

ESTUDIO NUMÉRICO DEL MODELO DE HESTON: MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

FABIO NELSON SORA ARCOS.

MYRIAM JANNETH URIZA SUAREZ.

Trabajo de Investigación presentado como requisito parcial para optar el título de
Magister en Matemáticas Aplicadas.

Director:

Prof. Msc. FREDDY HERNÁN MARÍN SÁNCHEZ.

UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Medellin, Noviembre de 2013

Índice general

1. PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO	6
1.1. Movimiento Browniano	6
1.1.1. Movimiento Browniano Estándar Unidimensional	7
1.2. Integrales Estocásticas	7
1.3. La Fórmula de Itô	10
1.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	12
1.4.1. Existencia y Unicidad de las Soluciones	13
1.4.2. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas Lineales	14
1.5. Método de Aproximación de Euler	18
1.6. Teorema de Cameron-Martin-Girsanov	20
1.7. Teorema de Girsanov	20
1.8. Descomposición de Cholesky	20
2. MODELO DE HESTON	23
2.1. Modelo de Black-Scholes	23
2.1.1. Opción Call Europea	24
2.1.2. Valoración de Riesgo Neutral	25
2.1.3. Portafolio Libre de Riesgo	25
2.1.4. Deducción de la Ecuación Diferencial de Black-Scholes- Merton	25
2.2. Descripción del Modelo de Heston	27
2.3. Deducción de la Ecuación en Derivadas Parciales de Heston	29
2.4. Solución Analítica del Modelo de Heston	32
3. MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS	33
3.1. Derivadas de Funciones de Una Variable	33
3.2. Derivadas de Funciones de Varias Variables	35
4. SOLUCIONES NUMÉRICAS DEL MODELO DE HESTON	40
4.1. Esquema en Diferencias Finitas Compacto de Orden Superior	40
4.2. Esquema Explícito de Diferencias Finitas	41
4.3. Esquema ADI	43
5. SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON	45
5.1. Introducción	45
5.2. Transformación del Problema	45
5.3. Construcción del Esquema Numérico	47
5.4. Análisis del Esquema	50
5.4.1. Positividad de los Coeficientes	50
5.4.2. Extrapolación y Positividad de las Fronteras	53
5.4.3. Positividad del Interior	54
5.4.4. Positividad de las Fronteras	55
5.4.5. Monotonicidad del Interior	56
5.4.6. Monotonicidad de las Fronteras	58
5.4.7. Consistencia del Esquema	59
5.4.8. Estabilidad del Esquema	60
5.4.9. Convergencia del Esquema	61
6. RESULTADOS NUMÉRICOS EXPERIMENTALES	62
6.1. Valoración de Opciones Call Europeas	62
CONCLUSIONES	69
Bibliografía	70

INTRODUCCIÓN

El modelo central de la teoría de valoración de opciones es el modelo Black-Scholes (1973), cuyas hipótesis configuran un escenario ideal, en el que es posible la negociación continua, en mercados perfectos, en los que el tipo de interés libre de riesgo es constante y el precio del activo subyacente se comporta como una variable aleatoria que sigue un proceso estocástico conocido como Movimiento Browniano Geométrico. Sin embargo, algunos estudios empíricos han demostrado que estas consideraciones no son realistas y no explican un impacto significativo en los mercados financieros, tales como los cambios en la volatilidad. Existen modelos más sofisticados que incorporan la volatilidad como una variable aleatoria que se configura como un segundo factor de riesgo; dentro de esta clase de modelos, que se conocen como modelos de volatilidad estocástica, la obra más representativa es el modelo Heston (1993).

El objetivo principal de este trabajo es hacer una descripción de las soluciones numéricas de este modelo y proponer un esquema numérico alternativo en diferencias finitas explícito que sea positivo, monótono-conservativo, estable, consistente y convergente, que permita resolver numéricamente el modelo de Heston a bajo costo computacional y de fácil implementación.

Este trabajo está organizado como sigue. En el capítulo 1 se presentan algunos preliminares del cálculo estocástico, como son el Movimiento Browniano, integrales estocásticas, y la fórmula de Itô entre otros. En el capítulo 2 realiza la descripción de los modelos de Black-Scholes, Heston y se realiza la deducción de la ecuación en derivadas parciales que representa el precio de una opción en ambos modelos.

El capítulo 3 corresponde al Método de Diferencias Finitas, aquí se explican las características del método y describen las fórmulas de aproximación para primeras y segundas derivadas parciales que se usaran en el capítulo 5. En el capítulo 4 se presentan y analizan algunas de las soluciones numéricas bajo el esquema en diferencias finitas que se han planteado para resolver el modelo de Heston.

En el capítulo 5 se construye una ecuación en derivadas parciales equivalente a la del modelo de Heston haciendo uso de una transformación especial que permite pasar de una ecuación en derivadas parciales con siete términos a una con cinco términos; posteriormente se resuelve la nueva ecuación mediante el método de diferencias finitas, se obtiene el esquema numérico que se usará para aproximar la solución. Al esquema obtenido se le realizan análisis de positividad y monotonía; del mismo modo se establece que el esquema es consistente, estable y convergente. Finalmente en el capítulo 6 se presentan algunos resultados numéricos experimentales para la valoración de opciones Call Europeas sobre activos que no pagan dividendos para diferentes fechas de expiración, con valores positivos y negativos para la correlación de los movimientos Brownianos.

Dedicatoria

Quiero dar gracias a Dios por permitirme alcanzar un escalón más en las metas y sueños que tengo en mi vida, a la memoria de mi esposo Raúl, a mi hija Mawency por su paciencia en el tiempo no compartido, a mi madre Aurelia porque significa fortaleza en el diario vivir , a cada uno de mis hermanos: Jorge, Cons, Juli, Jaime, Patty, Nubi, Sandri, y Hugo porque sin lugar a duda siempre fueron voz de aliento y confianza en todos y cada uno de aquellos momentos en los que se piensa que no se lograra.

Myriam

Sin la existencia de un ser Supremo, que nos fortalece y nos llena de fuerzas para salir adelante, sería demasiado complicada nuestra existencia; por este motivo y en primer lugar quiero agradecer a Dios que me ha concedido tantas satisfacciones durante mi vida; gracias por permitirme culminar esta etapa rodeado de las personas que más quiero. Este nuevo logro se lo dedico a mis padres por la confianza y apoyo que siempre me han brindado, a mis hermanos: Adriana, Víctor y Andrea por ser incondicionales y dar siempre una voz de aliento, a mis sobrinas por ser ángeles que Dios puso para llenarme de alegría día a día. A mis amigos Jorge, Daniel y Wilmer por tantas cosas compartidas. Por último, a Maria Luciana, mi hermosa hija a quien pronto tendré en mis brazos y será mi razón de vivir y seguir luchando.

Fabio.

Agradecimientos

Sea este el momento para agradecer a cada uno de los profesores de la Maestría en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT de Medellín por compartir su conocimientos , pero un agradecimiento muy especial al profesor Magister Freddy Marín por su paciencia, tiempo, apoyo, confianza y compartir su conocimiento en este proceso, pues sin Él esto hoy no sería posible; a Fabio por ser ese amigo incondicional.

Myriam.

En el desarrollo de este trabajo prestaron colaboración varias personas que de una u otra forma hicieron aportes, los cuales fueron de gran utilidad para la culminación del mismo, a todos ellos mil gracias. Expreso mi agradecimiento a los docentes de la Maestría en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT de Medellín y a todos los que han contribuido en mi crecimiento académico, de manera muy especial expreso un profundo agradecimiento al profesor Magister Freddy Marín por los aportes realizados durante este largo proceso, por su tiempo y paciencia ya que sin su entrega este trabajo no hubiese llegado a feliz término. A mi compañera Myriam por todo lo compartido durante esta lucha.

Fabio.

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

En este capítulo se presentarán algunos conceptos fundamentales de la teoría del cálculo estocástico, cuya aplicación ha sido útil en áreas importantes del conocimiento como la física, la demografía, la economía y las finanzas entre otros. En el primer fragmento se presentarán algunas definiciones, teoremas y resultados importantes del Movimiento Browniano teniendo en cuenta sus propiedades. Igualmente se definirá la integral estocástica, la fórmula de Itô y se presentarán las ecuaciones diferenciales estocásticas y los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones; se incluye también la fórmula estocástica de Liouville y la fórmula de variación de las constantes aplicadas a las ecuaciones lineales escalares, en sentido estricto y autónomas.

También se hará una presentación del esquema de aproximación de Euler que es un método numérico usado en la solución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas, cuando estas no se pueden resolver explícitamente.

Posteriormente se hace una descripción del teorema de Cameron-Martin-Girsanov y el teorema de Girsanov los cuales son herramienta fundamental en la valuación teórica de muchos productos derivados, de la teoría financiera, los modelos económicos y su desarrollo. Finalmente se presenta la descomposición de Cholesky usada para simular sistemas con variables múltiples correlacionadas.

1.1. Movimiento Browniano

El Movimiento Browniano es un movimiento aleatorio descubierto en 1827 por el botánico escocés Robert Brown. Mientras se encontraba investigando sobre la suspensión de partículas de polen en una solución acuosa, observó en el microscopio que las partículas de polen tenían un movimiento caótico e incesante. En un principio se pensó que este movimiento podía deberse al polen vivo, pero se observó que los granos de polen que habían sido conservados durante siglos también se movían de la misma forma y que las motas de polvo suspendidas en el aire tenían un comportamiento similar, se pueden ver más detalles sobre esto en B. Lavenda (2009). El trabajo de Brown atrajo mucho la atención de otros científicos Europeos, quienes lo criticaron duramente, pues en él se proponía que el movimiento era autoanimado. Sugirieron en cambio todo tipo de explicaciones físicas como, por ejemplo, diferencias de temperatura en el agua iluminada, evaporación, corrientes de aire, flujo de calor, capilaridad, entre otras, para más detalles se puede revisar A. Ermogenous (2006). Debido a la observación del comportamiento caótico de algunas partículas microscópicas que se encontraban en un medio fluido Brown sacó la conclusión de que tal fenómeno es característico de cualquier tipo de suspensiones en el que las partículas suspendidas tengan dimensiones muy pequeñas, en P. Hanggi y F. Marchesoni (2005) se pueden ver más detalles del movimiento browniano.

El famoso físico inglés Michael Faraday defendió las ideas de Brown, señalando que este movimiento no se podía explicar por ninguna de las causas propuestas. Tanto Faraday como Brown admitieron, sin embargo, que no sabían cómo explicar este fenómeno, ver E. Braun (1986).

1.1.1. Movimiento Browniano Estándar Unidimensional

Un proceso estocástico $B = (B_t, t \in [0, \infty])$ se conoce como Movimiento Browniano estándar o Proceso de Wiener Unidimensional si cumple las siguientes condiciones:

1. $B_0 = 0$. El proceso comienza en cero
2. Para cada $t \geq 0$, B_t tiene una distribución normal $N(0, t)$
3. El proceso $\{B_t\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos estacionarios, es decir, $B_t - B_s = B_{t+h} - B_{s+h}$ para toda $s, t \in T$ y para todas $s + h, t + h \in T$
4. El proceso $\{B_t\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos independientes, es decir, para cada elección de $t_i \in T$ con $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ y $n \geq 1$, los incrementos $B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ son variables aleatorias independientes.
5. Para $0 \leq s < t < \infty$, el incremento $B_t - B_s$ sigue una distribución normal $N(0, t - s)$.
6. $\{B_t\}_{t \geq 0}$ tiene trayectorias continuas, "sin saltos" y es en ningún punto diferenciable.

Propiedades importantes del Movimiento Browniano Estándar

1. El Movimiento Browniano Estándar es un proceso Gaussiano.
2. Para toda $K \in \mathbb{Z}^+, t \geq s$ se tiene que:

$$a) E \left[(B_t - B_s)^{2k} \right] = \frac{(2k)!(t-s)^k}{2^k k!}$$

$$b) E \left[(B_t - B_s)^{2k \pm 1} \right] = 0$$

3. El Movimiento Browniano es 0.5-autosimilar, es decir, $(B_{Tt_1}, B_{Tt_2}, \dots, B_{Tt_n}) = (T^{1/2}B_{t_1}, T^{1/2}B_{t_2}, \dots, T^{1/2}B_{t_n})$,

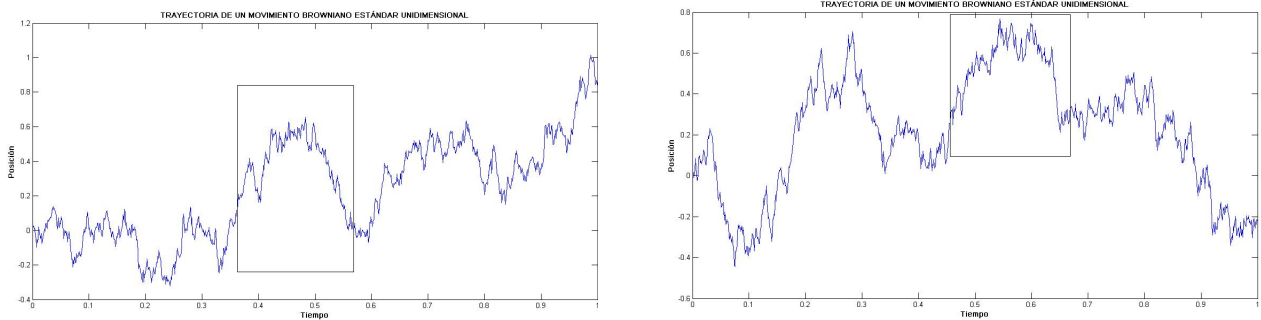


Figura 1.1.1: Movimientos Brownianos Estándar en los cuales se resalta la forma similar a escala para cada uno.

Cuando se habla de autosimilaridad se requiere decir que los patrones a escala de una trayectoria browniana en algún intervalo de tiempo grande o pequeño, conserva una forma similar, pero no son idénticos, ver figura 1.1.1. Para más detalles consulte T.Mikosch (2000).

1.2. Integrales Estocásticas

En esta sección se definirá la integral estocástica $\int_0^t f(s)dB_s$ con respecto al Movimiento Browniano. Como se ha dicho anteriormente, una trayectoria Browniana es en ningún punto diferenciable y la integral no puede

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

ser definida en la forma habitual. Sin embargo, se puede definir la integral para una extensa clase de procesos estocásticos usando la naturaleza estocástica del Movimiento Browniano. Esta integral fue definida por Kiyoshi Itô en 1949, y se conoce como Integral Estocástica de Itô. Para más detalles ver X. Mao, (1997).

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad con una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Sea $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un Movimiento Browniano unidimensional definido sobre el espacio de probabilidad adaptado a la filtración.

Definición 1. Para $0 \leq a < b < \infty$. Se denota por $M^2([a, b]; \mathbb{R})$ al espacio de todos los procesos $f = \{f(t)\}_{a \leq t \leq b}$ medibles y \mathcal{F}_t -adaptados de valor real tales que $\|f\|_{a,b}^2 := E \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) < \infty^2$.

Definición 2. Un proceso estocástico de valor real $g = \{g(t)\}_{a \leq t \leq b}$ se llama *proceso simple*, si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ en $[a, b]$, y variables aleatorias acotadas ξ_i , $0 \leq i \leq k-1$ tal que ξ_i es \mathcal{F}_{t_i} -medible y

$$g(t) = \xi_0 I_{[t_0, t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i I_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (1.2.1)$$

Se denota por $M_0([a, b]; \mathbb{R})$, a la familia de todos estos procesos, donde $M_0([a, b]; \mathbb{R}) \subset M^2([a, b]; \mathbb{R})$.

