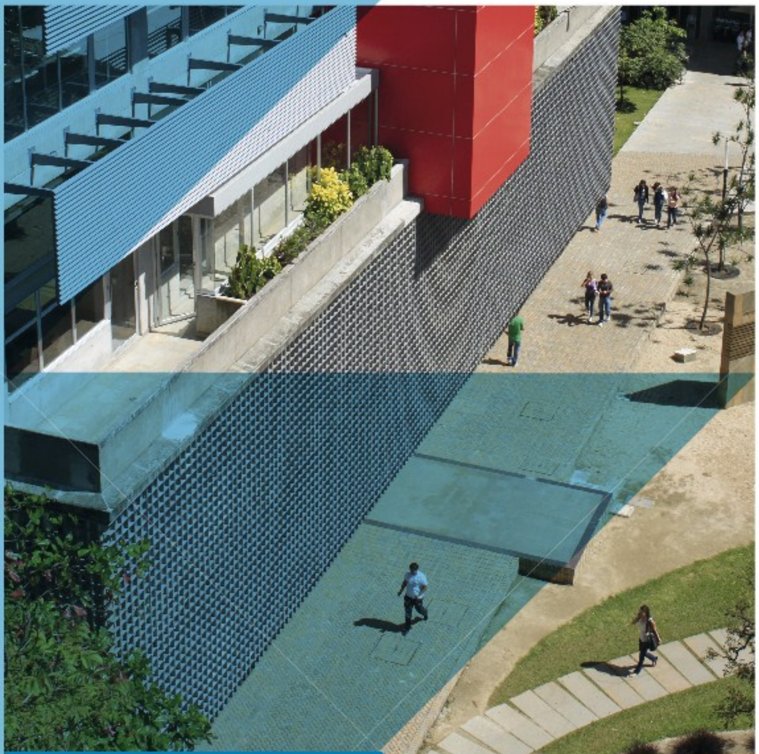

UNIVERSIDAD EAFIT
Abierta al mundo

Escuela de Economía y Finanzas

# Documentos de trabajo
## Economía y Finanzas

Centro de Investigación Económicas y Financieras

No. 17-03
2017

# La Macroeconomía Dinámica: Un Modelo Numérico Didáctico

*Carlos Esteban Posada P.*

cief
Centro de Investigaciones Económicas y Financieras
Universidad EAFIT

# La Macroeconomía dinámica: un modelo numérico didáctico

Carlos Esteban Posada P.[1]

Resumen

Es usual que la enseñanza de la Macroeconomía dinámica en los cursos universitarios de pregrado se apoye exclusivamente en exposiciones en prosa supuestamente intuitivas y en gráficos que representan comportamientos de estados estables de los principales mercados de la economía. Pero cuando se discuten los casos de agentes que "miran hacia adelante", las intuiciones *a priori* y sus representaciones gráficas ofrecidas a los estudiantes pueden generar conclusiones confusas o carentes de respaldo lógico. Esto sucede incluso si el profesor y sus estudiantes recurren al capítulo de Macroeconomía dinámica de uno de los textos más didácticos y ordenados: el de Williamson (2014). En este documento intento demostrar esto.

*Abstract*

*Teaching Dynamic Macroeconomics at undergraduate university courses relies exclusively on intuitive prose and graphics depicting behaviors and steady states of the main markets of the economy. But when the case of "forward-looking" agents and the macroeconomic implications of their actions are discussed, a priori intuitions and graphical representations offered to students may be misleading and may lead to confusing or unsupported conclusions. This happens even if the professor and his students use the chapter of Dynamic Macroeconomics of one of the most didactic and ordered texts ever published: Williamson (2014). In this paper I try to show this assertion.*

Palabras claves (*Key Words*): enseñanza de macroeconomía; cursos de pregrado; modelos dinámicos; conclusiones ilógicas; modelos numéricos.

*Key words: Teaching Macroeconomics; undergradute courses; dynamic models; unsupported conclusions; numerical models.*

Clasificación JEL (*JEL Classification System*): A22; C30; E17.

[1] Profesor, Escuela de Economía y Finanzas, Universidad EAFIT. Dirección: cposad25@eafit.edu.co
Comentarios bienvenidos.

## I. Introducción

En su texto *Macroeconomics,* Williamson (2014) expone la versión en gráficos y prosa de un modelo macroeconómico inter-temporal (dos períodos: presente y futuro)[2]. Este es uno de los aportes más importantes de su texto y, quizás, el componente principal de su ventaja comparativa frente a otros textos de pregrado de Macroeconomía. Pero el autor no presenta una versión matemática de este modelo ni siquiera en el apéndice matemático.

