo de onda para diferentes valores de ϕ .

$$\begin{aligned}
P_{i,j}^{n+1} = & b_1 C [P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n] + b_2 C [P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n] \\
& + \frac{b_3 C}{4} (P_{i+1,j+1}^n - P_{i+1,j-1}^n - P_{i-1,j+1}^n + P_{i-1,j-1}^n) \\
& - \frac{b_4 C}{\Delta h^2} [4F_{i,j} - 2(F_{i-1,j} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j} + F_{i,j+1}) \\
& \quad + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j-1} + F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1}] \\
& - b_5 C [F_{i,j+2} - 4F_{i,j+1} + 6F_{i,j} - 4F_{i,j-1} + F_{i,j-2}] \\
& + \frac{b_6 C}{\Delta h^2} (F_{i+1,j+2} - 2F_{i+1,j+1} + 2F_{i+1,j-1} - F_{i+1,j-2} \\
& \quad - F_{i-1,j+2} + 2F_{i-1,j+1} - 2F_{i-1,j-1} + F_{i-1,j-2}) \\
& - \frac{b_6 C}{4\Delta h^2} (F_{i+2,j+1} - F_{i+2,j-1} + 2F_{i+1,j+1} + 2F_{i+1,j-1} \\
& \quad + F_{i-1,j+1} - 2F_{i-1,j-1} - F_{i-2,j+1} - F_{i-2,j-1}) \\
& - b_5 C [F_{i+2,j} - 4F_{i+1,j} + 6F_{i,j} - 4F_{i-1,j} + F_{i-2,j}]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Donde $b_1 = [v_{P_0}^2 \sin^2 \phi + (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \cos^2 \phi] v_{nmo}^2$, $b_2 = [v_{P_0}^2 \cos^2 \phi + (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \sin^2 \phi]$, $b_3 = [v_{P_0}^2 - (1 + 2\eta) v_{nmo}^2] \sin(2\phi)$, $b_4 = v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta (2 - 3 \sin^2(2\phi))$, $b_5 = \frac{1}{2} v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin^2(2\phi)$, $b_6 = v_{P_0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin(4\phi)$, y $C = \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta h^2}\right)$ Las condiciones de estabilidad y dispersión numérica fueron obtenidas del trabajo de Zhang, (Zhang et al., 2005).

3.6 Resultados

A continuación se presentan los resultados referentes al modelado sísmico anisótropo, en base a la ecuación de onda completa, en estos resultados se Obtienen el campo de onda para el medio acústico con su respectivo sismograma sintético. Se ha considerando anisotropía polar vertical (VTI) y anisotropía polar inclinada (TTI) según los esquemas discretos en diferencias finitas expresados en las ecuaciones (3.19) y (3.27) obtenidos a partir de las ecuaciones (3.12) y (3.6).

3.6.1. Modelado sísmico de un medio acústico homogéneo VTI

Considerando el esquema discreto de la ecuación (3.19), se modela un medio acústico homogéneo considerando anisotropía polar vertical para dos modelos sencillos, el Modelo 1 consiste de una sola capa horizontal homogénea y el modelo 2 consiste de 3 capas horizontales homogéneas.

Modelo de una sola capa horizontal

En el primer modelo se considera una sola capa, se obtienen el campo de onda de un medio acústico homogéneo con anisotropía polar vertical (VTI) y el registro sísmico, se consideran diferentes valores de anisotropía, η . En todos los casos las dimensiones del modelo son, $500(m)$ de longitud por $250(m)$ de profundidad, la ondícula que simuló la fuente se ubica en la posición $(x_s, z_s) = (250, 125)(m)$, la frecuencia fundamental de la ondícula es $60(Hz)$, el paso en malla es homogéneo, $dx = dz = 1(m)$, el paso en tiempo es de, $dt = 0.1(ms)$ y la componente de la velocidad de la onda P, es de $v_{p0} = 1000(m/s)$. En el registro sintético se ubican 350 geófonos a lado y lado de la fuente en una posición $(g_x, g_z) = (250, 100)(m)$.

Caso 1: Medio Isótropo.

En el primer caso, se considera un medio acústico homogéneo isótropo (ver ecuación 3.11). Los valores correspondientes a los parámetros de Thomsen son respectivamente, $\delta = 0$ y $\varepsilon = 0$, las velocidades v_{nmo} , y v_{p0} . Se obtiene el frente de onda esférico (ver imagen superior en la Figura 3.1) y el registro sísmico (ver imagen inferior en la Figura 3.1).

Caso 2: Medio con Anisotropía Elíptica VTI.

El segundo caso, se considera un medio acústico homogéneo con anisotropía “elíptica”, (ver ecuación 3.10). Los valores de anisotropía de Thomsen son iguales, ($\delta = 0.2$ y $\varepsilon = 0.2$), y por esta razón $\eta = 0$, con la diferencia al caso anterior, de que, las ve-

locidades v_{nmo} , y v_{p0} son distintas. Se obtiene el frente de onda elíptico (ver imagen superior en la Figura (3.2) y el registro sísmico para este tipo de medio (ver imagen inferior en la Figura (3.2)).

Caso 3: Medio con Anisotropía VTI, $\eta = 0.1$.

El tercer caso, se considera un medio acústico homogéneo con anisotropía polar vertical, (ver ecuación (3.6)). Los valores de anisotropía son: $\eta = 0.1$, $\delta = 0.2$ y $\varepsilon = 0.34$. Se obtiene el frente de onda para la onda compresional, P y la onda con menor velocidad, SV (ver imagen superior en la Figura (3.3)).

En el registro se observa la presencia de esta onda SV (ver imagen inferior en la Figura (3.3)), con un comportamiento dispersivo, resultado de la condición $v_{s0} = 0$, en la aproximación acústica de la ecuación (3.6).

Caso 4: Medio con Anisotropía VTI, $\eta = 0.2$.

El cuarto caso, se considera un medio acústico homogéneo con anisotropía polar vertical, (ver ecuación (3.6)). Los valores de anisotropía correspondientes son $\eta = 0.2$, $\delta = 0.2$ y $\varepsilon = 0.48$. Se obtiene el frente de onda para las ondas P y SV (ver imagen superior en la Figura (3.4)) y se observa mas acentuado el efecto inherente de la onda SV en el registro sísmico (ver imagen inferior en la Figura (3.4)).

Caso 5: Medio con Anisotropía VTI, $\eta = 0.5$.

El quinto caso, se considera un medio acústico homogéneo con anisotropía polar vertical, (ver ecuación (3.6)). Los valores de anisotropía correspondientes son $\eta = 0.5$, $\delta = 0.2$ y $\varepsilon = 0.9$. Se obtiene el campo de onda P y SV (ver imagen superior en la Figura (3.5)) y el correspondiente registro (ver imagen inferior en la Figura (3.5)).

Caso 6: Medio con Anisotropía VTI, $\eta = 1.0$.

El último caso, se considera un medio acústico homogéneo con anisotropía polar vertical, (ver ecuación (3.6)). Los valores de anisotropía correspondientes son $\eta = 1.0$, $\delta = 0.2$ y $\varepsilon = 1.6$. Se obtiene el frente de onda para una anisotropía fuerte en las

dos ondas P y SV (ver imagen superior en la Figura (3.6)) e igualmente, se observa en el registro (ver imagen inferior en la Figura (3.6)).

Modelo de tres capas horizontales

Este modelo 2 consiste en tres capas dispuestas horizontalmente, el primer cambio de litología se encuentra a $100(m)$, y el segundo a $250(m)$. Las dimensiones del modelo son $1500(m)$ de longitud por $500(m)$ de profundidad, la ondícula que simula la fuente se ubica en la posición $(x_s, z_s) = (500, 30)(m)$, la frecuencia fundamental de la ondícula $60(hz)$, el paso en malla es homogéneo ($dx = dz = 1(m)$), el paso temporal de $dt = 0,1(ms)$. Se ubicaron geófonos para registrar la información en una posición $(g_x, g_z) = (500, 30)(m)$.

Caso 1: Primera capa horizontal, $\eta = 0.0$.

El primer caso, se considera un medio acústico heterogéneo con anisotropía VTI, en donde, el valor de velocidad de la primera capa isótropa es de $v_{p0}^1 = 1000(m/s)$, la velocidad en la segunda capa $v_{p0}^2 = 1500(m/s)$ y en la tercera capa $v_{p0}^3 = 2000(m/s)$. Los valores de anisotropía son respectivamente $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0,1$ $\eta_3 = 0,2$. En todas las capas, el valor de anisotropía de Thomsen, $\delta = 0.2$, excepto en la capa isótropa. En la Figura (3.7) se presenta el campo de onda para diferentes tiempos, a) $0.1(ms)$, b) $0.2(ms)$, c) $0.3(ms)$ y d) el registro sísmico en $0.35(ms)$. Se puede observar en la Figura (3.7), que al ubicar la fuente en una capa isótropa, no aparece ningún rastro de la onda SV, ni en el modelado, ni tampoco en el sismograma.

Caso 2: Primera capa horizontal, $\eta = 0.1$.

Se modela la propagación para tres capas horizontales homogéneas pero con la diferencia en la primera capa, esta capa posee un valor $\eta = 0.2$ y una velocidad $v_{p0} = 1000(m/s)$, la segunda capa posee un valor de anisotropía $\eta = 0.3$ y una velocidad $v_{p0} = 1500(m/s)$ y la tercera capa tiene $\eta = 0.4$ y un valor $v_{p0} = 2000(m/s)$. En la Figura (3.8) se presenta el campo de onda para diferentes tiempos, a) $0.1(ms)$, b) $0.2(ms)$, c) $0.3(ms)$ d) el registro sísmico en $0.35(ms)$. Se puede observar en la Figura (3.8) que a diferencia de la figura anterior se observa el efecto inherente

de la onda SV, tanto en el campo de onda modelado como, en el registro sísmico, agregando ruido a la señal y deteriorandola.

3.6.2. Modelado sísmico de un medio acústico homogéneo TTI

Para modelar el campo de onda en un medio acústico homogéneo TTI se considero un modelo de $500(m)$ de longitud por $250(m)$ en profundidad. La ondícula es simulada en $(x_z, z_s) = (250, 125)(m)$, el tamaño en el tiempo es $dt = 0.1(ms)$ y el tamaño de la celda homogénea es de $dx = dz = 1(m)$. El valor de anisotropía para el primer caso es de: $\eta = 0.1$, y $\delta = 0.2$, la velocidad de la onda P, es $v_{p0} = 1000(m/s)$, se obtiene en la Figura (3.9) el campo de onda a diferentes inclinaciones; a) $\phi = 30^\circ$, b) $\phi = 45^\circ$, c) $\phi = 60^\circ$ y d) $\phi = 90^\circ$.

Para el segundo caso, el valor de anisotropía es de $\eta = 0.2$, y $\delta = 0.2$, la velocidad de la onda P, es $v_{p0} = 1000(m/s)$, se obtiene en la Figura (3.10) el campo de onda a diferentes inclinaciones; a) $\phi = 30^\circ$, b) $\phi = 45^\circ$, c) $\phi = 60^\circ$ y d) $\phi = 90^\circ$, en las Figuras (3.9) y (3.10) se observa el efecto de la onda SV, al considerarse la condición, $v_{s0} = 0$, dentro de la ecuación (3.12).

En el próximo capítulo se describen dos de los métodos de continuación del campo de onda en profundidad conocidos como PS y PSPI, se presenta la extensión de estos dos métodos para considerar anisotropía tipo VTI PS+ A y PSPI+A, finalmente se presentan pruebas numéricas para diferentes casos.

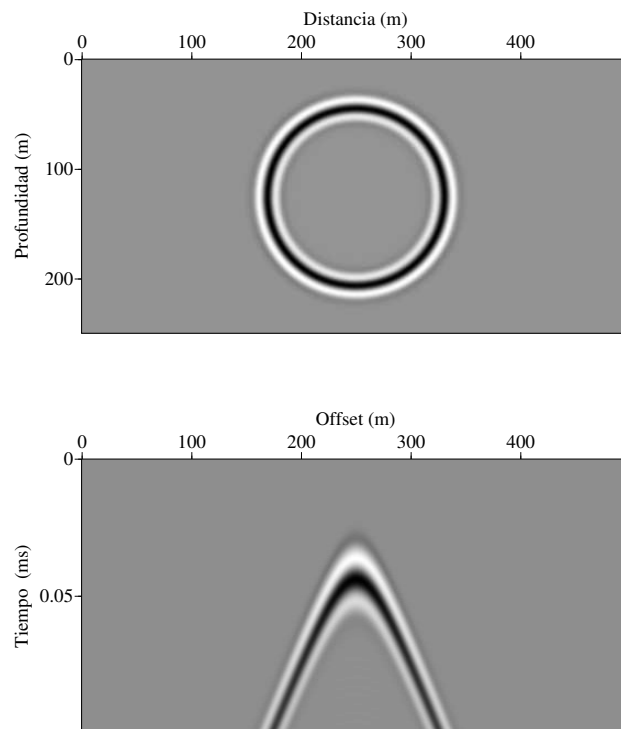


Figura 3.1: Campo de onda en un medio acústico homogéneo isótropo (superior) y sismograma sísmico (inferior), en un tiempo de $0.1(ms)$. El valor para la velocidad $v_{p0} = 1000(m/s)$, y los parámetros de anisotropía son $\eta = 0$, $\delta = 0$ y $\varepsilon = 0$.