Definición 3. (Integral de Itô parte I). Para un proceso simple g de la forma 1.2.1 en $M_0([a, b])$, se define la integral de Itô como

$$\int_a^b g(t) dB_t = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Definición 4. (Media cero e Isometría de Itô para procesos simples) Sea $g \in M^2([a, b]; \mathbb{R})$ entonces se tiene que

- i. $E \left[\int_a^b g(t) dB_t \right] = 0$
- ii. $E \left[\int_a^b g(t) dB_t \right]^2 = E \left[\int_a^b |g(t)|^2 dt \right]$

Demostración. i. Como $\xi_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ -medible y además $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ es independiente de \mathcal{F}_{t_i} , $E \left[\int_a^b g(t) dB_t \right]$ es igual a

$$\sum_{i=0}^{k-1} E \left[\xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right] = \sum_{i=0}^{k-1} E \left[\xi_i \right] E \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) = 0$$

ii. Nótese que $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ es independiente de $\xi_i \xi_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ si $i < j$. De este modo

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

$$\begin{aligned}
 E \left| \int_a^b g(t) dB_t \right|^2 &= \sum_{0 \leq i, j \leq k-1} E [\xi_i \xi_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
 \sum_{i=0}^{k-1} E [\xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] &= \sum_{i=0}^{k-1} E (\xi_i)^2 E (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \\
 &= \sum_{i=0}^{k-1} E (\xi_i)^2 E (t_{i+1} - t_i)^2 \\
 &= E \int_a^b |g(t)|^2 dt
 \end{aligned}$$

□

Lema 5. (Linealidad de la integral de Itô). Sean $g_1, g_2 \in M_0([a, b]; \mathbb{R})$ y sean c_1, c_2 dos números reales entonces $c_1 g_1 + c_2 g_2 \in M_0([a, b]; \mathbb{R})$ y

$$\int_a^b [c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)] dB_t = c_1 \int_a^b g_1(t) dB_t + c_2 \int_a^b g_2(t) dB_t$$

Lema 6. Para cualquier $f \in M^2([a, b]; \mathbb{R})$, existen una sucesión $\{g_n\}$ de procesos simples tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt = 0$$

La segunda definición de integral de Itô, que se presentará a continuación hace referencia a una extensión de la integral de Itô de procesos simples $g \in M_0([a, b]; \mathbb{R})$ a procesos más generales $g \in M^2([a, b]; \mathbb{R})$ y está basada en la aproximación.

Definición 7. (Integral de Itô parte II). Sea $f \in M^2([a, b]; \mathbb{R})$. La integral de Itô de f con respecto a $\{B_t\}$ está definida por

$$\int_a^b f(t) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(t) dB_t \tag{1.2.2}$$

Donde $\{g_n\}$ es una sucesión de procesos simples tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt \right] = 0$$

De la definición 1.2.2 el límite se mantiene independiente de la sucesión particular $\{g_n\}$. Por ejemplo, si $\{h_n\}$ es otra sucesión de procesos similares que converge a f en el sentido $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b |f(t) - h_n(t)|^2 dt \right] = 0$, entonces la sucesión $\{\varphi_n\}$, donde $\varphi_{2n-1} = g_n$ y $\varphi_{2n} = h_n$ son también convergentes a f en el mismo sentido.

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Teorema 8. Sean $f, g \in M^2([a, b]; \mathbb{R})$ y sean α, β dos números reales, entonces

1. $\int_a^b f(t)dB_t$ es \mathcal{F}_t - medible
2. $E \int_a^b f(t)dB_t = 0$
3. $E \left| \int_a^b f(t)dB_t \right|^2 = E \int_a^b |f(t)|^2 dt$
4. $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)] dB_t = \alpha \int_a^b f(t)dB_t + \beta \int_a^b g(t)dB_t$

Teorema 9. Sea $f \in M^2([a, b]; \mathbb{R})$ entonces $E \left[\int_a^b f(t)dB_t / \mathcal{F}_a \right] = 0$

$$\begin{aligned} E \left[\left| \int_a^b f(t)dB_t \right|^2 / \mathcal{F}_a \right] &= E \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt / \mathcal{F}_a \right] \\ &= \int_a^b E \left[|f(t)|^2 / \mathcal{F}_a \right] dt \end{aligned}$$

Lema 10. Si $f \in M^2([a, b]; \mathbb{R})$ y ξ es una variable aleatoria \mathcal{F}_a - medible de valor real, entonces $\xi f \in M^2([a, b]; \mathbb{R})$ y $\int_a^b \xi f(t)dB_t = \xi \int_a^b f(t)dB_t$.

Es claro que si $f \in M^2([a, b]; \mathbb{R})$ entonces $\xi f \in M^2([a, b]; \mathbb{R})$. Si f es un proceso simple entonces la igualdad anterior es inmediata por la definición de integral estocástica. Para el caso general en la que $f \in M^2([a, b]; \mathbb{R})$ se toma $\{g_n\}$ como una sucesión de procesos simples que satisfacen $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b |\xi f(t) - \xi g_n(t)|^2 dt \right] = 0$. De igual modo la igualdad se mantiene y la variable aleatoria ξ actúa como una constante.

Definición 11. Sea $f \in M^2([a, b]; \mathbb{R})$ Se define $I(t) = \int_0^t f(s)dB_s$ para $0 \leq t \leq T$, donde $I(0) = \int_0^0 f(s)dB_s = 0$. $I(t)$ se conoce con el nombre de integral indefinida de Itô sobre f .

1.3. La Fórmula de Itô

Cuando se intenta evaluar la integral estocástica, no es muy apropiado utilizar la definición rigurosa. Esta situación es similar al caso de evaluar la integral ordinaria realizando las sumatorias de Riemann, en lugar de utilizar la teoría fundamental del cálculo y la regla de la cadena.

A diferencia del cálculo ordinario, que comprende teoría de diferenciación e integración, este contexto sólo posee teoría de integración; sin embargo resulta posible establecer una versión de la regla de la cadena para integrales de Itô, la cual se conoce como la Fórmula de Itô.

Sea $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un Movimiento Browniano Unidimensional definido sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ denota la familia de todos los procesos $f = \{f(t)\}_{t \geq 0}$ que son $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptados medibles, de valores en \mathbb{R}^n tales que $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$ para todo $T > 0$.

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Definición 12. Un proceso de Itô unidimensional es un proceso $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ adaptado continuo de la forma

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dB_s,$$

donde $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ se dice que $x(t)$ tiene diferencial estocástica $dx(t); t \geq 0$ dada por $dx(t) = f(t)dt + g(t)dB_t$.

$C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ denota la familia de todas las funciones $V(x, t)$ de valor real definidas sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ que son al menos dos veces continuamente diferenciables en x y una vez en t . Si $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ se tomará

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t} \quad V_x = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n};$$

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Teorema 13. (Fórmula de Itô unidimensional). Sea $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso de Itô con diferencial estocástica $dx(t) = f(t)dt + g(t)dB_t$, donde $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, se tomará $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$. Entonces $V(x(t), t)$ define un nuevo proceso de Itô con diferencial estocástica dada por

$$dV(x(t), t) = \left[V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t)f(t) + \frac{1}{2}V_{xx}(x(t), t)g^2(t) \right] dt + V_x(x(t), t)g(t)dB_t$$

La fórmula de Itô puede extenderse a una versión Multidimensional, pero antes se debe definir el Movimiento Browniano Multidimensional.

El proceso estocástico $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_n(t))^T, t \geq 0 [0, T]$ se conoce como Movimiento Browniano m -Dimensional y es definido sobre un espacio de probabilidad completo (Ω, \mathcal{F}, P) adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

En general $\mathcal{L}^p([a, b]; \mathbb{R}^n)$ denota la familia de todos los procesos $f = \{f(t)\}_{a \leq t \leq b}$ que son $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptados medibles, de valores en \mathbb{R}^n tales que $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty$.

Definición 14. $\{x(t), \mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ es un proceso de Itô n -dimensional si $X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t), \dots, X_n(t))^T; t \geq 0$ tiene como componentes procesos de Itô a valores reales, o sea si para todo $T \geq t \geq 0$, $x(t)$ admite la representación

$$x(t) = x(0) + \int_0^t F(s)ds + \int_0^t G(s)dW(s),$$

donde $x(0)$ es medible \mathcal{F}_0 , $\{F_t\}_{t \in [0, T]}$ y $\{G_t\}_{t \in [0, T]}$ son procesos progresivamente medibles de dimensiones n y $n \times m$ respectivamente tales que

$$\int_0^T |F_i| ds < \infty \quad \int_0^T G_{i,j}^2 ds < \infty.$$

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

En tal caso se usa la notación diferencial simbólica

$$dx(t) = F(t) dt + G(t) dW(t)$$

Teorema 15. (Fórmula de Itô n-dimensional). Sea x_i un proceso de Itô n-dimensional con

$$dx = Fdt + GdW.$$

Si $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ entonces $u(x, t)$ es un proceso de Itô a valores reales y verifica

$$\begin{aligned} d(u(x, t)) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) G_i G_j dt \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) \sum_{l=1}^m G_{i,l} G_{j,l} dt \end{aligned}$$

Se pueden ver detalles sobre estas definiciones y las demostraciones de los teoremas en A Carmona (2009) y X. Mao (1997).

1.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (E.D.E) tienen múltiples aplicaciones en Matemáticas, Física, Demografía y Finanzas. Estas tienen un tratamiento similar a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en el momento de hallar soluciones explícitas.

En esta sección se presentarán algunos conceptos básicos, los teoremas de existencia y unicidad y los métodos que servirán como herramientas para desarrollo del presente trabajo. Se puede consultar X. Mao (1997) para una descripción más amplia. Un análisis computacional de ecuaciones diferenciales estocásticas se puede ver en E. Rafo-R Mejía (2006).

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo con una filtración $\mathfrak{F}_t \geq 0$.

Sea $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_m(t))^T, t \geq 0$ un Movimiento Browniano m-dimensional definido sobre este espacio. Tome $0 \leq t_0 < T < \infty$. Sea x_0 una variable aleatoria de valores en \mathbb{R}^n \mathfrak{F}_{t_0} -medible tal que $E|x_0|^2 < \infty$.

Sea $f : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ambas Borel-medibles.

Considere la Ecuación Diferencial Estocástica n-dimensional del tipo

$$dx(t) = f(x(t), t) dt + g(x(t), t) dB(t); \quad t_0 \leq t < T \tag{1.4.1}$$

Con valor inicial $x(t_0) = x_0$. Teniendo en cuenta la definición de diferencial estocástica, esta ecuación es equivalente a la ecuación integral estocástica dada por:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds + \int_{t_0}^t g(x(s), s) dB(s); \quad t_0 \leq t \leq T \tag{1.4.2}$$

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Definición 16. Un proceso estocástico $\{x(t)\}_{t_0 \leq t \leq T}$ con valores en \mathbb{R}^n se conoce como solución de la ecuación 1.4.1 si tiene las siguientes propiedades:

1. $\{x(t)\}$ es continua y \mathfrak{F}_t adaptada
2. $\{f(x(t)), t\} \in \mathcal{L}^1([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$ y $\{g(x(t)), t\} \in \mathcal{L}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{n \times m})$
3. La ecuación 1.4.2 se cumple para todo $t \in [t_0, T]$, con probabilidad 1.

Una solución $\{x(t)\}$ se dice es única si cualquier otra solución $\{\bar{x}(t)\}$ es idéntica a $\{x(t)\}$, es decir:

$$P \{x(t) = \bar{x}(t) = 1; \quad t \in [t_0, T]\}$$

La solución de la ecuación 1.4.1 puede denotarse por $x(t; t_0, x_0)$. Además de la ecuación 1.4.2 es claro que para toda $S \in [t_0, T]$,

$$x(t) = x(S) + \int_S^t f(x(r), r) dr + \int_S^t g(x(r), r) dB(r); \quad S \leq t \leq T$$

Pero esta última ecuación es una Ecuación Diferencial Estocástica sobre $[S, T]$ con valor inicial $x(S) = x(S; t_0, x_0)$, cuya solución puede escribirse como $x(t; S, x(S; t_0, x_0))$. De este modo puede observarse que la solución de la ecuación 1.4.1 satisface la propiedad

$$x(t; t_0, x_0) = x(t; S, x(S; t_0, x_0)); \quad t_0 \leq S \leq t \leq T$$

A. Carmona (2009) presenta estas definiciones en detalle.

1.4.1. Existencia y Unicidad de las Soluciones

Teorema 17. Suponga que existen dos constantes positivas K y \bar{K} tales que:

1. Condición de Lipschitz: Para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $t \in [t_0, T]$

$$|f(x, t) - f(y, t)|^2 \vee |g(x, t) - g(y, t)|^2 \leq \bar{K} |x - y|^2$$

2. Condición Lineal de Crecimiento: Para toda $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$

$$|f(x, t)|^2 \vee |g(x, t)|^2 \leq K (1 + |x|^2)$$

Entonces existe una solución única $x(t)$ a la ecuación 1.4.1 en $\mathcal{M}([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.4.1.2 Suponga que la condición de Lipschitz local se cumple, pero la condición de crecimiento lineal se reemplaza por la siguiente Condición Monótona: Existe una constante positiva K tal que para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$

$$x^T f(x, t) + \frac{1}{2} |g(x, t)|^2 \leq K (1 + |x|^2)$$

Entonces existe una solución única $x(t)$ a la ecuación 1.4.1 en $\mathcal{M}([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$.

La condición local de Lipschitz garantiza que la solución existe en $[t_0, \tau_\infty]$, donde $\tau_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. Pero la condición monótona en lugar de la condición de crecimiento lineal, garantiza que $\tau_\infty = T$; es decir, que la solución existe sobre el intervalo $[t_0, T]$.

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Considere la E.D.E. dada por

$$dx(t) = f(x(t), t) dt + g(x(t), t) dB(t); \quad (1.4.3)$$

con valor inicial $x(T_0) = x_0$. Sin las suposiciones de existencia y unicidad se cumplen para cada subintervalo finito $[t_0, T]$ de $[t_0, \infty)$, entonces la ecuación 1.4.3 tiene una solución única $x(t)$ sobre el intervalo completo $[t_0, \infty)$. Esta solución se llama **Solución Global**.

Teorema 18. *Suponga que para cada número real $T > t_0$ y para cada entero $n \geq 1$, existe una constante positiva $K_{T,n}$ tal que para toda $t \in [t_0, T]$ y toda $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $|x| \vee |y| \leq n$, se tiene*

$$|f(x, t) - f(y, t)|^2 \vee |g(x, t) - g(y, t)|^2 \leq K_{T,n} |x - y|^2$$

Suponga además que para toda $T > t_0$, existe una constante K_T positiva tal que para toda $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$,

$$x^T f(x, t) + \frac{1}{2} |g(x, t)|^2 \leq K_T (1 + |x|^2)$$

Entonces existe una solución única solución global $x(t)$ de la ecuación 1.4.3 y la solución pertenece a $\mathcal{M}([t_0, \infty]; \mathbb{R}^n)$.

1.4.2. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas Lineales

En general, las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas No Lineales no tienen solución explícita y en la práctica, pueden utilizarse soluciones aproximadas. Sin embargo, es posible encontrar soluciones explícitas para las ecuaciones lineales.

En esta sección se obtendrá la solución explícita de la Ecuación Diferencial Estocástica General n-dimensional

$$dx(t) = (F(t)x(t)) dt + \sum_{k=1}^m (G_k(t)x(t) + g_k(t)) dB_k(t) \quad (1.4.4)$$

sobre $[t_0, T]$, donde $F(\cdot)$, $G_k(\cdot)$ son funciones de valor matricial de orden $n \times n$, $f(\cdot)$, $g_k(\cdot)$ son funciones de valores en \mathbb{R}^n y $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_m(t))^T$ es un movimiento Browniano m-dimensional.