Tal omisión obliga al lector a tratar de aplicar el modelo jugando, usualmente, con desplazamientos simultáneos de 2 curvas (oferta y demanda) en 2 planos (mercados laboral y del producto), cada uno de 2 dimensiones. Los resultados de tales juegos dependen de las intensidades de los desplazamientos de las distintas curvas, y en algunas ocasiones no es claro porque se aplica mayor o menor intensidad a unos u otros. Por lo demás, bastaría con mencionar que el lector solo puede apreciar gráficamente lo que sucede en, apenas, 4 variables endógenas del período presente, quedando ocultos los movimientos y niveles de las restantes 21 variables endógenas.

Hasta donde alcanza mi conocimiento no existe una versión matemática del modelo que pueda ayudar a su entendimiento y hacer simulaciones numéricas tanto para las variables endógenas del período presente como para las del futuro. El objetivo de este documento es presentar una versión algebraica y numérica de este modelo. El documento tiene 6 secciones, siendo esta la primera. En la sección II se describen las características generales del modelo; en la III se discute una propuesta para lograr una especificación completa del modelo con base en unas funciones de oferta laboral; en la sección IV se presenta el modelo macroeconómico y su solución; la V contiene una calibración y los resultados de ejercicios numéricos, y en la VI se concluye.

## II. Características básicas del modelo

El modelo es una representación simplificada del paradigma de una economía cerrada descentralizada en la que actúan agentes representativos racionales, plenamente informados y con previsión perfecta (hogares similares, empresas homogéneas y gobierno), que son, considerados cada uno de manera individual, tomadores de precio (mercados competitivos) y que funciona de manera eficiente sin la ayuda de políticas económicas ni de otras intervenciones estatales. El modelo describe situaciones de equilibrio estable de una economía que tiene 5 mercados que funcionan perfectamente, a saber: laboral presente, laboral futuro, de producto presente, de producto futuro y de crédito. Pero este quinto mercado no juega papel importante alguno (el sistema crediticio es "pasivo" o "complaciente"). El equilibrio de los primeros 4 mercados implica que el quinto (el de crédito) también lo estará. Las variables exógenas del modelo son 6: gasto público presente,

[2] Quinta edición; en las ediciones anteriores el capítulo correspondiente es el 10.

gasto público futuro, capital del (inicio del) período presente, productividad multifactorial del período presente, productividad multifactorial del período futuro y tasa de depreciación del capital. Las variables endógenas son 25. El núcleo del modelo es un conjunto de 12 ecuaciones (y 12 variables endógenas), y el equilibrio de la economía se puede entender como el conjunto de los valores de equilibrio de las variables endógenas consistentes con las situaciones en las cuales todos los agentes optimizan, sujetándose a restricciones, con información perfecta, y todos los mercados se "vacían" (se equilibran). Si se supone que los impuestos (y subsidios) son de suma fija (y, por tanto, que no inciden en los incentivos), los resultados del equilibrio general serán equivalentes a los de un óptimo de Pareto (para una economía centralizada sujeta a las órdenes del planeador central). La presente versión contempla solo un impuesto (en cada período); éste recae sobre los hogares, y es de suma fija.

Una vez solucionado el núcleo del modelo (y conocidos, entonces, los valores de equilibrio de sus variables endógenas), las restantes 13 variables endógenas se pueden conocer de una manera directa y fácil: apelando a su respectiva ecuación.

Puesto que el núcleo del modelo describe, entre otras cosas, el funcionamiento de solo 4 mercados "activos" (cada uno para una sola mercancía: producto presente, producto futuro, empleo presente y empleo futuro), entonces tiene en cuenta 3 precios relativos: el salario real presente, el salario real futuro y la tasa de interés real. Estos 3 precios inciden y contribuyen al equilibrio de los 4 mercados "activos"; la tasa de interés real de equilibrio, que se determina como los otros 2 precios relativos en el núcleo del modelo, contribuye al equilibrio de los 4 mercados activos y al del mercado de crédito.

## III. La oferta laboral

De las 12 ecuaciones del núcleo, 10 son definiciones, restricciones presupuestales, funciones que expresan hipótesis de tipo estándar (como la función de producción representativa, con rendimientos constantes con respecto a la escala de producción y marginales positivos pero decrecientes) y condiciones de óptimo. Pero hay 2 ecuaciones que son distintas a las enunciadas: estas son funciones o hipótesis *ad hoc*, en aras de la sencillez y de respetar un "umbral mínimo" de pertinencia, a saber: las funciones de oferta laboral presente y futura. A continuación se presentan y justifican, hasta donde fue posible, esta funciones.

