

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES MEDIANTE
ÁLGEBRAS HIPERCOMPLEJAS. CASO DE ESTUDIO: CÁLCULO DE LA CATENARIA
DE CABLES ELÁSTICOS BAJO CARGAS VERTICALES**

Numerical solution of non-linear system equations using hypercomplex algebras. Case study: catenary
calculation of elastic cables under vertical loads

José Leonel Hernández Estrada

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar por el título de
Magister en Ingeniería

Asesor
Mauricio Aristizabal Cano, PhD

UNIVERSIDAD EAFIT
ESCUELA DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA
MEDELLÍN

Marzo, 2021

Resumen

El cálculo de derivadas es de vital importancia en la resolución de problemas matemáticos y más aún en problemas de ingeniería. Recientemente, el uso de álgebras hipercomplejas (números complejos, duales, entre otros) ha incrementado para el cálculo de derivadas ya que estas permiten su cómputo de manera sencilla y con alta precisión. En este trabajo se propone el uso novedoso de álgebras hipercomplejas para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales mediante un método de Newton-Raphson adaptado a dichas álgebras. El método desarrollado simplifica la complejidad de su implementación sin sacrificar precisión, y permite el cálculo de derivadas de la solución de manera sencilla. Se analizó un caso de estudio del cálculo de la catenaria de un cable elástico sometido a su propio peso y a una carga vertical. Se calcularon derivadas de hasta orden 10 respecto a parámetros de diferente naturaleza como el módulo de elasticidad, magnitud de la carga vertical, dimensiones geométricas, entre otros. Las derivadas se utilizaron para generar modelos de orden reducido de la deformación y fuerzas de reacción del cable respecto a los parámetros del problema. Los resultados muestran que a partir de una evaluación hipercompleja de un estado con una carga vertical, es posible predecir con precisión de hasta 8 cifras significativas del comportamiento del cable sin la carga y con el doble de la magnitud de esta.

Palabras clave: Álgebras hipercomplejas, Newton-Raphson, catenaria, cable elástico, modelo de orden reducido

Índice

1. Introducción	4
1.1. Números hipercomplejos para cálculo de derivadas	4
1.2. Catenaria elástica de cables.	4
1.3. Contribución y distribución del artículo.	5
2. Álgebras hipercomplejas	5
2.1. Cómputo de derivadas	6
2.2. Generación de modelos de orden reducido	8
3. Método de Newton-Raphson	9
3.1. Método tradicional	9
3.2. Método Newton-Raphson adaptado a álgebras hipercomplejas	10
3.3. Jacobiano mediante álgebras hipercomplejas	11
4. Cable elástico suspendido bajo cargas verticales	11
4.1. Formulación	11
4.2. Incorporación de álgebras hipercomplejas en el cálculo de la catenaria elástica	14
5. Caso de estudio: catenaria de un cable suspendido y sometido a una carga vertical	15
5.1. Descripción	15
5.2. Comportamiento en algunos modelos de orden reducido	15
5.3. Cálculo de la catenaria completa del cable	18
6. Discusión	19
7. Conclusiones	21

Nomenclatura

\mathbb{C}	Conjunto de los números complejos.
\mathbb{C}_n	Conjunto de los números multicomplejos.
\mathbb{D}	Conjunto de los números duales.
\mathbb{D}_n	Conjunto de los números multiduales.
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
\mathbf{a}	Vector de parámetros del sistema.
$\mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{a})$	Vector de funciones no-lineales.
\mathbf{f}_v	Vector de fuerzas verticales actuando sobre el cable.
h	Tamaño de paso o perturbación.
$\mathbf{p}(s)$	Punto sobre el cable deformado.
s	Coordenada Lagrangiana del cable sin deformar.
\mathbf{s}_f	Vector de coordenadas Lagrangianas en donde se aplican las fuerzas verticales.
\mathbf{x}_s	Vector solución del sistema de ecuaciones.
\mathbf{x}_j	Vector solución de la j -ésima iteración del sistema de ecuaciones.
A_0	Sección transversal sin deformar del cable.
E	Módulo de elasticidad del cable.
\mathbf{J}	Jacobiano.
L_0	Longitud sin deformar del cable.
N	Número de cargas verticales actuando sobre el cable.
T	Tensión en el cable.
W	Peso total del cable.
α_j	j -ésima base imaginaria.
ε	Tolerancia de parada.
MOR	Modelo de orden reducido.
$(\cdot)^*$	Número hipercomplejo.
$\text{Im}_\alpha[x^*]$	Coefficiente asociado a la dirección imaginaria α del número hipercomplejo x^* .
$\text{Im}_\alpha^*[x^*]$	Número imaginario múltiplo de la dirección α del número hipercomplejo x^* .
$\text{Re}[x^*]$	Coefficiente real del número hipercomplejo x^* .

1. Introducción

El cálculo de derivadas es fundamental en aplicaciones de matemáticas, ciencia e ingeniería. Estas se usan tanto para pasos intermedios para la solución numérica de ecuaciones diferenciales, sistemas de ecuaciones no lineales, entre otros; como para el análisis de resultados, por ejemplo análisis de sensibilidad, optimización y generación de Modelos de Orden Reducido (MORs) de sistemas complejos. Tradicionalmente, las derivadas se calculan ya sea mediante la derivación analítica de las mismas o mediante el método de las diferencias finitas. Este último ha sido ampliamente usado debido su facilidad de uso, pero éste sufre del error numérico inherente a las operaciones de resta, incurriendo en el denominado error de cancelación por substracción [16], lo que impide calcular con alta precisión las derivadas deseadas.

1.1. Números hipercomplejos para cálculo de derivadas

Los números hipercomplejos son aquellos que, además de la dirección real, cuentan con múltiples direcciones imaginarias [22]. Recientemente, el uso de estos números ha tomado fuerza en el ámbito del cálculo de derivadas en aplicaciones numéricas debido a su facilidad de uso y a la capacidad de cálculo de derivadas con precisión de máquina. La metodología es simple: las operaciones del programa tradicional se convierten a las operaciones equivalentes en el álgebra hipercompleja de elección y se introducen perturbaciones a lo largo de algunas direcciones imaginarias de las variables de interés (variables con respecto a las cuales se desean las derivadas). Las derivadas se obtienen en las componentes imaginarias del resultado numérico [4]. Los números complejos, por ejemplo, cuentan con una sola dirección imaginaria. Estos permiten el cálculo de una derivada de primer orden en una evaluación del programa al aplicar una perturbación imaginaria pequeña a la variable de interés [27]. De forma similar, los números duales permiten el cálculo de una derivada de primer orden [28], los cuales son insensibles al tamaño de la perturbación por lo que usualmente su perturbación es unitaria. Los números cuaterniones y octoniones cuentan con 3 y 7 direcciones imaginarias respectivamente, los cuales pueden utilizarse para el cálculo de múltiples derivadas de primer orden en una sola evaluación del programa [4], permitiendo reducir el uso de recursos computacionales.

Otras álgebras hipercomplejas pueden usarse para el cálculo de derivadas de orden superior. En particular, los números multicomplejos [25], números hiperduales [15, 14] (en este documento referidos como multiduales) y los números imaginarios de orden truncado [3] (OTI por sus siglas en inglés) permiten el cálculo de derivadas de alto orden con precisión de máquina. Las álgebras hipercomplejas se han aplicado a diferentes problemas físicos en cuanto al cálculo de derivadas, incluyendo análisis de sensibilidad a problemas de análisis termoelástico [29], esfuerzos residuales [13], materiales poro-elásticos [5], materiales hiperelásticos [34], análisis de cerchas [24], cálculo de la tasa de liberación de energía [2], propagación curvilínea de grietas 2D [36], optimización multi-objetivo [16], análisis pseudo-espectral [10], cinemática multi-cuerpo [11], entre otros. En particular, las derivadas de alto orden pueden utilizarse para la generación de MORs. Esto se ha demostrado usando álgebras multiduales [8, 7] y mediante números OTI en análisis de elementos finitos [3]. La librería MultiZ [1], permite el uso general de números multicomplejos y multiduales de cualquier número de direcciones imaginarias.

1.2. Catenaria elástica de cables.

La solución numérica de la catenaria de cables elásticos es relevante para industrias como el transporte aéreo por cable [19, 30, 12], transporte férreo terrestre [35, 32], análisis de grúas [17], puentes colgantes [21], entre otros; ya que éste permite predecir la deformación geométrica del mismo, así como la distribución de

las cargas y tensión debido al actuar de su propio peso y de cargas externas [21]. La configuración deformada del cable ante cargas estáticas ha sido estudiada por Irvine en [21] para 2 dimensiones y generalizada a 3 dimensiones por Impollonia et al. [20] ante la acción de cargas puntuales. El planteamiento de las ecuaciones converge a la solución de un sistema de ecuaciones no lineales, el cual se resuelve mediante el método de Newton-Raphson [20]. La configuración deformada ante cargas estáticas es usualmente el punto de partida para análisis más complejos [35], como el análisis de vibraciones [30, 33], fuerzas torsionales [23], cargas dinámicas [9, 12], entre otros.

La evaluación tradicional de la metodología de Newton-Raphson requiere del cálculo de derivadas las cuales se realizan tradicionalmente mediante dos métodos: cálculo analítico o mediante diferencias finitas. El cálculo analítico de las derivadas es usualmente difícil y se evita ya que sólo es útil para una única formulación. En el caso del uso de diferencias finitas, la selección del tamaño de paso es crítico ya que un paso grande induce error de truncamiento mientras que un paso pequeño induce error de substracción por cancelación [14]. Es por esto que se presenta un área de estudio en la ciencia, la cual se abordará en el desarrollo del presente trabajo.