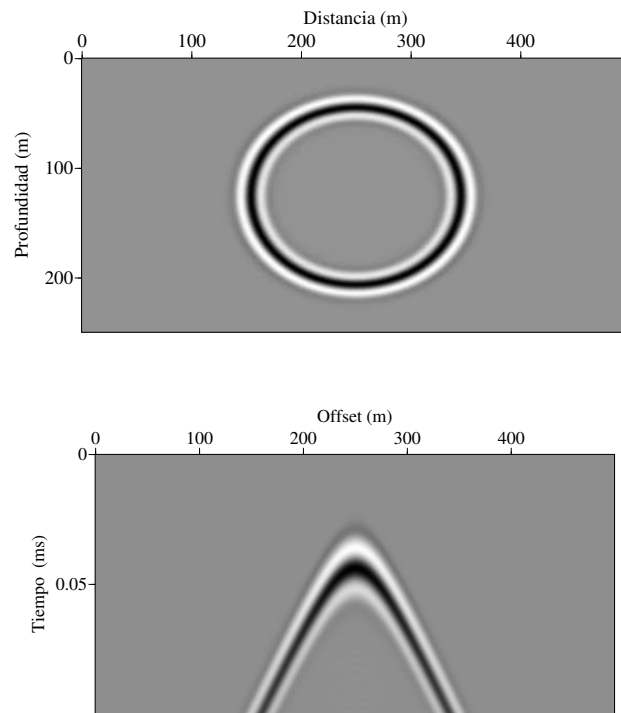


Figura 3.2: Campo de onda en un medio acústico homogéneo con anisotropía elíptica (superior) y el registro sísmico (inferior), en un tiempo de $0.1(ms)$. El valor para la velocidad $v_{p0} = 1000(m/s)$, y los parámetros de anisotropía son $\eta = 0$, $\delta = 0.2$ y $\varepsilon = 0.2$.

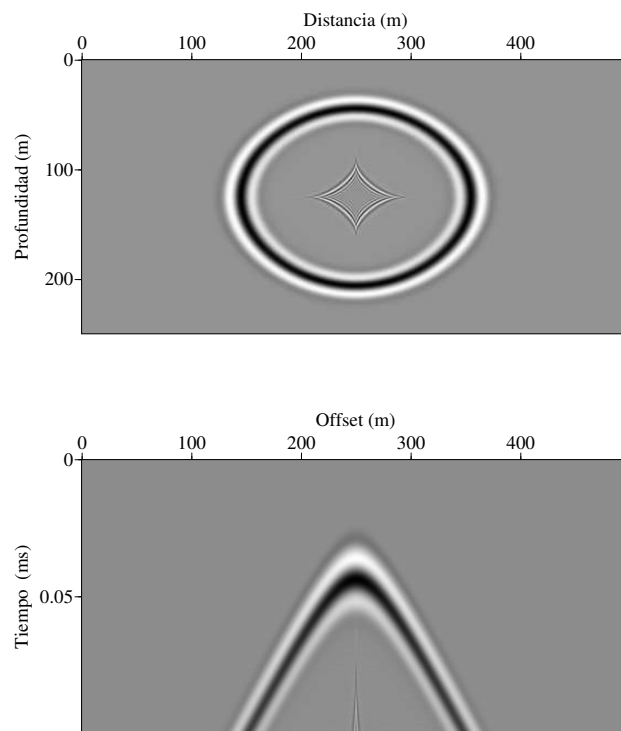


Figura 3.3: Campo de onda en un medio acústico homogéneo anisótropo VTI (superior) y el registro sísmico (inferior), en un tiempo de $0.1(ms)$. El valor para la velocidad $v_{p0} = 1000(m/s)$, y los parámetros de anisotropía son $\eta = 0.1$, $\delta = 0.2$ y $\varepsilon = 0.34$.

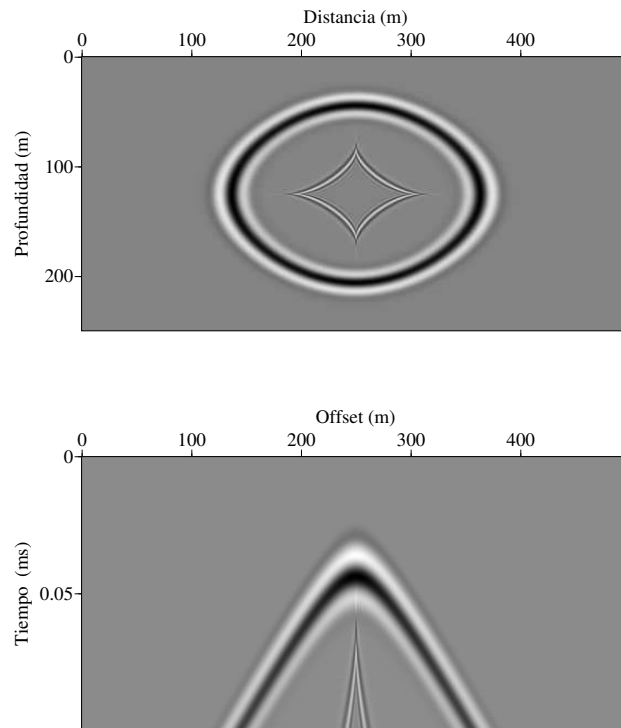


Figura 3.4: Campo de onda en un medio acústico homogéneo anisótropo VTI (superior) y el registro sísmico (inferior), en un tiempo de $0.1(ms)$. El valor para la velocidad $v_{p0} = 1000(m/s)$, y los parámetros de anisotropía son $\eta = 0.2$, $\delta = 0.2$ y $\varepsilon = 0.48$.

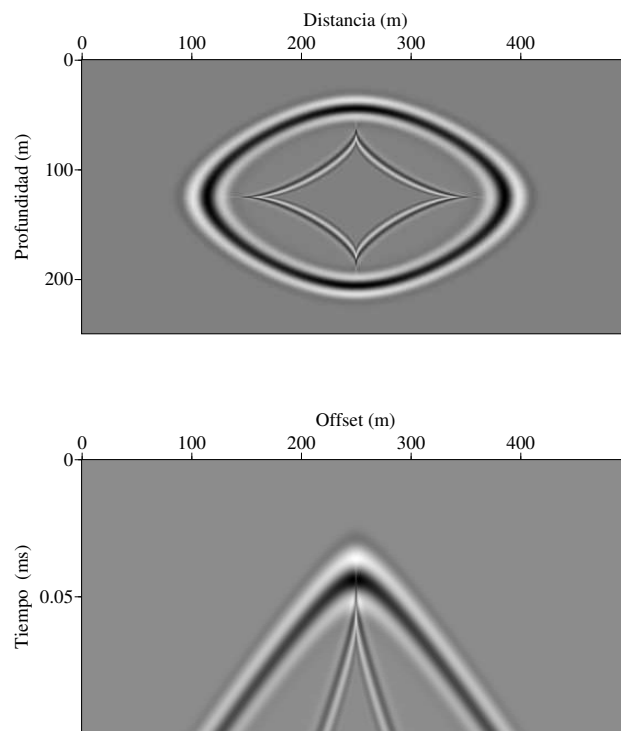


Figura 3.5: Campo de onda en un medio acústico homogéneo anisótropo VTI (superior) y el registro sísmico (inferior), en un tiempo de $0.1(ms)$. El valor para la velocidad $v_{p0} = 1000(m/s)$, y los parámetros de anisotropía son $\eta = 0.5$, $\delta = 0.2$ y $\varepsilon = 0.9$.

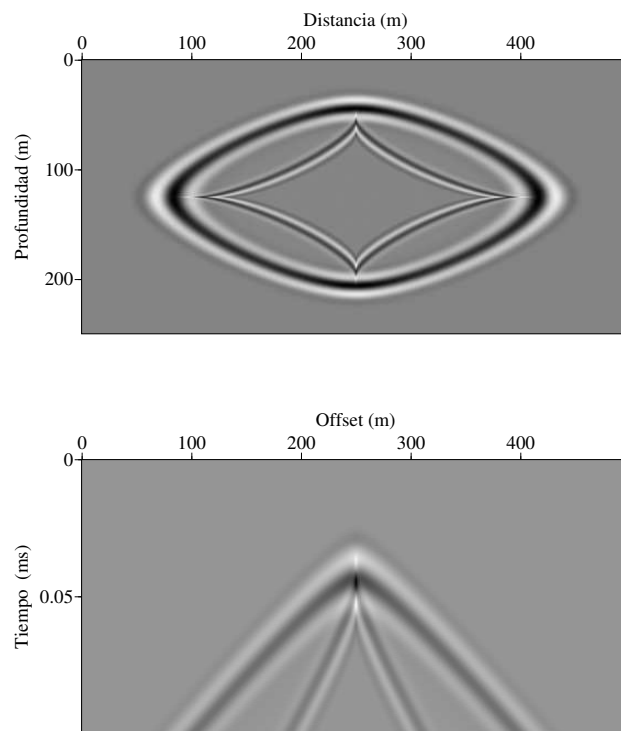


Figura 3.6: Campo de onda en un medio acústico homogéneo anisótropo VTI (superior) y el registro sísmico (inferior), en un tiempo de $0.1(ms)$. El valor para la velocidad $v_{p0} = 1000(m/s)$, y los parámetros de anisotropía son $\eta = 1.0$, $\delta = 0.2$ y $\varepsilon = 1.6$.

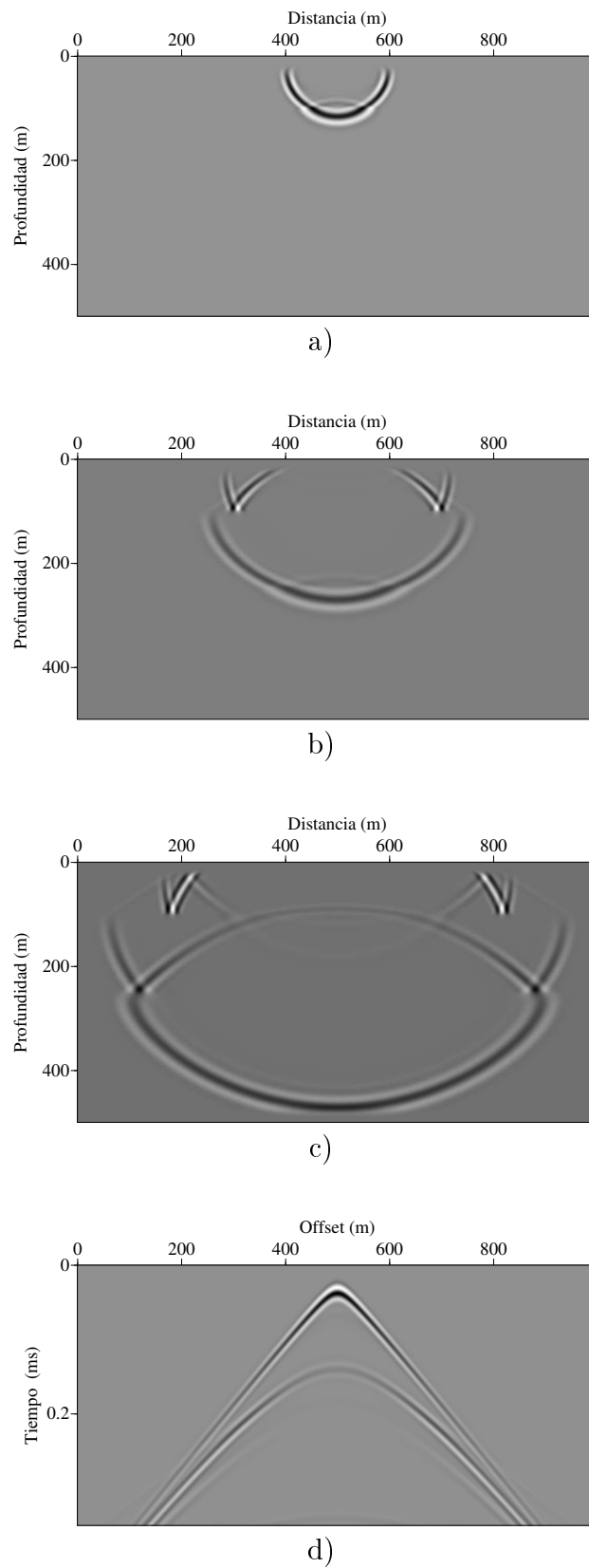


Figura 3.7: Campo de onda en un medio acústico VTI, en donde la primera capa es isótropa, a) para un tiempo de 0.1 (ms) , b) 0.2 (ms) , c) 0.3 (ms) y d) registro sísmico en 0.35 (ms) .