Empezaremos suponiendo que la función de utilidad del hogar típico depende, entre otros argumentos, de las cantidades de ocio presente y ocio futuro (*l, l´*), y que, por simplicidad, adopta esta forma:

$$u(l, l', \ldots) = lnl + \beta lnl'; 0 < \beta < 1 \qquad (III.1)$$

Su maximización se sujeta a las siguientes restricciones:

$$c = w(h - l) + \pi - t - s \qquad (III.2)$$

$$c' = w'(h - l') + \pi' - t' + (1 + r)s \qquad (III.3)$$
$$t + \frac{t'}{1 + r} = g + \frac{g'}{1 + r} \qquad (III.4)$$
Siendo $\beta$ el factor de descuento de la utilidad futura, *c* y $c'$ los consumos presente y futuro del hogar, *h* el tiempo disponible de la familia para distribuir entre ocios presente y futuro (*l, l´*) y trabajo (asalariado), $w$ y w´ los salarios reales presente y futuro, $\pi$ y $\pi'$ los montos presente y futuro de los dividendos que recibe la familia, *t* y $t'$ los impuestos presente y futuro, $r$ es la tasa de interés real, *s* es el ahorro (que solo se hace en el primer período) y $g, g'$ los gastos públicos presente y futuro por familia (la restricción III.4 implica que el hogar típico es "ricardiano"). De los resultados de la maximización sujeta a las restricciones III.2, III.3 y III.4 resultan los niveles óptimos de ocio presente y futuro. Reemplazando el nivel óptimo de ocio futuro en la restricción presupuestal inter-temporal que se deriva de III.2, III.3 y III.4 se deduce, a su turno, un nivel óptimo de ocio presente (teniendo en cuenta, entonces, el nivel óptimo de ocio futuro). Y puesto que la oferta laboral es la diferencia entre el tiempo total disponible (para ocio y trabajo) y el tiempo óptimo de ocio presente, resulta que esta es:
$$h - l = h\left(1 - \frac{1}{1 + \beta}\right) - h\left(\frac{1}{1 + \beta}\right)\frac{w'}{w(1 + r)}$$
$$+\left(\frac{1}{1 + \beta}\right)\frac{1}{w}\left(c + \frac{c'}{1 + r} - \pi - \frac{\pi'}{1 + r} + g + \frac{g'}{1 + r}\right) \quad (III.5)$$

La ecuación diferencial que podría derivarse de III.5 no es, para los ejercicios de las próximas secciones, de utilidad práctica[3]. Pero si es útil tener en cuenta las principales características de esta función.

Lo que encierra el último paréntesis del lado derecho es la diferencia entre el valor presente de la suma de los consumos presente y futuro y el valor presente de la suma de los ingresos no laborales netos de impuestos. Esta diferencia debe ser equivalente, según la restricción presupuestal inter-temporal, a la suma del valor presente de los ingresos laborales del hogar, que resulta del tiempo ofrecido en el mercado laboral y del salario.

A continuación separaremos los ingresos de los hogares, netos de impuestos, en dos clases de componentes: los que son exógenos para el hogar y el tiempo laboral vendido por el hogar, que es igual a su tiempo laboral ofrecido.

Resulta entonces que la función III.5 implica que:
$$h - l = f(h, w, w', r, g, g', \pi, \pi') \qquad (III.6)$$
$$tal\ que:$$
$$f_h > 0;\ f_{w'} < 0;\ f_g > 0; 0 < f_{g'} < f_g;\ f_\pi < 0;\ f_{\pi'} < 0;\ |f_{\pi'}| < |f_\pi|$$

[3] Y con mayor razón si utilizáramos funciones de utilidad menos sencillas u horizontes con un mayor número de períodos futuros.

Tanto el salario presente como la tasa de interés tienen efectos sustitución e ingreso de signos contrarios. Si suponemos, siguiendo a Williamson, que los efectos sustitución para ambas variables son dominantes, entonces:

$$f_w > 0;\ f_r > 0$$

De nuevo, para tener una ecuación diferencial sencilla (lineal con respectos a sus argumentos) a fin de representar de manera práctica las variaciones de la oferta laboral del conjunto de los *N* hogares (cada uno ofreciendo cantidades de fuerza laboral perfectamente divisibles), supondremos (restringiéndonos a la ecuación III.6 y a la hipótesis de dominancia de los efectos sustitución) que:

$$\sum_{i=1}^{N}(h-l)_i \equiv N^s = N^s(w, w', r, G, G', \Pi, \Pi')\,, tal\ que:$$

$$N_w^s > 0;\ N_{w'}^s < 0;\ |N_{w'}^s| < N_w^s\,;$$
$$N_r^s > 0;\ N_G^s > 0;\ N_{G'}^s > 0;$$
$$N_{G'}^s < N_G^s;\ \ N_\Pi^s < 0;\ |N_\Pi^s| = N_G^s;\ N_{\Pi'}^s < 0;\ |N_{\Pi'}^s| = N_{G'}^s$$