1.3. Contribución y distribución del artículo.

Este artículo presenta una metodología para incorporar álgebras hipercomplejas al método de Newton-Raphson para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales aplicado al cálculo de la catenaria de cables elásticos. El cálculo de las derivadas inherentes al método de Newton-Raphson se realizan mediante las álgebras hipercomplejas, eliminando las complicaciones relacionadas con las implementaciones tradicionales. Igualmente, las álgebras se utilizan para el cálculo de derivadas de alto orden respecto a parámetros que definen el problema como el módulo de elasticidad, la longitud inicial, las cargas aplicadas, entre otros. Estas derivadas luego se utilizan para generar MORs que permiten aproximar el comportamiento del cable al variar los valores de las variables perturbadas, sin tener que resolver nuevamente el proceso iterativo. La metodología se aplica al análisis de la catenaria de un cable sometido a una carga vertical puntual. Los resultados muestran que los MORs generados representan el comportamiento del cable y que la región de efectividad de la aproximación aumenta al incrementar el orden de derivada calculado. En particular, se demuestra que con un solo análisis y con un MOR con derivadas de 4to orden se puede predecir la catenaria de un cable elástico con precisión de 4 cifras significativas.

Este documento se distribuye de la siguiente manera: en la sección 2, se describen algunas álgebras hipercomplejas, la metodología para calcular derivadas y su uso para generar un MOR de la función evaluada. En la sección 3 se detalla el método de Newton Raphson adaptado a las álgebras hipercomplejas. En la sección 4 se presentan los fundamentos del análisis de catenaria elástica en dos dimensiones bajo la acción de cargas puntuales verticales y cómo se integra con álgebras hipercomplejas. En la sección 5 se presentan los resultados obtenidos al aplicar la metodología desarrollada. Finalmente, en las secciones 6 y 7, se discuten y concluyen los aspectos más importantes de este trabajo.

2. Álgebras hipercomplejas

Las álgebras hipercomplejas expanden el álgebra de los números reales al sumarles coeficientes dirigidos a lo largo de múltiples unidades imaginarias que cumplen determinadas reglas de manipulación [22]. El álgebra de los números complejos (\mathbb{C}) es posiblemente el álgebra hipercompleja más usada. Ésta se forma a partir de un componente real y un solo componente «imaginario» $z^* = a + bi$, en donde a es el componente real

y b es el componente imaginario, ambos coeficientes reales; y la dirección i tiene la condición imaginaria $i^2 = -1$. Esta condición desarrolla las propiedades de dicha álgebra. Los números duales (\mathbb{D}), otra algebra hipercompleja, se diferencia del álgebra de los números complejos en su dirección imaginaria ϵ , ya que su condición imaginaria es $\epsilon^2 = 0$, siendo $\epsilon \neq 0$. Ambas álgebras hipercomplejas mencionadas tienen únicamente dos direcciones, una real y otra imaginaria:

$$z^* = a + b\alpha_1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z^* \in \mathbb{C}, & \alpha_1^2 = i^2 = -1 \\ z^* \in \mathbb{D}, & \alpha_1^2 = \epsilon^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

2.1. Cómputo de derivadas

Se pueden utilizar tanto números complejos como duales para calcular derivadas de primer orden. De manera similar al método diferencias finitas, la metodología consiste en perturbar la variable de interés y luego evaluar la función requerida. Sin embargo, en contraste a diferencias finitas, la perturbación se efectúa a lo largo de la dirección imaginaria una cantidad h . Así, si la variable de interés es x , su valor perturbado es $x^* = x + h\alpha_1$. La función real y la derivada de la función respecto a la variable de interés se obtienen en el resultado de la evaluación en sus coeficientes real e imaginario respectivamente, de la siguiente manera:

$$f(x) \approx \text{Re}[f(x + h\alpha_1)] \quad (2)$$

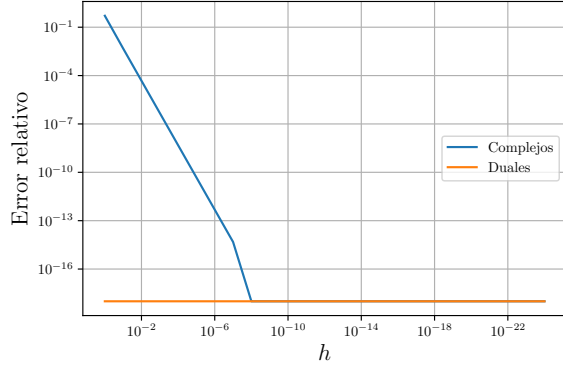
$$f_{,x}(x) \approx \frac{\text{Im}_{\alpha_1}[f(x + h\alpha_1)]}{h} \quad (3)$$

donde $\text{Re}[\cdot]$ extrae el coeficiente real del número y $\text{Im}_{\alpha_1}[\cdot]$ extrae el coeficiente de la dirección imaginaria α_1 .

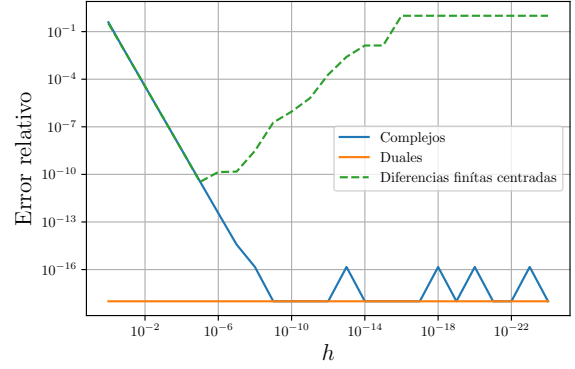
Debido a que no existen operaciones de resta en el cálculo de la derivada, los métodos hipercomplejos para el cálculo de derivadas no presentan error por substracción en el resultado, por lo cual siempre es posible obtener precisión de máquina en el resultado de la derivada. Cabe notar que hay diferencias en cuanto al álgebra utilizada: al utilizar variable compleja es necesario un valor pequeño de h , usualmente $h = 10^{-30}$ relativo al parámetro de interés; mientras que al usar números duales la evaluación de la función y derivada es exacta e insensible al valor de h , por lo que se acostumbra a utilizar $h = 1$ por simplicidad. Esto se puede observar en las figuras 1a y 1b, en las que se grafica el comportamiento del error relativo de la función y su derivada mediante números complejos, duales y mediante el método de las diferencias finitas centradas. Se observa que al reducir el valor del tamaño de paso h , diferencias finitas centradas pierde precisión, mientras que el uso del álgebra compleja converge al error de máquina. Igualmente se observa que el álgebra de los números duales es insensible al valor de h utilizado, ya que siempre obtiene precisión de máquina.

Existen otras álgebras hipercomplejas que cuentan con un mayor número de unidades imaginarias y que pueden utilizarse para el cálculo de un mayor número de derivadas. Es así como cuaterniones y octoniones, con 3 y 7 unidades imaginarias respectivamente, se han utilizado para el cálculo de múltiples derivadas de primer orden [4]. Cuaterniones y octoniones permiten el cálculo de derivadas de funciones respecto a 3 y 7 variables respectivamente.

Así mismo, las álgebras multicomplejas (\mathbb{C}_n) [25] y las hiperduales (\mathbb{D}_n) [14] (en este documento referidas como multiduales) permiten el cálculo de derivadas de orden superior, igualmente con precisión de máquina. Estas álgebras se definen de una manera secuencial, al extender un álgebra inmediatamente anterior en una nueva base imaginaria α_n de la siguiente manera:



(a) Error relativo de $f(x)$ con respecto a h .



(b) Error relativo de $f_{,x}(x)$ con respecto a h .

Figura 1: Comportamiento del error relativo al evaluar la función $f(x) = x \cos(x) + \sin(x)$ en $x = 3$ y de su primera derivada utilizando álgebra compleja, álgebra dual y diferencias finitas respecto al tamaño de paso.

$$\mathbb{C}_n = \{z^* : z^* = a^* + b^* \alpha_n; a^*, b^* \in \mathbb{C}_{n-1}; \alpha_n^2 = i_n^2 = -1\} \quad (4)$$

$$\mathbb{D}_n = \{z^* : z^* = a^* + b^* \alpha_n; a^*, b^* \in \mathbb{D}_{n-1}; \alpha_n^2 = \epsilon_n^2 = 0\} \quad (5)$$

donde $\mathbb{C}_0 = \mathbb{D}_0 = \mathbb{R}$, \mathbb{C}_1 corresponde a los números complejos y \mathbb{D}_1 corresponde a los números duales. Nótese que la multiplicación de dos o más bases imaginarias se rige por la condición imaginaria del álgebra seleccionada. De esta manera, la multiplicación de dos direcciones imaginarias $\alpha_j \alpha_k$ será definida en el caso que ambas bases sean iguales, es decir cuando $j = k$ y resultará de acuerdo al caso multicomplejo ($\alpha_j \alpha_k = -1$ para $j = k$) o multidual ($\alpha_j \alpha_k = 0$ para $j = k$). En caso contrario ($j \neq k$), el álgebra es conmutativa por lo que $\alpha_j \alpha_k = \alpha_k \alpha_j$.

