Impacto de los eventos extremos en la construcción de portafolios de inversión eficientes

Eduardo Alzate Jaramillo

Maestría Administración Financiera
Universidad EAFIT
Bogotá D.C.

2016

Impacto de los eventos extremos en la construcción de portafolios de inversión eficientes

Trabajo de grado presentado por:

Eduardo Alzate Jaramillo
edualzate@gmail.com

Asesor:

Fredy Pérez R.

Maestría Administración Financiera
Universidad EAFIT
Bogotá D.C.

2016

Contenido

Tablas

Gráficas

Resumen

El presente trabajo de investigación busca medir el impacto que tienen los eventos extremos, también llamados eventos de *boom* o eventos de *crash,* según la naturaleza y consecuencias de los mismos en la construcción de portafolios de inversión eficientes. Se trabajará con los precios de acciones listadas en la bolsa de Nueva York, y con estas se construirán portafolios de inversión, siguiendo la metodología diseñada por Harry Markowitz en 1952. Se verificará la rentabilidad de los portafolios antes del evento extremo, y después de este, y se estudiarán las consecuencias de este sobre el portafolio. El evento extremo que se introducirá en el estudio es la crisis económica y financiera del año 2008, que tiene sus orígenes en la crisis hipotecaria en Estados Unidos. Con las variaciones en los precios de los activos en dicho periodo de tiempo, se espera estresar el modelo y revisar si lo propuesto por Markowitz sigue teniendo validez ante la aparición de dichos sucesos. A partir de esto, se realizarán simulaciones con modelos en Excel y técnicas de Montecarlo, se plantearán posibles recomendaciones técnicas que debamos tener en cuenta al momento de construir nuestros portafolios, y se redactará un documento con recomendaciones para los inversionistas en general. Como aporte adicional, se entregará el código en Visual basic para automatizar la optimización de los portafolios.

Palabras clave

Riesgo, portafolios de inversión, activos financieros, eventos extremos.

Abstact

This research seeks to measure the impact of extreme events, also called boom or crash events, in the construction of efficient investment portfolios. It will be developed with the prices of shares listed on the New York Stock Exchange. Investment portfolios will be constructed following the methodology designed by Harry Markowitz in 1952 and portfolios profitability will be monitored before and after the extreme event, and consequences of this on the portfolio will be studied. The extreme event to be introduced in the study, is the economic and financial crisis of 2008, which has its origins in the mortgage crisis in the United States. Changes in asset prices during that period of time will stress the model in order to check if Markowitz work is still valid on such events. From this, simulations with models in Excel and Monte Carlo techniques will be made, technical recommendations to take into account when building our portfolios will be raised, and a document with recommendations for investors in general will be drawn. As an additional contribution, the code to automate the portfolios optimization will be delivered in Visual Basic.

Key Words

Risk, portfolio, finance assets, extreme events.

1 Introducción

La vulnerabilidad del modelo de portafolios tradicional, desarrollado por Harry Markowitz, es el punto de partida de esta propuesta de trabajo investigativo. Dicho modelo asume que los retornos de los precios de los activos financieros se comportan siguiendo una distribución de probabilidad normal.

El modelo estima el valor esperado de los retornos de cada activo como el promedio aritmético de los datos históricos, que es la forma de calcular la media o el valor esperado E(x) para una distribución normal. En ejercicios de investigación realizados previamente por otros autores, se ha logrado demostrar que los retornos siguen distribuciones de probabilidad muy diferentes a la normal, estas suelen tener colas pesadas, sesgo y además suelen ser apuntaladas. Estas características, hacen que el modelo tradicional de portafolios esté expuesto al impacto de los eventos extremos, que se caracterizan por tener un nivel de probabilidad bajo, pero con unas consecuencias muy altas para el portafolio. Estas consecuencias pueden ser positivas o negativas, dependiendo del tipo de evento y de cómo afecte al portafolio.

Es el objetivo de este ejercicio investigativo, buscar la forma de incluir estos eventos en el proceso de construcción del portafolio y evidenciar, sí con la metodología necesaria, es posible llegar a reducir significativamente la exposición al evento extremo y el impacto en el portafolio.

En los apartados siguientes se explicará claramente cómo se construirá el portafolio, los pasos a seguir, las fuentes de información a utilizar y cómo se realizará el ejercicio de investigación. Se espera realizar un análisis de los resultados obtenidos con los dos portafolios, y finalmente cumplir con los entregables planteados.

Mediante esta práctica, se espera profundizar en el campo de la construcción y administración de portafolios, y generar recomendaciones de carácter técnico y metodológico para otros estudiantes, profesionales en finanzas e inversionistas en general, que estén interesados en el estudio de esta clase de modelos, en la inclusión en los mismos y en los eventos extremos.

Para cumplir con el objetivo general de este trabajo, se han planteado cuidadosamente objetivos específicos, y estos, junto con las tareas relevantes del proceso, han sido plasmados en el apartado número ocho, en un cronograma de trabajo que se espera cumplir con el mayor nivel de adherencia posible.

2 Marco de referencia conceptual

En el año de 1952, el profesor y economista norteamericano Harry Markowitz sorprendería al mundo financiero con uno de los aportes más significativos en el campo de las finanzas y de la teoría de inversión. En un artículo publicado en el mes de marzo de ese mismo año, titulado “Portfolio selection” y divulgado en el *Journal of finance*, este investigador logró plasmar un modelo estadístico-matemático capaz de dar respuesta a una de las mayores preocupaciones de cualquier inversionista: Minimizar el riesgo, maximizando el retorno de la inversión realizada. Sin duda alguna, como lo confirma Benninga, se trató de uno de los más grandes logros en el campo de las finanzas: "*La teoría moderna de portafolios, que tiene sus orígenes en el trabajo realizado por Harry Markowitz, John Lintner, Jan Mossin, y William Sharpe, representa uno de los mayores avances en finanzas"* (Benninga, 2008, p. 205.)

(Traducción no formal de los autores). Cuatro décadas más tarde, en 1990, el profesor Harry Markowitz recibiría en Estocolmo, el premio Nobel de Economía.

El modelo desarrollado permite que un inversionista con acceso a la información de los precios de los activos y con conocimientos básicos en estadística, pueda organizar un portafolio diversificado que le permita tomar las posiciones más rentables con una mínima tasa de riesgo. El modelo se fundamenta en el hecho de asumir que el comportamiento de los precios de los activos del mercado se puede capturar mediante la conocida función de distribución de probabilidad normal, y que los precios del pasado son suficientes para permitirnos hacer inferencias sobre el comportamiento y tendencias que tendrán los mismos en el futuro. Más que en el mismo precio de los activos, el valor con el que trabaja el modelo es el de los retornos. *"Entonces los retornos, que son la diferencia relativa de precios consecutivos o la diferencia logarítmica de los mismos, son la medida adecuada para ser investigada"* (Beirlant, Goegebeur y Teugels, 2004, p. 185) (Traducción no formal de los autores).

En esencia, lo que Markowitz propone es la necesidad de revisar cuidadosamente el comportamiento de los retornos de los activos de los que se va a componer el portafolio. Para esto, se realiza una cuidadosa investigación y análisis del comportamiento pasado de los activos y cómo es la correlación que estos tienen durante el mismo periodo de tiempo observado. Citando a Barker: "*El énfasis se centra entonces en los retornos esperados y en la desviación (como una medida representativa del riesgo) del portafolio*" (2007, p.23) (Traducción no formal de los autores).

Luego, mediante un proceso de optimización, es posible llegar a las combinaciones de activos precisas que generan portafolios eficientes. Dichas optimizaciones se trabajarán utilizando la herramienta Solver, la cual se encuentra incorporada en el paquete Excel de Microsoft. Como guía para implementar las optimizaciones seguiremos los cuatro pasos indicados por Ragsdale:

1. Organizar los datos del modelo en una hoja de cálculo.

2. Reserve algunas celdas por aparte en la hoja de cálculo para representar las variables de decisión del modelo.

3. En una celda, cree la fórmula que contenga la función objetivo que se desea optimizar.

> *4. Para cada restricción, cree una fórmula en celdas aparte que se correspondan con el lado izquierdo de la restricción* (2008, p.47) (Traducción no formal de los autores).