Así que:

$$dN^s = N_w^s dw + N_{w'}^s dw' + N_r^s dr + N_G^s dG + N_{G'}^s dG' + N_\Pi^s d\Pi + N_{\Pi'}^s d\Pi'$$

Siendo $\Pi, \Pi'$ los montos agregados presente y futuro de los ingresos no laborales. Estos no corresponden exactamente a los dividendos que reciben en cada período las familias pero tal discrepancia no es grave por lo siguiente: las empresas captan el ingreso no laboral, son propiedad de las familias y reparten dividendos teniendo en cuenta el ingreso no laboral.

Queda por describir la función de oferta laboral futura.

De las condiciones de primer orden de la maximización de la utilidad se deduce el nivel óptimo del ocio futuro:

$$l' = \beta l \frac{w(1+r)}{w'} \qquad (III.7)$$

Esta condición y la discusión previa justifican la siguiente hipótesis:

$$\sum_{i=1}^{N'}(h-l')_i = N^{s'}(w', G', \Pi')\,;\quad N_{w'}^{s'} > 0, N_{G'}^{s'} > 0, N_{\Pi'}^{s'} < 0$$

En la sección V se discutirá una razón para restringir aún más los coeficientes que miden la respuesta de las ofertas laborales presente y futura a los gastos públicos presente y futuro.

## IV. El sistema matricial y su solución

Con las aclaraciones previas puede decirse que el núcleo del modelo de Williamson es el siguiente conjunto de 12 ecuaciones[4]:

[4] La forma de presentación utilizada aquí sigue la del capítulo 1 de Sargent (1987).

$$w = zF_N(K, N) \qquad (IV.1)$$

$$N = N^s(w, w', r, G, G', \Pi, \Pi') \qquad (IV.2)$$

$$Y = zF(K, N) \qquad (IV.3)$$

$$\Pi = Y - wN \qquad (\mathrm{IV}.4)$$

$$\Pi' = Y' - w'N' \qquad (IV.5)$$

$$w' = z'F_N(K', N') \qquad (IV.6)$$

$$N' = N^{s'}(w', G', \Pi') \qquad (IV.7)$$

$$Y' = z'F(K', N') \qquad (IV.8)$$

$$r = z'F_{K'} - \delta \qquad (IV.9)$$

$$K' = Y - C + (1 - \delta)K - G \qquad (IV.10)$$

$$C = \frac{C'}{\beta(1 + r)} \qquad (IV.11)$$

$$C' = Y' + (1 - \delta)K' - G' \qquad (IV.12)$$

Las ecuaciones IV.11 y IV.12 se refieren a los consumos presente y futuro agregados. El consumo futuro se deduce por una restricción presupuestal tomada como igualdad (ecuación IV.12) y el consumo presente (ecuación IV.11) se deriva de una de las condiciones de primer orden de la maximización de la utilidad del hogar representativo sujeta a las restricciones ya vistas (suponiendo la siguiente función de utilidad: $u = lnc + \beta lnc'$), a saber: la ecuación de Euler.

De lo anterior se deriva el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$dw - zF_{NN}dN = F_N dz + zF_{NK}dK \qquad (IV.I)$$

$$dN - N_w^s dw - N_{w'}^s dw' - N_r^s dr - N_\Pi^s d\Pi - N_{\Pi'}^s d\Pi' = N_G^s dG + N_{G'}^s dG' \qquad (IV.II)$$

$$dY - zF_N dN = F(K, N)dz + zF_K dK \qquad (IV.III)$$

$$d\Pi - dY + wdN + Ndw = 0 \qquad (IV.IV)$$

$$d\Pi' - dY' + w'dN' + N'dw' = 0 \qquad (IV.V)$$

$$dw' - z'F_{N'K'}dK' - z'F_{N'N'}dN' = F_{N'}\, dz' \qquad (IV.VI)$$

$$dN' - N_{w'}^{s'} dw' - N_{\Pi'}^{s'} d\Pi' = N_{G'}^{s'} dG' \qquad (IV.VII)$$

$$dY' - z'F_{K'}dK' - z'F_{N'}dN' = F(K', N')dz' \qquad (IV.VIII)$$

$$dr - z'F_{K'K'}dK' - z'F_{K'N'}dN' = F_{K'}dz' - d\delta \qquad (IV.IX)$$

$$dK' - dY + dC = (1 - \delta)dK - Kd\delta - dG \qquad (IV.X)$$

$$dC - \frac{1}{\beta(1+r)}dC' = 0 \qquad (IV.XI)$$

$$dC' - dY' - dK' = -K'd\delta - dG' \qquad (IV.XII)$$

La ecuación IV.XI es una aproximación que pareces aceptable[5].