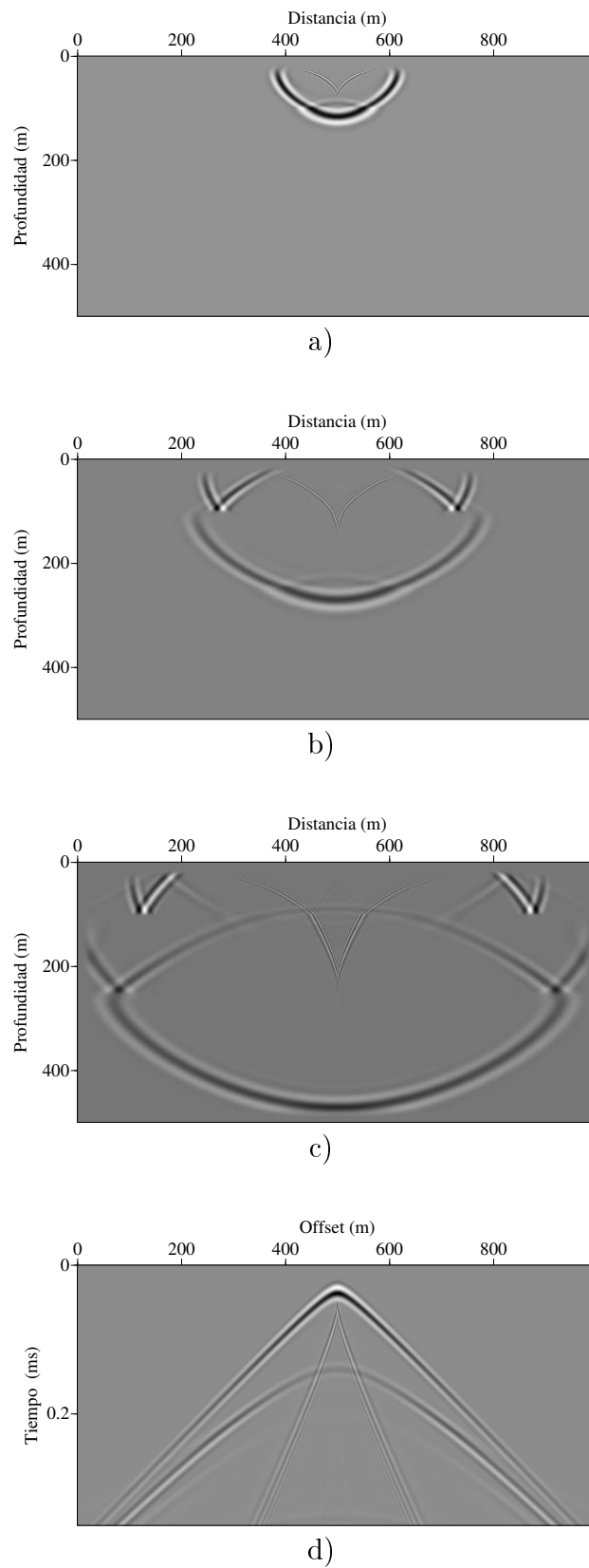
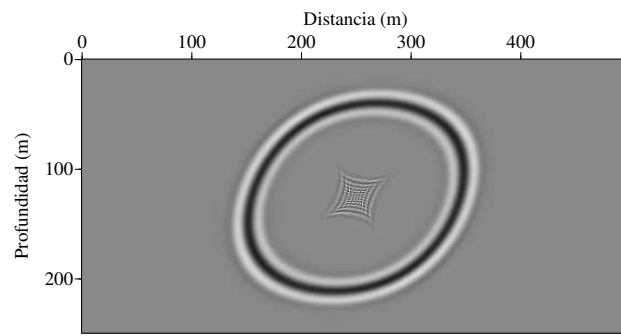
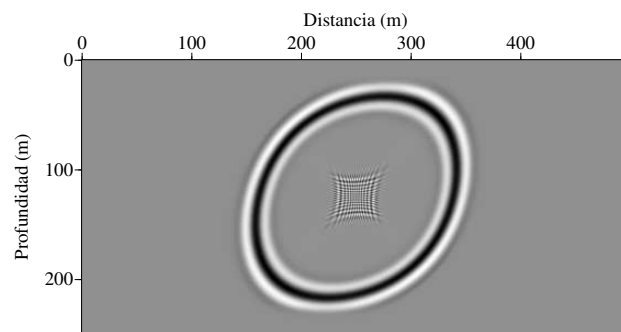


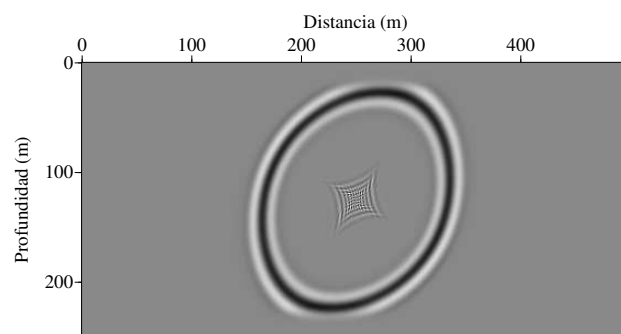
Figura 3.8: Campo de onda en un medio acústico VTI, en donde la primera capas es anisótropa, a) para un tiempo de $0.1(ms)$, b) $0.2(ms)$, c) $0.3(ms)$ y d) registro sísmico en $0.35(ms)$.



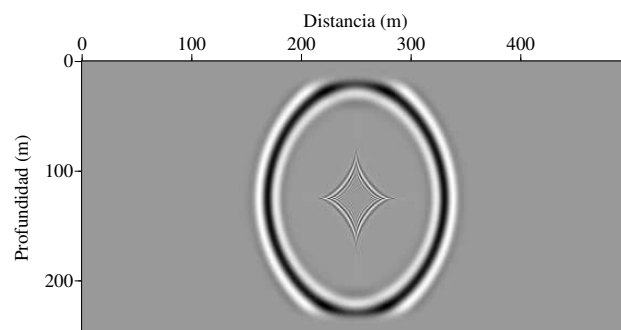
a)



b)



c)



d)

Figura 3.9: Campo de onda en un medio acústico TTI para un tiempo de $0.1(ms)$, considerando $\eta = 0.1$ y $\delta = 0.2$, a) para $\phi = 30^\circ$, b) $\phi = 45^\circ$, c) $\phi = 60^\circ$ y d) $\phi = 90^\circ$.

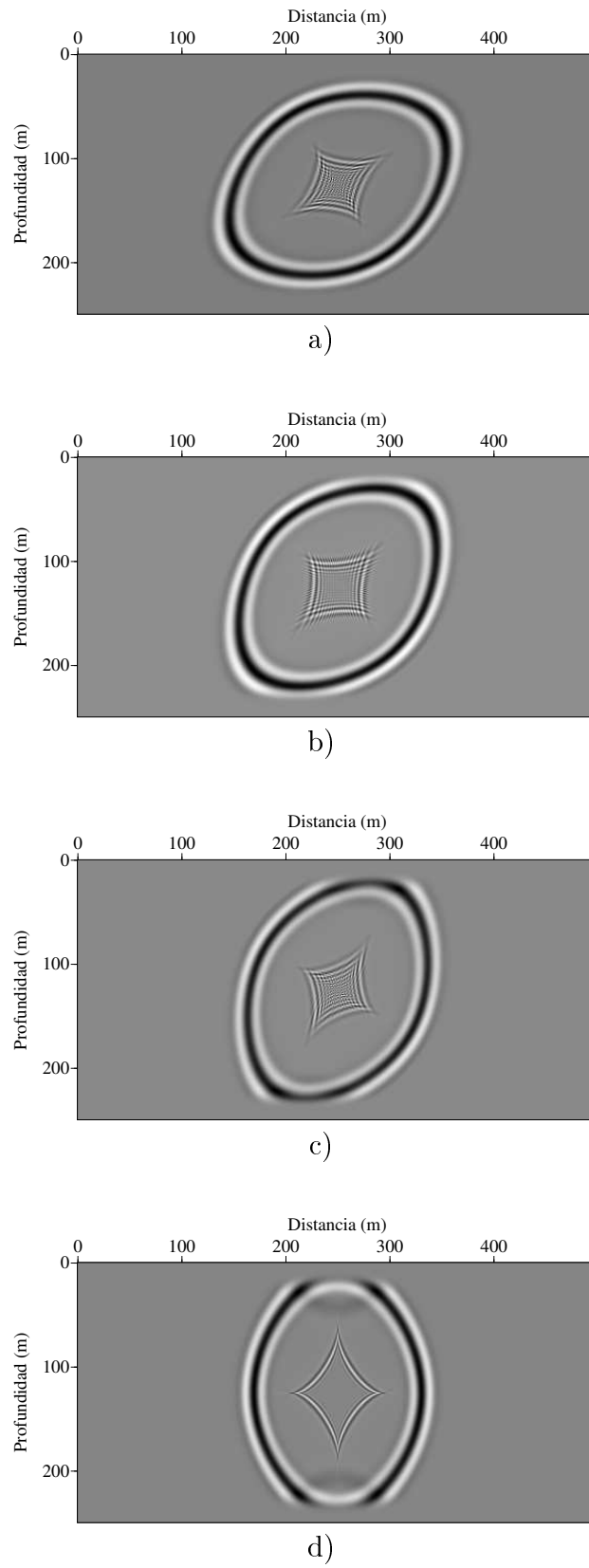


Figura 3.10: Campo de onda en un medio acústico TTI para un tiempo de $0.1(ms)$, considerando $\eta = 0.2$ y $\delta = 0.2$, a) para $\phi = 30^\circ$, b) $\phi = 45^\circ$, c) $\phi = 60^\circ$ y d) $\phi = 90^\circ$.

Migración PS y PSPI en medios con anisotropía polar vertical (VTI)

4.1 Introducción

En este capítulo se presenta la fundamentación básica de la migración por continuación del campo de onda en profundidad, esta migración se realiza con base en las ecuaciones de onda unidireccionales (OWWE), usadas para propagar dos tipos de campos, el campo de onda descendente y el campo de onda ascendente. El campo de onda descendente es el modelado a partir de una función que simula una fuente; y el campo de onda ascendente es el campo de onda registrado por los receptores en la superficie.

Se describen los algoritmos phase shift (PS) y phase shift plus interpolation (PSPI), los cuales se extendieron para el caso de anisotropía tipo VTI, mostrando con ejemplos numéricos su funcionamiento para el caso en donde la anisotropía es homogénea y la velocidad varia con la profundidad $v(z)$ (método PS, con anisotropía homogénea), y el caso con anisotropía homogénea y con variación lateral y vertical de la velocidad $v(x, z)$ (método PSPI con anisotropía homogénea).

En otra sección se explica el esquema de interpolación utilizado para el caso en que los parámetros de anisotropía ε y δ son funciones no homogéneas de la posición (x, z) , es decir cuando tenemos variación lateral de la velocidad de onda v_{p0} y de los

parámetros ε y δ .

4.2 Migración por extrapolación en dirección de la profundidad

La migración pre-apilado por continuación del campo de onda en dirección de la profundidad, realiza la propagación numérica del campo descendente a través de las ecuaciones de sentido único, y en una segunda etapa se aplica una condición de imagen para construir el reflector.

El campo de onda propagado de la fuente es descrito por $P_f(x, z; w)$ y el campo de onda registrado en los receptores por $P_r(x, z; w)$; cuando estos dos campos coinciden en un mismo tiempo y posición espacial, la correlación de los campos tendrá valores máximos permitiendo construir el reflector.

En esencia los métodos por continuación del campo de onda, realiza una extrapolación para cada nivel en dirección de la profundidad desde z a $z + \Delta z$. Cuando se tiene un campo de velocidad constante este tipo de extrapolación en 2D, se puede realizar usando las siguientes expresiones:

$$P_f^{z_j+1}(k_x, z + \Delta z; w) = P_f^{z_j}(k_x, z; w)e^{-ik_z^j \Delta z} \quad (4.1)$$

$$P_r^{z_j+1}(k_x, z + \Delta z; w) = P_r(k_x, z; w)e^{ik_z^j \Delta z}, \quad (4.2)$$

donde, k_x y k_z , son las componentes del vector número de onda \mathbf{k} , y w es la frecuencia. Δz representa el intervalo en profundidad utilizado en la extrapolación.

El operador raíz cuadrada corresponde a es la componente del número de onda en dirección de la profundidad y en un medio acústico homogéneo isótropo esta dado por la expresión:

$$k_z = \frac{w}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2 k_x^2}{w^2}}, \quad (4.3)$$

donde v , es la velocidad del medio. Si recordamos la expresión para el caso acústico con anisotropía VTI, donde el operador raíz cuadrado esta expresado en terminos del parámetro de anisotropía de Tsvankin η y la velocidad NMO: v_{nmo} , bien con anterioridad se obtiene:

$$k_z = \frac{v_{nmo}}{v_{p0}} \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{v_{nmo}^2} - \frac{\omega^2 k_x^2}{\omega^2 - 2v_{nmo}^2 \eta k_x^2} \right)}. \quad (4.4)$$

La condición de imagen usada comúnmente es la de tipo correlación, que se basa en la sumar por todas las frecuencias el producto del campo extrapolados desde los receptores $P_r(x, z; w)$ por el complejo conjugado del campo extrapolado desde la fuente $P_f(x, z; w)$, mediante la siguiente expresión:

$$I(x, z) = \sum_w P_r(x, z; w) P_f^*(x, z; w). \quad (4.5)$$

Las ecuaciones que modelan la propagación de las ondas ascendentes y descendentes se pueden obtener a partir de la ecuación de onda completa:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right), \quad (4.6)$$

donde, v , es la velocidad del medio.

Aplicando la transformada de Fourier espacial y temporal ($\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -ik_x$, $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -ik_z$, $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -iw$) en la ecuación (4.6) se obtiene:

$$P(k_x, k_z, w) [(ik_x)^2 + (ik_z)^2] = \frac{\omega^2}{v^2} P(k_x, k_z, w), \quad (4.7)$$

de la cual se puede obtener la relación de dispersión para el caso acústico homogéneo, la cual relaciona la componente del número de onda en dirección k_x , k_z en términos

de su correspondiente k_x , la frecuencia w , y la velocidad v en la forma:

$$k_z^2 = \frac{w^2}{v^2} - k_x^2. \quad (4.8)$$

La condición para garantizar la no presencia de ondas evanescentes es que los valores del número de onda sean positivos, esto es $k_z^2 > 0$, esta condición es importante dentro de los algoritmos de migración por continuación del campo de onda para evitar inestabilidad numérica.