Estos principios y fundamentos en condiciones normales de los mercados, son suficientes para satisfacer las necesidades de los inversionistas, pero en momentos extremos y de gran turbulencia financiera, el modelo de portafolios recibe un duro golpe y deja de ser el escudo protector de los inversionistas. A dichos eventos los llamaremos cisnes negros, cuya definición realiza Taleb con gran claridad y precisión:

> Lo que aquí llamamos un ´Cisne Negro´ es un suceso con los tres atributos que siguen: primero, es una rareza, pues habita fuera del reino de las expectativas normales, porque nada del pasado puede apuntar de forma convincente a su posibilidad. Segundo, produce un impacto tremendo. Tercero, pese a su condición de rareza, la naturaleza humana hace que inventemos explicaciones de su existencia después del hecho, con lo que se hace explicable y predecible (2007, p.23).

Claros ejemplos de este tipo de eventos son: El ataque a las torres gemelas en Manhattan en el 2001; el *default* del gobierno Ruso en el año de 1998; la crisis hipotecaria del 2008 en los Estados Unidos de América; la crisis inmobiliaria en Colombia al final de la década de los noventas; la quiebra de Lheman Brothers en Nueva York, declarada a la 1:45 am el 15 de septiembre del 2008; la quiebra de Interbolsa en Colombia (hasta entonces, la casa de comisionistas de bolsa más grande del país) y la muy famosa quiebra de LTCM, fondo privado de inversiones que a pesar de ser dirigida por reconocidos premios nobel de economía (Scholes - Merton), y que después de entregar rentabilidades promedio por encima del 40% durante dos años consecutivos, se declara en banca rota, evaporando un trillón de dólares en activos de las cuentas de su balance general, y arrastrando detrás de sí numerosos fondos de pensiones e inversionistas en todo el mundo.

Claro está que también existen cisnes negros opuestos a los mencionados en el párrafo anterior. Es decir, ´cisnes negros´ de carácter constructivo, que terminan por producir un impacto positivo en él entorno donde estos ocurren. Ejemplos de estos son, entre otros: la aparición y masificación de internet, la forma en que cambio para siempre nuestras vidas el desarrollo del ordenador personal, el lanzamiento del sistema operativo Windows, la unificación de la unión europea, la aparición del euro como moneda única y el proceso de apertura económica en Colombia.

A pesar de todo, por nuestra propia condición de humanos, ignoramos este tipo de eventos y el impacto que estos tienen. ¿Qué tanto podemos aprender del pasado? Es una incógnita. Pareciera que nuestro mundo es más aleatorio de lo que pensamos, y que es por nuestra propia naturaleza y miedos que construimos y desarrollamos explicaciones y justificaciones, para darnos a nosotros mismos un poco de confianza y tranquilidad, y creer que incluso en lo incontrolable tenemos la certidumbre de que estamos en capacidad de entender, controlar y determinar.

Tendemos a ignorar y esconder los hechos que amenazan nuestro conocimiento. Cuando nuestra zona de confort es amenazada, buscamos una justificación que nos permita regresar a la misma, y así, poder seguir sintiéndonos seguros. Como lo dice Taleb: "*Nos engañamos con historias que sacian nuestra sed platónica de modelos distintos […]*". "*Nos comportamos como si el Cisne Negro no existiera: la naturaleza humana no está programada para los Cisnes Negros*" (2007, p.99).

Los ´cisnes negros´ son muy comunes en el campo de las finanzas; más de lo que creemos. Estadísticamente hablando, los ´cisnes negros´ se encuentran en las colas de las funciones de distribución de probabilidad, es allí donde logran pasar desapercibidos, ocultándonos el enorme impacto que pueden llegar a tener en nuestras vidas. Por esto, debemos cuestionarnos si al asumir que los retornos provienen de un modelo de distribución normal, estamos ignorando y subestimando el impacto de los eventos extremos al momento de construir un portafolio de inversión. Como lo menciona Snopek: "*los eventos extremos o la ocurrencia de las crisis financieras, son subestimadas por la distribución normal*" (2012, p.30) (Traducción no formal de los autores).

Como ha sido demostrado mediante el estudio riguroso del comportamiento de los activos financieros por diferentes expertos en el tema como Mandelbrot en 1963 y Fama en 1965, es claro que podemos identificar y resaltar los puntos siguientes: *"Para empezar, las distribuciones empíricas de los retornos de los activos tiene colas más pesadas que las que se observan en la distribución normal y adicionalmente presentan un sesgo negativo… Segundo, los retornos están conectados con el tiempo"* (Jondeau, Poon & Rockinger, 2007, p.3) (Traducción no formal de los autores).

Al confirmar que las distribuciones de los retornos tienen colas pesadas y que presentan un sesgo negativo, la distribución normal empieza a perder validez al no tener la capacidad de capturar hechos y eventos que son innatos en el comportamiento de los retornos, y que pueden llegar a ser definitivos al momento de modelar un portafolio de inversión. Entonces, se hace necesario que como especialistas en finanzas, profundicemos en la revisión de los modelos con los que trabajamos y logremos incorporar en los mismos este tipo de eventos. Solo así podremos entender su impacto, y pensar en estrategias que nos puedan servir para ayudar a mitigar las enormes consecuencias que estos pueden llegar a tener en nuestras vidas. Para identificar cuál es el impacto de estos eventos en la construcción de portafolios de inversión, tomaremos como punto de partida los siguientes hechos, que nos darán una mejor idea del comportamiento de los retornos y de su función de probabilidad:

> *1. Colas pesadas: La distribución de los retornos tiene colas más pesadas que las que se encuentran en la distribución normal. Esto quiere decir, que si utilizamos la distribución normal para modelar los retornos, estaremos subestimando la cantidad y la magnitud de los eventos crash y boom.*

2. Asimetría: La distribución de los retornos presenta sesgo negativo, lo que nos sugiere que los retornos negativos extremos son más frecuentes que los positivos. La asimetría y las colas pesadas persisten incluso después de realizar los ajustes para controlar los problemas de heterocedasticidad condicional.

3. Normalidad agregada: En la medida en que crece la frecuencia de los retornos, la distribución de los mismos se acerca a la distribución normal.

4. Ausencia de correlación serial: Solo a muy altas frecuencias, los retornos exhiben una correlación serial significativa.

5. Cluster de volatilidad: La volatilidad de los retornos tiene correlación serial, sugiriendo que después de un alto valor de retorno positivo o negativo, seguirá otro retorno en el sentido opuesto.

6. Variación en el tiempo y Correlación cruzada: La correlación entre los activos, tiende a incrementarse durante periodos de alta volatilidad, en particular durante las caídas del mercado (Jondeau, Poon & Rockinger, 2007, p.9). (Traducción no formal de los autores).

A partir de estos, y con la ayuda de modelos probabilísticos diseñados en Excel, estudiaremos el impacto de estos eventos, y cómo podemos llegar a incorporarlos al momento de construir un portafolio de inversión.

Crystal Ball y @risk, serán los complementos con los que trabajaremos en nuestras hojas de cálculo, para poder realizar las simulaciones necesarias. *"Crystal Ball es muy útil para investigar las proporciones de fondos que se deben asignar a un grupo de activos de riesgo"* (Charnes, 2007, p.132) (Traducción no formal de los autores).

¿Existen instrumentos alternativos, distintos a los mismos portafolios, que nos puedan servir para proteger nuestras inversiones del impacto del evento extremo? La respuesta es sí, lo podemos hacer mediante la cobertura por medio de instrumentos derivados basados en los índices accionarios, como lo dice Hull: *"Los futuros de los índices accionarios pueden ser usados para realizar coberturas en portafolios correctamente diversificados"* (2012, p.62) (Traducción no formal de los autores).

Si aprendemos a modelar e identificar los eventos extremos, es posible que logremos beneficiarnos de ellos, como lo indica Taleb: *"Trato de sacar provecho de los eventos extremos, los cuales no se suelen repetir con frecuencia, pero que, son capaces de generar una mayor utilidad cuando estos ocurren"* (2008, p.89).

3 Método de solución

3.1 Construcción del portafolio

Se construirá un portafolio de inversión con la información de precios diarios de las empresas que están listadas en la bolsa de Nueva York (la muestra a tomar saldrá de 54 empresas correspondientes al S&P 500). Para esto, se realizará el análisis respectivo de las empresas, buscando que sus coeficientes de correlación sean bajos, y que se trate de empresas de diferentes sectores con el objetivo de tener un portafolio bien diversificado.