En términos matriciales el sistema anterior es:

$$\boldsymbol{AdX = d\Omega}$$

Siendo ***A*** la matriz:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-zF_{NN}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $-N_w^s$ | *1* | *0* | $-N_{\Pi}^s$ | $-N_{\Pi'}^s$ | $-N_{w'}^s$ | *0* | *0* | $-N_r^s$ | *0* | *0* | 0 |
| *0* | $-zF_N$ | *1* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | 0 |
| *N* | *w* | *-1* | *1* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | 0 |
| *0* | *0* | *0* | *0* | *1* | *N´* | *w´* | *-1* | *0* | *0* | *0* | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $-z'F_{N'N'}$ | 0 | 0 | $-z'F_{N'K'}$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | $-N_{\Pi'}^{s'}$ | $-N_{w'}^{s'}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-z'F_{N'}$ | 1 | 0 | $-z'F_{K'}$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-z'F_{K'N'}$ | 0 | 1 | $-z'F_{K'K'}$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{\beta(1+r)}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 |

Y siendo los vectores-columna los siguientes:

$\boldsymbol{dX}$ = $[dw, dN, dY, d\Pi, d\Pi', dw', dN', dY', dr, dK', dC, dC']'$ $y$ $\boldsymbol{d\Omega} =$

$$\begin{bmatrix} F_N dZ + zF_{NK}dK, N_G^s dG + N_{G'}^s dG', Fdz + zF_k dK, 0{,}0, F_{N'}dz', N_{G'}^{s'}dG', Fdz', F_{K'}dz' - d\delta, \\ (1-\delta)dK - Kd\delta - dG, 0, -dG' - K'd\delta \end{bmatrix}'$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$\boldsymbol{dX = A^{-1}d\Omega}$$

---

[5] La ecuación diferencial que corresponde a la ecuación IV.11 es: $dC = \frac{1}{\beta(1+r)}dC' - \frac{C'}{\beta(1+r)^2}dr$ . Pero esta ecuación generaría cambios absurdamente grandes en el consumo presente ante un cambio de la tasa de interés, aún si éste fuese relativamente pequeño. Por lo tanto, se utiliza la aproximación IV.XI.

Las restantes variables endógenas (las de la "periferia") son 13: consumos presente y futuro del hogar representativo ($c, c'$), utilidad del hogar ($u$), impuestos presente y futuro del hogar y del conjunto de los hogares ($t, t', T, T'$), ocios presente y futuro del hogar y del conjunto de los hogares ($l, l', L, L'$) y dividendos presente y futuro percibidos por el hogar ($\pi, \pi'$).

Como se mencionó antes, una vez solucionado el sistema del núcleo, conocer estas últimas variables es fácil; por ejemplo, el consumo futuro del hogar es el cociente entre el consumo agregado total futuro ($C'$) y el número futuro de hogares, en tanto que el consumo presente del hogar es el cociente entre el consumo presente total ($C$) y el número presente de hogares. De una manera similar se encuentran las demás variables endógenas periféricas.

**V. Calibración y ejemplos**

A continuación se presenta un ejercicio de aplicación numérica del núcleo del modelo. El cuadro 1 contiene la información básica para la calibración. Se refiere a la economía de Estados Unidos de 2007/2008.

| **Cuadro 1. Un estado estable inicial (antes de choques)**<br>Cifras de la economía de Estados Unidos de 2007/8, tomadas de Williamson (2014)<br>Valores en billones de dólares del año 2000 | | |
|---|---|---|
| Función de producción | $F = K^{0,36}N^{0,64}$ | 1283,33 |
| PIB (anual) | $Y = zF$ | 11023,79 |
| Variable de escala o tecnológica | $z = z'$ | 8,59 |
| Capital | $K$ | 35910,4 |
| Empleo (millones de personas) | $N$ | 197 |
| Gasto público (compras de PIB) | $G = G'$ | 2320 |

El cuadro 2 presenta los valores de variables y parámetros que corresponden, supuestamente, a un estado estable y que son requeridos para la estimación de los efectos de diversos choques.