La ecuación lineal se dice es homogénea si $f(t) = g(t) = \dots \equiv 0$; se dice que es lineal en el sentido estrecho si $G_1(t) = G_2(t) = \dots \equiv 0$ y se dice que es autónoma si los coeficientes F , f , G_k , g_k son todos independientes de t .

También se asumirá que F, f, G_k, g_k son todos Borel-medibles y acotados sobre $[t_0, T]$. De este modo, por el Teorema de existencia y Unicidad, la ecuación 1.4.11 tiene una única solución continua en $\mathcal{M}([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$ para cada valor inicial $x(t_0) = x_0$, el cual es \mathfrak{F}_{t_0} -medible y pertenece a $\mathcal{L}(\cdot; \mathbb{R})$.

1.4.2.1 Fórmula Estocástica de Liouville Considere la Ecuación Diferencial Estocástica Lineal Homogénea

$$dx(t) = F(t)x(t) dt + \sum_{k=1}^m G_k(t)x(t) dB_k(t); \quad t \in [t_0, T] \quad (1.4.5)$$

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Según lo asumido $F(t) = (F_{ij}(t))_{n \times n}$, $G_k = (G_{ij}^k(t))_{n \times n}$, son todas Borel-medibles y acotadas. Para cada $j = 1, 2, 3, \dots, n$, tiene e_j como un vector columna unitario en la dirección de x_j , es decir, $e_j = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 1}_{\text{en la } j\text{-ésima posición}}, 0, \dots, 0 \right)^T$.
 Sea $\Phi_j(t) = (\Phi_{1j}(t), \Phi_{2j}(t), \dots, \Phi_{nj}(t))^T$ la solución de la ecuación 1.4.5 con valor inicial $x(t_0) = e_j$. Defina la matriz de dimensión $n \times n$

$$\Phi(t) = (\Phi_1(t), \Phi_2(t), \dots, \Phi_n(t)) = (\Phi_{ij}(t))_{n \times n}$$

$\Phi(t)$ se conoce como matriz fundamental de la ecuación 1.4.5. Observe que $\Phi(t_0)$ es la matriz identidad de orden $n \times n$ y

$$d\Phi(t) = F(t) \Phi(t) dt + \sum_{k=1}^m G_k(t) \Phi(t) dB_k(t) \quad (1.4.6)$$

La ecuación 1.4.6 también puede expresarse de la siguiente forma:

Para $i \leq 1, j \leq n$,

$$d\Phi_{ij}(t) = \sum_{i=1}^n F_{ij}(t) \Phi_{ij}(t) dt + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n G_{ij}^k(t) \Phi_{ij}(t) dB_k(t) \quad (1.4.7)$$

El siguiente teorema muestra que cualquier solución de la ecuación 1.4.1 puede ser expresada en términos de $\Phi(t)$ y esta es la razón por la cual $\Phi(t)$ se conoce como matriz fundamental.

Teorema 19. *Dada la condición inicial $x(t_0) = x_0$, la única solución para la ecuación 1.4.1 está dada por $x(t) = \Phi(t) x_0$*

Definición 20. Se denota por $W(t)$ al determinante de la matriz fundamental, $\Phi(t)$; más exactamente, $W(t) = \det(\Phi(t))$. $W(t)$ se conoce como el determinante Wroskiano Estocástico, donde $W(t_0) = 1$.

Teorema 21. *(Fórmula de Liouville Estocástica). El determinante Wroskiano Estocástico $W(t)$ está dado por la expresión*

$$W(t) = \exp \left[\int_{t_0}^t \left(\text{tr}(F(s)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \text{tr}(G_k(s) G_k^T(s)) \right) ds + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t \text{tr}(G_k(s)) dB_k(s) \right] \quad (1.4.8)$$

Lema 22. *Sean $a(\cdot)$ y $b_k(\cdot)$ funciones acotadas Borel-medibles de valor real sobre $[t_0, T]$, luego*

$$y(t) = y_0 \exp \left[\int_{t_0}^t \left(a(s) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m b_k^2(s) \right) ds + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t b_k(s) dB_k(s) \right] \quad (1.4.9)$$

es la única solución de la Ecuación Diferencial Estocástica Lineal Escalar

$$dy(t) = a(t) y(t) dt + \sum_{k=1}^m b_k(t) y(t) dB_k(t); \quad t \in [t_0, T] \quad (1.4.10)$$

con valor inicial $y(t_0) = y_0$.

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

La fórmula de Liouville Estocástica 1.4.8, implica directamente que $W(t) > 0$; es decir, para toda $t \in [t_0, T]$, la cual a su vez implica que $\Phi(t)$ es invertible como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 23. *Para toda $t \in [t_0, T]$, la matriz fundamental $\Phi(t)$ es invertible con probabilidad 1. La matriz $\Phi^{-1}(t)$ se llama la inversa de la matriz $\Phi(t)$*

1.4.2.2 Fórmula de Variación de las Constantes Considere de nuevo la Ecuación Diferencial Estocástica Lineal General n-dimensional

$$dx(t) = (F(t)x(t) + f(t))dt + \sum_{k=1}^m (G_k(t)x(t) + g_k(t))dB_k(t); \quad t \in [t_0, T] \quad (1.4.11)$$

con valor inicial $x(t_0) = x_0$.

La ecuación

$$dx(t) = F(t)x(t)dt + \sum_{k=1}^m (G_k(t)x(t) + g_k(t))dB_k(t) \quad (1.4.12)$$

se llama ecuación homogénea correspondiente del primer sistema 1.4.11. En esta sección se establecerá una fórmula muy útil, que se conoce como **Fórmula de Variación de las Constantes**, la cual representa la única solución para la ecuación 1.4.11 en términos de la matriz fundamental para la correspondiente ecuación homogénea 1.4.12.

Teorema 24. *La única solución para la ecuación 1.4.11 puede ser expresada como*

$$x(t) = \Phi(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) \left[f(s) - \sum_{k=1}^m G_k(s)g_k(s) \right] ds + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g_k(s)dB_k(s) \right)$$

donde $\Phi(t)$ es la matriz fundamental de la ecuación homogénea correspondiente.

A continuación se presentarán 3 tipos diferentes de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas en las que la matriz fundamental $\Phi(t)$ es de gran importancia para hallar la solución explícita de cada ecuación bajo la condición inicial $x(t_0) = x_0$ sobre el intervalo $[t_0, T]$.

1.4.2.3 Ecuaciones lineales escalares Considere la Ecuación Diferencial Estocástica Lineal Escalar General dada por

$$dx(t) = (a(t)x(t) + \bar{a}(t))dt + \sum_{k=1}^m (b_k(t)x(t) + \bar{b}_k(t))dB_k(t); \quad (1.4.13)$$

sobre $[t_0, T]$ con valor inicial $x(t_0) = x_0$. En este caso $x_0 \in \mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R})$ es \mathfrak{S}_{t_0} -medible, y $a(t)$, $\bar{a}(t)$, $b_k(t)$, $\bar{b}_k(t)$ son funciones escalares acotadas Borel-medibles sobre $[t_0, T]$. La ecuación lineal homogénea correspondiente está dada por

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + \sum_{k=1}^m b_k(t)x(t)dB_k(t) \quad (1.4.14)$$

donde la solución fundamental para esta ecuación 1.4.14 está dada por

$$\Phi(t) = \exp \left[\int_{t_0}^t \left(a(s) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m b_k^2(s) \right) ds + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t b_k(s) dB_k(s) \right]$$

Ahora aplicando el teorema anterior, se obtiene la solución explícita para la ecuación 1.4.13 dada por

$$x(t) = \Phi(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) \left[\bar{a}(s) - \sum_{k=1}^m b_k(s) \bar{b}_k(s) \right] ds + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) \bar{b}_k(s) dB_k(s) \right)$$

1.4.2.4 Ecuaciones Lineales en el Sentido Estricto. Considere la Ecuación Diferencial Estocástica Lineal n -dimensional

$$dx(t) = (F(t)x(t) + f(t))dt + \sum_{k=1}^m g_k(t)dB_k(t); \quad t \in [t_0, T] \quad (1.4.15)$$

con valor inicial $x(t_0) = x_0$, donde F , f , g_k son Borel-medibles y acotadas sobre $[t_0, T]$ y $x(t_0) = x_0$ es \mathfrak{F}_{t_0} -medible y $x_0 \in \mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

La ecuación lineal homogénea correspondiente es la ecuación diferencial ordinaria

$$dx(t) = F(t)x(t)dt \quad (1.4.16)$$

La solución para la ecuación 1.4.15 tiene la forma

$$x(t) = \Phi(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) f(s) ds + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) g_k(s) dB_k(s) \right)$$

donde $\Phi(t)$ es la matriz fundamental para la ecuación 1.4.16.

En particular, cuando $F(t)$ es independiente de t ; es decir, $F(t) = F$ es una matriz constante de dimensión $n \times n$, la matriz fundamental $\Phi(t)$ tiene la forma simple $\Phi(t) = e^{F(t-t_0)}$ y su matriz inversa $\Phi^{-1}(t) = e^{-F(t-t_0)}$, la ecuación 1.4.15 tiene la solución explícita

$$x(t) = e^{F(t-t_0)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-F(s-t_0)} f(s) ds + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t e^{-F(s-t_0)} g_k(s) dB_k(s) \right)$$

1.4.2.5 Ecuaciones Lineales Autónomas Considere la Ecuación Diferencial Estocástica Lineal n -dimensional

$$dx(t) = (F(\cdot)x(t) + f)dt + \sum_{k=1}^m (G_k(\cdot)x(t) + g_k(t))dB_k(t); \quad t \in [t_0, T] \quad (1.4.17)$$

con la condición inicial $x(t_0) = x_0$, donde $F, G_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $f, g_k \in \mathbb{R}^n$.

La ecuación homogénea correspondiente es

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

$$dx(t) = Fx(t) dt + \sum_{k=1}^m G_k x(t) dB_k(t) \quad (1.4.18)$$

En general, la matriz fundamental $\Phi(t)$ no es dada en forma explícita. Sin embargo, si las matrices F, G_1, G_2, \dots, G_m conmutan, es decir, si $FG_k = G_k F$, $G_k G_j = G_j G_k$ para toda $k \geq 1, j \leq m$, entonces la matriz fundamental para la ecuación 1.4.18 tiene la forma explícita

$$\Phi(t) = \exp \left[\left(F - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m G_k^2 \right) (t - t_0) + \sum_{k=1}^m G_k (B_k(t) - B_k(t_0)) \right]$$

de este modo la Ecuación Lineal Autónoma 1.4.17 tiene solución explícita

$$x(t) = \Phi(t) \left[x_0 + \left(\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) ds \right) \left(f - \sum_{k=1}^m G_k g_k \right) + \sum_{k=1}^m \left(\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) dB_k(s) \right) g_k \right]$$

1.5. Método de Aproximación de Euler

Muchas Ecuaciones Diferenciales Estocásticas no pueden resolverse explícitamente, por esto es conveniente disponer de métodos numéricos que permitan la simulación de soluciones. En esta sección se presentará el método de aproximación de Euler.

El método de aproximación de Euler para Ecuaciones Diferenciales Estocásticas es similar al método de Euler para resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y está basado en la discretización de dos integrales y su respectiva aproximación dada por la evaluación del integrando en el punto inferior de cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ sobre $[0, T]$.

Considere la Ecuación Diferencial Estocástica

$$dX_t = f(X_t) dt + g(X_t) dB_t \quad (1.5.1)$$

sobre $[0, T]$ con la condición inicial $X(0) = X_0$, donde f y g son funciones escalares.

La ecuación 1.5.1 puede expresarse en forma integral como

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) ds + \int_0^t g(X_s) dB_s; \quad 0 \leq t \leq T$$

Tome la subdivisión τ_n del intervalo $[0, T]$ dada por $\tau_n : t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$.

Luego, la solución X_t de la ecuación diferencial será aproximada en cada punto t_i de la partición por

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(X_s) ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(X_s) dB_s; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.5.2)$$

La aproximación de Euler se basa en la discretización de esta última ecuación, por medio de las siguientes aproximaciones:

1. $\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(X_s) ds \approx f(X_{t_{i-1}}) \Delta t_i$
2. $\int_{t_{i-1}}^{t_i} g(X_s) dB_s \approx g(X_{t_{i-1}}) \Delta B_i,$

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

donde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ y $\Delta B_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$.

Si se denota por $X_{t_i}^{(n)}$ a la solución aproximada de la ecuación diferencial, la aproximación de Euler para X_{t_i} está dada por:

$$X_{t_i}^{(n)} = X_{t_{i-1}}^{(n)} + f\left(X_{t_{i-1}}^{(n)}\right) \Delta t_i + g\left(X_{t_{i-1}}^{(n)}\right) \Delta B_i$$

con $i = 1, 2, 3, \dots, n$

El esquema general para el método de Euler está dado por

$$\begin{aligned} X_0^{(n)} &= X_0 \\ X_{t_1}^{(n)} &= X_0^{(n)} + f\left(X_0^{(n)}\right) \Delta t + g\left(X_0^{(n)}\right) \Delta B_{t_1} \\ X_{t_2}^{(n)} &= X_{t_1}^{(n)} + f\left(X_{t_1}^{(n)}\right) \Delta t + g\left(X_{t_1}^{(n)}\right) \Delta B_{t_2} \\ &\vdots \\ X_T^{(n)} &= X_{t_{n-1}}^{(n)} + f\left(X_{t_{n-1}}^{(n)}\right) \Delta t + g\left(X_{t_{n-1}}^{(n)}\right) \Delta B_{t_n}. \end{aligned}$$

Para analizar la calidad de las soluciones aproximadas por el método de Euler, y teniendo en cuenta que X_t y $X_t^{(n)}$ deberán estar “acopladas” hasta el final del intervalo $[0, T]$, se introduce el coeficiente de error e_s , que mide la diferencia entre la solución de la ecuación diferencial estocástica y la solución aproximada, y está dado por $e_s = E |X_T - X_T^{(n)}|$. En E. Rafo y R. Mejía (2006) se muestran algunos resultados del método de Euler. Una buena aproximación de X_t se llama solución numérica fuerte. Para establecer la medida de la calidad de las aproximaciones se introducirán los siguientes conceptos importantes:

Definición 1.5.1 Se dice que $X_t^{(n)}$ es una solución numérica fuerte de la Ecuación Diferencial Estocástica 1.5.1 si $e_s \rightarrow 0$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

Definición 1.5.2 Se dice que la solución numérica $X_t^{(n)}$ converge fuertemente a X_t con orden $r > 0$ si existe una constante $c > 0$ tal que $e_s < c\Delta t^r$ para Δt lo suficientemente pequeño.

El orden de convergencia fuerte mide la tasa a la cual la media del error se acerca a cero cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

Otra medida de error no está basada en la cercanía de la solución explícita y la solución aproximada, sino en la diferencia de los momentos de primer orden;

$$e_w = \left| Ef(X_T) - Ef\left(X_T^{(n)}\right) \right|,$$

donde f es una función suave, generalmente polinómica.

Definición 25. Se dice que $X_t^{(n)}$ es una solución numérica débil de la Ecuación Diferencial Estocástica 1.5.1 si $e_w \rightarrow 0$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

Definición 26. Se dice que la solución numérica $X_t^{(n)}$ converge débilmente a X_t con orden $r > 0$ si existe una constante $c > 0$ tal que $e_w < c\Delta t^r$ para Δt lo suficientemente pequeño.

El orden de convergencia débil mide la tasa a la cual el error de las medias se acerca a cero cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

1.6. Teorema de Cameron-Martin-Girsanov

Sea $\{B_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un movimiento Browniano Standar Unidimensional definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$.