La base de datos que se tomará, será descargada del portal financiero de yahoo. Para esta primera parte, se trabajará con los precios diarios que van del 2003 a comienzos del 2007.

Se continuará con la construcción de la frontera eficiente, y optimizando el modelo, se encontrarán las combinaciones precisas de los activos financieros de los que se compondrá nuestro portafolio. Y de estos, se seleccionará el portafolio que más se ajuste a nuestros requerimientos como inversionistas.

3.2 Monitoreo y evaluación del portafolio antes de la crisis

Se monitorearán los rendimientos alcanzados por el portafolio seleccionado, a partir de la información de los precios de los activos que lo componen para el periodo que va del 2007 a comienzos del 2008. Tanto en este punto, como en el anterior, el portafolio estará operando bajo un momento de calma y optimismo del mercado.

3.3 Monitoreo y evaluación del portafolio durante el periodo de crisis

El modelo será sometido a una prueba de estrés mediante la aparición de un evento extremo, tal vez uno de los de mayor impacto en la historia reciente. Para esto se tomarán los precios diarios de los activos del periodo comprendido entre mediados del 2008 y mediados del 2009, momento en el que se desata la crisis hipotecaria y financiera en Estados Unidos, con su posterior contagio a Europa.

3.4 Simulación en @risk

En este punto se determinará cuál es la distribución de probabilidad de cada uno de los activos financieros que conforman el portafolio. Esta información la incluiremos en el modelo y ejecutaremos un proceso de simulación para observar si se puede anticipar el evento extremo antes de que este impacte los rendimientos diarios del portafolio.

3.5 Análisis de los resultados y hallazgos

Se realizará el análisis de los resultados y se generarán recomendaciones.

Los tres momentos de tiempo con los que se trabajará, se pueden apreciar de manera más clara en la Gráfica 1:

Gráfica 1. Precios del índice DJI de Marzo 17 2003 a Mayo 27 2014 – Cifras en miles

Fuente: http://finance.yahoo.com

4 Presentación y análisis de resultados

4.1 Construcción del portafolio durante el momento de calma financiera

El modelo de Markowitz para dos activos financieros presenta la siguiente definición para los retornos y el riesgo:

$$E(r_p) = (w_1 * r_1) + (w_2 * r_2)$$

$$Var(r_p) = w_1{}^2 * Var(r_1) + w_2{}^2 * Var(r_2) + 2w_1w_2 * Cov(r_1r_2)$$

Para este caso, en el que el portafolio que se va a construir tiene más de dos activos, las fórmulas con las que se debe construir el modelo son las siguientes:

$$E(r_x) = \sum_{i=1}^{N} x_i\, E(r_i)$$

$$Var(r_x) = \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2\, Var(r_i) + 2\sum_{i=1}^{N}\ \sum_{j=i+1}^{N} x_i x_j Cov(r_i, r_j)$$

La información fuente, que contiene los precios diarios de los activos, se descargó de la página financiera de yahoo: finance.yahoo.com, considerando 54 activos financieros pertenecientes al S&P500, para el rango de tiempo que va desde el 03-Ene-2000 al 19-Sep-2014.

Para definir qué empresas se deberían incluir en el portafolio, lo primero que se hizo fue construir la matriz de correlaciones de los 54 activos, con el objetivo de identificar las empresas cuyo comportamiento de los rendimientos demostraba independencia entre las mismas.

Por independencia se entiende que se trata de las acciones cuyo valor de correlación es cercano a cero. Para este punto, se estableció que las empresas cuyo valor de correlación de los retornos estuviera entre -0.3 y 0.3, serían consideradas para la elaboración del portafolio.

Después de realizar el análisis de las correlaciones, se procedió a revisar los rendimientos diarios de las empresas, buscando que estos fueran positivos.

Como resultado final, se definió el siguiente listado conformado por 10 empresas de diversos sectores, para conformar el portafolio:

Tabla 1. Acciones que conforman el portafolio

No	Nombre	Simbolo - NYSE	Pagina Web	Distribución
1	AT&T	T	www.att.com	Laplace
2	Boston Properties Inc	BXP	www.bostonproperties.com	Logística
3	Halliburton Company	HAL	www.halliburton.com	Logística
4	Kellogg Company	K	www.kelloggcompany.com	Laplace
5	MGM Resorts International	MGM	www.mgmresorts.com	Logística
6	Nike, Inc.	NKE	http://nikeinc.com	Laplace
7	Occidental Petroleum Corp	OXY	www.oxy.com	Logística
8	The Procter & Gamble Co	PG	www.pg.com	Logística
9	The Walt Disney Company	DIS	http://thewaltdisneycompany.com	Laplace
10	United States Steel Corp.	X	www.ussteel.com	Normal

Fuente: Elaboración propia.

Para la construcción del portafolio se tomaron los retornos diarios continuos de los activos listados en la tabla anterior, en el periodo de tiempo comprendido entre el 04-Ene-2000 y el 29-Dic-2006.

Es de aclarar que en la construcción del portafolio no se consideró la posibilidad de tener ventas en corto.

Dicha data histórica la utilizamos para obtener los siguientes estadísticos:

Tabla 2. Cálculo de rendimientos, varianzas y desviación estándar.

	T	BXP	HAL	NKE	OXY	MGM	PG	DIS	K	X
Rendimieto Diario	0,0007%	0,0961%	0,0339%	0,0433%	0,0996%	0,0902%	0,0186%	0,0117%	0,0411%	0,0550%
Varianza diaria	0,00039	0,00013	0,00098	0,00044	0,00031	0,00059	0,00029	0,00050	0,00027	0,00075
Desv diaria	1,9789%	1,1186%	3,1323%	2,0998%	1,7732%	2,4280%	1,7041%	2,2249%	1,6318%	2,7365%
Rendimieto Anual	0,164%	24,221%	8,553%	10,923%	25,092%	22,725%	4,685%	2,938%	10,355%	13,871%
Varianza Anual	9,874%	3,155%	24,739%	11,117%	7,928%	14,864%	7,322%	12,482%	6,714%	18,882%
Desv Anual	31,422%	17,762%	49,738%	33,343%	28,157%	38,554%	27,060%	35,329%	25,911%	43,453%
CV	191,561	0,733	5,815	3,053	1,122	1,697	5,776	12,025	2,502	3,133

Fuente: Elaboración propia.

Con la información de los retornos diarios de los activos financieros, se construyó la matriz de varianzas y covarianzas:

Tabla 3. Matriz de varianzas y covarianzas

	T	BXP	HAL	NKE	OXY	MGM	PG	DIS	K	X
T	0,000392	0,000028	0,000082	0,000076	0,000048	0,000087	0,000067	0,000108	0,000063	0,000107
BXP	0,000028	0,000125	0,000036	0,000034	0,000029	0,000057	0,000016	0,000041	0,000020	0,000058
HAL	0,000082	0,000036	0,000981	0,000097	0,000262	0,000125	0,000020	0,000132	0,000043	0,000205
NKE	0,000076	0,000034	0,000097	0,000441	0,000055	0,000152	0,000038	0,000119	0,000059	0,000113
OXY	0,000048	0,000029	0,000262	0,000055	0,000314	0,000063	0,000026	0,000052	0,000042	0,000154
MGM	0,000087	0,000057	0,000125	0,000152	0,000063	0,000590	0,000047	0,000202	0,000055	0,000172
PG	0,000067	0,000016	0,000020	0,000038	0,000026	0,000047	0,000290	0,000029	0,000074	0,000060
DIS	0,000108	0,000041	0,000132	0,000119	0,000052	0,000202	0,000029	0,000495	0,000043	0,000164
K	0,000063	0,000020	0,000043	0,000059	0,000042	0,000055	0,000074	0,000043	0,000266	0,000078
X	0,000107	0,000058	0,000205	0,000113	0,000154	0,000172	0,000060	0,000164	0,000078	0,000749

Fuente: Elaboración propia.