| **Cuadro 2**<br>Demás variables y<br>parámetros requeridos para los cálculos,<br>y principales variables endógenas<br>del estado estable inicial | |
|---|---|
| $F_K$ | 0,013504075 * |
| $F_{KK}$ | -2,40671E-07 * |
| $F_{KN}$ | 4,38711E-05 * |
| $F_N$ | 4,169313155 * |
| $F_{NK}$ | 2,67502E-05 * |
| $F_{NN}$ | -0,007619049 * |
| $N_w^s$ | 0,1 |
| $N_{w'}^s = N_{w'}^{s'}$ | -0,005 |
| $N_\Pi^s$ | -0,02 |
| $N_{\Pi'}^s = N_{\Pi'}^{s'}$ | -0,01 |
| $N_r^s$ | 0,05 |
| $N_G^s$ | 0,02 |
| $N_{G'}^s = N_{G'}^{s'}$ | 0,01 |
| $\delta$ | 0,05 |
| $w = zF_N$ | 35,8 (miles de dólares de 2000) |
| $Y/N$ | 55,96 (miles de dólares) |
| $r = z' F_K - \delta$ | 0,066 |
| $\beta$ | 0,9381 |
| $z$ | 8,59 |
| C | 8488,3 (billones de dólares) |
| C´ | 8488,3 (billones de dólares) |
| K´ | 34330,4 (billones de dólares) |
| * Evaluados en el estado estable inicial | |

Ejercicio 1: aumento de los gastos públicos presente y futuro

El primer ejercicio de aplicación del sistema $\boldsymbol{dX = A^{-1}d\Omega}$ consiste en suponer un incremento permanente (un "choque permanente") del gasto público, esto es, un aumento de 460 billones de dólares del gasto público tanto en el presente como en el futuro es decir, hacer que éste pase de 2320 a 2784 billones (aumento de 20%).

En este caso el vector $\boldsymbol{d\Omega}$ queda así (valores en billones de dólares de 2000):

| | |
|---|---|
| $F_N dz + zF_{NK}dK$ | 0 |
| $N_G^S dG + N_{G'}^S dG'$ | 13,8 |
| $Fdz + zF_K dK$ | 0 |
| 0 | 0 |
| 0 | 0 |
| $F_{N'}dz'$ | 0 |
| $N_{G'}^{S'} dG'$ | 4,6 |
| $Fdz'$ | 0 |
| $F_{K'}dz' - d\delta$ | 0 |
| $(1-\delta)dK - dG - Kd\delta$ | -460 |
| 0 | 0 |
| $-dG' - K'd\delta$ | -460 |

Y el resultado (el vector $\boldsymbol{dX}$) es:

| | |
|---|---|
| dw | -0,683638994 |
| dN | 10,44558752 |
| dY | 374,1024497 |
| dΠ | 134,6768819 |
| dΠ´ | 59,37613723 |
| dw´ | -0,237237077 |
| dN´ | 4,007424813 |
| dY´ | 156,1639483 |
| dr | 0,00128493 |
| dK´ | 108,9692507 |
| dC | -194,866801 |
| dC´ | -194,866801 |

Por tanto, el cambio de la inversión y los multiplicadores de los gastos públicos presente y futuro son:

| | |
|---|---|
| dI = dK´ | 108,9692507 |
| dY/dG | 0,813266195 |
| dY´/dG´ | 0,339486844 |
| dN/dG | 0,022707799 |
| dN´/dG´ | 0,008711793 |

Cabe una aclaración: estos resultados y, específicamente, los multiplicadores de gasto público, son altamente sensibles a los valores supuestos de los parámetros $N_G^s\ y\ N_{G'}^s$. Si, por ejemplo, suponemos que $N_G^s \geq 0{,}027$, permaneciendo iguales los valores de los demás parámetros a los del cuadro 2, el multiplicador del gasto público (referido al PIB presente) será mayor que 1.

¿Por qué se escogió, entonces, un valor para $N_G^s$ inferior a 0,027? El modelo macroeconómico de un solo período que guarda la relación más cercana con el presente modelo y que comparte el mismo enfoque teórico (agentes optimizadores, información perfecta y mercados que se vacían con precios flexibles), que es el modelo expuesto en el capítulo 5 de Williamson (2014), genera necesariamente, por teoría, un multiplicador del gasto público mayor que 0 y menor que 1. Adicionalmente, el mismo Williamson considera que su modelo macroeconómico dinámico (el expuesto en el cap. 11) implica un multiplicador menor que 1[6] .

Dado esto, lo lógico es imponer al valor del mencionado parámetro una restricción sobre su nivel máximo para evitar que el multiplicador del gasto público sea mayor o igual a 1.

<u>Ejercicio 2: aumento del gasto público presente, dejando constante el gasto público futuro</u>

El siguiente ejercicio consiste en calcular el impacto de un aumento del gasto público presente dejando constante el gasto público futuro.