El cálculo de derivadas de orden superior consiste en la perturbación de la variable de interés en un valor h a lo largo de un número de bases imaginarias igual al orden de derivada buscado. Así, derivadas de segundo orden de una función de una sola variable se pueden obtener al perturbar la variable x como $x^* = x + h\alpha_1 + h\alpha_2$ y así las derivadas pueden extraerse de la siguiente manera.

$$f(x) \approx \text{Re}[f(x + h(\alpha_1 + \alpha_2))] \quad (6)$$

$$f_{,x}(x) \approx \frac{\text{Im}_{\alpha_1}[f(x + h(\alpha_1 + \alpha_2))]}{h} \quad (7)$$

$$f_{,x}(x) \approx \frac{\text{Im}_{\alpha_2}[f(x + h(\alpha_1 + \alpha_2))]}{h} \quad (8)$$

$$f_{,x^2}(x) \approx \frac{\text{Im}_{\alpha_1 \alpha_2}[f(x + h(\alpha_1 + \alpha_2))]}{h^2} \quad (9)$$

donde $\text{Im}_{\alpha_1 \alpha_2}[\cdot]$ extrae el coeficiente de la dirección $\alpha_1 \alpha_2$. En el caso de las álgebras multicomplejas es recomendable usar un valor de h pequeño, usualmente $h = 10^{-30}$. En el caso de las álgebras multiduales las derivadas son exactas a error de máquina e insensibles al valor de h , por lo que se utiliza $h = 1$ por simplicidad.

De esta manera, la derivada n -ésima de una función de una sola variable se obtiene

$$x^* = x + h \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) \quad (10)$$

$$f_{,x^n}(x) = \frac{\text{Im}_{\prod_{j=1}^n \alpha_j} [f(x^*)]}{h^n} \quad (11)$$

en donde en la misma evaluación se encuentran todas las demás derivadas de orden menor a n .

Derivadas mixtas pueden encontrarse con perturbaciones imaginarias a las variables de entrada de interés. Por ejemplo, para una función de dos variables $f(x, y)$, su derivada mixta respecto a x y y puede encontrarse mediante la siguiente evaluación

$$f(x, y) \approx \text{Re} [f(x + h\alpha_1, y + h\alpha_2)] \quad (12)$$

$$f_{,x}(x, y) \approx \frac{\text{Im}_{\alpha_1} [f(x + h\alpha_1, y + h\alpha_2)]}{h} \quad (13)$$

$$f_{,y}(x, y) \approx \frac{\text{Im}_{\alpha_2} [f(x + h\alpha_1, y + h\alpha_2)]}{h} \quad (14)$$

$$f_{,xy}(x, y) \approx \frac{\text{Im}_{\alpha_1 \alpha_2} [f(x + h\alpha_1, y + h\alpha_2)]}{h^2} \quad (15)$$

en donde también se evalúan las derivadas de orden 1 $f_{,x}(x, y)$ y $f_{,y}(x, y)$.

Una notación conveniente para los propósitos de este documento es el uso del operador $\text{Im}_{\alpha_j}^* [\cdot]$, el cual se utiliza para extraer el número imaginario formado a partir de las direcciones múltiples de α_j . Por ejemplo, para el caso del número hipercomplejo

$$x^* = x_0 + x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_{12} \alpha_1 \alpha_2 \quad (16)$$

el coeficiente imaginario de la dirección α_2 se muestra en la ecuación (17), mientras que el número imaginario múltiplo de la dirección α_2 se muestra en la ecuación (18).

$$\text{Im}_{\alpha_2} [x^*] = x_2 \quad (17)$$

$$\text{Im}_{\alpha_2}^* [x^*] = x_2 + x_{12} \alpha_1 \quad (18)$$

2.2. Generación de modelos de orden reducido

Brake et al. [8] presentó una metodología para generar MORs utilizando números multiduales en aplicaciones de elementos finitos. A continuación se presenta la generalización del método para cualquier álgebra hipercompleja. Considere una función $f(x)$, y su expansión de serie de Taylor centrada en x_0 para una variación Δx , tal como se observa a continuación,

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f_{,x}(x_0) \Delta x + \frac{1}{2!} f_{,x^2}(x_0) \Delta x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f_{,x^n}(x_0) \Delta x^n + T.O.S. \quad (19)$$

donde T.O.S. contiene los términos de orden superior.

Según se describió en la sección 2.1, se pueden utilizar las álgebras hipercomplejas para el cálculo de derivadas de orden n . Se debe realizar la perturbación al parámetro de entrada según la ecuación (10) y

evaluar una sola vez la función en dicho valor perturbado. Consecuentemente, para generar un MOR de la función $f(x)$, se debe perturbar el parámetro de entrada en n direcciones imaginarias, $x^* = x_0 + h \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right)$; y evaluar la función una sola vez $g^* = f(x^*)$. En g^* están contenidas todas las derivadas de f respecto a x de hasta orden n , por lo que estas se pueden ingresar en la ecuación (19) para generar un polinomio que aproxima el comportamiento de $f(x)$. Los T.O.S. se desprecian, efectivamente truncando la serie de Taylor hasta orden n . La forma final del MOR se obtiene de la siguiente manera,

$$f(x_0 + \Delta x) \approx \text{MOR}(f(x^*), \Delta x) = \text{Re}[f(x^*)] + \frac{1}{h} \text{Im}_{\alpha_1}[f(x^*)] \Delta x + \frac{1}{2! h^2} \text{Im}_{\alpha_1 \alpha_2}[f(x^*)] \Delta x^2 + \dots + \frac{1}{n! h^n} \text{Im}_{\prod_{j=1}^n \alpha_j}[f(x^*)] \Delta x^n \quad (20)$$

lo que permite aproximar el comportamiento de la función $f(x)$ para nuevos valores de x mediante una sola evaluación de la función $f(x^*)$.

3. Método de Newton-Raphson

3.1. Método tradicional

El método de Newton-Raphson [6] es un método iterativo que se utiliza para encontrar los ceros de un sistema de ecuaciones no lineales. Considere un vector de funciones no lineales $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^2$ que tiene como grados de libertad el arreglo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ y parámetros que definen el problema $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n_a}$. El objetivo del método es buscar un $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^2$ tal que,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (21)$$

en donde $\mathbf{0}$ es el vector de ceros de dos elementos. Cabe notar que los parámetros que forman el arreglo \mathbf{a} no son grados de libertad del sistema de ecuaciones no lineales. Estos son invariantes en la solución del sistema de ecuaciones. En caso que algún parámetro en \mathbf{a} cambie, tradicionalmente es necesario volver a resolver el sistema de la ecuación (21).

Al realizar la expansión de serie de Taylor para el sistema (21), y considerando solamente las primeras derivadas, se obtiene,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_j, \mathbf{a}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_j, \mathbf{a}) \Delta \mathbf{x}_j = \mathbf{0} \quad (22)$$

donde \mathbf{x}_j es el valor de la solución para la iteración j , el Jacobiano $\mathbf{J}(\mathbf{x}_j, \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ contiene las derivadas de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_j, \mathbf{a})$:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_j, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} f_{1,x_1}(\mathbf{x}_j, \mathbf{a}) & f_{1,x_2}(\mathbf{x}_j, \mathbf{a}) \\ f_{2,x_1}(\mathbf{x}_j, \mathbf{a}) & f_{2,x_2}(\mathbf{x}_j, \mathbf{a}) \end{bmatrix} \quad (23)$$

y $\Delta \mathbf{x}_j$ es el cambio necesario para que \mathbf{x}_j aproxime mejor la ecuación (21), por lo que

$$\Delta \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j \quad (24)$$

De lo anterior, la ecuación (22) se reescribe para generar la forma iterativa del método,

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_j, \mathbf{a}) \mathbf{f}(\mathbf{x}_j, \mathbf{a}) \quad (25)$$

El método necesita inicializar el proceso iterativo en $j = 0$ con un \mathbf{x}_0 cualquiera. El criterio de parada está establecido por una tolerancia especificada ε . La solución $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_j$ se obtiene en la iteración j tal que $\|\Delta \mathbf{x}_j\| \leq \varepsilon$.

El Jacobiano de la ecuación (23), usualmente se calcula mediante la solución analítica de las derivadas. Sin embargo, en los casos de funciones complejas o en sistemas de dimensiones mayores se hace uso de un método numérico, comúnmente, el método de las diferencias finitas [26]. El reto se presenta en escoger un h adecuado para encontrar una aproximación de la derivada válida para el problema como se muestra en la figura 1b.

3.2. Método Newton-Raphson adaptado a álgebras hipercomplejas

Las álgebras hipercomplejas se pueden utilizar para calcular las derivadas de la solución \mathbf{x}_s con respecto a cualquier parámetro en \mathbf{a} . Para lograr esto, uno o más parámetros pueden perturbarse como se explica en la sección 2. Por ejemplo, para calcular la derivada de \mathbf{x}_s con respecto al parámetro a_b , se perturba

$$a_b^* = a_b + h\alpha_1 \quad (26)$$

Por lo tanto el arreglo \mathbf{a} debe considerarse hipercomplejo.