Y también se realizó la construcción de la matriz de correlaciones:

Tabla 4. Matriz de correlaciones

	T	BXP	HAL	NKE	OXY	MGM	PG	DIS	K	X
T	1,00000	0,12714	0,13297	0,18337	0,13619	0,18125	0,19942	0,24517	0,19637	0,19803
BXP	0,12714	1,00000	0,10154	0,14626	0,14663	0,20936	0,08380	0,16459	0,10938	0,19109
HAL	0,13297	0,10154	1,00000	0,14762	0,47099	0,16425	0,03744	0,18943	0,08365	0,23932
NKE	0,18337	0,14626	0,14762	1,00000	0,14677	0,29719	0,10543	0,25519	0,17255	0,19751
OXY	0,13619	0,14663	0,47099	0,14677	1,00000	0,14602	0,08689	0,13103	0,14579	0,31733
MGM	0,18125	0,20936	0,16425	0,29719	0,14602	1,00000	0,11390	0,37461	0,13981	0,25901
PG	0,19942	0,08380	0,03744	0,10543	0,08689	0,11390	1,00000	0,07525	0,26656	0,12849
DIS	0,24517	0,16459	0,18943	0,25519	0,13103	0,37461	0,07525	1,00000	0,11795	0,26968
K	0,19637	0,10938	0,08365	0,17255	0,14579	0,13981	0,26656	0,11795	1,00000	0,17399
X	0,19803	0,19109	0,23932	0,19751	0,31733	0,25901	0,12849	0,26968	0,17399	1,00000

Fuente: Elaboración propia.

Para la construcción de las dos matrices anteriores, se utilizaron las funciones matriciales incluidas en Excel, las cuales permiten generar los datos de una manera clara y rápida, con el beneficio de que por tratarse de un modelo formulado, los cambios que se puedan llegar a presentar en los datos, se van a reflejar de manera inmediata en él modelo. Estas funciones, toman como base la teoría de matrices del algebra lineal. Para el caso de las varianzas y covarianzas se toma la siguiente definición:

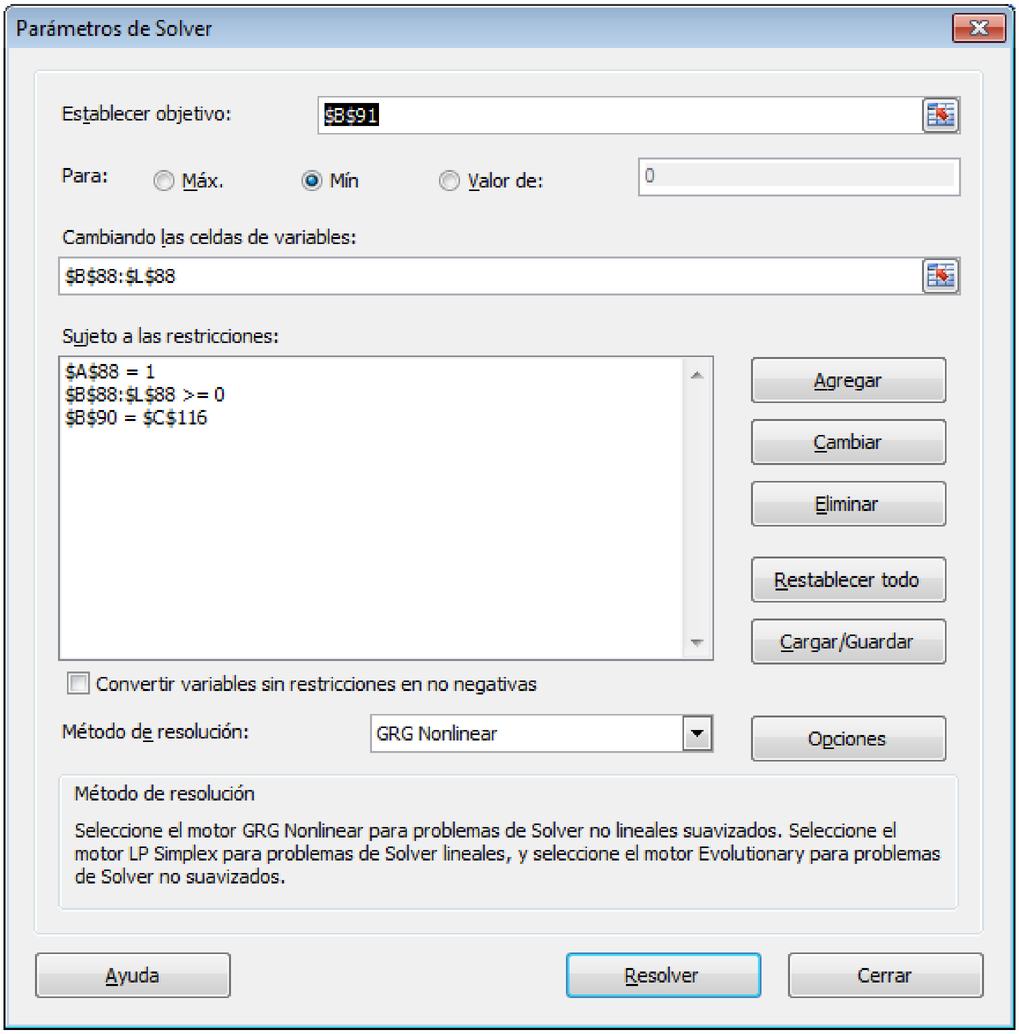
$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \cdots & \sigma_{3N} \\ \vdots & & & & \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \sigma_{N3} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

$$Var(r_p) = x^T S x$$

Después de esto, continuamos con los pasos necesarios para realizar la optimización de los portafolios, y así obtener las combinaciones de cada uno de los activos financieros que nos van a maximizar el retorno con el mínimo riesgo.

Para esto, se utilizó el complemento de Excel, Solver:

Gráfica 2. Optimización del portafolio



Fuente: Elaboración propia con el software Microsoft Excel.

Con el objetivo de automatizar el proceso de optimización, y correr el modelo con diferentes valores de entrada, se desarrolló el siguiente script en Visual Basic for Applications (VBA):

```
Sub OptimizarPortafolio()

'Variable para controlar el número de iteraciones que vamos a realizar
'el número de iteraciones debe coincidir con el número de portafolios
'que vamos a optimizar con el Solver
Dim i As Integer
'La variable i debe tomar los valores que corresponden a las filas del archivo de Excel
```

```
'en las que vamos a registrar los valores del portafolio y las combinaciones
'de activos que se van a producir durante el proceso de optimización
For i = 98 To 116

    'Ejecución de la optimización del portafolio
    SolverReset

    SolverOk SetCell:="$B$91", MaxMinVal:=2, ValueOf:=0, ByChange:="$C$88:$L$88", _
        Engine:=1, EngineDesc:="GRG Nonlinear"

    SolverAdd CellRef:="$B$90", Relation:=2, FormulaText:="$C$" & i

    SolverAdd CellRef:="$C$88:$L$88", Relation:=3, FormulaText:="0"

    SolverOk SetCell:="$B$91", MaxMinVal:=2, ValueOf:=0, ByChange:="$C$88:$L$88", _
        Engine:=1, EngineDesc:="GRG Nonlinear"

    SolverSolve

    'Copiar las participaciones de los activos financieros que resultan de
    'la optimizacion realizada
    Range("C88:L88").Select
    Selection.Copy

    Range("G98").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False

    'Copiar el beta del portafolio
    Range("B93").Select
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.Copy

    Range("E98").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False
    'Copiar la r de sharpe del portafolio
```

```
    Range("B95").Select
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.Copy

    Range("D98").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False

    'Copiar la desviación del portafolio
    Range("B92").Select
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.Copy

    Range("B98").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False

    Application.CutCopyMode = False

Next i

End Sub
```

Después de optimizar el modelo para cada uno de los diferentes niveles de volatilidad, manteniendo como restricción que la sumatoria de las participaciones de las diferentes acciones no sobrepase el 100% (esto, con el objetivo de impedir que se presenten ventas en corto), se encontraron las combinaciones precisas de cada activo para los 20 portafolios, con los siguientes resultados:

Tabla 5. Portafolios óptimos

Portafolio	Vol. Port.	Ret. Port	Sharpe	Beta	T	BXP	HAL	NKE	OXY	MGM	PG	DIS	K	X
1	20,838%	2,50%	(0,0000)	0,7539	40,6%	0,0%	1,0%	0,0%	0,0%	0,0%	36,2%	22,3%	0,0%	0,0%
2	19,072%	3,69%	0,0623	0,7309	31,5%	0,0%	3,5%	1,5%	0,0%	0,0%	34,4%	19,6%	9,5%	0,0%
3	17,865%	4,88%	0,1331	0,7121	23,8%	0,0%	5,1%	5,9%	0,0%	0,0%	31,4%	16,3%	17,5%	0,0%
4	17,055%	6,07%	0,2092	0,7151	19,7%	3,3%	5,1%	8,9%	0,0%	0,0%	28,9%	14,3%	20,0%	0,0%
5	16,239%	7,26%	0,2929	0,7428	19,7%	11,0%	4,3%	6,9%	0,0%	0,0%	27,5%	13,6%	17,0%	0,0%
6	15,539%	8,45%	0,3826	0,7591	17,8%	16,6%	4,0%	6,8%	0,0%	0,0%	25,7%	12,2%	16,8%	0,0%
7	14,928%	9,63%	0,4779	0,7755	15,9%	22,3%	3,8%	6,7%	0,0%	0,0%	23,9%	10,9%	16,5%	0,0%
8	14,410%	10,82%	0,5776	0,7911	14,1%	26,3%	3,2%	6,5%	1,8%	0,0%	22,2%	9,8%	16,0%	0,0%
9	13,974%	12,01%	0,6807	0,8066	12,5%	30,0%	2,4%	6,3%	4,0%	0,0%	20,6%	8,7%	15,5%	0,0%
10	13,629%	13,20%	0,7852	0,8220	10,8%	33,6%	1,7%	6,1%	6,3%	0,0%	19,0%	7,6%	14,9%	0,0%
11	13,380%	14,39%	0,8887	0,8374	9,2%	37,3%	0,9%	5,9%	8,5%	0,0%	17,3%	6,5%	14,4%	0,0%
12	13,235%	15,58%	0,9883	0,8529	7,5%	40,9%	0,2%	5,7%	10,7%	0,0%	15,7%	5,4%	13,8%	0,0%
13	13,198%	16,77%	1,0812	0,8707	5,8%	44,7%	0,0%	5,4%	12,6%	0,1%	14,0%	4,1%	13,2%	0,0%
14	13,269%	17,96%	1,1650	0,8921	4,1%	48,0%	0,0%	4,9%	14,1%	1,2%	12,4%	2,6%	12,7%	0,0%
15	13,442%	19,15%	1,2384	0,9136	2,4%	51,3%	0,0%	4,4%	15,7%	2,3%	10,8%	1,1%	12,1%	0,0%
16	13,715%	20,34%	1,3004	0,9364	0,5%	54,6%	0,0%	3,8%	17,2%	3,3%	9,1%	0,0%	11,5%	0,0%
17	14,112%	21,52%	1,3481	0,9719	0,0%	58,7%	0,0%	2,3%	19,2%	4,2%	5,8%	0,0%	9,8%	0,0%
18	14,663%	22,71%	1,3786	1,0097	0,0%	62,9%	0,0%	0,7%	21,2%	5,1%	2,1%	0,0%	8,0%	0,0%
19	15,374%	23,90%	1,3922	1,0540	0,0%	67,5%	0,0%	0,0%	23,7%	5,7%	0,0%	0,0%	3,2%	0,0%
20	28,149%	25,09%	0,8026	1,0424	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Min Var	13,196%	16,69%	1,0654	0,8670	6,1%	44,1%	0,0%	5,4%	12,3%	0,0%	14,3%	4,4%	13,4%	0,0%
Sharpe	15,398%	23,94%	1,3922	1,0558	0,0%	67,6%	0,0%	0,0%	23,7%	5,7%	0,0%	0,0%	2,9%	0,0%

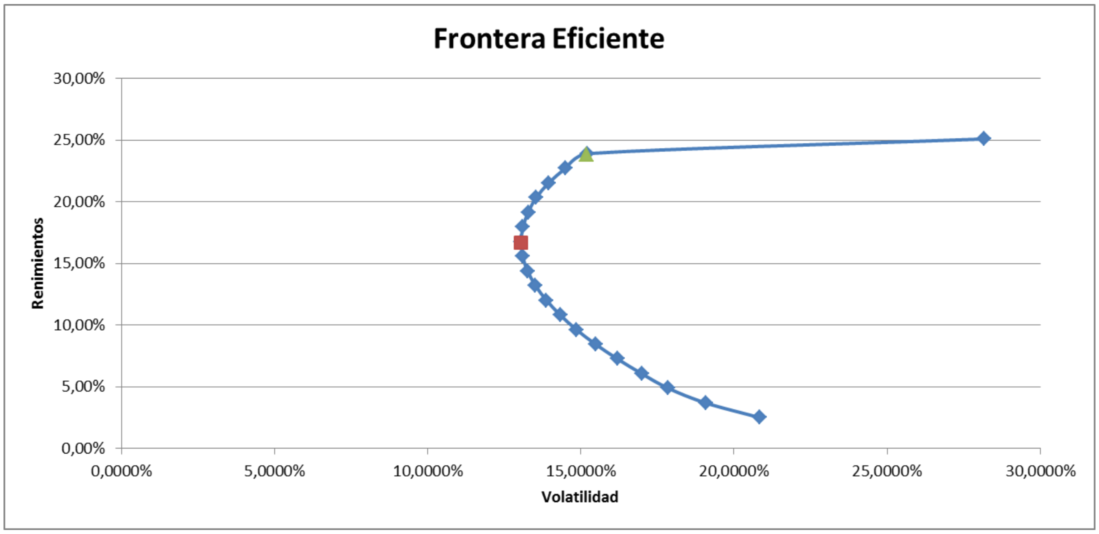
Fuente: Elaboración propia.

En cada una de las columnas aparecen los datos propios de cada portafolio: El retorno y la volatilidad, la razón de Sharpe, el Beta del portafolio (En este caso, la regresión lineal se ejecuta contra los retornos diarios del mismo periodo de tiempo del índice S&P 500) y la participación que deberíamos comprar de cada uno de los activos financieros.

También se realizó el cálculo del portafolio de mínima varianza (o de riesgo mínimo) y del portafolio de Sharpe

Con la información optimizada de los 20 portafolios anteriores, se construye la frontera eficiente, la cual se puede apreciar en el siguiente gráfico:

Gráfica 3. Frontera eficiente



Fuente: Elaboración propia con el software Microsoft Excel.

En esta se puede observar el portafolio de mínima varianza (punto rojo), y el portafolio de Sharpe (punto verde). El portafolio de Sharpe es el punto tangente a la frontera eficiente, tomando como inversión libre de riesgo un bono del tesoro con el 2.5% de rendimiento. Matemáticamente, se encuentra explicado por la siguiente fórmula:

$$E(r_x) = r_f + \beta_x \left[E(r_m) - r_f\right]$$

$$\beta_x = \frac{Cov(x,m)}{\sigma_m^2}$$

De esta frontera eficiente, se selecciona el portafolio número 16 para monitorear los rendimientos que dicha combinación de activos financieros va a generar en el futuro.

4.2 Monitoreo del portafolio antes y después de la crisis del 2008

El portafolio se evalúa con los rendimientos obtenidos durante el periodo comprendido entre el año 2007 y mediados del año 2008, obteniendo así una rentabilidad promedio diaria del 0.0092% y una volatilidad del 1.4667%. Nótese que teóricamente, el portafolio 16 nos debería entregar una rentabilidad esperada del

20.34% anual, pero en realidad el rendimiento que entregó para el periodo que antecede a la crisis es del 2.35%.