Si se aplica la transformada de Fourier solo en el dominio temporal ($\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -iw$), en la ecuación (4.1), se puede obtener la expresión:

$$w^2 P(x, z, w) = v^2 \left(\frac{\partial^2 P(x, z, w)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, z, w)}{\partial z^2} \right), \quad (4.9)$$

posteriormente aplicando la transformada de Fourier ahora en el dominio espacio x y despejando la segunda derivada del campo $\frac{\partial^2 P(k_x, z, w)}{\partial z^2}$ se obtiene:

$$\frac{\partial^2 P(k_x, z, w)}{\partial z^2} = \frac{w^2}{v^2} \underbrace{\left(1 - \frac{v^2 k_x^2}{w^2} \right)}_{k_z^2} P(k_x, z, w), \quad (4.10)$$

quedando de la forma:

$$\frac{\partial^2 P(k_x, z, w)}{\partial z^2} = k_z^2 P(k_x, z, w). \quad (4.11)$$

Si tomamos una solución P como la suma de dos campos $P = P_r + P_f$, y reemplazamos en 4.11 se obtienen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ik_z \right) P_f(k_x, z; w) = 0, \quad P_f(x_s, z = 0; w) = F(x_s, w), \quad (4.12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - ik_z \right) P_r(k_x, z; w) = 0, \quad P_r(x_r, z = 0; w) = R(x_r, w), \quad (4.13)$$

conocidas como ecuaciones de onda unidireccionales (Claerbout, 1971), donde $F(x_s, w)$ es la función fuente que genera el campo de onda descendente, en la posición $z = 0$, y $R(x_r, w)$ es el valor del campo registrado en la superficie por los receptores. k_z es conocido como el operador raíz cuadrada, expresado por:

$$k_z = \sqrt{1 - \frac{k_x^2 v^2}{w^2}}. \quad (4.14)$$

4.3 Técnicas Phase shift (PS) y Phase shift plus interpolation (PSPI)

Los campos ascendentes y descendentes se pueden extrapolar en profundidad en el dominio (w, \mathbf{k}) , utilizando las ecuaciones (4.1) y (4.2) bajo la condición que en cada nivel de extrapolación la velocidad sea constante. Este método es llamado PS (Phase shift) (Gazdag, 1978) y resulta eficiente y preciso cuando las velocidades solo varían con la profundidad, $v = v(z)$.

De manera general el método PS, se realiza de la siguiente manera:

1. Se realiza la lectura de cada disparo, estos se encuentra en el dominio (x, t) y se modela el campo de la fuente en el dominio (x, w) .
2. Se obtiene el campo de onda ascendente en el dominio (x, w) usando la transformada de Fourier en tiempo.
3. Se transforma el campo ascendente y descendente al dominio $(k_x; w)$.
4. Se extrapolan los dos campos con un corrimiento de fase $\exp(\pm i k_z \Delta z)$ para una velocidad constante por nivel, v_{ref} .
5. Se aplican la transformada inversa de Fourier espacial a los dos campos para obtener $P_f(x; w)$ y $P_r(x; w)$.
6. Se aplica una condición de imagen, la cual suma sobre todas las frecuencias la correlación de P_f con P_r .

Este método se explica de manera mas clara en el esquema mostrado en la Figura (4.1). El método PS posee ciertas ventajas sobre otros extrapoladores que se expresan en los dominios (x, t) y (x, w) , debido a que utiliza la relación de dispersión exacta (ecuación 4.8) y un extrapolador estable 2D y 3D.

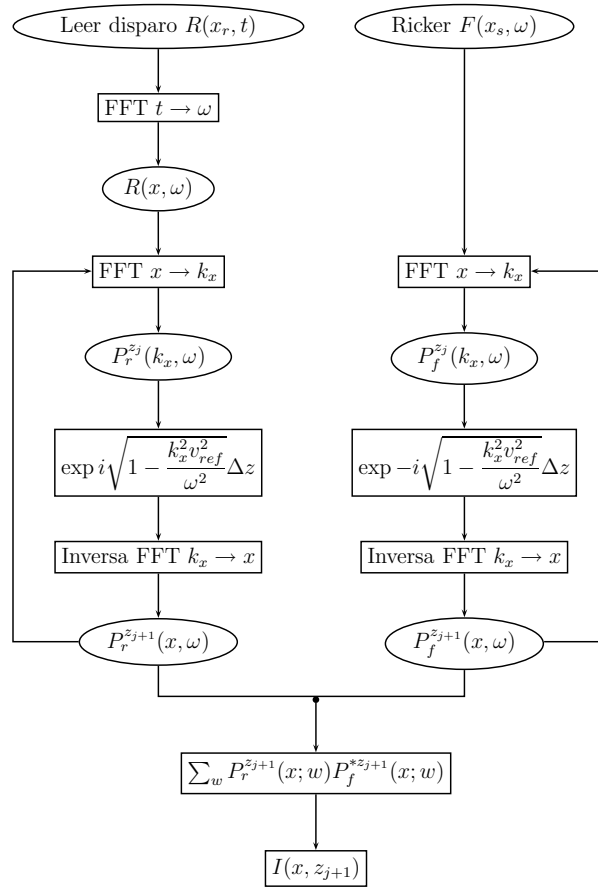


Figura 4.1: Esquema del método PS convencional

De otro lado, el método PSPI posee la ventaja de considerar las variaciones laterales de la velocidad en el modelo, interpolando dos campos P_1 y P_2 que se encuentran en el dominio (x, w) y son extrapolados con el método PS previamente, usando dos velocidades de referencia v_{ref_1} y v_{ref_2} (Gazdag y Squazzero, 1984). Cuando se obtienen los campos propagados cada uno con diferentes velocidades de referencia:

$$P_1(x, z + \Delta z; w) = P_1(x, z; w) \exp ikz\Delta z, \quad kz = \sqrt{1 - \frac{k_x^2 v_{ref1}^2}{w^2}} \quad (4.15)$$

$$P_2(x, z + \Delta z; w) = P_1(x, z; w) \exp ikz\Delta z, \quad kz = \sqrt{1 - \frac{k_x^2 v_{ref2}^2}{w^2}} \quad (4.16)$$

Se procede a la interpolación lineal, propuesta por Etgen (1994), en donde el campo es calculado a través de la expresión

$$P(x, z + \Delta z, w) = \alpha P_1(x, z + \Delta z, w) + (1 - \alpha) P_2(x, z + \Delta z, w), \quad (4.17)$$

donde α , es el peso de la interpolación, dado por la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{v_2 - v(x)}{v_2 - v_1}. \quad (4.18)$$

En la Figura (4.2) representa los pesos utilizados en interpolación y la Figura (4.3) representa el esquema del algoritmo de extrapolación. El número de velocidades de referencia aumenta cuando el intervalo entre la velocidad máxima y mínima aumenta para cada nivel de profundidad z^j .

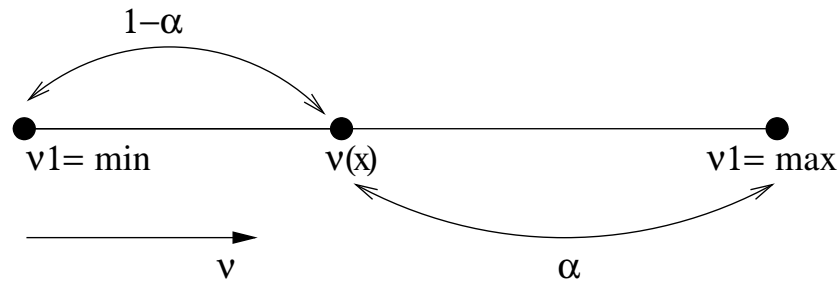


Figura 4.2: Interpolación de dos campos propuesta por Etgen (1994)

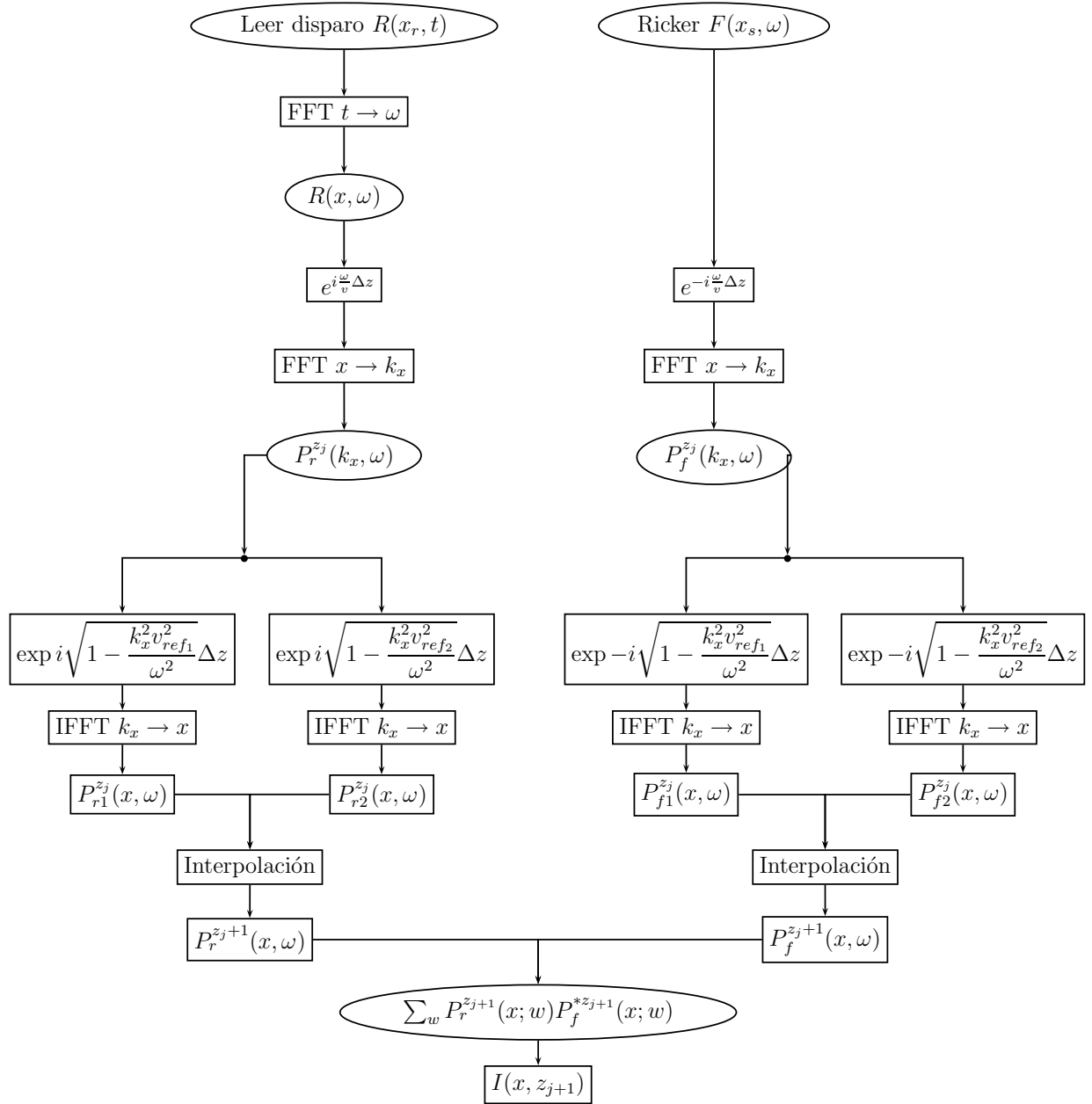


Figura 4.3: Esquema del método PSPI convencional

4.4 Extensión de la migración PS y PSPI para medios con anisotropía VTI

Los algoritmos PS y PSPI son extendidos para considerar el tipo de anisotropía VTI, en base a la relación de dispersión de Alkhalifah (2000), la cual esta expresada en términos de la componente de la velocidad de la onda P en dirección paralela al eje de simetría v_{p0} , el parámetro de anisotropía de Tsvankin η y la velocidad NMO (ver ecuación (4.4)).

Los pasos generales del algoritmo PS+A son similares al convencional y la diferencia radica en el calculo del k_z , el cual es obtenido de la ecuación (4.4).

Para extender el calculo del numero de onda k_z al medio anisótropo, debemos garantizar que el valor de anisotropía η solamente varía con la profundidad.

Aparte para medios que poseen variación lateral de algunos de los parámetros v_{p0} , ε o δ , un proceso de extrapolación de fase con la relación de dispersión de Alkhalifah, más un nuevo esquema de interpolación debe ser implementado.

En este caso el algoritmo PSPI+A determina para cada nivel de referencia z_j dentro del modelo, el valor máximo y mínimo para la velocidad ($v_{p0_{min}}$, $v_{p0_{max}}$), junto con los valores máximos y mínimos de los parámetros de anisotropía de Thomsen (ε_{max} , ε_{min}) y (δ_{max} , δ_{min}) (el parámetro η esta expresado en términos de los parámetros de Thomsen por la ecuación (3.8)).

Con el fin de obtener la velocidad de referencia v_{ref} , y los valores de anisotropía de referencia ε_{ref} y δ_{ref} , en cada nivel de profundidad z_j se utiliza el concepto de entropía propuesto por (Bagaini et al., 1995).

Si a un determinado nivel de referencia son necesarias L_v velocidades, L_ε valores de ε y L_δ valores de δ , el número de campos a interpolar sera $N = L_v \times L_\varepsilon \times L_\delta$, siendo L_v .

Un aumento del costo computacional en este algoritmo está relacionado con las N transformadas inversas que deben aplicarse a los N campos de referencia con el

objetivo de quedar en el dominio espacial donde se realizará la interpolación. A continuación se describe el proceso de interpolación desarrollado en este trabajo.

Si en determinado nivel de referencia z_j , se considera $L_v = L_\varepsilon = L_\delta = 5$, se tendría 5^3 campos extrapolados para las diferentes combinaciones de $(v_{ref}, \varepsilon_{ref}, \delta_{ref})$.

Sin embargo, para un punto fijo x , el valor verdadero de $v(x)$, estará entre un par de velocidades de referencia $v_{ref}(j)$ y $v_{ref}(j+1)$, igual consiste para $\varepsilon(x)$ y $\delta(x)$.

De esta forma el valor del campo de onda en un punto x sera obtenido como la suma de ocho campos ubicados en los ocho vértices de un cubo, que tiene como lados el valor de la velocidad, donde su valor mínimo corresponde a $v_1 = v_{min}$ y su valor máximo a $v_2 = v_{max}$, el valor de anisotropía δ mínimo, $\delta_1 = \delta_{min}$ y el valor de anisotropía δ máximo $\delta_2 = \delta_{max}$, y el valor de anisotropía ε mínimo, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{min}$ y el valor de anisotropía ε máximo $\varepsilon_2 = \varepsilon_{max}$. El cubo tiene longitud de lados iguales a la unidad (ver Figura 4.4). De esta forma los coeficientes para la interpolación en cada lado del cubo están dados por las siguientes expresiones:

Cuando se obtiene el campo descendente $P_f(x, w)$ y el campo ascendente $P_r(x, w)$ después del corrimiento de fase, y se desea realizar la interpolación según el numero de campos obtenidos para el caso anisótropo, se explicará el caso cuando se obtuvieron $L_v = 2$, $L_\varepsilon = 2$ y $L_\delta = 2$, para un total de ocho campos a interpolar.