Dado lo anterior, es fácil identificar en el método de Newton-Raphson la hipercomplexificación sistema. Si se hace al menos un parámetro en \mathbf{a} hipercomplejo, las funciones $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ también serán hipercomplejas, y por tanto, sus derivadas en el Jacobiano lo convierten en una matriz de números hipercomplejos. Es cierto que al inicio de las iteraciones la solución inicial \mathbf{x}_0 es real, pero a partir de la primera iteración, las soluciones \mathbf{x}_j serán hipercomplejas. Con esto, la ecuación (25) para la primera iteración se convierte en,

$$\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_0 - \mathbf{J}^{*-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{a}^*) \mathbf{f}^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{a}^*) \quad (27)$$

y para las siguientes iteraciones en,

$$\mathbf{x}_{j+1}^* = \mathbf{x}_j^* - \mathbf{J}^{*-1}(\mathbf{x}_j^*, \mathbf{a}^*) \mathbf{f}^*(\mathbf{x}_j^*, \mathbf{a}^*) \quad (28)$$

donde el cálculo del Jacobiano inverso se realiza de la siguiente manera

$$\mathbf{J}^{*-1} = \frac{1}{J_{11}^* J_{22}^* - J_{12}^* J_{21}^*} \begin{bmatrix} J_{22}^* & -J_{12}^* \\ -J_{21}^* & J_{11}^* \end{bmatrix} \quad (29)$$

Se establece que el proceso iterativo ha convergido para la iteración j tal que

$$\|\text{Re} [\Delta \mathbf{x}_j^*]\| \leq \varepsilon \quad (30)$$

Una vez el método de Newton-Raphson converge se obtiene la solución \mathbf{x}_s^* . Ésta contiene las derivadas según se halla realizado la perturbación de los parámetros (ver sección 2). Siguiendo con el ejemplo de la perturbación realizada en la ecuación (26), se obtiene su derivada así,

$$\mathbf{x}_{s, a_b} \approx \frac{\text{Im}_{\alpha_1} [\mathbf{x}_s^*]}{h} \quad (31)$$

De igual manera, pueden calcularse derivadas de orden superior siguiendo los lineamientos presentados en la sección 2.

En esta sección, se desarrolló el método para problemas de dimensión 2, pero el mismo razonamiento es válido para un sistema de ecuaciones no lineales con mayor número de dimensiones.

3.3. Jacobiano mediante álgebras hipercomplejas

Como se mencionó en el procedimiento del método de Newton-Raphson, el Jacobiano puede calcularse de manera analítica o mediante un método numérico como las diferencias finitas. En este documento se presenta una alternativa al usar álgebras hipercomplejas para calcular el Jacobiano, obteniendo derivadas con precisión de máquina, ausentes de error de cancelación por sustracción y facilitando la selección del tamaño de paso h .

El Jacobiano se compone de las derivadas de primer orden de las funciones $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ respecto las componentes de \mathbf{x} evaluadas en \mathbf{x}_j . Para obtener esto, se perturba en dos bases imaginarias. Notar que estas direcciones imaginarias deben ser diferentes a las direcciones asociadas a los parámetros perturbados de \mathbf{a} (sección 3.2). Por ejemplo, si se perturbó un solo parámetro a_b en la base imaginaria α_1 , se puede perturbar \mathbf{x}_j^* así

$$\mathbf{x}_j^* = \begin{bmatrix} x_{j1}^* + h\alpha_2 \\ x_{j2}^* + h\alpha_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Luego, al evaluar la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}_j^*, \mathbf{a}^*)$ con las nuevas perturbaciones, se pueden extraer las partes imaginarias con las que se perturbó \mathbf{x}_j^* para obtener las derivadas. Por lo que el Jacobiano de la ecuación (23) se puede reescribir entonces como

$$\mathbf{J}^*(\mathbf{x}_j^*, \mathbf{a}^*) = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \text{Im}_{\alpha_2}^* [f_1(\mathbf{x}_j^*, \mathbf{a}^*)] & \text{Im}_{\alpha_3}^* [f_1(\mathbf{x}_j^*, \mathbf{a}^*)] \\ \text{Im}_{\alpha_2}^* [f_2(\mathbf{x}_j^*, \mathbf{a}^*)] & \text{Im}_{\alpha_3}^* [f_2(\mathbf{x}_j^*, \mathbf{a}^*)] \end{bmatrix} \quad (33)$$

en donde cada elemento del Jacobiano es un número imaginario formado al extraer múltiplos de las direcciones α_2 y α_3 como se explica en la sección 2.

4. Cable elástico suspendido bajo cargas verticales

4.1. Formulación

La formulación que sigue a continuación tiene como referencia la metodología presentada en [21]. Considere un cable elástico sobre el plano cartesiano (x, y) que no ha sufrido deformación alguna [21, 20, 18], con un área de sección transversal A_0 , longitud sin deformar L_0 y módulo de elasticidad E , sometido a la acción de su propio peso W y a N cargas verticales agrupadas en el vector $\mathbf{f}_v = [f_{v_1}, \dots, f_{v_N}]$ ubicadas de manera indiscriminada. Se define la coordenada Lagrangiana s como la longitud medida sobre el cable sin deformar desde uno de los extremos, tomando valores entre 0 y L_0 . En consecuencia, cada carga en \mathbf{f}_v se aplica en una coordenada Lagrangiana correspondiente, definidas en el vector $\mathbf{s}_f = [s_{f_1}, \dots, s_{f_N}]$. Dado lo anterior, se pretende encontrar la curva de puntos $\mathbf{p}(s) = [x(s), y(s)]$ que se forma (catenaria), tal que sus extremos correspondan a los puntos $\mathbf{p}(0) = [0, 0]$ y $\mathbf{p}(L_0) = [l, h]$. Este sistema del cable deformado se muestra en la Figura 2.

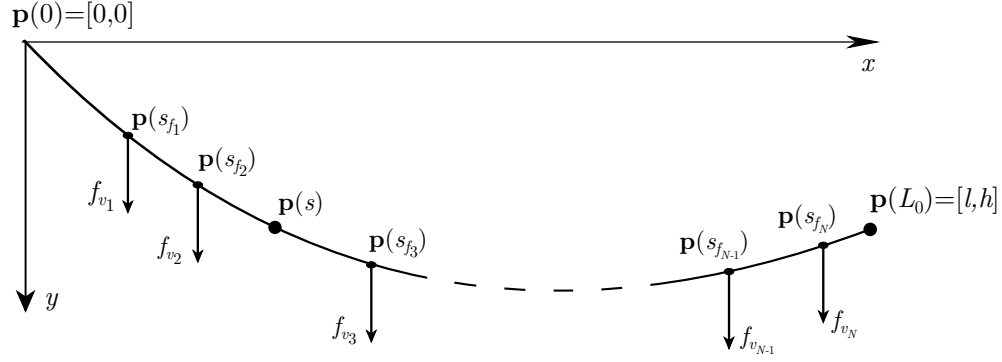


Figura 2: Sistema coordenado para el cable deformado

Si se toma el segmento de cable comprendido entre los puntos $\mathbf{p}(0)$ y $\mathbf{p}(s)$ con n cargas verticales, y se realiza un balance estático de fuerzas en el cable deformado para garantizar el equilibrio como se muestra en la Figura 3, se obtiene las ecuaciones (34), (35). En éstas se relacionan las cargas verticales, el peso del cable, las fuerzas de reacción en el extremo $\mathbf{p}(0)$, R_x y R_{0y} , y la fuerza de tensión T que actúa en el punto $\mathbf{p}(s)$ en dirección tangencial a la catenaria.

$$T \frac{dx}{dc} = R_x \quad (34)$$

$$T \frac{dy}{dc} = R_{0y} - \sum_{j=0}^n f_{v_j} - W \frac{s}{L_0} \quad (35)$$

donde $c(s)$ es la coordenada unidireccional del cable deformado. Note que para cualquier posición en el cable, la coordenada horizontal de la tensión es siempre constante.

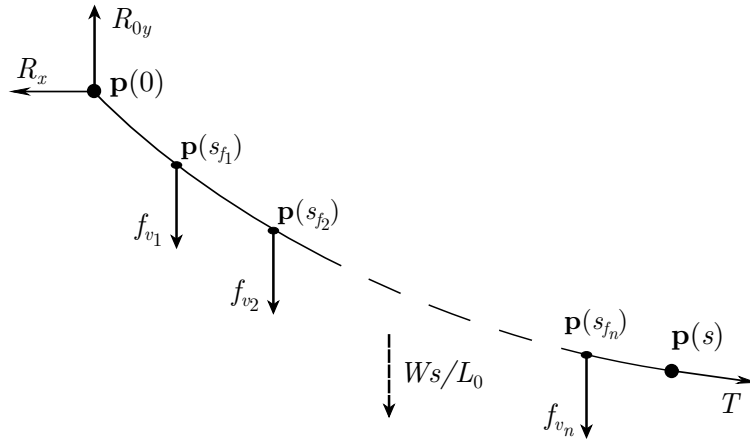


Figura 3: Fuerzas actuando en un segmento del cable deformado

Además del análisis estático, se considera la restricción geométrica de la ecuación (36) por ser una curva perteneciente a un plano. También, se garantiza la conservación de la masa en la ecuación (37) y se establece, para este problema, la ecuación constitutiva de la teoría de elasticidad mostrada en la ecuación (38).

$$\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dc}\right)^2 = 1 \quad (36)$$

$$A = A_0 \frac{ds}{dc} \quad (37)$$

$$T = EA_0 \left(\frac{dc}{ds} - 1\right) \quad (38)$$

Tomando las ecuaciones (34 - 38), y considerando condiciones de frontera y continuidad del cable, se encuentran expresiones para las soluciones $x(s)$ y $y(s)$. Para mayor generalidad se adimensionalizan los parámetros, dividiendo los parámetros longitudinales por L_0 y las fuerzas por W :

$\xi = x/L_0$ Coordenada horizontal adimensionalizada.