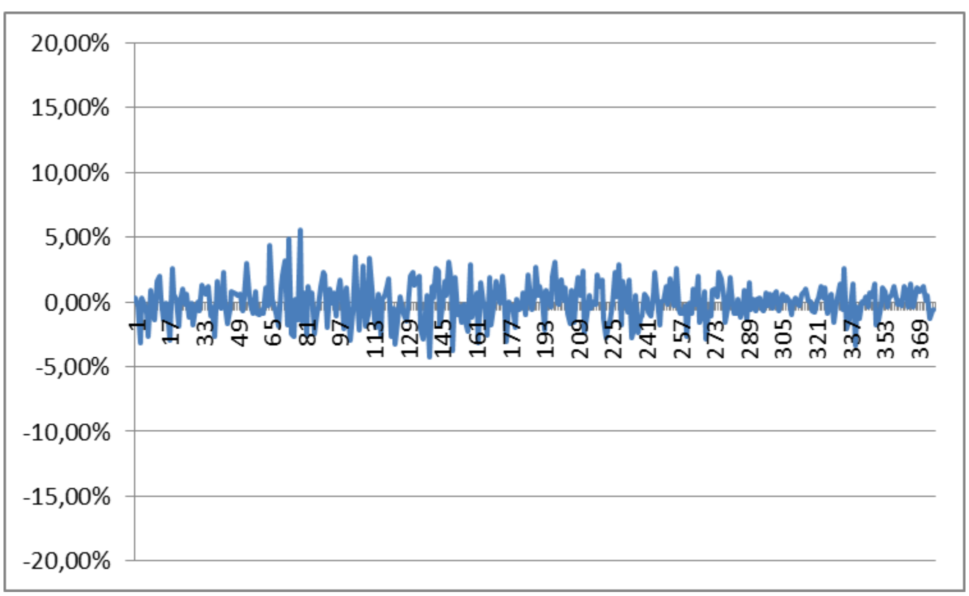
La razón es que en el proceso de optimización se asignó un peso del 54.6% a la participación en las acciones de la compañía Boston Properties Inc., cuya rentabilidad promedio para este periodo fue negativa. Si medimos la rentabilidad de dicho activo, solo 6 meses antes, el promedio observado diario era de 0.23559% y un año atrás era de 0.19472%.

Los datos históricos que se utilizan para alimentar el modelo, no son entonces de mucha utilidad para predecir el futuro, y menos cuando nos enfrentamos a la llegada de un evento extremo.

Históricamente, esta acción era la que presentaba uno de los coeficientes de variación más bajos, sin embargo, al momento de la crisis que golpea directamente al sector al que pertenece la empresa, el impacto es impredecible y lleva a que la rentabilidad del portafolio se caiga a niveles que incluso no llegan a justificar la inversión ni el riesgo que se corre al entrar en el mismo. Sería menos riesgoso y practico invertir en el activo libre de riesgo.

Analizando el portafolio encontramos que los rendimientos para el periodo en observación, y que antecede la crisis, se comportaron de la siguiente manera:

Gráfica 4. Rendimientos del portafolio antes de la crisis financiera del 2.008



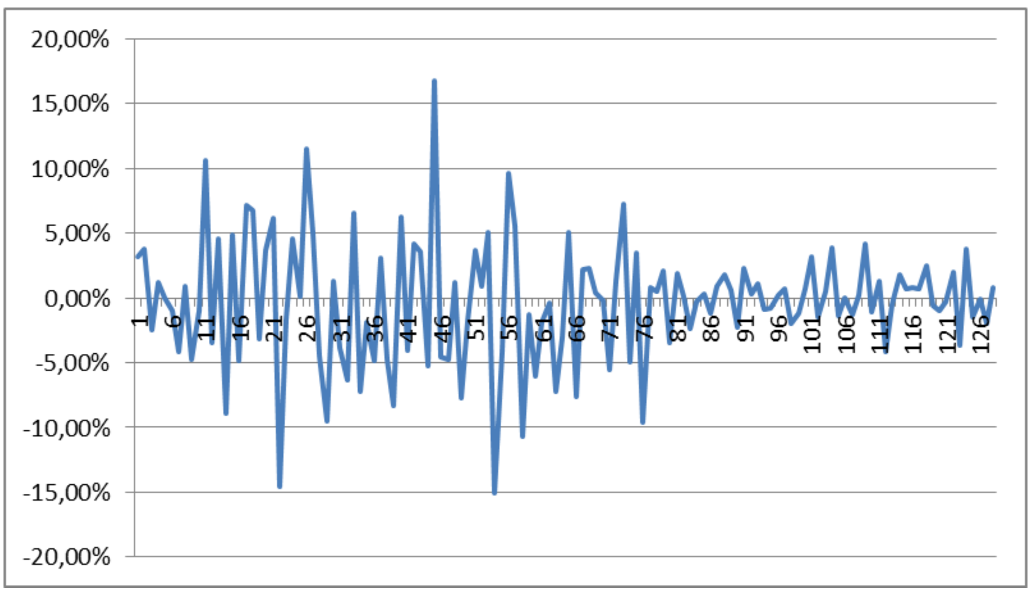
Fuente: Elaboración propia con el software Microsoft Excel

Como se aprecia, la rentabilidad diaria de dicho periodo de calma varía entre -5% y 5%. No se observan picos alarmantes, lo que demuestra que es un periodo de relativa calma en la bolsa, y en particular para las acciones que conforman el portafolio.

Cuando se realizó la medición de los rendimientos durante el momento de crisis comprendido entre mediados del año 2008 y diciembre 31 del mismo año, se observó que los retornos presentaron una alta volatilidad, y que el rendimiento promedio diario del portafolio paso de ser positivo a un -0.2871%.

Como se aprecia en la siguiente gráfica, la volatilidad del portafolio durante el mismo periodo es más alta, que la observada durante el periodo de calma:

Gráfica 5. Rendimientos del portafolio durante la crisis financiera del 2.008

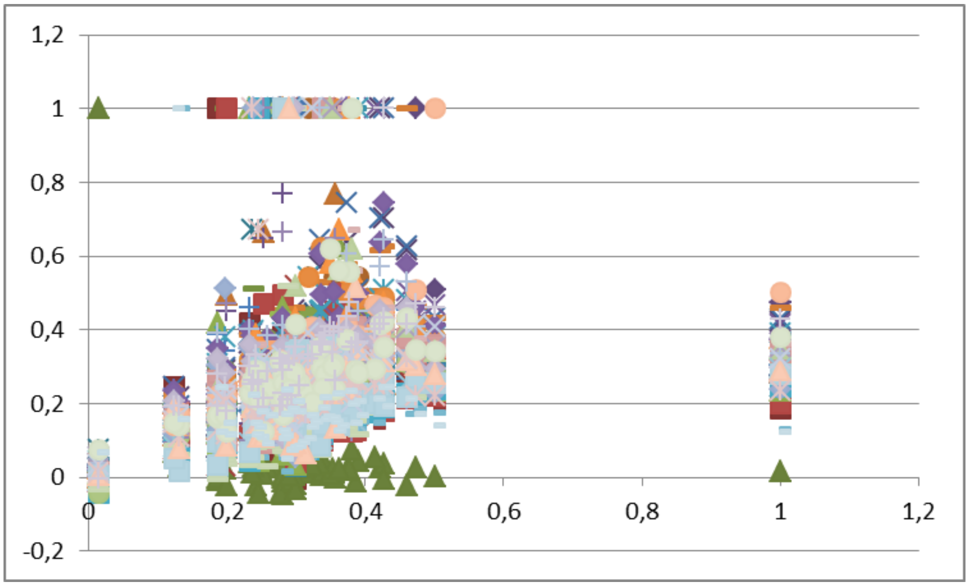


Fuente: Elaboración propia con el software Microsoft Excel

Otro hallazgo importante a destacar, es que al momento de construir el portafolio, las correlaciones no eran altas.

Si se revisa la matriz de correlaciones de los 54 activos y se grafican con la información histórica antes del periodo de crisis, se obtiene el siguiente resultado:

Gráfica 6. Correlación de los 54 activos financieros antes de la crisis del 2.008



Fuente: Elaboración propia con el software Microsoft Excel

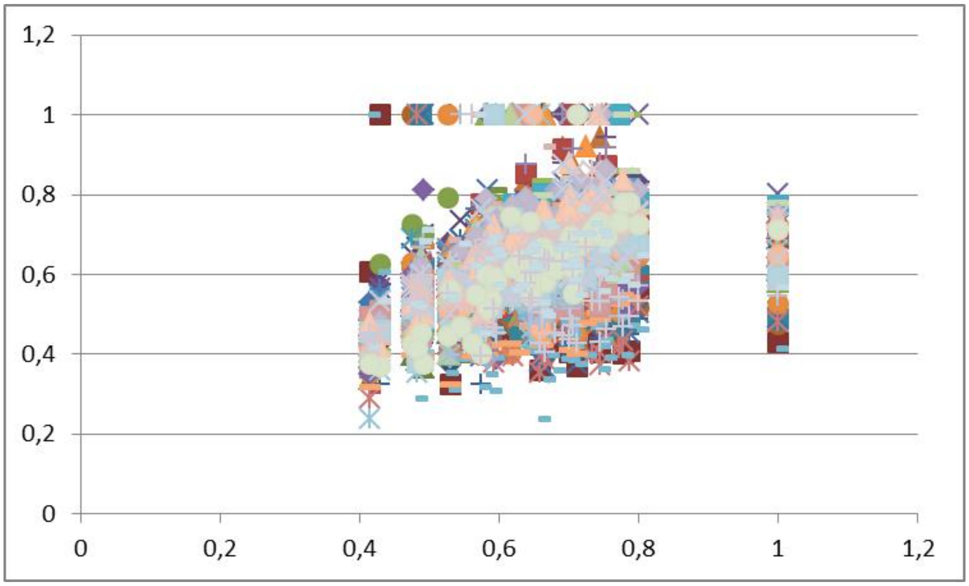
Donde se puede observar que las correlaciones se concentran en torno a un valor de 0,3.