El campo es obtenido con la suma de los ocho campos ubicados en los ocho vértices de un cubo, en el eje horizontal esta ubicado la velocidad, donde su valor mínimo corresponde a $v_1 = v_{min}$ y su valor máximo a $v_2 = v_{max}$, igualmente para el valor de anisotropía δ , $\delta_1 = \delta_{min}$ y $\delta_2 = \delta_{max}$, para el eje vertical que representa el otro valor de anisotropía ε , $\varepsilon_1 = \varepsilon_{min}$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon_{max}$, el cubo tiene longitud de lados iguales a la unidad (ver Figura 4.3), y se calculan los parámetros a , b , y c , para en términos de estos sean hallados los pesos W_1, \dots, W_8 para la interpolación a través de las siguientes expresiones: (ver Figura 4.4).

$$W_1 = abc \quad W_2 = a(1-b)c, \quad W_3 = (1-a)bc, \quad W_4 = (1-a)(1-b)c, \quad (4.19)$$

$$W_5 = ab(1-c), \quad W_6 = a(1-b)(1-c), \quad W_7 = (1-a)b(1-c), \quad W_8 = (1-a)(1-b)(1-c) \quad (4.20)$$

donde a , b y c son los parámetros obtenidos de la forma:

$$a = \frac{v_2 - v(x)}{v_2 - v_1}, \quad b = \frac{\delta_2 - \delta(x)}{\delta_2 - \delta_1}, \quad c = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon(x)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \quad (4.21)$$

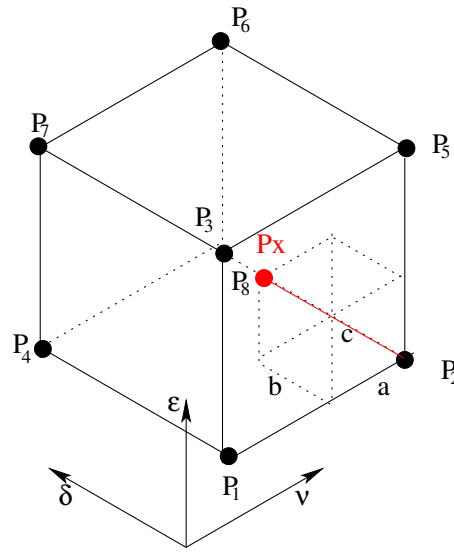


Figura 4.4: Cubo de interpolación para los campos correspondientes a $P_1(v_1, \delta_1, \varepsilon_1)$, $P_2(v_2, \delta_1, \varepsilon_1)$, $P_3(v_2, \delta_2, \varepsilon_1)$, $P_4(v_1, \delta_2, \varepsilon_1)$, $P_5(v_2, \delta_1, \varepsilon_2)$, $P_6(v_2, \delta_2, \varepsilon_2)$, $P_7(v_1, \delta_2, \varepsilon_2)$ y $P_8(v_1, \delta_1, \varepsilon_2)$. Los tres ejes corresponden respectivamente a la velocidad v , al parámetro de anisotropía δ y al valor de anisotropía ε . Las longitudes: $a = \frac{v_2 - v(x)}{v_2 - v_1}$, $b = \frac{\delta_2 - \delta(x)}{\delta_2 - \delta_1}$ y $c = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon(x)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$, representan entonces los que serán utilizados para calcular los pesos W_1, \dots, W_8 con que los 8 campos serán interpolados para obtener el campo P_x en el punto (x) .

De esta forma conociendo el valor de los pesos, se procede a calcular el campo, P_r y P_f , en base a los campos ubicados en todos los puntos del cubo, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
P_r(v, \delta, \varepsilon) = & W_1 P_7(v_1, \delta_2, \varepsilon_2) + W_2 P_8(v_1, \delta_1, \varepsilon_2) + W_3 P_6(v_2, \delta_2, \varepsilon_2) + W_4 P_5(v_2, \delta_1, \varepsilon_2) \\
& + W_5 P_4(v_1, \delta_2, \varepsilon_1) + W_6 P_1(v_1, \delta_1, \varepsilon_1) + W_7 P_3(v_2, \delta_2, \varepsilon_1) + W_8 P_2(v_2, \delta_1, \varepsilon_1),
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
P_f(v, \delta, \varepsilon) = & W_1 P_7(v_1, \delta_2, \varepsilon_2) + W_2 P_8(v_1, \delta_1, \varepsilon_2) + W_3 P_6(v_2, \delta_2, \varepsilon_2) + W_4 P_5(v_2, \delta_1, \varepsilon_2) \\
& + W_5 P_4(v_1, \delta_2, \varepsilon_1) + W_6 P_1(v_1, \delta_1, \varepsilon_1) + W_7 P_3(v_2, \delta_2, \varepsilon_1) + W_8 P_2(v_2, \delta_1, \varepsilon_1).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Después de obtener los campos ascendente y descendente interpolados se aplica la condición de imagen tipo correlación para obtener migrada usando la siguiente relación:

$$I(x, z) = \sum_w P_r(v, \delta, \varepsilon, x, w) P_f^*(v, \delta, \varepsilon, x, w). \tag{4.24}$$

A continuación se presentan los resultados correspondientes a las pruebas numéricas en medios donde la anisotropía es homogénea y la velocidad solo varía en profundidad (migración PS+A) y para el caso donde los parámetros de anisotropía y la velocidad son función de (x, z) (migración PSPI+A), se obtiene migraciones para reflectores planos, inclinados y para el dato sintético de Marmousi con anisotropía.

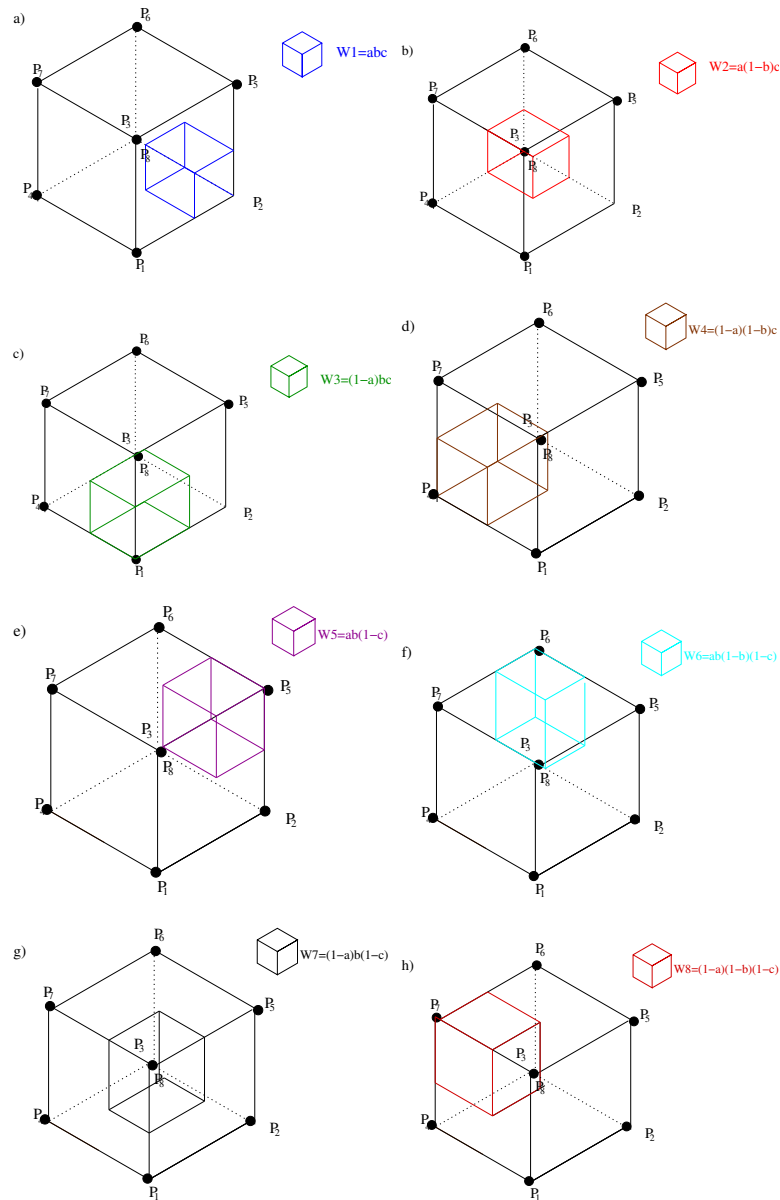


Figura 4.5: a) Peso $W_1 = abc$, para el campo evaluado en $P_7(v_1, \delta_2, \varepsilon_2)$, b) Peso $W_2 = a(1 - b)c$, para el campo evaluado en $P_8(v_1, \delta_1, \varepsilon_2)$, c) Peso $W_3 = (1 - a)bc$, para el campo evaluado en $P_6(v_2, \delta_2, \varepsilon_2)$, d) Peso $W_4 = (1 - a)(1 - b)c$, para el campo evaluado en $P_5(v_2, \delta_1, \varepsilon_2)$, e) Peso $W_5 = ab(1 - c)$, para el campo evaluado en $P_4(v_1, \delta_2, \varepsilon_1)$, f) Peso $W_6 = a(1 - b)(1 - c)$, para el campo evaluado en $P_1(v_1, \delta_1, \varepsilon_1)$, g) Peso $W_7 = (1 - a)b(1 - c)$, para el campo evaluado en $P_3(v_2, \delta_2, \varepsilon_1)$, h) Peso $W_8 = (1 - a)(1 - b)(1 - c)$, para el campo evaluado en $P_2(v_2, \delta_1, \varepsilon_1)$,

4.5 Resultados

En esta sección se presentan los resultados de migración de los algoritmos propuestos PS+A y PSPI+A en modelos donde la anisotropía fue considerada homogénea.

4.5.1. Experimentos numéricos para medios con anisotropía VTI homogénea

En el primer modelo, tres reflectores planos son considerados dentro de un campo de velocidades $v(z) = 2000 + 0.3z(m/s)$, ver Figura (4.6).

El modelo consta de 200 muestras en profundidad y 1000 muestras en dirección horizontal, el tamaño de las celdas en dirección z es $dz=10$ y en dirección x de $dx = 10$, obteniendo un modelo de $10(Km)$ en dirección x y $2.0(Km)$ en profundidad. Los tres reflectores planos se ubicaron en las profundidades $z = 500, 1000, 1500(m)$, ver Figura (4.6).

El dato consta de un solo disparo en la posición $x_s = 3000m$, se utilizó el modelado tipo Kirchhoff usando la herramienta Susynlv (Stockwell and Cohen, 2002).

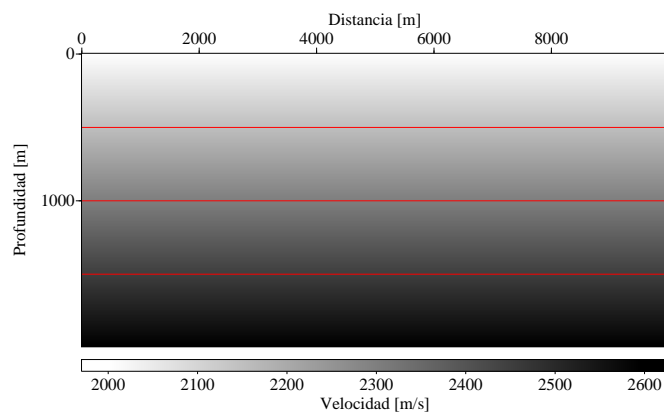


Figura 4.6: Modelo 1, tres reflectores planos en campo de velocidades $v(z) = 2000 + 0.3z(m/s)$

Inicialmente se modeló un dato en un medio isótropo (ver Figura 4.7) con el objetivo de ver las diferencias de tiempos en las hipérbolas de reflexión cuando comparado

con el dato modelado considerando anisotropía (ver Figura 4.8), donde para offset mayores el tiempo en el que es registrada la señal aumenta debido a la dependencia de la velocidad v_{p0} con el ángulo. Coincidiendo los tiempos solamente en el ángulo cero de v_{p0} . En el segundo experimento numérico, con el mismo campo de velocidades descrito, se consideraron valores de anisotropía $\varepsilon = 0.2$ y $\delta = 0.1$. Se obtuvo el dato para el disparo con la herramienta Susynlvfti (Stockwell and Cohen, 2002), la cual obtiene sismogramas sintéticos con anisotropía con el modelado tipo Kirchhoff, ver Figura (4.8),

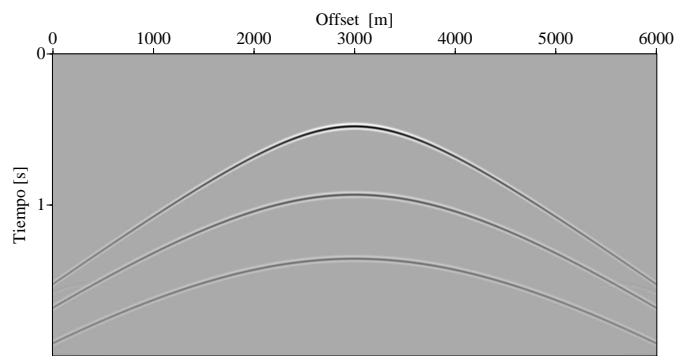


Figura 4.7: Dato obtenido a través de modelado tipo Kirchhoff en el campo de velocidades de la Figura (4.6)

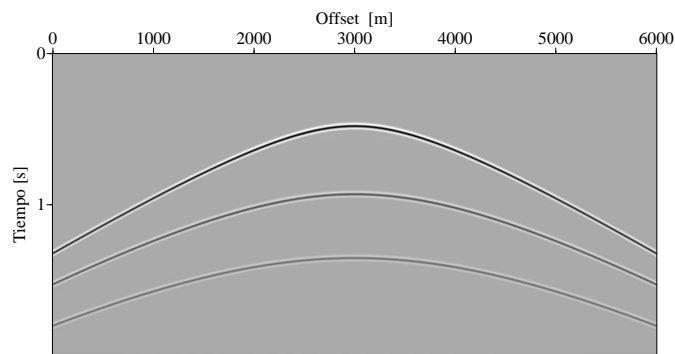


Figura 4.8: Dato obtenido por modelado tipo Kirchhoff para un modelo de tres reflectores planos en un medio con anisotropía homogénea, $\varepsilon = 0.2$ y $\delta = 0.1$, en el campo de velocidades de la Figura (4.1)

El dato isótropo es migrado con el algoritmo isótropo PS (ver Figura (4.9)) y se

ubican correctamente los tres reflectores planos.