$\eta = y/L_0$ Coordenada vertical adimensionalizada.

$\sigma = s/L_0$ Coordenada longitudinal adimensionalizada, $0 \leq \sigma \leq 1$.

$\sigma_{f_j} = s_{f_j}/L_0$ Coordenada longitudinal de la j -ésima carga adimensionalizada.

$\delta = h/L_0$ Coordenada vertical del punto fijo $\mathbf{p}(L_0)$ adimensionalizada.

$\gamma = l/L_0$ Coordenada horizontal del punto fijo $\mathbf{p}(L_0)$ adimensionalizada.

$\tau = T/W$ Valor de la tensión adimensionalizado.

$\chi = R_x/W$ Valor de la reacción horizontal adimensionalizado.

$\phi = R_{0y}/W$ Valor de la reacción vertical en el punto fijo p_0 adimensionalizado.

$\psi_{v_j} = f_{v_j}/W$ Valor de la j -ésima carga vertical adimensionalizado.

$\beta = W/EA_0$ Factor de flexibilidad.

Con esto, las soluciones adimensionales [21] para las coordenadas horizontal y vertical respectivamente son

$$\xi(\sigma) = \chi \left[\beta\sigma + \sinh^{-1}(\phi/\chi) - \sinh^{-1}((\phi - \Psi_n - \sigma)/\chi) + \sum_{i=0}^n [\sinh^{-1}((\phi - \Psi_i - \sigma_i)/\chi) - \sinh^{-1}((\phi - \Psi_{i-1} - \sigma_i)/\chi)] \right] \quad (39)$$

$$\eta(\sigma) = \beta\sigma(\phi - \sigma/2) + \sqrt{(\phi^2 + \chi^2)} - \sqrt{(\phi - \Psi_n - \sigma)^2 + \chi^2} + \sum_{i=0}^n \left[\beta\psi_i(\sigma_i - \sigma) + \sqrt{(\phi - \Psi_i - \sigma_i)^2 + \chi^2} - \sqrt{(\phi - \Psi_{i-1} - \sigma_i)^2 + \chi^2} \right] \quad (40)$$

Tradicionalmente, se conocen las propiedades elásticas y físicas del cable (E , A_0 , L_0 , W), los puntos de apoyo (l , h), las magnitudes de las cargas verticales y sus puntos de aplicación (\mathbf{f}_v , \mathbf{s}_f). La solución del problema de la catenaria consiste en encontrar las reacciones R_x y R_{0y} . Para solucionar este problema, se deben encontrar los parámetros χ y ϕ tal que en el punto extremo $s = L_0$ cumpla con las coordenadas conocidas (l , h), por lo que debe satisfacer la siguiente igualdad:

$$\xi(1) - \gamma = 0 \quad (41)$$

$$\eta(1) - \delta = 0 \quad (42)$$

La solución del sistema se obtiene a partir del cálculo de χ y ϕ mediante el método de Newton-Raphson descrito en 3 y aplicado al sistema de funciones

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \xi(1) - \gamma \\ \eta(1) - \delta \end{bmatrix} \quad (43)$$

formado por las ecuaciones no-lineales (41) y (42). Los parámetros en \mathbf{a} son $E, A_0, L_0, W, l, h, \mathbf{f}_v$ y \mathbf{s}_f . El vector solución del método es entonces

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \chi \\ \phi \end{bmatrix} \quad (44)$$

Una vez calculados estos parámetros, se puede encontrar la catenaria del cable reemplazando en las ecuaciones (39) y (40), de la siguiente manera.

$$\mathbf{p}(s) = [\xi(s/L_0), \eta(s/L_0)]L_0 \quad (45)$$

4.2. Incorporación de álgebras hipercomplejas en el cálculo de la catenaria elástica

Se utiliza el método de Newton-Raphson adaptado a álgebras hipercomplejas (sección 3.2) para calcular las derivadas de la catenaria con respecto a los parámetros conocidos como propiedades elásticas y físicas del cable, los puntos de apoyo, las magnitudes de las cargas verticales y sus puntos de aplicación. Con este fin, se debe realizar una perturbación al parámetro o parámetros deseados respecto a los cuales se quieren calcular derivadas. Por ejemplo, si se quiere calcular las derivadas de la catenaria $\mathbf{p}(s)$ con respecto al parámetro A_0 , éste se perturba así,

$$A_0^* = A_0 + h\alpha_1 \quad (46)$$

La solución \mathbf{x}_s^* del sistema de Newton-Raphson sería hipercompleja y contiene la información de las derivadas de las reacciones adimensionalizadas respecto al parámetro perturbado en sus direcciones imaginarias.

$$\mathbf{x}_s^* = \begin{bmatrix} \chi^* \\ \phi^* \end{bmatrix} \quad (47)$$

éstos valores se reemplaza en la ecuación (45) con la cual se obtiene valores hipercomplejos que contienen las derivadas en sus direcciones imaginarias.

$$\mathbf{p}_{,A_0}(s) \approx \frac{\text{Im}_{\alpha_1}[\mathbf{p}^*(s)]}{h} \quad (48)$$

Nótese también que es posible extraer las derivadas de las reacciones R_x y R_{0y} respecto A_0 debido a que en su forma adimensional (χ^* y ϕ^*) son números hipercomplejos perturbados en la base imaginaria α_1 .

$$R_{x,A_0}(s) \approx \frac{\text{Im}_{\alpha_1}[\chi^*W]}{h} \quad (49)$$

Como se describió en la sección 2.2, es posible generar MORs de los resultados hipercomplejos. En este caso, es posible aproximar la catenaria y la reacción para nuevos valores de A_0 de la siguiente manera

$$\mathbf{p}(s)|_{A_0+\Delta A_0} \approx \text{MOR}(\mathbf{p}^*(s), \Delta A_0) \quad (50)$$

$$R_x(s)|_{A_0+\Delta A_0} \approx \text{MOR}(R_x^*(s), \Delta A_0) \quad (51)$$

De manera similar, es posible generar MORs de acuerdo a la sección 2.2 para los demás parámetros del sistema de la catenaria del cable elástico.

5. Caso de estudio: catenaria de un cable suspendido y sometido a una carga vertical

5.1. Descripción

Se aplicó la metodología desarrollada para la solución del caso de estudio propuesto en [21], el cual consiste en el cálculo de la catenaria elástica de un cable (ver figura 4) que esta definido por los parámetros consignados en la tabla 1. En dicho estudio, el cable es sometido bajo la acción de su propio peso W y de una carga vertical f_v actuando en la coordenada Lagrangiana del cable sin deformar $s_f = 0.33$ [m]. Dado lo anterior, se encontró la catenaria $\mathbf{p}(s)$ y la posición final del punto de aplicación de la carga vertical $\mathbf{p}(s_f)$ como resultado de la deformación. El problema anterior se resolvió mediante un código de Python 3.6 utilizando una librería para el uso de álgebra multidual y OTI [3]. El software implementó las funciones descritas para el método de Newton-Raphson y el cálculo del Jacobiano con números hipercomplejos. Para todas las evaluaciones realizadas, la tolerancia de convergencia del método de Newton-Raphson se configuró como $\varepsilon = 1 \times 10^{-14}$ y la solución inicial $\mathbf{x}_0 = [0.275, 0.275]$. Para $f_v = 9.8$ [N], la convergencia se alcanzó en 8 iteraciones.

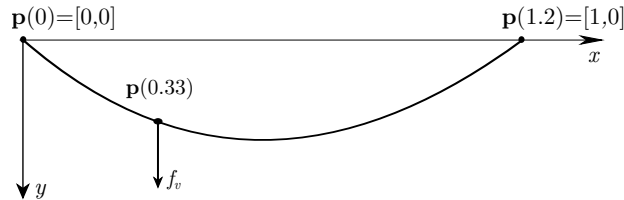


Figura 4: Esquema de un cable suspendido de dos puntos con una carga vertical.

5.2. Comportamiento en algunos modelos de orden reducido

Para una carga vertical $f_v = 9.8$ [N], se evaluó el comportamiento de la metodología al desarrollar varios MORs (ver sección 2.2) de la fuerza de reacción R_x respecto a cada uno de los parámetros E , A_0 , L_0 , l y f_v . Cada MOR se generó a partir de la solución del sistema de ecuaciones de la catenaria al perturbar el parámetro de interés en 10 direcciones imaginarias (ver ecuación (10)). El resultado hipercomplejo R_x^*

Descripción	Símbolo	Valor	Unidades
Distancia horizontal entre soportes	l	1.00	[m]
Distancia vertical entre soportes	h	0.00	[m]
Longitud sin deformar	L_0	1.20	[m]
Área de la sección transversal sin deformar	A_0	1.58×10^{-6}	[m ²]
Módulo de elasticidad	E	1.00×10^{11}	[N/m ²]
Peso total	W	50.00	[N]

Tabla 1: Parámetros generales del problema del cable suspendido.

contiene efectivamente las derivadas de hasta orden 10 de la fuerza de reacción R_x respecto al parámetro perturbado. Se comparan los MORs truncando la serie de Taylor hasta ordenes 1, 2, 3, 4, 5, 7 y 10. Para cada orden, se varió el parámetro perturbado y se calculó el error relativo

$$\text{Error relativo} = \frac{|g_{trad.} - g_{MOR}|}{|g_{trad.}|} \quad (52)$$

en donde $g_{trad.}$ es el resultado de volver a solucionar el sistema de ecuaciones de la catenaria evaluada en el nuevo valor del parámetro y g_{MOR} es la evaluación del MOR de R_x^* en la perturbación del parámetro de interés.