Cuando se realiza la gráfica de las correlaciones para el periodo de crisis, se puede observar como la correlación de los activos financieros se incrementa, lo que indica una relación directa entre los mismos.

Esta situación, es consecuencia de la caída general en los precios de todos los activos medidos, sin importar el sector de la economía o el tamaño de la empresa.

La gráfica de la nueva matriz de correlaciones, presenta el siguiente comportamiento:

Gráfica 7. Correlación de los 54 activos financieros durante la crisis del 2.008



Fuente: Elaboración propia con el software Microsoft Excel

Como se puede apreciar, ahora el valor de las correlaciones, gira en torno a un valor de 0,6.

Esto es una confirmación del hecho que durante los eventos extremos negativos, el principio de diversificación del portafolio no funciona, pierde su efectividad y en el momento en que más es requerido para proteger a los inversionistas, es cuando menos efectivo es.

4.3 Hallazgos sobre las funciones de distribución de probabilidad de los activos del portafolio

Mediante la utilización de la prueba de bondad de ajuste realizada con la herramienta Risk simulator, se pudo comprobar que los rendimientos de los activos no siguen una distribución normal, y que el mejor ajuste corresponde a otra clase de distribuciones, principalmente a la distribución logística y a la distribución de Laplace, las cuales tienen comportamientos y curvas diferentes a las de las distribución normal.

El estadístico de prueba que se utilizó para realizar las pruebas de ajuste, es el de Kolmogorov-Smirnov.

Su fórmula es la siguiente:

$$D_n = \max\left(\max\left(\frac{i}{n} - F(DAP_i)\right); max\left(F(DAP_i) - \frac{i-1}{n}\right)\right)$$

Para cada uno de los activos que componen el portafolio se planteó la siguiente prueba de hipótesis:

H_0: La forma de la distribución de los retornos es la sugerida por la herramienta

H_1: La forma de la distribución de los retornos no es la sugerida por la herramienta

En todos los casos, la prueba estadística con el p-value siempre fue superior al nivel de significancia del 5%, por lo que aceptamos la distribución propuesta en las pruebas de ajuste realizadas para los diez activos financieros que conforman el portafolio.

A continuación se pueden observar los resultados de la prueba de bondad de ajuste para los 10 activos que conforman el portafolio:

Gráfica 8. Prueba de bondad de ajuste

Resumen Estadístico

Nombre de la Variable	**X**
Mejor Supuesto Ajustado	0,00
Distribución Ajustada	**Normal**
Media	0,00
Desv.Est	0,03
Estadístico Kolmogorov-Smirnov	0,02
Prueba Estadística de P-Value	0,3633

	Real	Teórica
Media	0,00	0,00
Desviación Estándar	0,03	0,03
Asimetría	0,26	0,00
Curtósis	1,29	0,00

Nombre de la Variable	**T**
Mejor Supuesto Ajustado	0,00
Distribución Ajustada	**Laplace**
Alfa	0,00
Beta	0,01
Estadístico Kolmogorov-Smirnov	0,02
Prueba Estadística de P-Value	0,8091

	Real	Teórica
Media	0,00	0,00
Desviación Estándar	0,02	0,02
Asimetría	-0,12	0,00
Curtósis	4,13	3,00

Nombre de la Variable	**BXP**
Mejor Supuesto Ajustado	0,00
Distribución Ajustada	**Logística**
Alfa	0,00
Beta	0,01
Estadístico Kolmogorov-Smirnov	0,02
Prueba Estadística de P-Value	0,5506

	Real	Teórica
Media	0,00	0,00
Desviación Estándar	0,01	0,01
Asimetría	-0,04	0,00
Curtósis	2,71	1,20

Nombre de la Variable	**HAL**
Mejor Supuesto Ajustado	0,00
Distribución Ajustada	**Logística**
Alfa	0,00
Beta	0,01
Estadístico Kolmogorov-Smirnov	0,01
Prueba Estadística de P-Value	0,9919

	Real	Teórica
Media	0,00	0,00
Desviación Estándar	0,03	0,03
Asimetría	-2,73	0,00
Curtósis	58,68	1,20

Nombre de la Variable	**NKE**
Mejor Supuesto Ajustado	0,00
Distribución Ajustada	**Laplace**
Alfa	0,00
Beta	0,01
Estadístico Kolmogorov-Smirnov	0,02
Prueba Estadística de P-Value	0,2775

	Real	Teórica
Media	0,00	0,00
Desviación Estándar	0,02	0,02
Asimetría	-0,99	0,00
Curtósis	14,73	3,00

Nombre de la Variable	**OXY**
Mejor Supuesto Ajustado	0,00
Distribución Ajustada	**Logística**
Alfa	0,00
Beta	0,01
Estadístico Kolmogorov-Smirnov	0,02
Prueba Estadística de P-Value	0,7613

	Real	Teórica
Media	0,00	0,00
Desviación Estándar	0,02	0,02
Asimetría	-0,09	0,00
Curtósis	0,94	1,20

Nombre de la Variable	**MGM**
Mejor Supuesto Ajustado	0,00
Distribución Ajustada	**Logística**
Alfa	0,00
Beta	0,01
Estadístico Kolmogorov-Smirnov	0,02
Prueba Estadística de P-Value	0,5148

	Real	Teórica
Media	0,00	0,00
Desviación Estándar	0,02	0,02
Asimetría	-0,69	0,00
Curtósis	10,06	1,20

Nombre de la Variable	**PG**
Mejor Supuesto Ajustado	0,00
Distribución Ajustada	**Logística**
Alfa	0,00
Beta	0,01
Estadístico Kolmogorov-Smirnov	0,02
Prueba Estadística de P-Value	0,2851

	Real	Teórica
Media	0,00	0,00
Desviación Estándar	0,02	0,01
Asimetría	-5,54	0,00
Curtósis	116,93	1,20

Nombre de la Variable	**DIS**
Mejor Supuesto Ajustado	0,00
Distribución Ajustada	**Laplace**
Alfa	0,00
Beta	0,02
Estadístico Kolmogorov-Smirnov	0,01
Prueba Estadística de P-Value	0,8263

	Real	Teórica
Media	0,00	0,00
Desviación Estándar	0,02	0,02
Asimetría	-0,23	0,00
Curtósis	8,87	3,00

Nombre de la Variable	**K**
Mejor Supuesto Ajustado	0,00
Distribución Ajustada	**Laplace**
Alfa	0,00
Beta	0,01
Estadístico Kolmogorov-Smirnov	0,01
Prueba Estadística de P-Value	0,9451

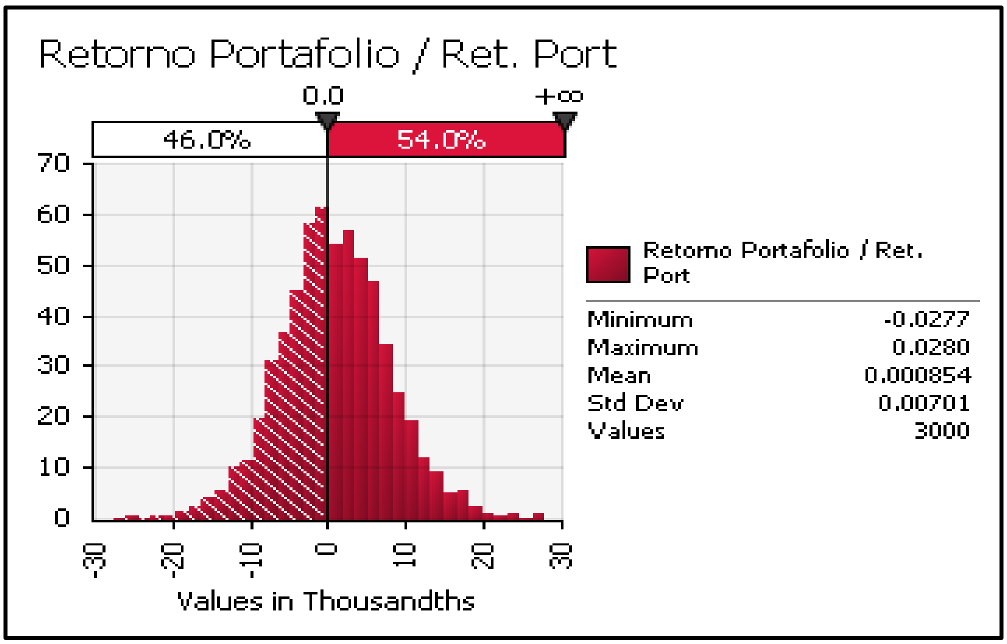
	Real	Teórica
Media	0,00	0,00
Desviación Estándar	0,02	0,01
Asimetría	0,42	0,00
Curtósis	5,57	3,00

Fuente: Elaboración propia del autor.