Sea $\phi(t) \in \mathcal{L}^2([0, T] : \mathbb{R})$ Se define

$$\xi_0^T(\phi) = -\frac{1}{2} \int_0^T |\phi(u)|^2 du + \int_0^T \phi(u) dB_u$$

$$B_t^* = B_t - \int_0^t \phi(u) du, \quad dP^*(\omega) = \exp(\xi_0^T(\phi)) dP(\omega)$$

Si $P^*(\Omega) = 1$, entonces $\{B_t^*\}_{0 \leq t \leq T}$ es un Movimiento Browniano unidimensional definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ con respecto a la misma filtración $\{\mathcal{F}_t\}$. Se pueden ver mas detalles en F. Martinez (2008) y X. Mao (1997).

1.7. Teorema de Girsanov

Sea $\{B_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un movimiento Browniano Standar Unidimensional definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$.

Sea S_t un proceso de Itô unidimensional sobre $[0, T]$ dado por

$$S_t = S_0 + \int_0^t f(S_u, u) du + \int_0^t g(S_u, u) dB_u$$

donde $f \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R})$. Sea $\phi_{(t)} \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R})$. Considere B_t^* y P^* definidos como en el teorema anterior. Si $P^*(\Omega) = 1$, entonces S_t es también un proceso de Itô unidimensional sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ con respecto al movimiento Browniano B_t^* . Es decir S_t es la solución de la ecuación Diferencial Estocástica

$$dS_t = [f(S_t, t) + g(S_t, t) \phi_{(t)}] dt + g(S_t, t) dB_t^*, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.7.1)$$

sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$.

Si $f(x, t)$ y $\frac{1}{g(x, t)}$, son acotados, entonces, $\phi_{(t)} = -\frac{f(S_t, t)}{g(S_t, t)}$ y en consecuencia, la ecuación 1.7.1 se reduce a:

$$dS_t = g(S_t, t) dB_t^*, \quad 0 \leq t \leq T$$

Se pueden ver mas detalles en F. Martinez (2008) y X. Mao (1997).

1.8. Descomposición de Cholesky.

Para modelar los movimientos Brownianos $dB_1(t)$ y $dB_2(t)$ con un factor de correlación, ρ , se puede utilizar el método de simulación condicional Montecarlo, o utilizar la descomposición de Cholesky para variables

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

aleatorias normales independientes.

Considere dos variables aleatorias normales estándar e independientes Z_1 y Z_2 y dos procesos Brownianos correlacionados $B_1(t)$ y $B_2(t)$, con factor de correlación ρ , y con varianzas σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente. De este modo, el vector $dB = (dB_1(t), dB_2(t))^T$ sigue una distribución normal bivariada, es decir:

Sea A una matriz definida positiva, (A una matriz real y simétrica, se dice que A es definida positiva si $X^T A X > 0$ para cada X en \mathbb{R}^n con $X \neq 0$). Si A es definida positiva entonces A es no singular, con lo cual existe una matriz triangular inferior L cuyos elementos en la diagonal son todos positivos tales que $A = LL^T$, donde L es llamada Factor de Cholesky para A .

Así, $dB \approx N(0, \Sigma)$, donde Σ es la matriz de covarianzas dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

siendo

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

De esta forma

$$C^T C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Obteniéndose el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_{11}c_{11} + c_{21}c_{21} &\implies c_{11}^2 + c_{21}^2 \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} &\implies c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} \\ c_{12}c_{11} + c_{22}c_{21} &\implies c_{12}c_{11} + c_{22}c_{21} \\ c_{12}c_{12} + c_{22}c_{22} &\implies c_{12}^2 + c_{22}^2 \end{aligned}$$

De esta forma $C^T C = \Sigma$, $CC^T = \Sigma$ siendo C^T matriz triangular inferior, es decir, $C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{12} & c_{21} \end{bmatrix}$

Haciendo la sustitución progresiva y la sustitución regresiva

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{12} & c_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$$

Para verificar la igualdad entre las dos matrices anteriores se debe cumplir

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= c_{11}^2, & \sqrt{\sigma_1^2} &= c_{11}, & c_{12} &= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{c_{11}}, & \text{y} \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 &= \sigma_2^2, & c_{22}^2 &= \sigma_2^2 - c_{12}^2, & c_{22} &= \sqrt{\sigma_2^2 - c_{12}^2} \end{aligned}$$

De esta forma

1 PRELIMINARES DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_1^2} & 0 \\ \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{c_{11}} & \sqrt{\sigma_2^2 - c_{21}^2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1} & \sqrt{\sigma_2^2 - \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hallando las ecuaciones y resolviendo

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix}$$

pero

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_1 \\ \rho Z_1 + Z_2\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

obteniéndose así

$$Z_1 = dB_1 \quad \text{y} \quad \rho Z_1 + Z_2\sqrt{1-\rho^2} = dB_2$$

Se pueden revisar mas detalles en H. Mora.(2011)

2 MODELO DE HESTON

El modelo de Heston es un modelo matemático usado en la valoración de opciones, su característica principal es considerar la volatilidad como una variable aleatoria. En la primera parte de este capítulo se hará una descripción detallada del modelo de Black-Scholes, la cual se incluye la deducción de la ecuación en derivadas parciales, la fórmula de valoración de opción Call Europeas y un concepto intuitivo de la valoración de riesgo neutral. Luego se realizara la descripción formal del modelo de Heston , el cual consiste en un sistema de Ecuaciones diferenciales acopladas, en la que los Movimientos Brownianos están correlacionados, así mismo se presenta en forma detallada la deducción de la ecuación en derivadas parciales del modelo de Heston. Posteriormente se describe la solución analítica del modelo, cuyas integrales impropias deben resolverse numéricamente, estos detalles se pueden complementar en N. Moodley (2005).

2.1. Modelo de Black-Scholes

El modelo central de la teoría de la valoración de opciones es el modelo de Black-Scholes (1973), en el que se demuestra que sin realizar supuestos sobre la preferencia de los inversionista, se puede obtener una expresión del valor de las opciones, que no dependen directamente del rendimiento esperado de la acción subyacente, ni de la opción, sino que esto se consigue mediante el argumento de la cobertura dinámica perfecta en un mercado libre de arbitraje.

Las hipótesis sobre las que se sustenta el modelo de Black-Scholes configuran un escenario ideal, en el que es posible la negociación continua, en unos mercados perfectos, en el que el tipo de interés libre de riesgo es constante y el precio del activo subyacente que sigue un proceso estocástico que se conoce como Movimiento Browniano Geométrico cuya dinámica para un intervalo infinitesimal del tiempo (dt) esta dada por la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB_t \quad (2.1.1)$$

donde $\mu, \sigma > 0$ son constantes y $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es un Movimiento Browniano Estándar Unidimensional. Los supuestos que establecen este modelo son:

1. El precio de las acciones en cualquier momento del futuro sigue una distribución lognormal, es decir:

$$\ln(S_t) \sim N(\ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$$

2. No hay costes de transacción o impuestos.
3. Todos los activos financieros son perfectamente divisibles.
4. No hay dividendos sobre las acciones durante la vida de la opción.
5. No hay oportunidades de arbitraje libres de riesgo.
6. La negociación de valores financieros es continua.

7. Los inversores pueden prestar o pedir prestado al mismo tipo de interés libre de riesgo.
8. El tipo de interés libre de riesgo a corto plazo, r , es constante y la misma para todas las maduraciones (fechas de expiración)

2.1.1. Opción Call Europea

Definición 27. Considere un mercado financiero con vector de precios S . Un reclamo contingente con fecha de maduración T , es una variable estocástica $X \in \mathcal{F}_T^S$. Un reclamo contingente se llama un reclamo simple si este es de la forma $X = \Phi(S(t))$. La función Φ se llama función de contrato. La opción call Europea es un reclamo contingente simple, cuya función de contrato es dada por $\Phi(x) = \max\{x - K, 0\}$.

El valor exacto de la opción en el mercado dependerá por supuesto, del tiempo t y del precio $S(t)$ de la acción subyacente. El problema principal es determinar un precio “justo” del reclamo, para el cual se usará la notación estándar $\Pi(t; X)$ para el proceso del precio del reclamo X . En el caso de un reclamo simple algunas veces se escribe $\Pi(t; \Phi)$.

Considere el caso particular para una call Europea, en un tiempo T fijo.

1. Si $S(t) \geq K$, se puede tener un cierto beneficio ejerciendo la opción para comprar una parte de la acción subyacente. Esto costará K . Entonces inmediatamente se vende el activo sobre la acción cambiándolo al precio $S(T)$, dando así un beneficio neto de $S(T) - K$
2. Si $S(t) \leq K$ la opción no tendrá valor alguno (no se ejerce la compra). Así se observa que el precio razonable $\Pi(t)$ para la opción es dado por $\Pi(t) = \max\{S(T) - K, 0\}$. Exactamente de la misma forma se observa que para un reclamo contingente X se tiene la relación $\Pi(T, X) = X$, y en el caso particular de un reclamo simple $\Pi(T, X) = \Phi(S(T))$

Sin embargo, para cualquier tiempo $t \leq T$, es difícil saber cual es el precio correcto para un reclamo X . El precio de una opción, como el precio de cualquier otro activo, está determinado por el mercado, y debe ser mucho más complejo debido a las preferencias de vendedores y compradores respecto al riesgo de un mercado, y a las diferentes expectativas acerca de los precios futuros de la acción. La Figura 2.1.1 muestra la gráfica de la rentabilidad de una opción de compra Europea.

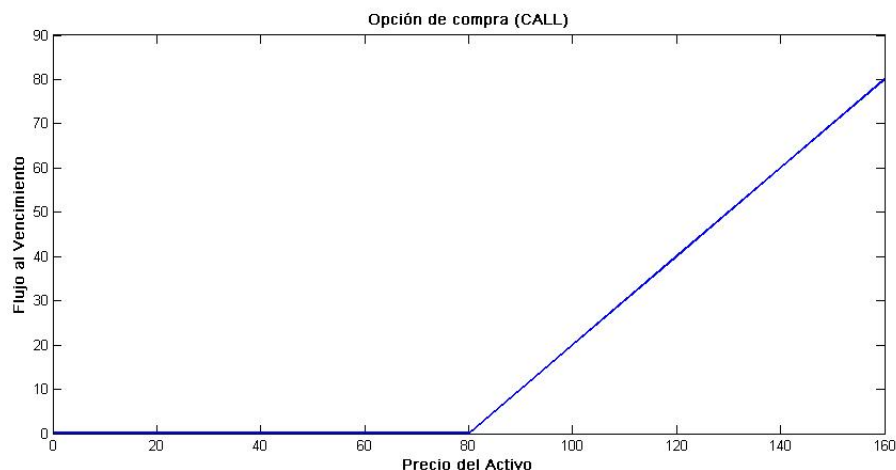


Figura 2.1.1: Rentabilidad de una opción europea

2 MODELO DE HESTON

Definición 28. Una opción Call Europea con precio de ejercicio K y tiempo de maduración T sobre el activo subyacente S , es un contrato definido por las siguientes cláusulas:

1. El tenedor de la opción tiene, durante el tiempo T , el derecho a comprar una parte de la acción subyacente con precio de ejercicio K al suscriptor de la opción.
2. El tenedor de la opción no está en ninguna forma obligado a comprar la acción subyacente.
3. El derecho de comprar la acción subyacente al precio K puede únicamente ser ejercido en el momento preciso T .
4. Quien vende la opción, está obligado a vender la acción subyacente al precio K en el momento preciso T . El precio de ejercicio K y el tiempo de maduración T son determinados en el momento de la emisión de la opción, que en este caso es habitualmente $t = 0$.

Una opción Put Europea es una opción que da al tenedor el derecho a vender una parte del activo subyacente a un precio de ejercicio predeterminado. Para una opción call americana el derecho a comprar parte del activo subyacente puede ser ejercido en cualquier tiempo antes del tiempo de maduración dado. El factor común de todos estos contratos es que están completamente definidos en términos del activo subyacente S .

2.1.2. Valoración de Riesgo Neutral

En un mundo de riesgo neutral todos los individuos son indiferentes al riesgo. Ellos no requieren ninguna compensación por el riesgo y el retorno esperado de todos los activos, es la tasa de interés libre de riesgo, de este modo el valor de la opción es el pago (pay off) esperado de un mundo de riesgo neutral descontado a la tasa de interés libre de riesgo. La valoración de riesgo neutral es un principio en el cual se establece que para valorar opciones, es válido suponer que todos los individuos que participan en el mercado se encuentran en el mundo de riesgo neutral.

2.1.3. Portafolio Libre de Riesgo

Un portafolio libre de riesgo esta compuesto por una posición en la opción y una posición en el activo subyacente. En ausencia de oportunidades de arbitraje, al retorno el portafolio deberá ser la tasa de interés libre de riesgo, r . La razón por la cual puede ser creado este portafolio es que tanto el precio del activo como el precio de la opción están afectados por el mismo nivel de incertidumbre: movimientos del precio activo.

2.1.4. Deducción de la Ecuación Diferencial de Black-Scholes- Merton

Suponga que el precio de un activo está dominado por la E.D.E dada en 2.1.1.

Suponga además que el precio f de una opción call o cualquier otro instrumento derivado sobre S_t es una función de S y t es decir, $f = f(t, S)$. Al aplicar la formula de Itô sobre f se obtiene:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dB) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dB \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

2 MODELO DE HESTON

La discretización de las ecuaciones 2.1.1 y 2.1.2 están dadas por:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta B \quad (2.1.3)$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta B \quad (2.1.4)$$

donde ΔS y Δf son los cambios en f y S en un intervalo de tiempo pequeño Δt respectivamente.

Se construye un portafolio libre de riesgo apropiado de tal modo que el tenedor de este portafolio tenga una posición corta en un derivado y una posición larga en una cantidad $\frac{df}{dS}$ de partes del activo. De este modo, el valor del portafolio esta dado por:

$$\Pi = -f + S \frac{\partial f}{\partial S} \quad (2.1.5)$$

Así

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \Delta S \frac{\partial f}{\partial S} \quad (2.1.6)$$

Reemplazando 2.1.3 y 2.1.4 en 2.1.6 se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= -\left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t - \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta B + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S \Delta t + \sigma S \Delta B) \\ \Delta \Pi &= -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Como esta ecuación no contiene el término ΔB , este portafolio deberá ser libre de riesgo durante el tiempo Δt con lo que se tiene

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t \quad (2.1.8)$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo . De las ecuaciones 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.4 se sigue que:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t &= r \left(-f + S \frac{\partial f}{\partial S} \right) \Delta t, \\ \frac{\partial f}{\partial t} + r S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 &= r f \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Esta ecuación diferencial tiene muchas soluciones dependiendo de las condiciones de frontera:

1. Para una opción call europea la condición es $f = \max(S - K, 0)$ cuando $t = T$
2. Para una opción put europea la condición es $f = \max(K - S, 0)$ cuando $t = T$

Una característica importante de esta ecuación es que no involucra ninguna variable que sea afectada por las preferencias de riesgo de los inversionistas, ya que solo aparecen el precio presente del activo, el tiempo, la volatilidad y la tasa de interés libre de riesgo, r .

Formulas de Valoración de Opciones de Black-Scholes Las formulas de valoración de opciones para el precio en el tiempo cero de opción call y put del tipo europeo sobre un activo que no paga dividendos, están dadas por:

$$\begin{aligned} f_{call} &= S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \\ f_{put} &= K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \end{aligned}$$

2 MODELO DE HESTON

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$N(x)$ es la función de distribución de probabilidad acumulativa para una variable $N \sim (0, 1)$, S_0 es el precio del activo en el tiempo cero, K es el precio del ejercicio, σ la volatilidad, T el tiempo de maduración y r la tasa de interés libre de riesgo. Se pueden complementar estas definiciones en E. Mordecki (2010) G. Arregui (2004). Una solución analítica de la ecuación en derivadas parciales de Black-Scholes se puede revisar en M. Bohner y Y. Zheng (2009), la cual fue implementada computacionalmente con condiciones de frontera consistentes en M. Bohner, F. Marín y S. Rodríguez (2012).