En la figura 5a se muestra el comportamiento del error del MOR de R_x respecto al parámetro E y de igual manera para el parámetro A_0 en la figura 5b. Éstas figuras se observan similares debido a que ambos parámetros se encuentran únicamente como denominador en la variable β . Se puede observar un comportamiento no simétrico al variar el parámetro perturbado en dirección positiva y negativa. Para alcanzar errores del orden de 10^{-3} basta con modelos de primer orden variando el parámetro en un 100% en la dirección positiva y 75% en la negativa. Usando orden 10 es posible alcanzar errores de 10^{-6} realizando una variación de 50% en ambas direcciones.

En la figura 6a se grafica el comportamiento del error del MOR de R_x respecto a la distancia horizontal l . Se observa una tendencia en todas las figuras anteriores en cuanto a que con ordenes mayores, se alcanzan errores menores, sin embargo, en este caso la variación debe ser menor al 15% para alcanzar un error 10^{-1} en modelos de orden 3 en adelante. Cabe notar que en este problema, un porcentaje de aumento de 20% de la distancia l horizontal entre soportes iguala a la longitud L_0 , y para porcentajes mayores, el sistema no tiene solución. Por otro lado, en la figura 6b se muestra el comportamiento del error del MOR de R_x respecto a la longitud inicial del cable L_0 . En esta gráfica se observa un comportamiento similar al que se presenta cuando se varía el parámetro l . Se alcanzan errores relativos cercanos a 10^{-1} con tan solo variar 15% en ambas direcciones, inclusive en el MOR con orden de truncamiento 10.

En la figura 7 se grafica el comportamiento del error del MOR de R_x respecto a la magnitud de la carga vertical f_v . Se observa que al variar ésta magnitud, se alcanzan errores mucho menores a los calculados en las gráficas anteriores. Con orden 10 se pueden alcanzar errores de 10^{-8} realizando una variación de 100% en ambas direcciones.

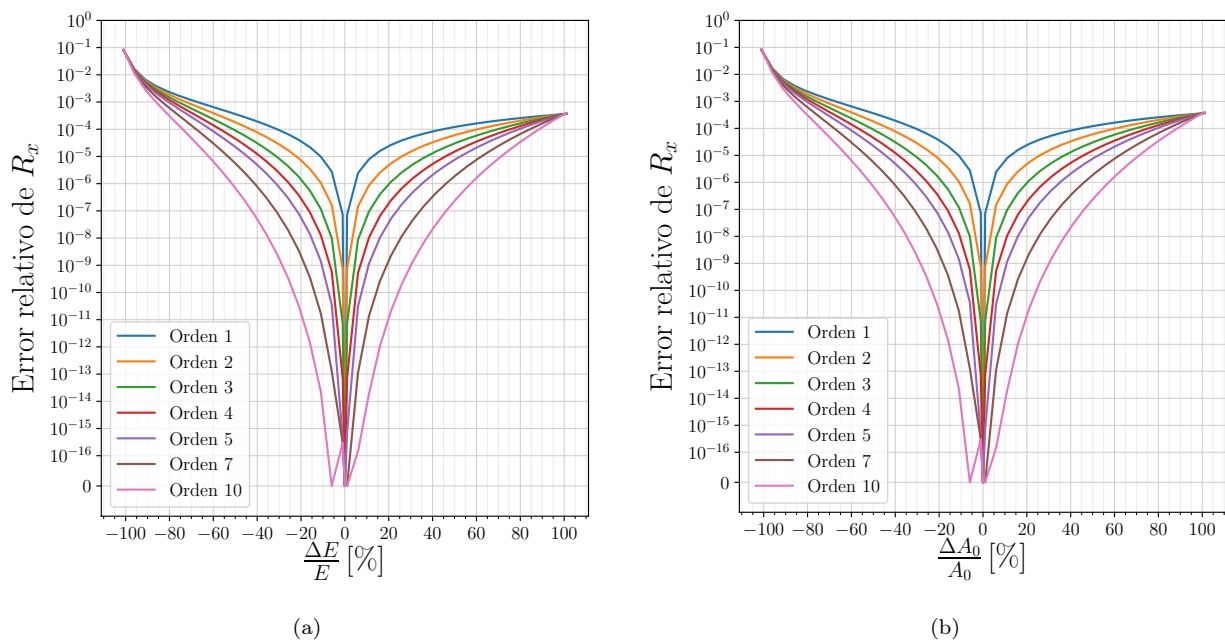


Figura 5: Comportamiento del error relativo de los modelos de orden reducido de la reacción horizontal R_x respecto a (a) el módulo de elasticidad E y (b) la sección transversal A_0 , para modelos con diferentes ordenes de truncamiento.

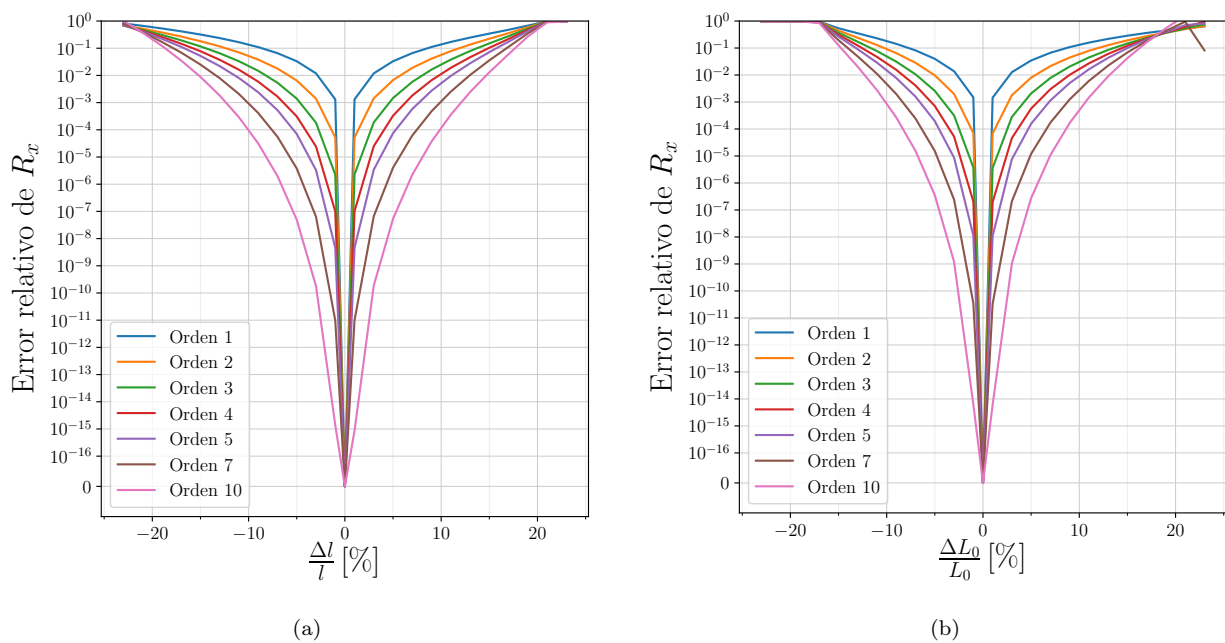


Figura 6: Comportamiento del error relativo de los modelos de orden reducido de la reacción horizontal R_x respecto a (a) la distancia horizontal entre soportes l y (b) la longitud inicial L_0 , para modelos con diferentes ordenes de truncamiento.

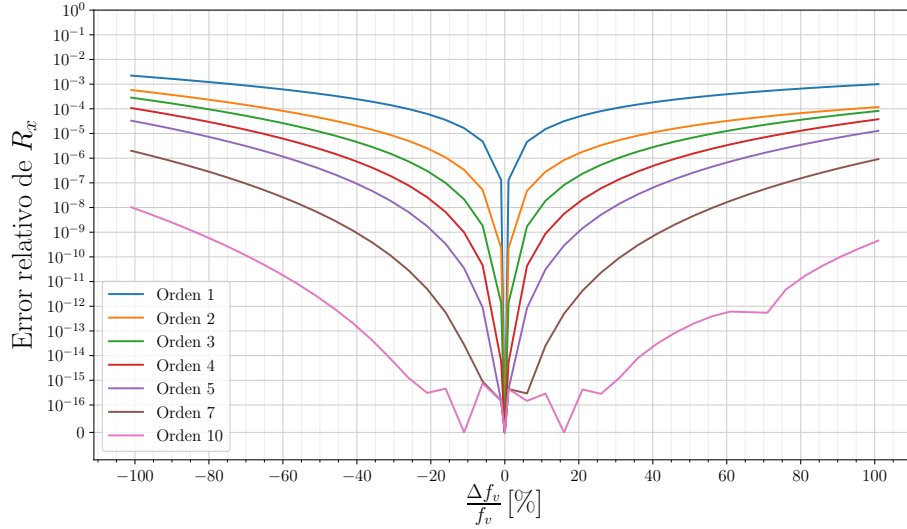


Figura 7: Error relativo de la reacción horizontal R_x para el modelo de orden reducido respecto a la magnitud de la carga f_v para diferentes ordenes.