En este caso, el vector $\boldsymbol{d\Omega}$ queda así:

| | |
|---|---|
| $F_N dz + zF_{NK} dK$ | 0 |
| $N_G^S dG + N_{G'}^S dG'$ | 9,2 |
| $F dz + zF_K dK$ | 0 |
| 0 | 0 |
| 0 | 0 |
| $F_{N'} dz'$ | 0 |
| $N_{G'}^{S'} dG'$ | 0 |
| $F dz'$ | 0 |
| $F_{K'} dz' - d\delta$ | 0 |
| $(1-\delta)dK - dG - Kd\delta$ | -460 |
| 0 | 0 |
| $-dG' - K' d\delta$ | 0 |

Y el resultado es:

[6] *"…the equilibrium increase in current output must be less than the increase in government spending. The total multiplier is less than 1, …* (p. 411).

| | |
|---|---|
| dw | -0,479274965 |
| dN | 7,323029605 |
| dY | 262,2699115 |
| $d\Pi$ | 94,41716814 |
| $d\Pi´$ | -5,916166831 |
| dw´ | -0,025583176 |
| dN´ | 0,059289584 |
| dY´ | -8,832631616 |
| dr | 0,000217604 |
| dK´ | -94,44872845 |
| dC | -103,2813601 |
| dC´ | -103,2813601 |

Por tanto, el cambio de la inversión y los multiplicadores del gasto público presente son:

| | |
|---|---|
| dI=dK´ | -94,44872845 |
| dY/dG | 0,570151982 |
| dN/dG | 0,022707799 |

En este caso, el multiplicador del gasto público (referido al PIB) es menor.

La principal razón de la diferencia entre los resultados de ambos ejercicios es la siguiente: en el primer caso la presión fiscal percibida por las familias es mayor, así que la función de oferta laboral se desplaza (de manera positiva) con mayor intensidad y, entonces, cae mucho más el salario real presente; los niveles presente y futuro de empleo crecen mucho más, y esto genera mayor inversión en el presente. Tanto en el primer caso como en el segundo la tasa de interés real permanece prácticamente constante (un resultado diferente al supuesto por Williamson y que él lo ilustra en el gráfico 11.22 [p. 410]).

Ejercicio 3: previsión de una mejora técnica

El choque consiste en un aumento futuro (previsto hoy) del factor tecnológico $z´$ en una unidad. El vector $\boldsymbol{d\Omega}$ queda así:

| | |
|---|---|
| $F_N dz + zF_{NK} dK$ | 0 |
| $N_G^S dG + N_{G´}^S dG´$ | 0 |
| $Fdz + zF_K dK$ | 0 |
| 0 | 0 |
| 0 | 0 |
| $F_{N´} dz´$ | 4,16931315 |
| $N_{G´}^{S´} dG´$ | 0 |
| $Fdz´$ | 1283,32801 |
| $F_{K´} dz´ - d\delta$ | 0,01350407 |
| $(1-\delta)dK - dG - Kd\delta$ | 0 |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $-dG' - K'd\delta$ | 0 |

Y el resultado es:

| | |
|---|---|
| dw | 0,193521331 |
| dN | -2,956888086 |
| dY | -105,8991727 |
| $d\Pi$ | -38,12370215 |
| $d\Pi'$ | 371,7991684 |
| dw´ | 4,277728818 |
| dN´ | -3,739380328 |
| dY´ | 1080,588083 |
| dr | 0,013321331 |
| dI=dK´ | -593,2436277 |
| dC | 487,3444551 |
| dC´ | 487,3444551 |

Las familias son dueñas de las empresas; el choque las hace (más) optimistas así que sus consumos presente y futuro aumentan y, como se perciben más ricas (medido en valor presente su ingreso permanente aumenta), reducen su oferta de fuerza laboral; el salario real sube y el empleo cae tanto en el presente como en el futuro. Al caer el empleo cae, entonces, el PIB presente. La tasa de interés aumenta y la inversión cae. El producto futuro aumenta gracias al cambio técnico.