2.2. Descripción del Modelo de Heston

El modelo de Heston (1993) fue presentado oficialmente en el artículo "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options" y es uno de los modelos de volatilidad estocástica más usados actualmente, esto se debe a la poderosa combinación de robustez y maniobrabilidad que presenta; en R. Tamayo y H. Rodríguez (2010) se pueden ver más detalles de otros modelos de volatilidad estocástica. El modelo de Heston surgió inicialmente como una generalización del modelo de valoración de opciones de Black-Scholes, pero suponiendo que la volatilidad deja de ser constante y se convierte en un proceso estocástico. Este modelo establece que los procesos que describen el precio S y la volatilidad v de una acción están regidos por el siguiente sistema de ecuaciones Diferenciales Estocásticas representadas por:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dB_1(t) \quad (2.2.1)$$

$$d(\sqrt{v_t}) = -\beta \sqrt{v_t} dt + \delta dB_2(t)$$

Para calcular dv usando 2.2.1, se realiza la sustitución $Y_t = (\sqrt{v_t})^2$ al aplicar la fórmula de Itô para $\sqrt{v_t}$,

$$\begin{aligned} dY_t &= 2\sqrt{v_t}d(\sqrt{v_t}) + \frac{1}{2}\left(2(d\sqrt{v_t})^2\right) \\ &= 2\sqrt{v_t}(-\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dB_2(t)) + \delta^2 dt \\ &= (\delta^2 - 2\beta v_t) dt + 2\delta\sqrt{v_t}dB_2(t) \\ &= 2\beta\left(\frac{\delta^2}{2\beta} - v_t\right) dt + 2\delta\sqrt{v_t}dB_2(t) \end{aligned}$$

Haciendo $k = 2\beta$, $\theta = \frac{\delta^2}{2\beta}$, $\sigma = 2\delta$.

$$dv_t = k(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t}dB_2(t)$$

Luego, el sistema 2.2.1 se transforma en:

$$dS = \mu S dt + \sqrt{v} S dB_1(t) \quad (2.2.2)$$

$$dv_t = k(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t}dB_2(t) \quad (2.2.3)$$

2 MODELO DE HESTON

$$dB_1(t) dB_2(t) = \rho dt \quad (2.2.4)$$

donde:

S_t : es el precio del activo,

v_t : es la volatilidad del activo

θ : es la volatilidad esperada en el largo plazo,

k : es la velocidad a la cual la volatilidad tiende hacia su media de largo plazo θ

μ : es el retorno esperado del activo,

σ : es la volatilidad de v_t

ρ : es la correlación de los movimientos Brownianos,

dt : es un pequeño incremento en el tiempo,

$B_1(t)$: es un movimiento browniano estándar unidimensional

$B_2(t)$: es un movimiento browniano estándar unidimensional.

El modelo de volatilidad estocástica de Heston, establece tres características importantes sobre la volatilidad incorporando un factor de correlación, ρ , entre los procesos Brownianos, que permiten una conexión entre los procesos v_t y S_t .

El modelo de Heston supone que la volatilidad es un proceso estocástico que:

1. Tiene una tendencia hacia la volatilidad de largo plazo θ a una velocidad κ .
 2. Tiene su propia volatilidad (constante) que se denota por σ .
 3. Tiene su parte aleatoria correlacionada (con correlación ρ) con la parte aleatoria del proceso que describe el precio del activo.
- Las figuras 2.2.1 y 2.2.2 muestran algunas simulaciones del sistema acoplado (2.2.2, 2.2.3 y 2.2.4) con diferentes valores para ρ y σ , estudios prácticos han demostrado que los retornos logarítmicos de los activos financieros son usualmente no gaussianos, ya que no tienen colas gordas y picos altos, es decir, sesgo negativo y kurtosis mayor que tres.

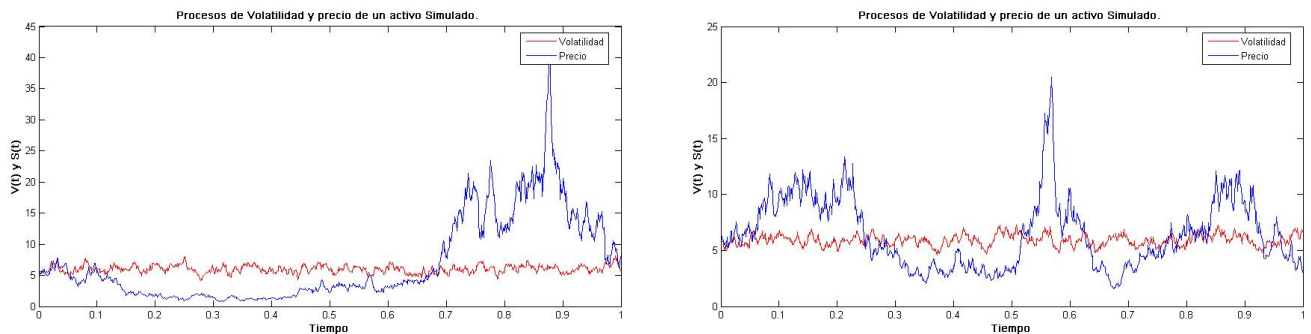


Figura 2.2.1:

Izquierda: Simulación de los procesos con $\rho = 0,1$

Derecha: Simulación de los procesos con $\rho = 0,7$

2 MODELO DE HESTON

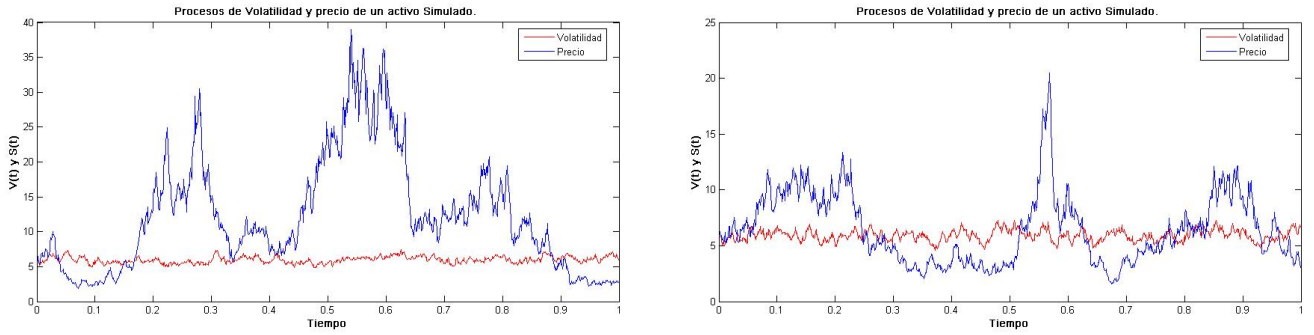


Figura 2.2.2:

Izquierda: Simulación de los procesos con $\rho = -0,1$
 Derecha: Simulación de los procesos con $\rho = -0,7$

También se puede mostrar que los retornos de la acción y su volatilidad están correlacionados negativamente, en efecto no esta descrito en el modelo de Black-Scholes por lo que lo hace menos exacto. Por otro lado el modelo de Heston , puede tener diferentes distribuciones, en este caso, ρ puede ser interpretado como la correlación entre los retornos logarítmicos y la volatilidad del activo:

- Si $\rho > 0$ entonces la volatilidad se incrementan cuando los retornos se incrementan, esto causa que la cola de derecha de la distribución se "agrande" y que la izquierda se "encoja" creando así una distribución con cola a la derecha.
- Si $\rho < 0$ entonces la volatilidad se incrementa cuando los retornos disminuyen esto causa que la cola derecha de la distribución se "encoja" y que la derecha se "agrande" creando así una distribución con cola a la izquierda , esto recoge el hecho de que los retornos del activo y su volatilidad están correlacionadas negativamente.

2.3. Dedución de la Ecuación en Derivadas Parciales de Heston

Suponga que el precio de un activo está dominado por la E.D.E dada por 2.1.1.

La ecuación en derivadas parciales asociada al modelo de Heston supone además que el precio f de una opción call o cualquier otro instrumento derivado sobre S_t es una función de S y t es decir, $f = f(t, S)$. Al aplicar la formula de Itô sobre f se obtiene:

$$\begin{aligned}
 df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2 \\
 &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dB) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \\
 &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dB
 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} (dv)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (dS)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial S} (dv)(dS) \right]$$

2 MODELO DE HESTON

Reemplazando 2.2.2 y 2.2.3 se llega a:

$$\begin{aligned}
 dF &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial v} [k(\theta - v)dt + \sigma\sqrt{v}dB_2(t)] + \frac{\partial F}{\partial S} [\mu Sdt + \sqrt{v}SdB_1(t)] \\
 &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \{k(\theta - v)dt + \sigma\sqrt{v}dB_2(t)\}^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \{\mu Sdt + \sqrt{v}SdB_1(t)\}^2 \right] \\
 &+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial S} \{k(\theta - v)dt + \sigma\sqrt{v}dB_2(t)\} \{\mu Sdt + \sqrt{v}SdB_1(t)\} \right] \\
 &= \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \{k(\theta - v)\} \frac{\partial F}{\partial v} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \sigma v S \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} \right] dt \\
 &+ \sqrt{v} S dB_1(t) + \sigma \sqrt{v} \frac{\partial F}{\partial v} dB_2(t)
 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Discretizando 2.2.2, 2.2.3 y 2.3.2, :

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sqrt{v} S \Delta B_1(t) \tag{2.3.3}$$

$$\Delta v = k(\theta - v) \Delta t + \sigma \sqrt{v} \Delta t B_2(t) \tag{2.3.4}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta F &= \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \{k(\theta - v)\} \frac{\partial F}{\partial v} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \sigma v S \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} \right] \Delta t \\
 &+ \sqrt{v} S \frac{\partial F}{\partial S} \Delta B_1(t) + \sigma \sqrt{v} \frac{\partial F}{\partial v} \Delta B_2(t)
 \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

donde los ΔS y Δv son los cambios en S, v en un intervalo Δt .

Se construye un portafolio, de tal modo que el valor del portafolio esta dado por

$$\Pi = -F + \frac{\partial F}{\partial S} S + \frac{\partial F}{\partial v} v \tag{2.3.6}$$

donde el cambio

$$\Delta \Pi = -\Delta F + \frac{\partial F}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta v \tag{2.3.7}$$

Usando las discretizaciones obtenidas en 2.3.3, 2.3.4 y 2.3.5 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \Delta \Pi &= - \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \{k(\theta - v)\} \frac{\partial F}{\partial v} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \sigma v S \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} \right] \Delta t \\
 &- \sqrt{v} S \frac{\partial F}{\partial S} \Delta B_1(t) - \sigma \sqrt{v} \frac{\partial F}{\partial v} \Delta B_2(t) \\
 &+ \frac{\partial F}{\partial v} [\mu S \Delta t + \sqrt{v} S \Delta B_1(t)] + \frac{\partial F}{\partial v} [k(\theta - v) \Delta t + \sigma \sqrt{v} \Delta B_2(t)] \\
 &= - \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \sigma v S \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} \right] \Delta t
 \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Se debe tener en cuenta que esta ecuación no contiene termino ΔB_t , por esto este portafolio deberá ser libre de riesgo , así

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t \tag{2.3.9}$$

2 MODELO DE HESTON

reemplazando 2.3.6, 2.3.8 en la ecuación 2.3.9 se obtiene:

$$-rF + rS \frac{\partial F}{\partial S} + rv \frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma v S \rho$$

Organizando se llega a que la ecuación asociada a al sistema descrito en 2.2.2 y 2.2.3 es:

$$\frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + rv \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial t} = rF \quad (2.3.10)$$

Para complementar la deducción de 2.3.10 se puede ver F. Marín, M. Bastidas (2012).

Retomando el sistema del modelo de Heston obtenido en 2.2.2 y 2.2.3 y usando el teorema Cameron-Martin-Girsanov, defina:

$$\vartheta = \frac{\mu - r}{\sqrt{v}} \quad (2.3.11)$$

$$\Lambda_t = \frac{\frac{k(\theta - v)}{v} - r}{\frac{\sigma}{\sqrt{v}}} \quad (2.3.12)$$

De esta forma, usando 2.3.11 y 2.3.12 se obtiene:

$$\sqrt{v}\vartheta = \mu - r \quad \text{y} \quad \sigma\sqrt{v}\Lambda = \lambda = \lambda v \quad (2.3.13)$$

Supóngase, sin pérdida de generalidad que $\Lambda_t = \tilde{k}\sqrt{v}$ para alguna \tilde{k} constante. De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda_t \sigma \sqrt{v} &= \tilde{k} \sigma v \\ &= \lambda_t \\ &= \lambda v, \quad \text{con} \quad \lambda = \tilde{k} \sigma \end{aligned}$$

Y así

$$\sigma\sqrt{v}\Lambda = \lambda_t = \lambda v$$

Por el teorema de Cameron-Martin-Girsanov y de Girsanov, definase:

$$\begin{aligned} d\tilde{B}_1(t) &= dB_1(t) + \vartheta dt \\ d\tilde{B}_2(t) &= dB_2(t) + \Lambda_t dt \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Despejando $dB_1(t)$ y $dB_2(t)$ de 2.3.14 y luego reemplazando en 2.2.2 y 2.2.3 se obtiene:

$$dS = rSdt + \sqrt{v}Sd\tilde{B}_1(t)$$

$$\begin{aligned} dv &= [k\theta - kv - \lambda v] dt + \sigma\sqrt{v}d\tilde{B}_2(t) \\ &= (k + \lambda) \left[\frac{k\theta}{k + \lambda} - v \right] dt + \sigma\sqrt{v}d\tilde{B}_2(t) \\ &= k^* [\theta^* - v] dt + \sigma\sqrt{v}d\tilde{B}_2(t) \end{aligned}$$

2 MODELO DE HESTON

Donde $k^* = k + \lambda$ y $\theta^* = \frac{k\theta}{k + \lambda}$. Bajo estos procedimientos el sistema del modelo de Heston se ha transformado en:

$$\begin{aligned} dS &= rSdt + \sqrt{v}Sd\tilde{B}_1(t) \\ dv &= k^*[\theta^* - v]dt + \sigma\sqrt{v}d\tilde{B}_2(t) \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

De esta forma, teniendo en cuenta 2.3.10 se llega a:

$$\frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \rho\sigma vS\frac{\partial^2 F}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \{k^*[\theta^* - v]\}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial t} = rF \quad (2.3.16)$$

2.4. Solución Analítica del Modelo de Heston

La solución cerrada para una opción call Europea sobre un activo que no paga dividendos está dada por

$$C(S, V, t, T) = SP_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2$$

donde

$$P_j(x, V_t, T, K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\Pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\varphi \ln(k)} f_j(x, V_t, T, \varphi)}{i\varphi} \right) d\varphi; \quad (2.4.1)$$

$$f_j(x, V_t, T, \varphi) = \exp[C(T-t, \varphi) + D(T-t, \varphi)V_t + i\varphi x];$$

$$C(T-t, \varphi) = ri\varphi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma\varphi i + d)\tau - 2\ln \left[\frac{1 - ge^{dr}}{1 - g} \right] \right];$$

$$D(T-t, \varphi) = \left[\left(\frac{b_j - \rho\sigma\varphi i + d}{\sigma^2} \right) \left(\frac{1 - e^{dr}}{1 - ge^{dr}} \right) \right];$$

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\varphi i + d}{b_j - \rho\sigma\varphi i - d}$$

$$d = \sqrt{(\rho\sigma\varphi i - b_j) - \sigma^2(2u_j\varphi i - \varphi^2)}$$

para $j = 1, 2$ donde $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $a = k\theta$, $b_1 = k + \lambda - \rho\sigma$, $b_2 = k + \lambda$, $x = \ln(S_t)$

La integral de la ecuación 2.4.1 causa algunos problemas para la solución debido a los límites de la integral, la cual no puede ser evaluada en forma exacta, es por esto, que su solución se puede aproximar por algunos de los siguientes métodos: La transformada rápida de Fourier, propuesto por Carr & Madan (1998) siendo este método uno de los más recientes, el método de integración numérica, dentro de los cuales se pueden destacar el método de Simpson adaptativo y el método de Gauss Adaptativo. En N. Moodley (2005) se pueden revisar algunas consideraciones importantes de la ecuación presentada en 2.4.1 y los resultados obtenidos al resolver esta integral usando Matlab.