5.3. Cálculo de la catenaria completa del cable

El objetivo de esta sección es evaluar el comportamiento del MOR de la catenaria del cable respecto a la magnitud de la fuerza vertical f_v . El MOR se generó a partir de una única solución del sistema de ecuaciones de la catenaria para $f_v = 9.8$ [N]. Se calcularon derivadas de hasta orden 10 mediante la perturbación de la magnitud de la fuerza como se muestra en la ecuación (53).

$$f_v^* = f_v + h \left(\sum_{j=1}^{10} \alpha_j \right) \quad (53)$$

La solución del sistema de ecuaciones generó una catenaria hipercompleja $\mathbf{p}^*(s)$, la cual contiene sus derivadas respecto a f_v hasta orden 10. Con éstas se generó un MOR que aproxima la catenaria del mismo cable bajo una carga de diferente magnitud

$$\mathbf{p}(s)|_{f_v+\Delta f_v} \approx \text{MOR}(\mathbf{p}^*(s), \Delta f_v) \quad (54)$$

En la figura 8 se muestra el comportamiento del error relativo (ver ecuación (52)) de los MORs del punto de aplicación de la fuerza $\mathbf{p}(s_f)$ respecto a la magnitud de la carga, truncados hasta orden 10. Se observa que se obtienen errores menores a 10^{-2} en para cualquier orden de truncamiento al variar el 100% de la magnitud de la carga tanto al incrementarla como al disminuirla.

$$\text{Error relativo} = \frac{\left\| \mathbf{p}(s_f)|_{f_v+\Delta f_v} - \text{MOR}(\mathbf{p}^*(s_f), \Delta f_v) \right\|}{\left\| \mathbf{p}(s_f)|_{f_v+\Delta f_v} \right\|} \quad (55)$$

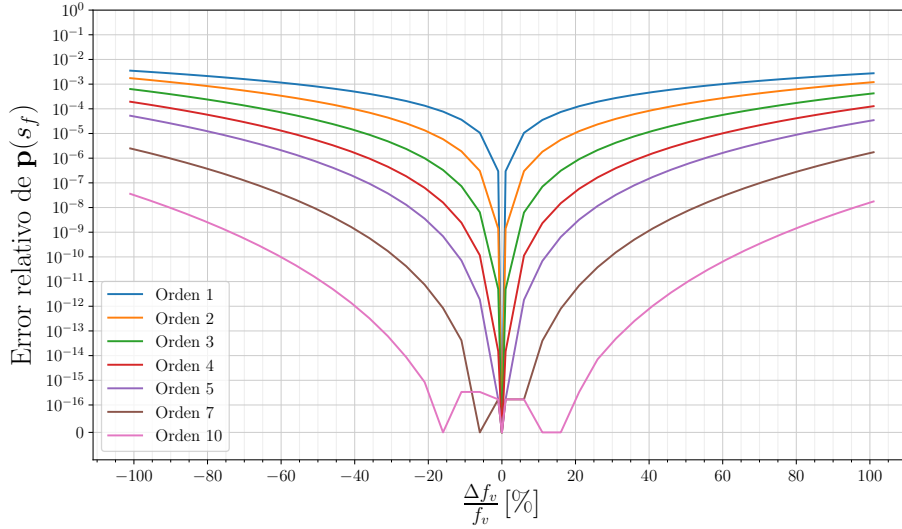


Figura 8: Error relativo de la reacción horizontal $\mathbf{p}(s_f)$ para el modelo de orden reducido respecto a la magnitud de la carga f_v para diferentes ordenes.

En particular, el MOR de la catenaria completa $\mathbf{p}(s)$ se evaluó para los casos extremos descritos en la figura 8, $\Delta f_v = -9.8$ [N] (-100%) y $\Delta f_v = 9.8$ [N] ($+100\%$) con un orden de truncamiento igual a 2. Por lo tanto, tres estados de carga fueron evaluados: estado de carga 0 con $f_v = 0$ [N], estado de carga 1 con $f_v = 9.8$ [N] y estado de carga 2 con $f_v = 19.6$ [N]. En la figura 9, se representa la catenaria completa del cable calculada mediante la solución del sistema de ecuaciones en cada estado de carga y el MOR evaluado en las perturbaciones antes descritas.

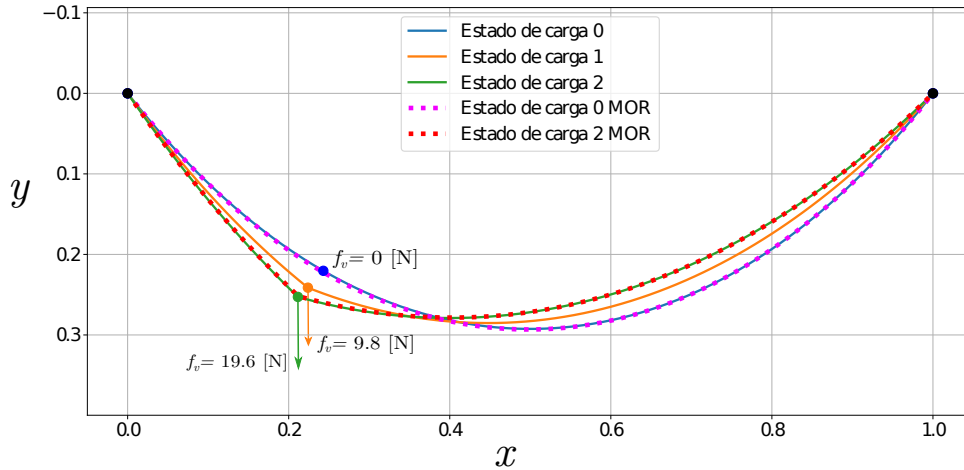


Figura 9: Resultado de caso de referencia calculado con álgebra hipercompleja.

6. Discusión

Se desarrolló el método de Newton-Raphson con álgebras hipercomplejas para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales con el objetivo de permitir el cálculo de derivadas de manera precisa y sencilla. Las

álgebras hipercomplejas eliminan la necesidad de seleccionar el tamaño de paso h (en contraste a diferencias finitas) ya que éstas eliminan el error de cancelación por substracción, permitiendo el cálculo de derivadas con precisión de máquina. Igualmente, el uso de estas álgebras elimina la necesidad de realizar el cálculo analítico de derivadas requeridas por el método, lo que simplifica su implementación.

Se aplicó el método en el cálculo de la catenaria elástica de un cable sometido a una carga vertical. Se utilizó álgebra multidual, pero el método es general y cualquier otra álgebra hipercompleja puede utilizarse (ver sección 2). Se utilizó el álgebra para calcular el Jacobiano del método de Newton-Raphson, el cual generó resultados similares a los obtenidos mediante el método de las diferencias finitas, con la diferencia que el tamaño de paso utilizado es $h = 1$ para cualquier problema. Igualmente, se calcularon derivadas de hasta orden 10 respecto a varios parámetros del problema, las cuales se utilizaron para la generación de modelos de orden reducido (MORs) al producir polinomios que aproximaban el comportamiento del cable.

Los MORs generados en este documento presentaron comportamientos diferentes respecto a las variables perturbadas. El MOR respecto a la fuerza vertical f_v aplicada mostró un comportamiento favorable en cuanto a que derivadas de orden 3 fueron suficientes para generar un MOR capaz de comprender una perturbación del 100 % del valor de la fuerza con un error relativo del orden 10^{-4} o menor. De la misma manera, los MORs respecto a la sección transversal A_0 y el módulo de elasticidad E permiten una variación del 75 % del valor de la variable para obtener un error relativo de la misma magnitud. Sin embargo, se observó que las variables geométricas: la longitud inicial del cable L_0 y la distancia horizontal entre soportes l ; solo permiten una variación de hasta el 4 % del valor de dichas variables para generar un error relativo de orden 10^{-4} o menor. Esto se debe a que el comportamiento de la catenaria es altamente no polinómica respecto a las variables geométricas, y debido a que se consideran deformaciones pequeñas en la formulación del problema. Esto genera un comportamiento singular al evaluar valores en los que $L_0 < l$, los cuales son difíciles de reproducir en una aproximación polinómica. Es de esperarse que modelos generados con derivadas de orden superior mejoren el comportamiento del MOR. Es posible igualmente generar MOR de varias variables al calcular las derivadas mixtas de alto orden con las álgebras hipercomplejas.

Con un solo MOR con orden de truncamiento igual a 2 fue posible representar la catenaria completa del cable para estados de carga significativamente diferentes. Solo se requirió la solución de un solo sistema de ecuaciones no lineales para encontrar las derivadas necesarias para la evaluación del polinomio. La metodología tradicional requiere de una solución del sistema de ecuaciones cada vez que un nuevo valor de un parámetro del problema es requerido, lo que conlleva a un uso significativamente mayor de recursos computacionales. Una ventaja del MOR es que se obtiene el comportamiento alrededor del punto evaluado en vez de tener una única 'fotografía' del cable en el nuevo parámetro.

Cabe mencionar que el modelo de catenaria presentado en este documento es un modelo específico para deformación en el plano (x, y) bajo cargas verticales. Sin embargo, el método es general y es posible utilizarlo para el análisis de cables con deformaciones y cargas en cualquier dirección (3D). Igualmente, es posible utilizar la metodología para el cálculo de arreglos de múltiples cables o redes de cables. El método de Newton-Raphson adaptado a álgebras hipercomplejas puede utilizarse para otros problemas siempre y cuando el sistema de ecuaciones sea conocido y éste pueda convertirse a operaciones equivalentes en el álgebra hipercompleja de elección.