4.4 Simulaciones y cálculo de la distribución de probabilidad del portafolio

Al convertir el modelo de portafolio original en un modelo estocástico, se observa que la probabilidad de que dicho portafolio genere rendimientos menores a cero es de un 46%, la cual es bastante alta:

Gráfica 9. Distribución de probabilidad del portafolio

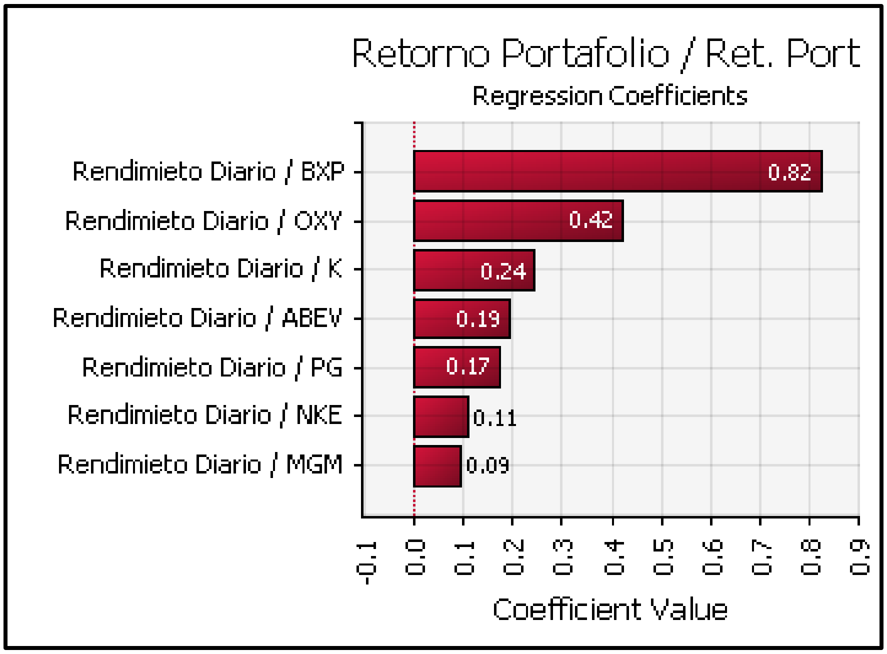


Fuente: Elaboración propia con el complemento de Excel @risk

Como se puede observar, la construcción del portafolio en sí, no es garantía de que el retorno que se calculó bajo la metodología de Markowitz esté asegurado.

Y dado el alto peso que fue asignado durante el proceso de optimización que se realizó con Microsoft Solver a la acción de Boston Properties, el portafolio se hace sensible a los cambios de precio en dicho activo:

Gráfica 10. Gráfico de tornado – coeficientes de regresión



Fuente: Elaboración propia con el complemento de Excel @risk.

5 Conclusiones

El mayor problema que enfrenta el modelo clásico de portafolios de Markowitz, no es asumir que la distribución de los retornos de los activos financieros tiene un comportamiento normal, su debilidad reside en el hecho de asumir que los precios históricos de los activos que se encuentran bajo análisis, son suficientes para predecir el comportamiento futuro de los mismos.

Por tratarse de un modelo de tipo cuantitativo, deja de lado las expectativas e irracionalidades de los inversionistas durante el periodo que se utiliza como muestra y que es la base para definir el retorno esperado de cada activo. Dichas expectativas no necesariamente van a coincidir con el sentir de los inversionistas en el futuro, determinando así, precios por arriba o por debajo de la media que se estima en el modelo. Durante los eventos extremos, las expectativas de los inversionistas cambian drásticamente, y el temor al que se expone el mercado genera reacciones que producen volatilidad y disminución constante en los precios de las acciones.

De manera histórica el precio de la acción de la compañía Boston Properties Inc, se mostraba como la de mejor desempeño, incluso era la de menor coeficiente de variación, sin embargo, ante el arribo del evento extremo, el cuál golpeó directamente el sector de la economía al que pertenece la empresa, esta paso de ser la estrella del portafolio a convertirse en el lastre del mismo.

Una de las herramientas técnicas que se recomienda utilizar a los inversionistas y administradores de portafolios, es el monitoreo y análisis permanente de la matriz de correlaciones. Dicha matriz se convierte en una fuente de información de gran utilidad para poner sobre alerta al administrador del portafolio, al indicarle la evolución de la correlación que están presentando los activos financieros. Como quedó demostrado, al aproximarse el evento extremo, la correlación de los activos se incrementó considerablemente.

Tomando esto en cuenta, y realizando un cuidadoso estudio y seguimiento de los fundamentales de la economía, se podrá tener un indicador claro de que se está ingresando a un periodo de crisis generalizado. Su funcionamiento es simple: Si los activos empiezan a mostrar un incremento en su valor de correlación con tendencia a 1, y los precios de los mismos están registrando una disminución sostenida, es una alerta roja que debe llevarnos a tomar decisiones inmediatas frente al portafolio, tales como: Liquidar posiciones, tomar posiciones contrarias, realizar una cobertura mediante un derivado financiero, o reconfigurar él portafolio. La cobertura fija el valor del portafolio y elimina el riesgo, sin embargo también tiene el efecto de evitar que el mismo se beneficie de las altas y bajas del mercado de valores.

Bajo el modelo cuantitativo de Markowitz, no es posible llegar a modelar portafolios que puedan proteger a los inversionistas de los eventos extremos. Cuando el mercado se torna volátil y produce rendimientos negativos tan fuertes como aconteció en el año 2008, lo mejor que se puede hacer es revisar constantemente el comportamiento de los activos que conforman el portafolio, entender la tendencia de los fundamentales de la economía y combinarlo con el análisis técnico de la matriz de correlaciones; con estas consideraciones y tomando decisiones oportunas, se puede llegar a minimizar la pérdida de valor, bien sea liquidando posiciones, reconfigurando el portafolio (en los casos en que sea posible) o tomando acciones de cobertura con derivados.

6 Referencias

Barker, P. (2007). *Java methods for financial engineering: Applications in finance and investment.* London, England: Springer.

Beirlant J., Goegebeur Y. & Teugels, J. (2004). *Statistics of Extremes: theory and applications*. England: John Wiley & Sons.

Benninga, S. (2008). *Financial modeling*. Cambridge, United States of America: MIT Press.

Charnes, J. (2007). *Financial modeling with crystal ball and excel + companion web site*. New Jersey, United States of America: Wiley.

Hull, J. (2012). Options, futures and other derivatives. Edinburgh, England: Pearson.

Jondeau, E., Poon, S. & Rockinger, M. (2007). *Financial modeling under non-gaussian distributions*. London, England: Springer.

Mun, J. (2010). *Modeling risk*. New Jersey, United States of America: John Wiley & Sons.

Ragsdale, C. (2008). *Spreadsheet modeling & decision analysis*. Mason, United States of America: Cengage.

Snopek, L. (2012). *The complete guide to portfolio construction and management*. Chichester, England: Wiley.

Taleb, N. (2007). *El cisne negro: El impacto de lo altamente improbable*. Madrid, España: Paidós.

Taleb, N. (2008). *Fooled by randomness: The hidden role of chance in life and in the markets*. New York, United States of America: Random House.