3 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Muchos fenómenos físicos, económicos, etc se rigen por ecuaciones en derivadas parciales o sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, las cuales van por lo general acompañadas de condiciones iniciales o de frontera. El método de diferencias finitas es uno de los métodos más universales y efectivo, usado para obtener una solución aproximada de ecuaciones en derivadas parciales. Mediante un proceso de discretización, el conjunto infinito de números que representan la función o funciones incógnitas, es reemplazado por un número finito de parámetros incógnita, y este proceso requiere alguna forma de aproximación.

3.1. Derivadas de Funciones de Una Variable

El método de diferencias finitas es el más usual para obtener expresiones equivalentes de los valores de las derivadas de funciones, E. Schiavi y A. Muñoz (2006) describen el método en forma detallada; combinando en forma adecuada desarrollos en serie de Taylor de las funciones. Para que la función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, x]$ pueda desarrollarse como una serie de Taylor es necesario que $f(x) \in C^{n+1}$, entonces el valor de la función puede expresarse como

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n(x)$$

donde $R_n(x)$ se conoce como resto de Lagrange y está definido por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, a \leq c \leq x$$

Luego

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Sea $x = x_i + h, a = x_i$

$$f(x_i + h) = f(x_i) + f'(x_i)(x_i + h - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_i + h - x_i)^2}{2} + \frac{f'''(x_i)(x_i + h - x_i)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)(x_i + h - x_i)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c_1)(x_i + h - x_i)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad a \leq c_1 \leq x \tag{3.1.1}$$

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_1) \tag{3.1.2}$$

Obteniéndose entonces

$$f(x_i + h) - f(x_i) = hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + \frac{h^3}{3}f'''(x_i) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_1) \tag{3.1.3}$$

3 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Ahora con $x = x_i - h$, $a = x_i$ se llega a

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \dots + \frac{(-h)^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + \frac{(-h)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_2) \quad a \leq c_2 \leq x \quad (3.1.4)$$

por lo tanto

$$f(x_i - h) - f(x_i) = -hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) - \frac{h^3}{3}f'''(x_i) + \dots + \frac{(-h)^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + \frac{(-h)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_2) \quad (3.1.5)$$

Restando a la ecuación 3.1.2 la ecuación 3.1.4 se obtiene

$$\begin{aligned} f(x_i + h) - f(x_i - h) &= 2hf'(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \dots + \frac{h^n - (-h)^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_1) \\ &\quad - \frac{(-h)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_2) \\ f(x_i + h) - f(x_i - h) &= 2f(x_i) + h^2f''(x_i) + \dots + \frac{h^n + (-h)^n}{n!}f^{(n)}(x_i) \\ &\quad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_1) + \frac{(-h)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_2) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Aproximación para la Primera Derivada

Para obtener la aproximación de la primera derivada, se usa 3.1.3 con $n = 1$; para obtener

$$\begin{aligned} f(x_i + h) - f(x_i) &= hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(c_1) \\ f'(x_i) &= \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2}f''(c_1) \end{aligned}$$

Luego $f'(x_i) \cong \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$, se conoce como aproximación de la primera derivada con “Diferencias finitas hacia adelante” o “Diferencias finitas progresivas”, con un error de truncamiento $O(h) = -\frac{h}{2}f''(c_1)$

De manera similar, usando 3.1.5 con $n = 1$; se obtiene

$$\begin{aligned} f(x_i - h) - f(x_i) &= -hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(c_2) \\ f'(x_i) &= \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + \frac{h}{2}f''(c_2) \end{aligned}$$

luego $f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$, conocida como aproximación de la primera derivada con “Diferencias finitas hacia atrás” o “Diferencias finitas regresivas”, con un error de truncamiento $O(h) = \frac{h}{2}f''(c_2)$.

Haciendo $n = 2$ en 3.1.6 se obtiene

$$\begin{aligned} f(x_i + h) - f(x_i - h) &= 2hf'(x_i) + \frac{h^3}{3!}[f'''(c_1) + f'''(c_2)] \\ f'(x_i) &= \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}[f'''(c_1) + f'''(c_2)] \end{aligned}$$

3 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Obteniéndose $f'(x_i) \cong \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$, se conoce como aproximación de la primera derivada con “Diferencias finitas centrales”, con un error de truncamiento $O(h) = -\frac{h^2}{6} [f'''(c_1) + f'''(c_2)]$.

Aproximación para la Segunda Derivada.

Para obtener una aproximación de la segunda derivada se usara 3.1.6 con $n = 3$.

$$f(x_i + h) + f(x_i - h) = 2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \frac{h^4}{4!} [f^{(iv)}(c_1) + f^{(iv)}(c_2)]$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2} - \frac{h^2}{4!} [f^{(iv)}(c_1) + f^{(iv)}(c_2)]$$

llegando a $f''(x_i) \cong \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2}$, que se conoce como aproximación de la segunda derivada con “Diferencias finitas centrales”, con un error de truncamiento $O(h^2) = -\frac{h^2}{4!} [f^{(iv)}(c_1) + f^{(iv)}(c_2)]$.

Más detalles del método de diferencias finitas se pueden revisar en B. Düring y M. Fournié (2010); J. Zavaleta y J. Mendoza (2007).

3.2. Derivadas de Funciones de Varias Variables.

El método de aproximación por diferencias finitas puede ser extendido al caso de funciones de varias variables. Para esto se usara el desarrollo en series de Taylor para la función $f(x, y)$ como sigue:

Sea $f(x, y) \in C^{(m+1)}(C, \mathbb{R})$ y en el punto $a = (a_x, a_y)$ un punto de C . Donde:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \frac{(x - a_x)^i (y - a_y)^j}{i! j!} \cdot \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} (a_x, a_y) + R_{m+1}$$

De la expansión de las sumatorias se sigue que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a_x, a_y) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_x, a_y)(x - a_x) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_x, a_y)(y - a_y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_x, a_y)(x - a_x)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_x, a_y) \cdot (x - a_x)(y - a_y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_x, a_y)(y - a_y)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a_x, a_y)(x - a_x)^3 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a_x, a_y)(x - a_x)^2 (y - a_y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a_x, a_y)(x - a_x)(y - a_y)^2 \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a_x, a_y)(y - a_y)^3 + \dots + \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(a_x, a_y)(x - a_x)^m \\ &+ \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y}(a_x, a_y)(x - a_x)^{m-1}(y - a_y) \\ &+ \dots + \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^m f}{\partial x \partial y^{m-1}}(a_x, a_y)(x - a_x)(y - a_y)^{m-1} + \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(a_x, a_y)(y - a_y)^m + R_{m+1} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

con

3 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

$$\begin{aligned}
 R_{m+1} &= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^k \partial y^{m+1-k}} ((a_x, a_y) + \theta(x, y)) \frac{(x - a_x)^k (y - a_y)^{m+1-k}}{k!(m+1-k)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{m+1} O\left((x - a_x)^k, (y - a_y)^{m+1-k}\right)
 \end{aligned}$$

Para calcular $f(x+h, y)$ y $f(x-h, y)$, teniendo en cuenta que los incrementos solo se están realizando en la primera componente, las derivadas con respecto a la segunda componente se suponen cero, de esta forma en 3.2.1 se tiene

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(a_x, a_y) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_x, a_y)(x - a_x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_x, a_y)(x - a_x)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a_x, a_y)(x - a_x)^3 + \dots + \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(a_x, a_y)(x - a_x)^m + R_{m+1}
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Si en 3.2.2 se hace $x = x_i + h$, $y = y_i$, $a_x = x_i$, $a_y = y_i$ se tiene

$$\begin{aligned}
 f(x_i + h, y_i) &= f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)(x_i + h - x_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_i)(x_i + h - x_i)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i, y_i)(x_i + h - x_i)^3 + \dots + \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(x_i, y_i)(x_i + h - x_i)^m \\
 &\quad + \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}((x_i, y_i) + \theta(x_i + h, y_i))(x_i + h - x_i)^{m+1}
 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
 f(x_i + h, y_i) &= f(x_i, y_i) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_i) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i, y_i) \\
 &\quad + \dots + \frac{h^m}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(x_i, y_i) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}(x_i + \theta x_i + \theta h, y_i + \theta y_i)
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

de manera similar, si en 3.2.5 se hace $x = x_i - h$, $y = y_i$, $a_x = x_i$, $a_y = y_i$ para obtener

$$\begin{aligned}
 f(x_i - h, y_i) &= f(x_i, y_i) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_i) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i, y_i) \\
 &\quad + \dots + \frac{(-h)^m}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(x_i, y_i) + \frac{(-h)^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}(x_i + \theta x_i - \theta h, y_i + \theta y_i)
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Para calcular $f(x_i, y_i + k)$ y $f(x_i, y_i - k)$, teniendo en cuenta que los incrementos solo se están realizando en la segunda componente, las derivadas con respecto a la primera componente se suponen cero, obteniéndose

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(a_x, a_y) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_x, a_y)(y - a_y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_x, a_y)(y - a_y)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a_x, a_y)(y - a_y)^3 + \dots + \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(a_x, a_y)(y - a_y)^m + R_{m+1}
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Mediante un procedimiento similar al realizado en x , se llega a los siguientes resultados:

3 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

$$\begin{aligned}
 f(x_i, y_i + k) &= f(x_i, y_i) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i, y_i) - \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_i, y_i) \\
 &+ \dots + \frac{k^m}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(x_i, y_i) + \frac{k^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial y^{m+1}}(x_i + \theta x_i - \theta h, y_i + \theta y_i)
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

$$\begin{aligned}
 f(x_i - h, y_i) &= f(x_i, y_i) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_i) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i, y_i) \\
 &+ \dots + \frac{(-h)^m}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(x_i, y_i) + \frac{(-h)^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}(x_i + \theta x_i - \theta h, y_i + \theta y_i)
 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Aproximación para las Primeras Derivadas

Haciendo $m = 1$ en 3.2.3, el desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$ es:

$$f(x_i + h, y_i) = f(x_i, y_i) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i + \theta x_i + \theta h, y_i + \theta y_i)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) = \frac{f(x_i + h, y_i) - f(x_i, y_i)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i + \theta x_i + \theta h, y_i + \theta y_i)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) = \frac{f(x_i + h, y_i) - f(x_i, y_i)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i + \theta h, y_i)$$

con $0 < \theta < 1$. De esta forma se obtiene la aproximación para la primera derivada $f_x(x_i, y_i) \cong \frac{f(x_i + h, y_i) - f(x_i, y_i)}{h}$, conocida como “Diferencias finitas hacia adelante” o “Diferencias finitas progresivas”, con un error de truncamiento $O(h) = -\frac{h}{2} f_{xx}(x_i + \theta h, y_i)$

En forma equivalente usando 3.2.9

$$f(x_i - h, y_i) = f(x_i, y_i) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i - \theta h, y_i)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) = \frac{f(x_i, y_i) - f(x_i - h, y_i)}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i - \theta h, y_i)$$

luego se obtiene $f_x(x_i, y_i) \cong \frac{f(x_i, y_i) - f(x_i - h, y_i)}{h}$, conocida como aproximación de la primera derivada con “Diferencias finitas hacia atrás” o “Diferencias finitas hacia regresivas”, con un error de truncamiento $O(h) = \frac{h}{2} f_{xx}(x_i - \theta h, y_i)$.

Considérese el desarrollo de Taylor de tercer orden para $f(x_i + h, y_i)$ y $f(x_i - h, y_i)$

$$f(x_i + h, y_i) = f(x_i, y_i) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_i) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i + \theta_1 h, y_i) \tag{3.2.8}$$

$$f(x_i - h, y_i) = f(x_i, y_i) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_i) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i - \theta_2 h, y_i) \tag{3.2.9}$$

3 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Restando de la ecuación 3.2.8 la ecuación 3.2.9 para obtener

$$f(x_i + h, y_i) - f(x_i - h, y_i) = 2h \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{h^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i + \theta_2 h, y_i) + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i - \theta_2 h, y_i) \right]$$

así

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) = \frac{f(x_i + h, y_i) - f(x_i - h, y_i)}{2h} - \frac{h^2}{6} \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i + \theta_1 h, y_i) + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i - \theta_2 h, y_i) \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) = \frac{f(x_i + h, y_i) - f(x_i - h, y_i)}{2h} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\theta, y_i) \quad \theta \in [x_i - h, x_i + h]$$

Luego se obtiene $\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) = \frac{f(x_i + h, y_i) - f(x_i - h, y_i)}{2h}$, conocida como aproximación de la primera derivada con “Diferencias finitas centrales”, con un error de truncamiento $0(h) = -\frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\theta, y_i)$

De manera similar se obtienen las aproximaciones para las primeras derivadas respecto de la segunda variable. En resumen, se pueden establecer las siguientes aproximaciones:

■ Diferencias hacia adelante

$$f_x(x_i, y_i) \cong \frac{f(x_i + h, y_i) - f(x_i, y_i)}{h}, \text{ con un error de truncamiento } 0(h) = -\frac{h}{2} f_{xx}(x_i + \theta h, y_i)$$

$$f_y(x_i, y_i) \cong \frac{f(x_i, y_i + k) - f(x_i, y_i)}{k}, \text{ con un error de truncamiento } O(k) = -\frac{k}{2} f_{yy}(x_i, y_i + \theta k)$$

■ Diferencias hacia atrás

$$f_x(x_i, y_i) \cong \frac{f(x_i, y_i) - f(x_i - h, y_i)}{h}, \text{ con un error de truncamiento } O(h) = \frac{h}{2} f_{xx}(x_i - \theta h, y_i).$$

$$f_y(x_i, y_i) \cong \frac{f(x_i, y_i) - f(x_i, y_i - k)}{k}, \text{ con un error de truncamiento } O(k) = \frac{k}{2} f_{yy}(x_i, y_i - \theta k)$$

■ Diferencias primeras simétricas o centrales

$$f_x(x_i, y_i) \cong \frac{f(x_i + h, y_i) - f(x_i - h, y_i)}{2h}, \text{ con un error de truncamiento } O(h^2) = -\frac{h^2}{6} f_{xxx}(\theta, y_i)$$

$$f_y(x_i, y_i) \cong \frac{f(x_i, y_i + k) - f(x_i, y_i - k)}{2h}, \text{ error un de truncamiento } O(k^2) = \frac{-k^2}{6} f_{yyy}(x_i, \theta)$$

Aproximación para las Segundas Derivadas

Para aproximar las segundas derivadas parciales de f respecto a x e y en el punto (x_i, y_i) se usa 3.2.3, 3.2.4, 3.2.6 y 3.2.7.