7. Conclusiones

Este artículo presentó la incorporación novedosa de las álgebras hipercomplejas en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales mediante el método de Newton-Raphson. La gran ventaja del método desarrollado sobre el método tradicional es que las álgebras hipercomplejas permiten el cálculo de las derivadas (Jacobiano) sin error de substracción por cancelación y son fáciles de utilizar. Igualmente, más allá de las derivadas requeridas por el método, el uso de álgebras hipercomplejas permite calcular derivadas de alto orden respecto a cualquier parámetro del problema. Estas pueden usarse, por ejemplo, para la generación de modelos de orden reducido (MORs).

El método desarrollado se utilizó en el cálculo de la catenaria de un cable elástico sometido a una carga vertical. Se generaron MORs respecto a variables de diferentes naturalezas, tanto geométricas como propiedades elásticas del cable y magnitud de la carga aplicada. Cada MOR se generó mediante una sola solución del sistema de ecuaciones no lineales al perturbar la variable de interés en ciertas direcciones imaginarias. Cada resultado hipercomplejo se utilizó para aproximar la solución de la catenaria para un nuevo valor del parámetro de interés sin tener que volver a resolver de nuevo un sistema de ecuaciones, simplificando considerablemente los requerimientos computacionales. La eficacia de cada MOR depende del comportamiento de cada variable, debido a que algunos parámetros produjeron MORs con menor error que otros.

El error de aproximación del MOR se reduce al aumentar el orden de derivada calculado, lo cual implica que las derivadas calculadas tienen una precisión adecuada. Esto igualmente genera que el MOR aproxime la catenaria del cable en una región más amplia del parámetro de interés.

Como trabajo futuro, se sugiere la integración del método desarrollado al método de elementos finitos hipercomplejo ZFEM [31] para el cálculo de problemas no lineales que involucren la catenaria elástica de cables. Por ejemplo el análisis de vibraciones debido a cargas móviles y viento. Igualmente la aplicación del método desarrollado para otros problemas que involucren la solución de sistemas de ecuaciones no lineales.

Referencias

- [1] Andres M Aguirre-Mesa, Manuel J Garcia, and Harry Millwater. Multiz: A library for computation of high-order derivatives using multicomplex or multidual numbers. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 46(3):1–30, 2020.
- [2] Andres M Aguirre-Mesa, Daniel Ramirez-Tamayo, Manuel J Garcia, Arturo Montoya, and Harry Millwater. A stiffness derivative local hypercomplex-variable finite element method for computing the energy release rate. *Engineering Fracture Mechanics*, 218:106581, 2019.
- [3] Mauricio Aristizabal. *Order truncated imaginary algebra for computation of multivariable high-order derivatives in finite element analysis*. PhD thesis, Universidad EAFIT, 2020.
- [4] Mauricio Aristizabal, Daniel Ramirez-Tamayo, Manuel Garcia, Andres Aguirre-Mesa, Arturo Montoya, and Harry Millwater. Quaternion and octonion-based finite element analysis methods for computing multiple first order derivatives. *Journal of Computational Physics*, 397:108831, 2019.
- [5] H Thomas Banks, Kidist Bekele-Maxwell, Lorena Bociu, Marcella Noorman, and Giovanna Guidoboni. Local sensitivity via the complex-step derivative approximation for 1d poro-elastic and poro-visco-elastic models. *Mathematical Control & Related Fields*, 9(4):623, 2019.

- [6] Adi Ben-Israel. A newton-raphson method for the solution of systems of equations. *Journal of Mathematical analysis and applications*, 15(2):243–252, 1966.
- [7] Matthew S Bonney, Daniel C Kammer, and Matthew RW Brake. Fully parameterized reduced order models using hyper-dual numbers and component mode synthesis. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, volume 57181, page V008T13A021. American Society of Mechanical Engineers, 2015.
- [8] MRW Brake, Jeffrey A Fike, and Sean D Topping. Parameterized reduced order models from a single mesh using hyper-dual numbers. *Journal of Sound and Vibration*, 371:370–392, 2016.
- [9] Radek Bulín, Michal Hajžman, and Pavel Polach. Nonlinear dynamics of a cable–pulley system using the absolute nodal coordinate formulation. *Mechanics Research Communications*, 82:21–28, 2017.
- [10] Laura I Cerviño and Thomas R Bewley. On the extension of the complex-step derivative technique to pseudospectral algorithms. *Journal of Computational Physics*, 187(2):544–549, 2003.
- [11] Avraham Cohen and Moshe Shoham. Application of hyper-dual numbers to multibody kinematics. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 8(1), 2016.
- [12] A Cunha, E Caetano, P Ribeiro, and G Müller. Analysis of nonlinear effects in a carrying rope of cableway subjected to moving load. *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamic*, 2014.
- [13] Randal Fielder, Arturo Montoya, Harry Millwater, and Patrick Golden. Residual stress sensitivity analysis using a complex variable finite element method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 133:112–120, 2017.
- [14] Jeffrey Fike and Juan Alonso. The development of hyper-dual numbers for exact second-derivative calculations. In *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, page 886, 2011.
- [15] Jeffrey Fike, Sietse Jongsma, Juan Alonso, and Edwin Van Der Weide. Optimization with gradient and hessian information calculated using hyper-dual numbers. In *29th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, page 3807, 2011.
- [16] Jeffrey Alan Fike. *Multi-objective optimization using hyper-dual numbers*. PhD thesis, Stanford university, 2013.
- [17] Ignacio García-Fernández, Marta Pla-Castells, and Rafael J Martínez-Durá. Elevation cable modeling for interactive simulation of cranes. In *Symposium on Computer Animation*, pages 173–181, 2008.
- [18] Leopoldo Greco, Nicola Impollonia, and Massimo Cuomo. A procedure for the static analysis of cable structures following elastic catenary theory. *International Journal of Solids and Structures*, 51(7-8):1521–1533, 2014.
- [19] Klaus Hofman. Oscillation effects of ropeways caused by cross-wind and other influences. *FME Transactions*, 37(4):175–184, 2009.
- [20] Nicola Impollonia, Giuseppe Ricciardi, and Fernando Saitta. Statics of elastic cables under 3d point forces. *International Journal of Solids and Structures*, 48(9):1268–1276, 2011.

- [21] HM Irvine and GB Sinclair. The suspended elastic cable under the action of concentrated vertical loads. *International Journal of Solids and Structures*, 12(4):309–317, 1976.
- [22] I. L. Kantor and A. S. Solodovnikov. *Hypercomplex numbers: an elementary introduction to algebras*. Springer, 1989.
- [23] BW Kim, HG Sung, SY Hong, and Hyung-Jo Jung. Finite element nonlinear analysis for catenary structure considering elastic deformation. *CMES-COMPUTER MODELING IN ENGINEERING & SCIENCES*, 63:29–45, 2010.
- [24] Ravi Kiran, Lei Li, and Kapil Khandelwal. Complex perturbation method for sensitivity analysis of nonlinear trusses. *Journal of Structural Engineering*, 143(1):04016154, 2017.
- [25] Gregory Lantoiné, Ryan P Russell, and Thierry Dargent. Using multicomplex variables for automatic computation of high-order derivatives. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 38(3):1–21, 2012.
- [26] Randall J LeVeque. Finite difference methods for differential equations. *Draft version for use in AMath*, 585(6):112, 1998.
- [27] Joaquim RRA Martins, Peter Sturdza, and Juan J Alonso. The complex-step derivative approximation. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 29(3):245–262, 2003.
- [28] Jann Paul Mattern, Christopher A Edwards, and Christopher N Hill. Dual number-based variational data assimilation: Constructing exact tangent linear and adjoint code from nonlinear model evaluations. *PloS one*, 14(10):e0223131, 2019.
- [29] Arturo Montoya and Harry Millwater. Sensitivity analysis in thermoelastic problems using the complex finite element method. *Journal of Thermal Stresses*, 40(3):302–321, 2017.
- [30] R Petrova, S Dechkova, Pl Petrov, et al. Mathematical simulation of cross-wind vibrations in a mono-cable chair ropeway. *Procedia Engineering*, 14:2459–2467, 2011.
- [31] Daniel Ramirez-Tamayo, Matthew Balcer, Arturo Montoya, and Harry Millwater. Mixed-mode stress intensity factors computation in functionally graded materials using a hypercomplex-variable finite element formulation. *International Journal of Fracture*, 226(2):219–232, 2020.
- [32] Daniel Ritzberger, Emir Talic, and Alexander Schirrer. Efficient simulation of railway pantograph/catenary interaction using pantograph-fixed coordinates. *IFAC-PapersOnLine*, 48(1):61–66, 2015.
- [33] Ahmed A Shabana. Computer implementation of the absolute nodal coordinate formulation for flexible multibody dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 16(3):293–306, 1998.
- [34] Masato Tanaka, Takashi Sasagawa, Ryuji Omote, Masaki Fujikawa, Daniel Balzani, and Jörg Schröder. A highly accurate 1st-and 2nd-order differentiation scheme for hyperelastic material models based on hyper-dual numbers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283:22–45, 2015.
- [35] M Tur, E García, L Baeza, and FJ Fuenmayor. A 3d absolute nodal coordinate finite element model to compute the initial configuration of a railway catenary. *Engineering Structures*, 71:234–243, 2014.

- [36] David Wagner, Manuel J Garcia, Arturo Montoya, and Harry Millwater. A finite element-based adaptive energy response function method for 2d curvilinear progressive fracture. *International Journal of Fatigue*, 127:229–245, 2019.