<u>Ejercicio 4: una mejora técnica presente</u>

Ahora el “choque” es el aumento del factor $z$ en el presente en una unidad. En este caso el vector $\boldsymbol{d\Omega}$ queda así:

| | |
|---|---|
| $F_N dz + zF_{NK}dK$ | 4,16931315 |
| $N_G^S dG + N_{G'}^S dG'$ | 0 |
| $Fdz + zF_K dK$ | 1283,32801 |
| 0 | 0 |
| 0 | 0 |
| $F_{N'}dz'$ | 0 |
| $N_{G'}^{S'} dG'$ | 0 |
| $Fdz'$ | 0 |
| $F_{K'}dz' - d\delta$ | 0 |
| $(1-\delta)dK - dG - Kd\delta$ | 0 |
| 0 | 0 |
| $-dG' - K'd\delta$ | 0 |

Y el resultado es:

| | |
|---|---|
| dw | 4,641887893 |
| dn | -7,220654224 |
| dy | 1024,724608 |
| $d\Pi$ | 368,8760914 |
| $d\Pi'$ | 30,66018825 |
| dw´ | 0,132583312 |
| dN´ | -0,307264799 |
| dY´ | 45,77459625 |
| dr | -0,001127718 |
| dI=dK´ | 489,4750058 |
| dC | 535,249602 |
| dC´ | 535,249602 |

En este caso el aumento del producto presente es muy superior al aumento del consumo; por tanto, aumenta el ahorro de las familias, cae la tasa de interés y esto estimula la inversión; en el futuro el capital (el inicial del período futuro) será mayor y, entonces, caerán la productividad marginal futura (esperada hoy) del capital y, por ende, la tasa de interés real.

Ejercicio 5: un aumento de la tasa de depreciación

Se supone que la tasa de depreciación aumenta en un punto porcentual (pasa de 5% a 6%). El vector $\boldsymbol{d\Omega}$ queda así:

| | |
|---|---|
| $F_N dz + zF_{NK} dK$ | 0 |
| $N_G^s dG + N_{G'}^s dG'$ | 0 |
| $Fdz + zF_K dK$ | 0 |
| 0 | 0 |
| 0 | 0 |
| $F_{N'} dz'$ | 0 |
| $N_{G'}^{s'} dG'$ | 0 |
| $Fdz'$ | 0 |
| $F_{K'} dz' - d\delta$ | -0,01 |
| $(1-\delta)dK - Kd\delta - dG$ | -359,104 |
| $C_G dG + C_{G'} dG'$ | 0 |

Y el resultado es:

| | |
|---|---|
| dw | -0,000217551 |
| dN | 0,003324052 |
| dY | 0,119048938 |
| dΠ | 0,042857618 |

| | |
|---|---|
| $d\Pi'$ | -0,469195223 |
| $dw'$ | -0,002028933 |
| $dN'$ | 0,004702097 |
| $dY'$ | -0,700492174 |
| $dr$ | -0,009982742 |
| $dK'$ | -7,490473732 |
| $dC$ | -351,4944773 |
| $dC'$ | -351,4944773 |

$$dI = dY - dC = dK' + Kd\delta = 351{,}6135263$$

Las familias anticipan la pérdida de riqueza pues son accionistas de las empresas; aumentan, en consecuencia, su oferta de fuerza de trabajo (y, entonces, el PIB presente) y reducen su consumo; los efectos del mayor nivel de empleo y del aumento de la tasa de depreciación acrecientan la inversión bruta, pero el efecto positivo de la mayor inversión bruta es demasiado pequeño sobre el capital futuro en comparación con el efecto negativo directo que tiene el aumento de la tasa de depreciación sobre el capital futuro; por tanto, éste cae y, entonces, se reduce el producto futuro. De nuevo, la tasa de interés real tiene un movimiento (a la baja) que se apoya en hechos reales.

## VI. Conclusiones

Según el modelo expuesto, la evolución de la economía puede tener fases más o menos intensas o más o menos prolongadas en función no solo del cambio técnico presente sino también del cambio técnico previsto hoy para el futuro, y del impacto que tenga el propio cambio técnico sobre la tasa de depreciación del capital. Para poner una parte de esta conclusión en términos más concretos tratemos de interpretar los dos principales hechos estilizados recientes de las economías de Estados Unidos, la Unión Europea y Japón a la luz del modelo. Estos dos hechos son el lento crecimiento del producto y la caída de la tasa de interés real. El modelo puede dar cuenta, *grosso modo*, de estos hechos con una combinación de dos choques: un cambio técnico presente positivo pero débil acompañado de una expectativa <u>pesimista</u> sobre el cambio técnico futuro. Desde este punto de vista, el papel de la política monetaria ha sido “facilitar” (aunque de manera exagerada) el proceso de reducción tendencial de la tasa de interés real.

Y en cuanto al tema pedagógico, un modelo numérico de equilibrio general inter-temporal es una herramienta muy útil para el aprendizaje de la Macroeconomía dinámica aún en cursos de nivel de pregrado.

## Referencias

Sargent, T. 1987. *Macroeconomic Theory (Second Edition)*. Academic Press, Orlando (Fla.).

Williamson, S. 2014. *Macroeconomics (Fifth Edition)*. Pearson, Boston (Ma.).