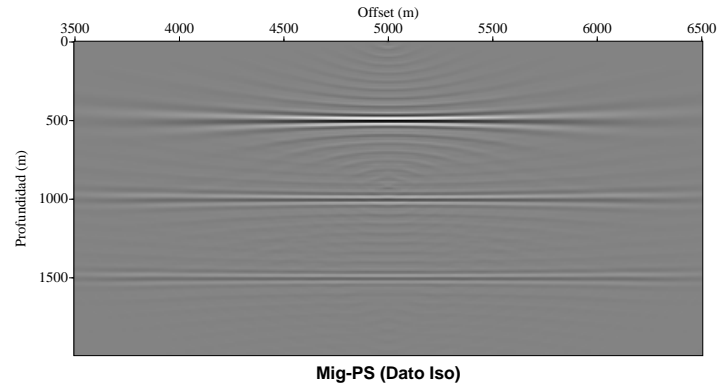


Figura 4.9: Migración tipo PS convencional para un dato isótropo en el modelo de tres reflectores planos

Cuando el dato anisótropo es migrado con el algoritmo isótropo PS y con el algoritmo anisótropo PS+A, se observan las siguientes diferencias: reflectores curvos son obtenidos en la migración convencional tipo PS (ver Figura (4.10)) y solo se ubican correctamente los puntos de los reflectores para los cuales la incidencia del campo sobre el reflector es normal, donde $v_{p0}(\theta) = v_p(0) = v_{p0}$. Es importante resaltar que el reflector más somero es el más distorsionado, producto de que la dirección de propagación de la onda sea a ángulos mayores, en cuanto para los reflectores que se encuentran más profundos la onda llega prácticamente con incidencia normal. En este sentido se espera que el efecto de la anisotropía sea mayor para reflectores someros y ángulos de incidencia grandes. (ver Figura (4.10)).

En la imagen migrada con el algoritmo PS+A aparece un artefacto inherente de la onda S, en la aproximación acústica VTI, debido a que no se considera una capa isótropa en el modelo, sin embargo este efecto es leve y no afecta el buen posicionamiento de los reflectores. Según la migración obtenida por la convencional técnica PS, los reflectores fueron ubicados correctamente en las posiciones de 500, 1000 y 1500(m), ver Figura (4.11).

La segunda diferencia es la aparición del artefacto inherente de la onda S, en la aproximación acústica VTI, debido a que no se considera una capa isótropa en el

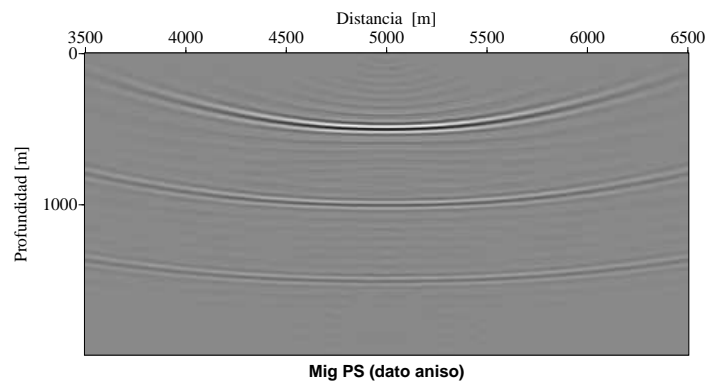


Figura 4.10: Sección migrada convencionalmente tipo PS para el dato con anisotropía homogénea tipo VTI

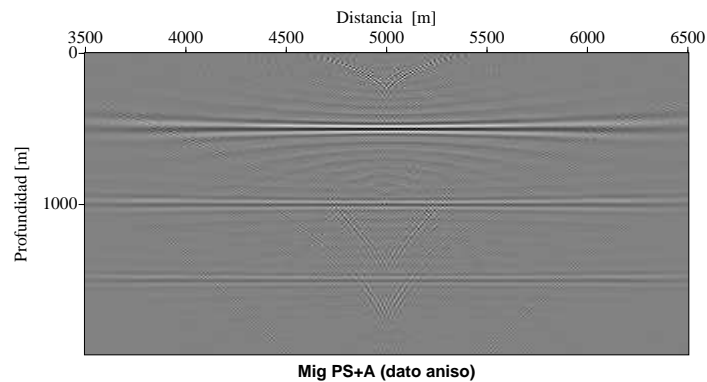


Figura 4.11: Sección migrada tipo PS+A para el dato con anisotropía homogénea tipo VTI

modelo, pero este efecto es leve y no afecta el buen posicionamiento de los reflectores. También se observó, que la inclinación más fuerte le sucede al reflector más somero, contrario a la inclinación del reflector más profundo, esto radica cuando se considera la dirección de propagación de la onda, pues los reflectores que se encuentran más profundos la onda llega prácticamente con incidencia normal, o un ángulo muy cercano a ella. En este sentido con la técnica desarrollada en base a la migración con anisotropía tipo PS+A se ubican correctamente los reflectores planos, de esta forma esta migración con anisotropía mejora la convencional isotrópica para cuando el dato obtenido posee anisotropía homogénea (Ver Figura (4.10)).

Otro experimento numérico se realizó con un modelo que consta de 200 muestras en z , y 1000 muestras en x , con un tamaño de celda en ambas direcciones, $dx = dz = 10$, en donde se considera el mismo campo de velocidades $v(z)$, se ubican tres reflectores (4.12).

La imagen obtenida por la técnica isótropa PS del dato con anisotropía homogénea con los valores de anisotropía correspondientes a $\varepsilon = 0.9$ y $\delta = 0.2$, es presentado en la Figura (4.13a), y por último se obtuvo la migración con el algoritmo que incluye anisotropía PS+A corresponde a la Figura (4.13b).

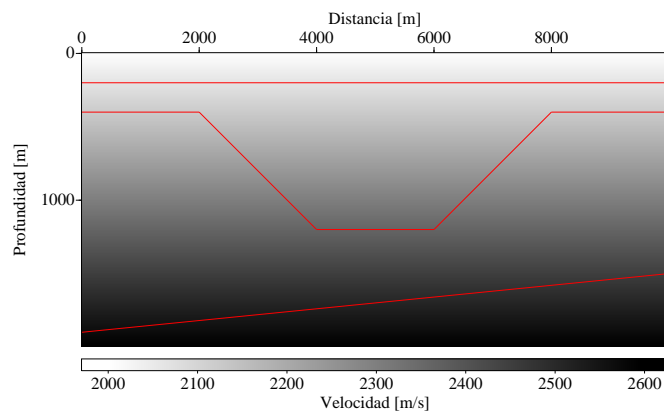
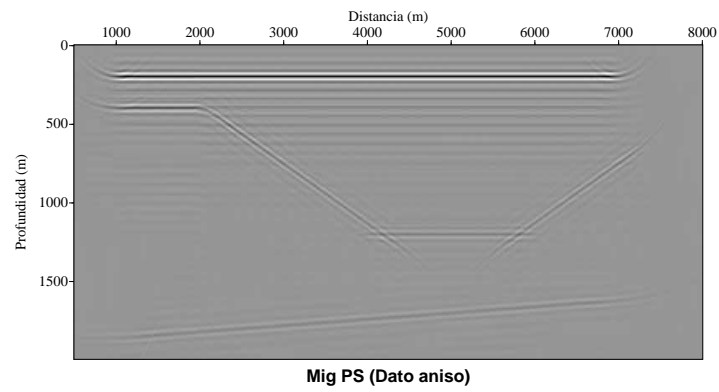


Figura 4.12: Modelo 2, reflectores inclinados para el campo de velocidades $v(z) = 2000 + 0.3z(m/s)$

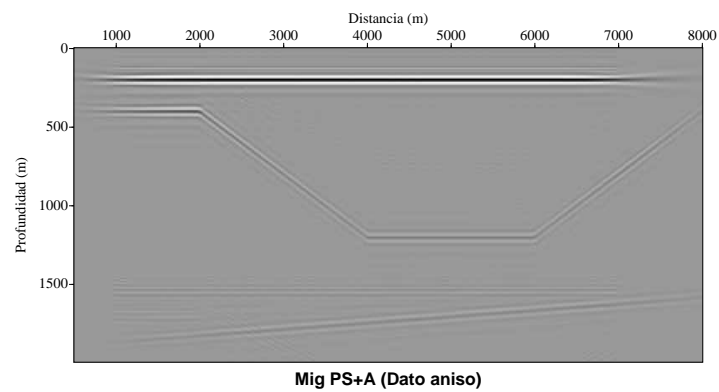
La migración isótropa PS del dato con anisotropía homogénea, presenta observar reflectores mal posicionados y mal definidos (ver Figura (4.13a)), problema que es resuelto con el algoritmo PS+A donde los reflectores son ubicados correctamente (ver Figura (4.13b)).

A fin de probar el algoritmo PSPI propuesto se crearon modelos de velocidad que varían lateralmente y en profundidad $v(x, z) = 2000 + 0.2x + 0.3z (m/s)$. De igual forma que con los modelos anteriores, se introdujeron tres reflectores planos en las profundidades $z = 500, 1000, 1500 (m)$, El dato adquirido correspondiente en un único disparo, fue migrado con la técnica PSPI convencional (4.15a) y el algoritmo desarrollado PSPI+A (ver Figura (4.15b)).

Se observó en la imagen migrada con la técnica PSPI isótropa reflectores más cur-



a)



b)

Figura 4.13: Sección migrada usando la técnica a) PS para un dato anisótropo, b)PS+A para el dato anisótropo en el campo de velocidades $v(z) = 2000 + 0.3z(m/s)$

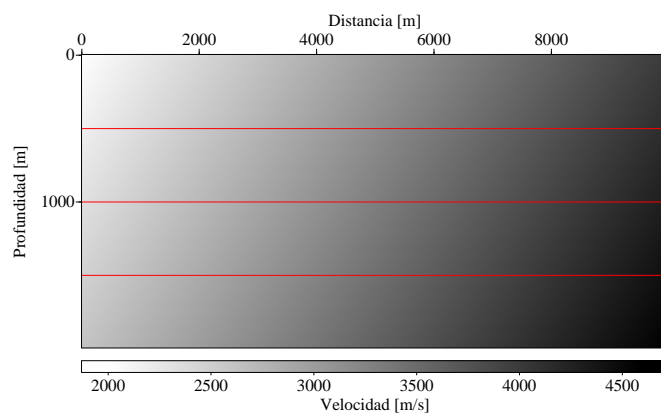
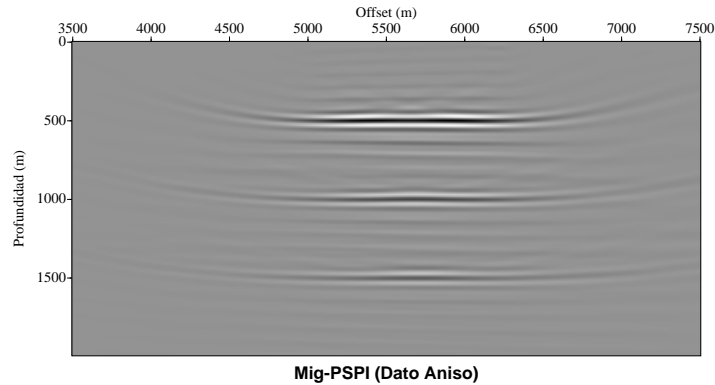
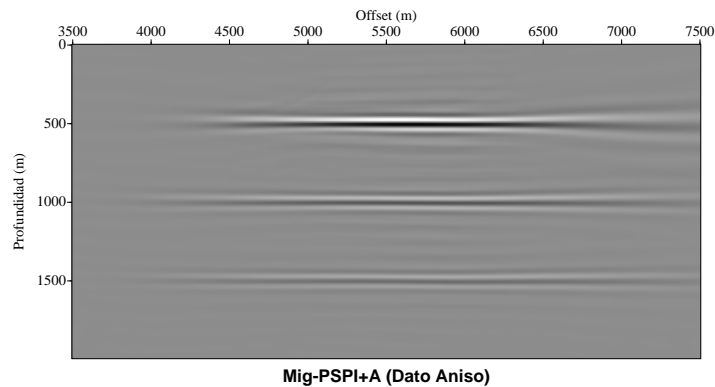


Figura 4.14: Modelo 1, reflectores planos para el campo de velocidades $v(x, z) = 2000 + 0.2x + 0.3z(m/s)$

vos en los mas cercanos a la superficie (4.15a) igual que sucedió para el anterior caso usando la técnica PS; este efecto es corregido con el algoritmo que considera PSPI+A, se ubicaron los reflectores en las posiciones correctas y además se mejora la amplitud de los reflectores mas profundos (ver Figura (4.15b)).



a)



b)

Figura 4.15: Sección migrada usando a)PSPI para el dato anisótropo, b) PSPI+A para el dato con anisotropía campo de velocidades $v(x, z) = 2000 + 0.2x + 0.3z(m/s)$, con valores de anisotropía de $\varepsilon = 0.2$ y $\delta = 0.1$