Se obtienen las siguientes aproximaciones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_i) = \frac{f(x_i - h, y_i) - 2f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i)}{h^2} - \frac{h}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\theta, y_i)$$

De manera análoga

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i, y_i) = \frac{f(x_i, y_i - k) - 2f(x_i, y_i) + f(x_i, y_i + k)}{h^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x_i, \theta)$$

3 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_i) = \frac{f(x_i + h, y_i + k) - f(x_i - h, y_i + k) - f(x_i + h, y_i - k) + f(x_i - h, y_i - k)}{h^2} \text{ con un error de truncamiento } O\left(\frac{h^3}{k}, h^2, h, k, k^2, \frac{k^3}{h}\right).$$

Para mas detalles del método de diferencias finitas para funciones de varias variables revisar E. Schiavi y A. Muñoz (2006).

4 SOLUCIONES NUMÉRICAS DEL MODELO DE HESTON

En este capítulo se presentarán algunas soluciones numéricas alternativas para el modelo de Heston asociadas al método de diferencias finitas en las cuales se incluye el esquema de diferencias finitas compacto de orden superior y el método de dirección alternante (ADI).

4.1. Esquema en Diferencias Finitas Compacto de Orden Superior

Considere el modelo de Heston escrito de la forma:

$$\begin{aligned} dS(t) &= \bar{\mu}S(t) dt + \sqrt{\sigma(t)}S(t) dW^{(1)}(t) \\ d\sigma(t) &= \kappa^* (\theta^* - \sigma(t)) dt + v\sqrt{\sigma(t)}dW^{(2)}(t) \end{aligned}$$

Así mismo, la ecuación en derivadas parciales de Heston toma la forma

$$V_t + \frac{1}{2}S^2\sigma V_{ss} + \rho v\sigma SV_{s\sigma} + \frac{1}{2}v^2\sigma V_{\sigma\sigma} + rSV_s + [\kappa^* (\theta^* - \sigma) - \lambda(S, \sigma, t)] V_\sigma - rV = 0$$

En B.Düring and M.Fournie (2010) se propone la transformación

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right) \quad \tilde{t} = T - t \quad u = \exp(r\tilde{t}) \frac{V}{K}$$

De este modo la ecuación en derivadas parciales toma la forma

$$u_t - \frac{1}{2}\sigma (u_{xx} + 2\rho v u_{x\sigma} + v^2 u_{\sigma\sigma}) + \left(\frac{1}{2}\sigma - r\right) u_x - \kappa [\theta - \sigma] u_\sigma = 0 \quad (4.1.1)$$

Mediante la transformación de variables $y = \frac{\sigma}{v}$ la ecuación (4.1.1) se transforma en la ecuación elíptica de dos dimensiones

$$-\frac{1}{2}vy_j (u_{xx} + u_{yy}) - \rho v y u_{xy} + \left(\frac{1}{2}vy_j - r\right) u_x - \kappa \frac{\theta - vy_j}{v} u_y = f(x, y) \quad (4.1.2)$$

La discretización del esquema de orden superior permite obtener

$$-\frac{1}{2}vy_j (\delta_x^2 u_{i,j} + \delta_y^2 u_{i,j}) - \rho v y_j \delta_x \delta_y u_{i,j} + \left(\frac{1}{2}vy_j - r\right) \delta_x u_{i,j} - \kappa \frac{\theta - vy_j}{v} \delta_y u_{i,j} - \tau_{i,j} = f_{i,j}$$

donde δ_x y δ_x^2 indican las aproximaciones de primer y segundo orden respecto a x , de manera similar δ_y y δ_y^2

4 SOLUCIONES NUMÉRICAS DEL MODELO DE HESTON

indican las aproximaciones de primer y segundo orden respecto a y . El error de truncamiento asociado viene dado por

$$\begin{aligned}\tau_{i,j} = & \frac{1}{24}vyh^2(u_{xxxx} + u_{yyyy}) + \frac{1}{6}\rho vyh^2(u_{xyyy} + u_{xxxy}) \\ & + \frac{1}{12}(2r - vy)h^2u_{xxx} + \frac{1}{6}\frac{\kappa(\theta - vy)}{v}h^2u_{yyy} + O(h^4)\end{aligned}$$

Las derivadas de la ecuación 4.1.2 respecto de x e y son respectivamente

$$u_{xxx} = -u_{xyy} - 2\rho u_{xxy} - \frac{2r + vy}{vy}u_{xx} + \frac{2\kappa(vy - \theta)}{v^2y}u_{xy} - \frac{2}{vy}f_x \quad (4.1.3)$$

$$u_{yyy} = -u_{xyy} - 2\rho u_{xyy} - \frac{1}{y}u_{xx} - \frac{2\kappa(\theta - vy) + v^2}{v^2y}u_{yy} - \frac{2\rho + 2r - vy}{vy}u_{xy} + \frac{1}{y}u_x + \frac{2\kappa}{vy}u_y - \frac{2}{vy}f_y \quad (4.1.4)$$

De forma similar derivando las ecuaciones 4.1.3 y 4.1.4 con respecto a x e y y sumando estas expresiones se llega a

$$\begin{aligned}u_{xyyy} + u_{xxxy} = & \frac{vy + 2r}{2vy^2}u_{xx} + \frac{\kappa(\theta + vy)}{v^2y^2}u_{xy} - \frac{4\kappa(\theta - vy) + v^2}{2v^2y}u_{xyy} - \frac{\rho v + 2r - vy}{vy}u_{xxy} \\ & - 2\rho u_{xxyy} - \frac{1}{2y}u_{xxx} + \frac{1}{vy^2}f_x - \frac{2}{vy}f_{xy}\end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Los detalles para obtener los coeficientes pueden revisarse en B. Düring, M. Fournié, and A. Jüngel (2009). Posteriormente se estudia la convergencia del nuevo esquema. Y por la característica lineal del problema, se considera la consistencia y la estabilidad del mismo.

4.2. Esquema Explicito de Diferencias Finitas

L. Sensen (2008) plantea el esquema de diferencias finitas explícito para hallar la solución de la ecuación en derivadas parciales de Heston, limitando el área computacional al rectángulo $[0, S] \times [0, V]$. La discretización contiene $I + 1$ nodo en dirección S y $J + 1$ nodo en dirección v . Se utiliza la diferencia central para la diferenciación de primer orden. Así que todas las derivadas parciales podrían describirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}(u_s)_{i,j} & \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta s} \\ (u_v)_{i,j} & \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta v} \\ (u_{ss})_{i,j} & \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta s)^2} \\ (u_{vv})_{i,j} & \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta v)^2} \\ (u_{sv})_{i,j} & \approx \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{4\Delta s\Delta v}\end{aligned}$$

4 SOLUCIONES NUMÉRICAS DEL MODELO DE HESTON

De esta forma se puede reconstruye el problema del precio actual con una transformación lineal mediante la introducción de la condición inicial y la condición de frontera, es decir $U'(t) = GU(t) + R$ donde G es la transformación matricial y R es residuo del vector. Haciendo sustituciones de diferencias finitas hacia adelante en en la ecuación diferencial de Heston se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^n - U_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} = & \left[(s_i)^2 v_j \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{2(\Delta s)^2} + \rho \sigma s_i v_j \frac{U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j-1} - U_{i-1,j+1}}{4 \Delta s \Delta v} \right. \\ & + \sigma^2 v_j \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{2(\Delta v)^2} + r s_i \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2 \Delta s} \\ & \left. + k(\eta - v_j) \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2 \Delta v} - r u_{i,j} \right] \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

siendo

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} = & A_{i,j}^n U_{i,j}^n + C_{i,j}^n U_{i-1}^n + D_{i,j}^n U_{i+1,j}^n + E_{i,j}^n U_{i,j-1}^n + F_{i,j}^n U_{i,j+1}^n \\ & + B_{i,j}^n (U_{i-1,j-1}^n - U_{i-1,j+1}^n - U_{i+1,j-1}^n + U_{i+1,j+1}^n) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Donde

$$\begin{aligned} A_{i,j}^n &= -i^2 v_j \Delta t - \frac{\sigma^2 j \Delta t}{\Delta v} + 1 - r \Delta t \\ C_{i,j}^n &= \left(\frac{i^2 v_j}{2} - \frac{r i}{2} \right) \Delta t \\ D_{i,j}^n &= \left(\frac{i^2 v_j}{2} + \frac{r i}{2} \right) \Delta t \\ E_{i,j}^n &= \left(\frac{\sigma^2 j}{2 \Delta v} - \frac{k(\eta - v_j)}{2 \Delta v} \right) \Delta t \\ F_{i,j}^n &= \left(\frac{\sigma^2 j}{2 \Delta v} + \frac{k(\eta - v_j)}{2 \Delta v} \right) \Delta t \\ B_{i,j}^n &= \frac{\rho \sigma i j}{4} \Delta t \end{aligned}$$

realizando las sustituciones de diferencias finitas hacia adelante la implementación es sencilla siempre que se tenga en cuenta las condiciones de contorno y los requerimientos del modelo como es la positividad, para esto se hace necesario

$$A_{i,j}^n + C_{i,j}^n + D_{i,j}^n + E_{i,j}^n + F_{i,j}^n < 1$$

para lo cual se toma

$$\Delta t \leq \frac{1}{i^2 v_j + \frac{\sigma^2 v_j}{\Delta v} + r} = \frac{1}{i^2 v_j + \frac{J \sigma^2 v_j}{V} + r}$$

y

$$\begin{aligned} i &\geq \frac{r}{v_j} \\ j &\geq \frac{k(\eta - v_j)}{\sigma^2} \end{aligned}$$

4 SOLUCIONES NUMÉRICAS DEL MODELO DE HESTON

esto es equivalente

$$\Delta t \leq \frac{1}{I^2 V + J\sigma^2 + r}$$

con este resultado se muestra la capacidad del esquema explícito, utilizando la diferencia central de tal forma que este presenta una solución muy cercana a la exacta.

4.3. Esquema ADI

El esquema ADI es un esquema implícito en el que se necesita un gran número de iteraciones en cada uno de los pasos de tiempo, por lo tanto se reduce la eficiencia de la computación. Es un buen método para aumentar la eficiencia en problemas multidimensionales mientras que se abstengan de la restricción de pasos de tiempo. El esquema se basa en las diferencias finitas de la PDE Heston, al hacer algunas transformaciones se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} = & \left[(s_i)^2 v_j \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2(\Delta s)^2} + \rho \sigma s_i v_j \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1}}{4 \Delta s \Delta v} \right. \\ & + \sigma^2 v_j \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2(\Delta v)^2} + r s_i \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta s} \\ & \left. + k(\eta - v_j) \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2 \Delta v} - r u_{i,j} \right]^n \end{aligned}$$

Al reescribir y organizar el esquema anterior queda

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n-1} = & a_{i,j}^{n+1} u_{i,j}^{n+1} + c_{i,j}^{n+1} u_{i-1,j}^{n+1} + d_{i,j}^{n+1} u_{i+1,j}^{n+1} + e_{i,j-1}^{n+1} + f_{i,j}^{n+1} u_{i,j+1}^{n+1} \\ & + b_{i,j}^{n+1} (u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n + u_{i+1,j+1}^n) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_{i,j}^n &= 1 + i^2 v_j \Delta t + \frac{\sigma^2 j \Delta t}{\Delta v} + r \Delta t \\ c_{i,j}^n &= -\left(\frac{i^2 v_j}{2} - \frac{r i}{2}\right) \Delta t \\ d_{i,j}^n &= -\left(\frac{i^2 v_j}{2} + \frac{r i}{2}\right) \Delta t \\ e_{i,j}^n &= -\left(\frac{\sigma^2 j}{2 \Delta v} - \frac{k(\eta - v_j)}{2 \Delta v}\right) \\ f_{i,j}^n &= -\left(\frac{\sigma^2 j}{2 \Delta v} - \frac{k(\eta - v_j)}{2 \Delta v}\right) \Delta t \\ b_{i,j}^n &= -\frac{\rho \sigma i j}{4} \Delta t \end{aligned}$$

Obteniendo el esquema θ como el promedio ponderado del esquema totalmente implícito y explícito, con lo cual se tiene

4 SOLUCIONES NUMÉRICAS DEL MODELO DE HESTON

$$\begin{aligned}
 & a_{i,j}^n u_{i,j}^n + c_{i,j}^n u_{i-1}^n + d_{i,j}^n u_{i+1,j}^n + e_{i,j}^n u_{i,j-1}^n + f_{i,j}^n u_{i,j+1}^n \\
 & \quad + b_{i,j}^n (u_{i-1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n + u_{i+1,j+1}^n) \\
 = & A_{i,j}^n u_{i,j}^n + C_{i,j}^n u_{i-1}^n + D_{i,j}^n u_{i+1,j}^n + E_{i,j}^n u_{i,j-1}^n + F_{i,j}^n u_{i,j+1}^n \\
 & \quad + B_{i,j}^n (u_{i-1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n + u_{i+1,j+1}^n)
 \end{aligned}$$

los coeficientes se modifican para reflejar la propiedad implícita de θ y debido a la dificultad en el trato con los términos mixtos derivados implícitamente, se establece $b_{i,j}^{n+1} = 0$.

La ecuación del esquema θ es

$$(1 - \ominus A_1 - \ominus A_2)U^{n+1} = [1 + A_0 + (1 - \ominus)A_1 + (1 - \ominus)A_2]U^n + O(\Delta t^3)$$

siendo A_0 el término mixto derivado, A_1 la derivada direccional de s y A_2 la derivada espacial en dirección de v y ru esta dado en términos de A_1 , A_2 , para más detalles ver L. Sensen (2008).

Bajo las consideraciones de Douglas-Rachford (1956) (método DR) en el que se ignora el error, se puede escribir

$$\begin{aligned}
 (1 - \ominus A_1)(1 - \ominus A_2)U^{n+1} &= (1 + A_0 + (1 - \ominus)A_1)U^n - (1 - \ominus A_1) \ominus A_2 U^n \\
 (1 - \theta A_1)Y &= [1 + A_0 + (1 - \theta)A_1 + A_2]U^n \\
 (1 - \theta A_2)U^{n+1} &= Y - \theta A_2 U
 \end{aligned}$$

cuando se hace $\ominus = 0$ resulta el esquema explícito mencionado antes. Al esquema anterior se le hacen modificaciones de acuerdo a las necesidades para obtener resultados más estables y precisos, una estas modificaciones es la propuesta por Craig y Sneyd (1988). La solución de la ecuación en derivadas parciales de Heston por el método ADI con algunas variaciones se puede ver en L Rasmussen (2011).

En R. Kjellin y G. Lövgren (2006) se puede ver la solución de la ecuación diferencial de Heston y algunos resultados numéricos teniendo en cuenta varias posibilidades para realizar la discretización.

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

Aquí se retomara la ecuación diferencial planteada por Heston (1993) y se abordara su solución haciendo uso de una transformación particular que permitirá pasar de una ecuación en derivadas parciales con siete términos a una con cinco términos, simplificando de esta forma su solución mediante el método de diferencias finitas descrito en el capítulo 3. Para garantizar la efectividad del esquema, se hará un análisis numérico que incluye la positividad, monotonicidad, consistencia, estabilidad y convergencia.

El esquema propuesto es de segundo orden en el espacio y de primer orden en el tiempo. Para testear los resultados de la estabilidad condicional en el sentido de Von Neuman, se desarrolla un análisis de Fourier del problema que conduce a la convergencia del esquema.

5.1. Introducción

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas acoplado descrito en las ecuaciones 2.2.2, 2.2.3 y 2.2.4.

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dB_1 \\ dv_t &= k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dB_2 \\ dB_1 dB_2 &= \rho dt \end{aligned}$$

Recuerde que la ecuación en derivadas parciales de Heston está dada por

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + r S \frac{\partial F}{\partial S} + [k[\theta - v(t)] - \lambda(v, S, t)] \frac{\partial F}{\partial v} - r F = 0 \quad (5.1.1)$$

donde $\lambda(v, S, t)$ representa la prima de riesgo del mercado para la volatilidad.