Finalmente en esta sección de modelos con anisotropía homogénea se prueba el segundo modelo con reflectores inclinados en el mismo campo de velocidades $v(x, z)$, el modelo se presenta en la Figura (4.16). Se obtuvo la imagen migrada con la técnica isotrópica PSPI (ver Figura (4.17a)) y la imagen de la migración usando la técnica propuesta PSPI con anisotropía PSPI+A (4.17b))

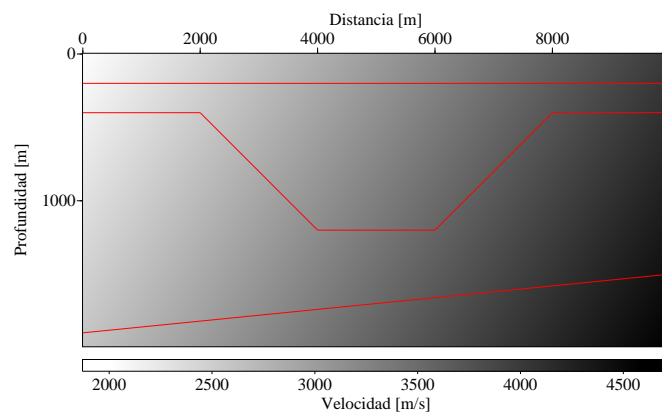
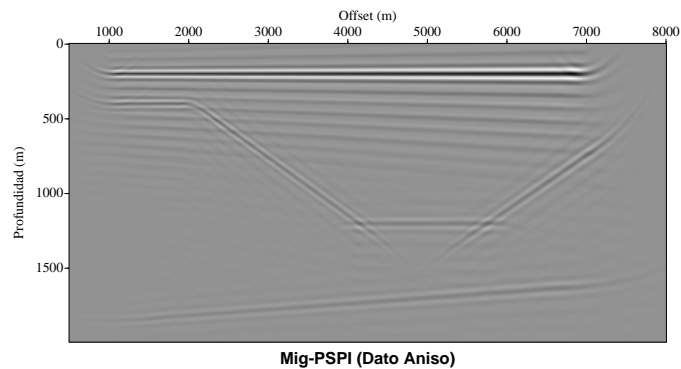
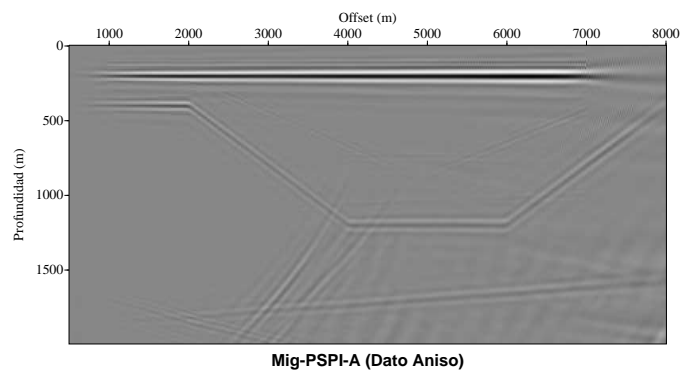


Figura 4.16: Modelo 2, reflectores inclinados para el campo de velocidades $v(x, z) = 2000 + 0.2x + 0.3z(m/s)$



a)



b)

Figura 4.17: Sección migrada usando a)PSPI para el dato anisótropo, b) PSPI+A para el dato con anisotropía campo de velocidades $v(x, z) = 2000 + 0.2x + 0.3z(m/s)$, con valores de anisotropía de $\varepsilon = 0.9$ y $\delta = 0.2$

4.5.2. Experimentos numéricos para medios con anisotropía VTI no homogénea

En esta sección presentamos los resultados del algoritmo PSPI+A propuesto, con el dato sintético Marmousi con anisotropía.

El dato sintético fue disponible por el Dr. Tariq Alkhalifah del Grupo de Análisis de Ondas Sísmicas de la Universidad de Ciencia y Tecnología King Abdullah (KAUST) en Arabia-Saudita (www.kaust.edu.sa), descargado del sitio:

- <https://sites.google.com/a/kaust.edu.sa/tariq/home>.

Los datos sintéticos para el modelo se generaron en 1995 (Reporte Alkhalifah, 1995) mediante la aplicación de un esquema en diferencias-finitas para la ecuación de onda acústica anisótropa (Ver ecuación 2.7).

A pesar de los múltiples artículos que discuten los artefactos de la onda S inherentes a la formulación de la ecuación de onda, como por ejemplo Grechka, (2004), este conjunto de datos son muy limpios debido a la ubicación de la fuente, fue en una capa isótropa y la dispersión generada por la onda S, no es muy notoria.

El dato consta de 230 disparos incluidos en el siguiente archivo:

- Disparos del 001 al 230: `marmousi_all.sgy`,

La información de los parámetros de adquisición son los siguientes:

- Distancia entre disparos: 25 (m).
- Distancia entre receptores: 25 (m).
- Minimo Offset: 200 (m).
- Maximo Offset: 3575 (m).

- Registro en tiempo: 2,9 (s).
- Número de Disparos: 230.
- Número de Trazas por Disparos 96.

El campo de velocidad en dirección vertical para la onda P es en este modelo igual a la velocidad NMO es proporcionado la matriz de η en los siguientes archivos:

- Velocidad NMO y para la Onda P, v_{p0} : `velmodel.sgy`,
- Valor de anisotropía, η : `etamodel.sgy`.

Las dimensiones del modelo son:

- Muestras en x , nx : 737.
- Muestras en z , nz : 240.
- Tamaño de la celda en x , dx : 12.5 (m).
- Tamaño de la celda en z , dz : 12.5 (m).
- Longitud en x , 9.2 (Km).
- Profundidad en z , 3.0 (Km).

Los datos sintéticos también incluyen los coeficientes A_{1111} , A_{1133} , A_{1313} , A_{3333} , los cuales son los valores normalizados con la densidad para las respectivas constantes elásticas. Los datos adquiridos están libres de superficies múltiples y se tuvieron en cuenta condiciones de borde para las cuatro fronteras. En la Figura (4.18) se presenta los valores del campo para la velocidad vertical y la velocidad NMO. La Figura (4.19) describe los valores de anisotropía para cada estrato en un rango de 0 a 0,274.

A continuación se presentan los resultados correspondientes a las secciones migradas del dato sintético Marmousi, en donde se uso el algoritmo PSPI convencional y el

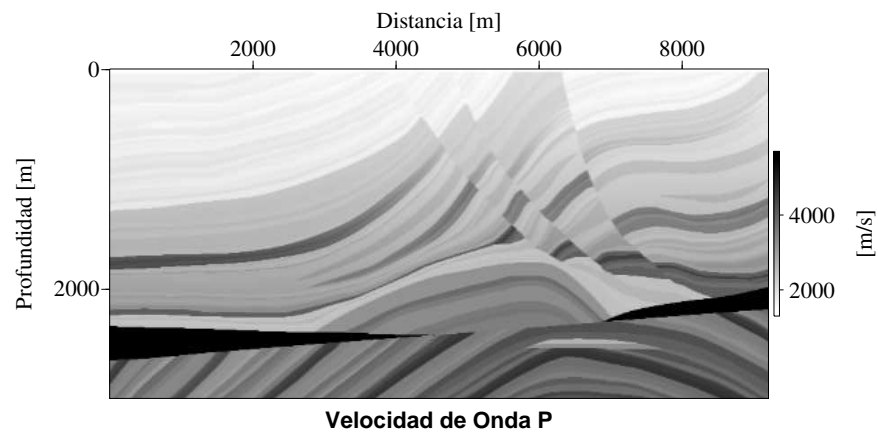


Figura 4.18: Valores de Velocidad NMO y v_{p0} en el modelo Marmousi

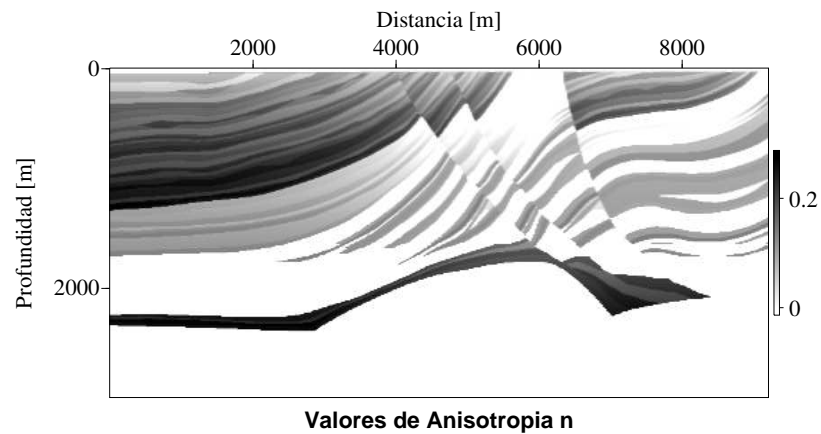


Figura 4.19: Valores para η en el modelo Marmousi

desarrollado en este trabajo, el cual considera anisotropía tipo VTI. En los algoritmos usados solo se consideraron valores positivos para el número de onda, $k_z > 0$ y de esta forma la información perteneciente a los números de onda negativos no son tenidos en cuenta en los dos tipos de migración. En la Figura (4.20) se observa la imagen migrada con la técnica PSPI convencional, y en la Figura (4.21) la imagen migrada con el algoritmo desarrollado en este trabajo PSPI+A.

Algunas de las diferencias que se presentan en la utilización de los algoritmos son mostradas en las siguientes figuras (ver Figuras (4.22-4.26)). Para los reflectores cercanos a la superficie, en el algoritmo PSPI+A se obtuvieron mayores amplitudes

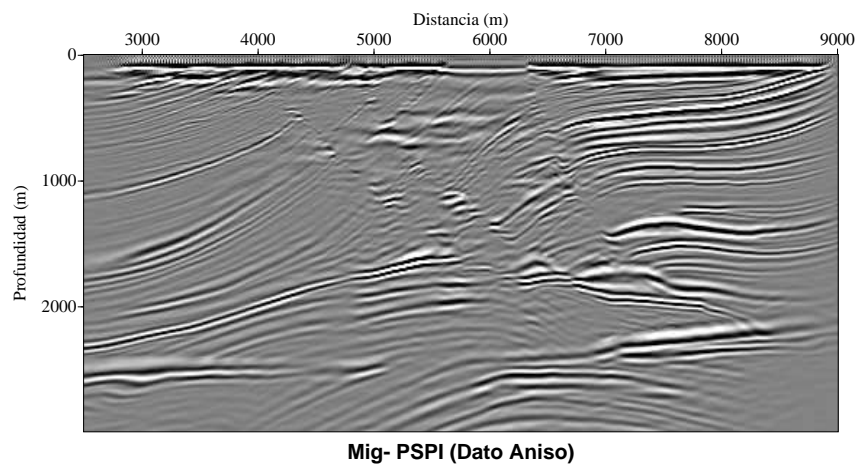


Figura 4.20: Sección migrada con la técnica PSPI para un dato anisótropo en el campo de velocidades Marmousi

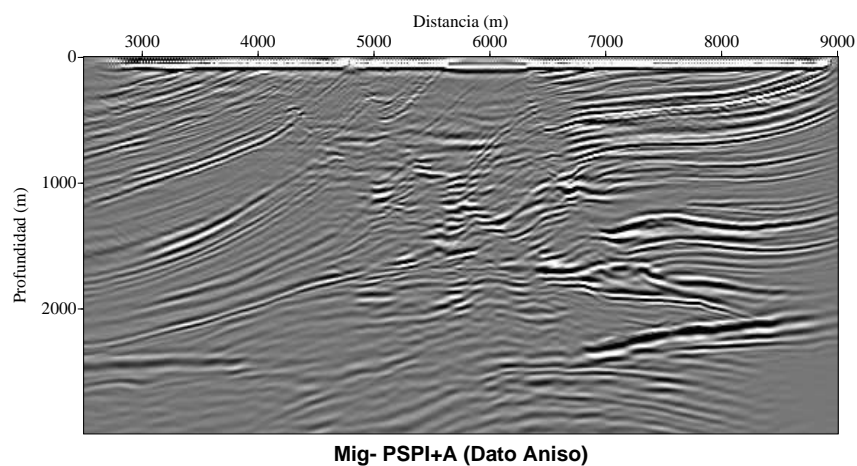
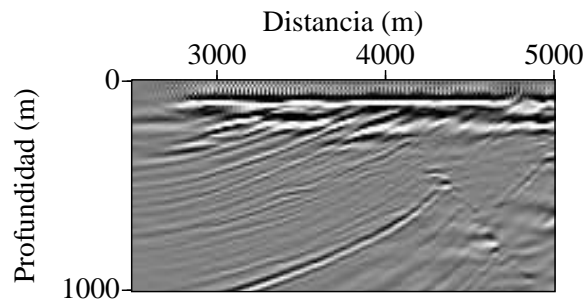


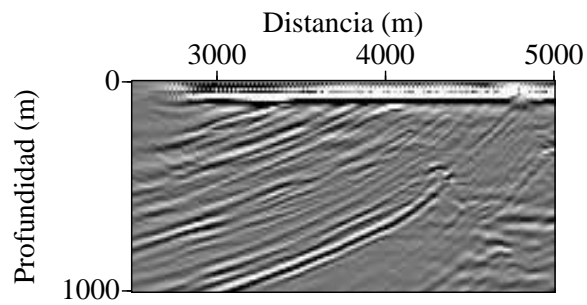
Figura 4.21: Sección migrada con la técnica PSPI+A para un dato anisótropo en el campo de velocidades Marmousi

y mejor definición que en la migración convencional PSPI, ver Figura (4.22).

Se observo también un mejor posicionamiento para algunos reflectores como por ejemplo los mostrados en la Figura (4.23), al igual que para y la intrusión salina que esta ubicada al lado derecho del fondo se observa con una mayor amplitud y con metros mas arriba, que la obtenida en la imagen migrada convencionalmente (ver Figura (4.24)). También se observaron ciertos reflectores con mayor continuidad en



a)

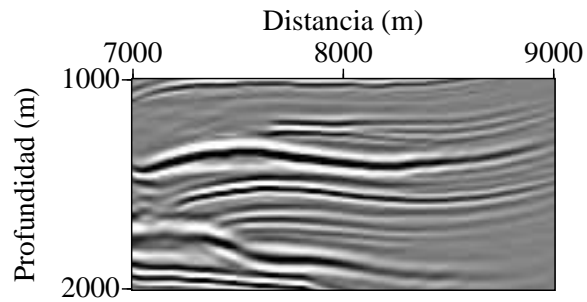


b)

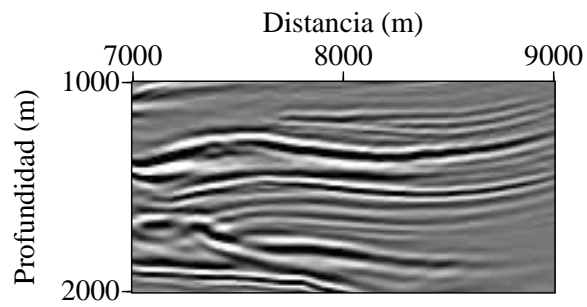
Figura 4.22: Diferencias entre las imágenes migradas con la migración convencional usando la técnica a) PSPI y b) PSPI Anisótropa para el modelo sintético de Marmousi, se observan mejor definidos los reflectores ubicados en las posiciones cercanas a la superficie.

el caso isótropo contrario al caso anisótropo, exactamente en las zonas cercanas a las fallas inclinadas y en ciertos reflectores profundos (ver Figuras (4.25) y (4.26).

Estas mejoras obtenidas para el modelo Marmousi concuerdan con los resultados de los modelos de reflectores planos, el efecto de amplitud y mejor definición sucede a los reflectores mas someros, debido a que se consideran ángulos mayores.

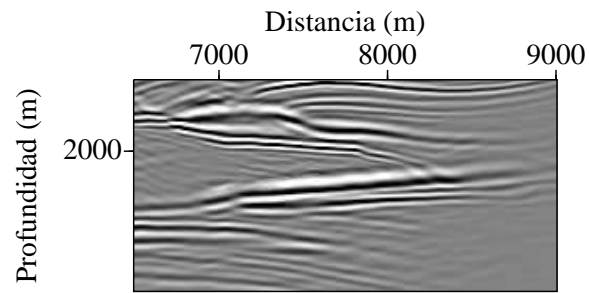


a)

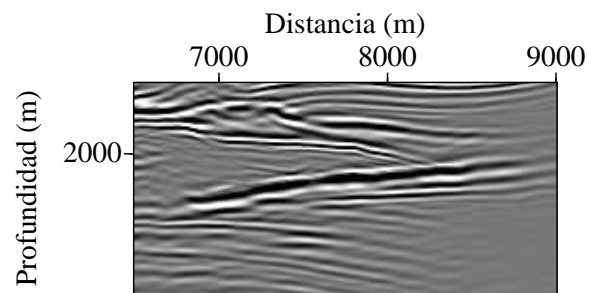


b)

Figura 4.23: Diferencias entre las imágenes migradas con la migración convencional usando la técnica a) PSPI y b) PSPI Anisótropa para el modelo sintético de Marmousi, se observan mejor posicionados los reflectores

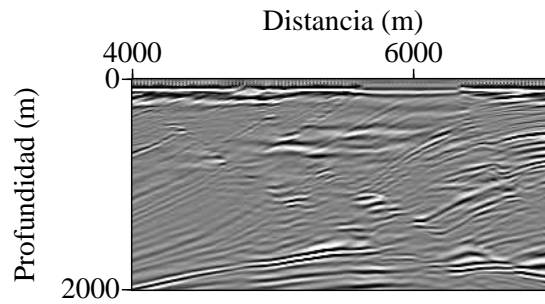


a)

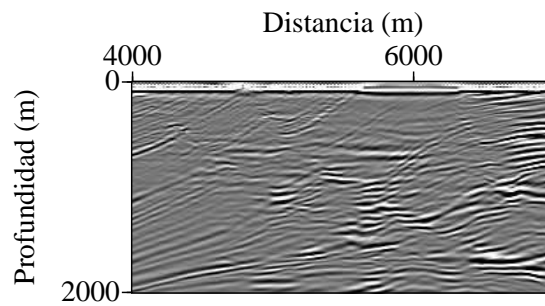


b)

Figura 4.24: Diferencias entre las imágenes migradas con la migración convencional usando la técnica a) PSPI y b) PSPI Anisótropa para el modelo sintético de Marmousi, se observan con una mayor amplitud y posicionada mas arriba la intrusión salina

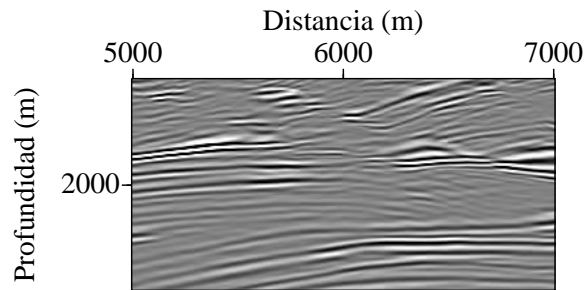


a)

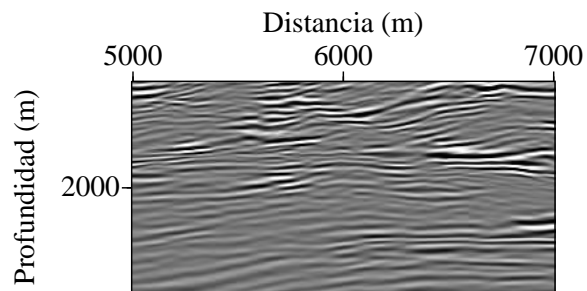


b)

Figura 4.25: Diferencias entre las imágenes migradas con la migración convencional usando la técnica a) PSPI y b) PSPI Anisótropa para el modelo sintético de Marmousi, se observa que la falla no se delinea bien en el caso anisótropo y existen artefactos que no dejan visualizar los reflectores cercanos a las fallas



a)



b)

Figura 4.26: Diferencias entre las imágenes migradas con la migración convencional usando la técnica a) PSPI y b) PSPI Anisótropa para el modelo sintético de Marmousi, se observa que en el caso anisótropo no se definen bien los reflectores pues existen artefactos que hacen que se pierda la continuidad

Conclusiones y Recomendaciones

5.1 Conclusiones

1. Con base en la comparación de curvas de velocidad de fase para el medio elástico y acústico, se observó que la aproximación de anisotropía débil es más cercana a la relación exacta en las ondas P que en las ondas SV.
2. Con base en la comparación de curvas de velocidad de fase para el medio elástico y acústico, se observó que la aproximación acústica es más cercana a la relación exacta en comparación con la aproximación débil.
3. Cuando se comparó las velocidades de fase para la onda P teniendo en cuenta la expresión de anisotropía elíptica ($\varepsilon = \delta$) se corrobora una vez más que la onda P presenta frentes elípticos y la onda SV presenta frentes de onda esférico.
4. Los algoritmos desarrollados arrojaron buenos resultados con respecto al modelado de las ondas en estos tipos de medios, y se observaron los diferentes comportamientos del frente de onda para diferentes tipos de valores de anisotropía.
5. Se observó mejoría en ciertos eventos de las imágenes migradas, como mejor posicionamiento de los algunos reflectores, una mayor amplitud y una mejor continuación de los mismos.

6. El costo computacional de los algoritmos PSPI+A en relación con el convencional PSPI aumenta debido al mayor número de ITF de los campos extrapolados en cada nivel de profundidad.

5.2 Recomendaciones

1. Se recomienda obtener esquemas mas precisos para modelar la propagación de ondas sísmicas en base a métodos seudoespectrales, espectrales y cuando se requieran modelar estructuras de mayor complejidad usar elementos finitos.
2. Se recomienda seguir trabajando mas a profundidad los efectos inherentes de la onda SV, en este tipo de aproximación acústica, tanto en modelado como en migración.
3. Se recomienda extender el caso de anisotropía VTI incluyendo la información que arroja los valores negativos correspondientes a k_z y estudiar como extender este algoritmo para considerar un primer corrimiento de fase inicial y otro que sea compensado en el flujo del calculo del k_z .
4. Se recomienda extender la anisotropía para el caso TTI, considerando la relación de dispersión de Alkhalifah.
5. Se recomienda usar la relación de dispersión para el caso elástico con anisotropía VTI en 3D obtenida en este trabajo para obtener un algoritmo PSPI (Ver ecuación A.27 del apéndice).

Bibliografia

Aki, K., and Richards, P., 2002, Quantitative seismology: Second edition: University Science Books.

Alkhalifah, T., and Tsvankin, I., 1995, Velocity analysis for transversely isotropic media:: Geophysics, **63**, 623–631.

Alkhalifah, T., and Tsvankin, I., 1998, Acoustic approximations for processing in transversely isotropic media:: Geophysics, **60**, 1550–1556.

Alkhalifah, T., 2000, An acoustic wave equation for anisotropic media:: Geophysics, **65**, 1239–1250.

Armstrong, P., 1994, The promise of elastic anisotropic:: Oilfield Review, **32**, 36–47.

Backus, G., 1962, Long wave elastic anisotropy produce by horizontal layering:: Journal Of Geophysical Research, **67**, 4427–4440.

Bagaini, C., Bonomi, E., and Pieroni, E., 1995, Data parallel implementation of 3-D PSPI: 65th Ann. Internat. Mtg, 188–191.

Biondi, B., 2006, 3d seismic imaging: Society of Exploration of Geophysics, Tulsa, Oklahoma, USA, **14**.

Claerbout, J. F., 1971, Toward a unified theory of reflector mapping: Geophysics, **36**, no. 03, 467–481.

Daley, P., and Hron, F., 1977, Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media:: Geophysics, **67**, 661–675.

- Du, X., 2007, Prestack depth migration methods for isotropic and polar anisotropic media:: PhD Thesis: University of Calgary, Calgary.
- Etgen, J. T. E., 1994, Stability of explicit depth extrapolation through laterally-varying media: 64th Ann. Internat. Mtg, 1266–1269.
- Fornberg, B., 1998, A practical guide to pseudospectral methods:: Cambridge Press, Cambridge.
- Gazdag, J., and Sguazzero, P., 1984, Migration of seismic data phase shift plus interpolation: *Geophysics*, **49**, 124–131.
- Gazdag, J., 1978, Wave equation migration with the phase-shift method: *Geophysics*, **43**, 1342–1351.
- Johnston, J., and Christensen, N. I., 1995, Seismic anisotropy of shale:: *Journal of Geophysical Prospecting*, **7**, 158–182.
- Jones, L. E. A., and Wang, H. F., 1981, trasonic velocities in cretaceous shales from the williston basin:: *Geophysics*, **46**, 228–297.
- Kelly, K. R., Ward, R. W., S., T., and Alford, R. M., 1974a, Synthetic seismograms :a finite -difference approach:: *Geophysics*, **41**, 2–27.
- 1974b, Applications of finite difference methods to exploration seismology:: *Proceedings of the Royal Irish Academy Conference on Number Analysis* (Academic Press, London and New York), **14**, 57–76.
- Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel, S., and Alford, R. M., 1976, Synthetic seismograms - A finite-difference approach: *Geophysics*, **41**, no. 01, 2–27.
- Leslie, J., and Lawton, D., 1999, Refraction-seismic field study to determine the anisotropic parameters of shales:: *Geophysics*, **64**, 1247–1252.
- Levander, A., 1988, Fourt-order finite-difference p-sv seismograms:: *Geophysics*, **53**, 1425–1436.

- Levander, A., 1989, Finite-difference forward modelling in seismology, in: The Encyclopedia of Solid Earth Geophysics, D.E., James (Ed), pages 410–431.
- Love, A. E. H., 1927, A treatise on the mathematical theory of elasticity: Cambridge University Press, Cambridge.
- Madariaga, R., 1976, Dynamics of an expanding circular fault: Bull. Seis. Soc. Am., **66**, 639–666.
- Madariaga, R., 1990, Dynamics of an expanding circular fault *in* Marfurt, K. J., Ed., Numerical modeling of seismic wave propagation: Soc. of Expl. Geophys., 62–89.
- Scales, J., 1997, Theory of seismic imaging: Center of Wave Phenomena, Department of Geophysics, Colorado School of Mines, Golden Colorado, Published by the Samizdat Press.
- Slawinski, M., 2003, Seismic wave rays in elastic media: volume 34 Handbook of Geophysical Exploration, Elsevier Science Publ. Co.Inc.
- Stockwell, J., and Cohen, J., 2002, The new su users manual: Center for Wave Phenomena, Colorado School of Mines.
- Thomsen, L., 1986, Weak elastic anisotropy: Geophysics, **51**, 1954–1966.
- Thomsen, L., 2001, Entendimiento de la anisotropía sísmica en exploración y explotación: SEG-EAGE, **41**, Oct–Dic.
- Toldi, J., Alkhalifah, T., Bethet, P., ArnaudJ. Williamson, P., and Conche, B., 1999, Case of study of estimation of anisotropy: The Leading Edge,, **18**, 588–593.
- Tsvankin, I., 1996, P-wave signatures and notation for transversely isotropic media: An overview: Geophysics, **61**, 467–483.
- Virieux, J., 1986, P-sv wave propagation in heterogeous media: Velocity- stress finite-difference method: Geophysics, **51**, 671–693.

Winterstein, D., 1990, Velocity anisotropy terminology for geophysicist:: *Geophysics*, **55**, 1070–1088.

Zhang, L., Rector, J., and Hoversten, G., 2005, Finite difference modelling of wave propagation in acoustic tilted ti media:: Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, USA.

Zienkiewicz, O., 1977, *The finite element method*:: third edition: McGraw-Hill Book Co.