5.2. Transformación del Problema

Para facilitar la solución de la ecuación diferencial de Heston dada en 5.1.1, de manera similar a lo expuesto en F. Marín y M. Bastidas (2012), considere la transformación

$$V = e^{r(T-t)} F; \quad X = e^{r(T-t)} S; \quad \tau = \frac{v}{2} (T-t) \quad v = v \quad (5.2.1)$$

Así

$$V = V(X, v, \tau)$$

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

Se tiene $U = e^{-r(T-t)}V$, luego

$$\frac{\partial F}{\partial t} = e^{-r(T-t)} \frac{\partial V}{\partial t} + e^{-r(T-t)} r$$

Pero

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial X} e^{r(T-t)} S(-r) + \frac{\partial V}{\partial v} (0) + \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{v}{2} (-1) \\ &= -rX \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{v}{2} \frac{\partial V}{\partial \tau} \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= e^{-r(T-t)} \left(-rX \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{v}{2} \frac{\partial V}{\partial \tau} \right) + rV e^{-r(T-t)} \\ \frac{\partial F}{\partial S} &= e^{-r(T-t)} \frac{\partial V}{\partial S} \end{aligned}$$

pero

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial X} e^{r(T-t)}$$

así

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{-r(T-t)} \frac{\partial V}{\partial X} e^{r(T-t)} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial X}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) \\ &= \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial S} + \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial S} \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \frac{\partial X}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} e^{r(T-t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v} &= e^{-r(T-t)} \frac{\partial V}{\partial v} \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} = e^{-r(T-t)} \left[\frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial v} \right)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial S} \right] = e^{-r(T-t)} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial X \partial v} e^{r(T-t)} \right] \\ \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} &= \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial v}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} &e^{-r(T-t)} \left(-rX \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{v}{2} \frac{\partial V}{\partial \tau} \right) + rV e^{-r(T-t)} + \frac{1}{2} v S^2 \left(e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) + \rho v \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial v} \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2 v \left(e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right) + rS \frac{\partial V}{\partial X} + [k(\theta - v(t)) - \lambda(v, S, t)] e^{-r(T-t)} \frac{\partial V}{\partial v} - rF = 0 \\ &-rS \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{v}{2} e^{-r(T-t)} \frac{\partial V}{\partial \tau} + rV e^{-r(T-t)} + \frac{1}{2} v X^2 e^{-2r(T-t)} \left(e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) + \rho v \sigma e^{-r(T-t)} X \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial v} \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2 v \left(e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right) + r e^{-r(T-t)} X \frac{\partial V}{\partial X} + [k(\theta - v(t)) - \lambda(X, v, \tau)] e^{-r(T-t)} \frac{\partial V}{\partial v} - r e^{-r(T-t)} V = 0 \end{aligned}$$

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

Además

$$-rX \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{v}{2} \frac{\partial V}{\partial \tau} + rV + \frac{1}{2} v X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \rho v \sigma X \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + rX \frac{\partial V}{\partial X} + [k(\theta - v(t)) - \lambda(X, v, \tau)] \frac{\partial V}{\partial v} - rV = 0 \quad (5.2.2)$$

Organizando los términos en la ecuación 5.2.2 se obtiene la expresión

$$\frac{1}{2} v X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} - \frac{v}{2} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \rho v \sigma X \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + [k(\theta - v) - \lambda(X, v, \tau)] \frac{\partial V}{\partial v} = 0 \quad (5.2.3)$$

En Heston (1993) se supone que la prima de riesgo del mercado para la volatilidad es proporcional a la volatilidad, es decir, existe una constante $\lambda > 0$ tal que $\lambda(X, v, \tau) = \lambda v$. Observe que

$$\begin{aligned} k(\theta - v) - \lambda(X, v, \tau) &= k(\theta - v) - \lambda v \\ &= k\theta - kv - \lambda v \\ &= k\theta - (k + \lambda)v \\ &= (k + \lambda) \left(\frac{k\theta}{k + \lambda} - v \right) \\ &= k^* (\theta^* - v) \end{aligned}$$

donde los parámetros transformados resultan ser $k^* = k + \lambda$ y $\theta^* = \frac{k\theta}{k + \lambda}$, de esta forma se llega a la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + 2\rho\sigma X \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial v} + \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{2}{v} k^* (\theta^* - v) \frac{\partial V}{\partial v} \quad (5.2.4)$$

Cuyo dominio está conformado por

$$(X, v, \tau) \in (0, \infty) \times [v_m, v_M] \times [0, \frac{v_M}{2} T]$$

Y con la condición inicial $V(X, v, 0) = F(X) \geq 0$, $X \geq 0$, $v > 0$.

5.3. Construcción del Esquema Numérico

Como el dominio de la ecuación 5.2.4 no está acotado, para la aproximación numérica es importante definir un dominio acotado tal que sea posible calcular la solución. El dominio numérico puede ser elegido de acuerdo a diferentes criterios ver R. Kangro, R. Nicolaidis (2000). Se define $[0, b]$ como el dominio de la variable X , donde b es elegido de tal manera que el intervalo incluya el precio de ejercicio y el precio inicial. Se denota por $[c, d]$ el dominio numérico de la variable v , donde c y d se eligen de tal manera que el intervalo incluya la mínima y máxima varianza posible. De este modo, el dominio numérico puede ser representado por

$$(X, v, \tau) \in [0, b] \times [c, d] \times [0, \frac{v_M}{2} T]$$

Con los nodos

$$X_i = ih_1, \quad 0 \leq i \leq N_x; \quad v_j = c + jh_2; \quad 0 \leq j \leq N_v; \quad \tau^n = nk; \quad 0 \leq n \leq N_\tau$$

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

$$N_x h_1 = b; \quad N_v h_2 = d - c; \quad N_\tau k = \frac{v_M T}{2}$$

La aproximación numérica para la solución exacta $V(x_i, v_j, \tau^n)$ es denotado por $V_{i,j}^n$ y las aproximaciones para las derivadas parciales están dadas por:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}(x_i, v_j, \tau^n) = \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{k} + O(k) \quad (5.3.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial v}(x_i, v_j, \tau^n) = \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2h_2} + O(h_2) \quad (5.3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial v}(x_i, v_j, \tau^n) &= \frac{V_{i+1,j+1}^n + V_{i-1,j-1}^n - V_{i-1,j+1}^n - V_{i+1,j-1}^n}{4h_1 h_2} + O(h_1 h_2) \\ &= \Delta_{i,j}^n(V) + O(h_1 h_2) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2}(x_i, v_j, \tau^n) &= \frac{V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j+1}^n}{h_2^2} + O(h_2^2) \\ &= \Delta_j^n(V) + O(h_2^2) \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(x_i, v_j, \tau^n) &= \frac{V_{i-1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i+1,j}^n}{h_1^2} + O(h_1^2) \\ &= \Delta_i^n(V) + O(h_1^2) \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Tenga en cuenta que, debido al uso de las aproximaciones centradas de las derivadas en $X_0 = 0$, $X_N = b$ y $v_0 = c$, $v_{N_v} = d$ aparecen los nodos ficticios externos $X_{-1} = -h_1$, $X_{N_x+1} = \frac{N_x + 1}{h_1}$, $v_{-1} = c - h_2$ y $v_{N_v+1} = c + \frac{N_v + 1}{h_2}$.

Las aproximaciones $V_{0,-1}^n$, V_{0,N_v+1}^n , $V_{N_x,-1}^n$, V_{N_x,N_v+1}^n , $V_{-1,0}^n$, $V_{N_x+1,0}^n$, V_{-1,N_v}^n , V_{N_x+1,N_v}^n se obtienen al usar extrapolación lineal a lo largo de las aproximaciones más cercanas obtenidas en los nodos interiores del dominio numérico, por lo tanto

$$\begin{aligned} V_{0,-1}^n &= 2V_{0,0}^n - V_{0,1}^n \\ V_{0,N_v+1}^n &= 2V_{0,N_v}^n - V_{0,N_v-1}^n \\ V_{N_x,-1}^n &= 2V_{N_x,0}^n - V_{N_x,1}^n \\ V_{N_x,N_v+1}^n &= 2V_{N_x,N_v}^n - V_{N_x,N_v-1}^n \\ V_{-1,0}^n &= 2V_{0,0}^n - V_{1,0}^n \\ V_{N_x+1,0}^n &= 2V_{N_x,0}^n - V_{N_x-1,0}^n \\ V_{-1,N_v}^n &= 2V_{0,N_v}^n - V_{1,N_v}^n \\ V_{N_x+1,N_v}^n &= 2V_{N_x,N_v}^n - V_{N_x-1,N_v}^n \end{aligned}$$

y de 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4 y 5.3.5 se llega a

$$\Delta_{i,0}^n V = \Delta_{i,N_v}^n V = \Delta_{0,j}^n V = \Delta_{N_x,j}^n V = 0, \quad 0 \leq n \leq N_\tau$$

Reemplazando las aproximaciones 5.3.1, 5.3.2, 5.3.4, 5.3.5 y 5.3.3 en la ecuación 5.2.4 se obtiene:

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

$$\begin{aligned} \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{k} &= x_i^2 \frac{V_{i-1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i+1,j}^n}{h_1^2} + 2\rho\sigma x_i \frac{V_{i+1,j+1}^n + V_{i-1,j-1}^n - V_{i-1,j+1}^n - V_{i+1,j-1}^n}{4h_1h_2} \\ &+ \sigma^2 \frac{V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j+1}^n}{h_2^2} + \frac{2}{v} k^* (\theta^* - v) \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2h_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{i,j}^{n+1}}{k} - \frac{V_{i,j}^n}{k} &= i^2 h_1^2 \frac{V_{i-1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i+1,j}^n}{h_1^2} + \rho\sigma i h_1 \frac{V_{i+1,j+1}^n + V_{i-1,j+1}^n - V_{i-1,j-1}^n - V_{i+1,j-1}^n}{2h_1h_2} \\ &+ \sigma^2 \frac{V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j+1}^n}{h_2^2} + \frac{1}{h_2(c + jh_2)} [k^* (\theta^* - (c + jh_2))] (V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\forall i, 0 \leq i \leq N_x$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{V_{i,j}^{n+1}}{k} - \frac{V_{i,j}^n}{k} &= i^2 V_{i-1,j}^n - 2i^2 V_{i,j}^n + i^2 V_{i+1,j}^n + \frac{\rho\sigma i}{2h_2} V_{i+1,j+1}^n + \frac{\rho\sigma i}{2h_2} V_{i-1,j-1}^n \\ &+ \frac{\rho\sigma i}{2h_2} V_{i-1,j+1}^n - \frac{\rho\sigma i}{2h_2} V_{i+1,j-1}^n + \frac{\sigma^2}{h_2^2} V_{i,j-1}^n - 2\frac{\sigma^2}{h_2^2} V_{i,j}^n \\ &+ \frac{\sigma^2}{h_2^2} V_{i,j+1}^n + \frac{1}{h_2(c + jh_2)} [k^* (\theta^* - (c + jh_2))] V_{i,j+1}^n \\ &- \frac{1}{h_2(c + jh_2)} [k^* (\theta^* - (c + jh_2))] V_{i,j-1}^n \end{aligned}$$

Despejando $V_{i,j}^{n+1}$ se llega a

$$\begin{aligned} V_{i,j}^{n+1} &= \frac{k\rho\sigma i}{2h_2} V_{i-1,j-1}^n + ki^2 V_{i-1,j}^n - \frac{k\rho\sigma i}{2h_2} V_{i-1,j+1}^n + k \left(\frac{1}{k} - 2i^2 - 2\frac{\sigma^2}{h_2^2} \right) V_{i,j}^n \\ &+ k \left(\frac{\sigma^2}{h_2^2} - \frac{1}{h_2(c + jh_2)} [k^* (\theta^* - (c + jh_2))] \right) V_{i,j+1}^n \\ &+ k \left(\frac{\sigma^2}{h_2^2} + \frac{1}{h_2(c + jh_2)} [k^* (\theta^* - (c + jh_2))] \right) V_{i,j-1}^n \\ &- \frac{k\rho\sigma i}{2h_2} V_{i+1,j-1}^n + ki^2 V_{i+1,j}^n + \frac{k\rho\sigma i}{2h_2} V_{i+1,j+1}^n \end{aligned}$$

finalmente, resulta el esquema dado por

$$V_{i,j}^{n+1} = b_i V_{i-1,j-1}^n + a_i V_{i-1,j}^n - b_i V_{i-1,j+1}^n + d_i V_{i,j}^n + e_j V_{i,j+1}^n + c_j V_{i,j-1}^n - b_i V_{i+1,j-1}^n + a_i V_{i+1,j}^n + b_i V_{i+1,j+1}^n \quad (5.3.6)$$

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

donde

$$\begin{aligned}
 a_i &= ki^2, \quad b_i = \frac{k\rho\sigma i}{2h_2}, \quad c_j = k \left(\frac{\sigma^2}{h_2^2} - \lambda_j \right) \\
 d_i &= 1 - 2a_i - \frac{2k\sigma^2}{h_2^2} \\
 e_j &= k \left(\frac{\sigma^2}{h_2^2} + \lambda_j \right) \\
 \lambda_j &= \frac{1}{h_2(c + jh_2)} [k^* (\theta^* - (c + jh_2))] \\
 &= \frac{k^*\theta^*}{h_2(c + jh_2)} - \frac{k^*}{h_2}
 \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

5.4. Análisis del Esquema

Desde el punto de vista práctico, se sabe que una opción o cualquier otro instrumento derivado financiero que dependa de un activo debe ser positivo en cualquier punto del tiempo. En esta sección se establecerán las condiciones para que cada punto de la malla asociado al esquema 5.3.6 sea positivo. Este esquema incluye un análisis de la positividad de los coeficientes, de las fronteras y de la recombinación del interior de la malla, además se hará un estudio de la consistencia y de la monotonidad para garantizar la ausencia de oscilaciones inadecuadas en la solución numérica.

Para testear la estabilidad, se presenta un análisis de Fourier que conducirá a la convergencia del esquema.

5.4.1. Positividad de los Coeficientes

En esta sección se encontrarán las condiciones para h_2 y k , bajo las cuales los coeficientes a_i , b_i , c_j , d_i y e_j son positivos. Estas condiciones se determinan evaluando los valores de i y j en los extremos $[0, N_x]$ y $[0, N_v]$ respectivamente sobre cada coeficiente. En adelante, suponga que $\rho \geq 0$; $0 \leq c \leq \theta^* \leq d$; $h_1 \geq 0$ y $k > 0$.

Positividad de a_i

$a_i = ki^2 \geq 0$ como $k > 0$ y $\forall i, 0 \leq i \leq N_x, i^2 \geq 0$, se tiene que $a_i \geq 0$ de manera trivial.

Positividad de b_i

$b_i = \frac{k\rho\sigma i}{2h_2} \geq 0$ como k, ρ, σ, h_2 son todos no negativos, se obtiene $b_i \geq 0$ de manera trivial.

Positividad de c_j

$c_j = k \left(\frac{\sigma^2}{h_2^2} - \lambda_j \right) \geq 0$, note que $k > 0$ y $h_2 > 0$ entonces,

$$\frac{\sigma^2}{h_2^2} \geq \frac{1}{(c + jh_2)} [k^* (\theta^* - (c + jh_2))]$$

Caso 1: $j = 0$

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

$$\frac{\sigma^2}{h_2} \geq \frac{k^* [\theta^* - c]}{c}$$

teniendo en cuenta que $\theta^* - c \geq 0$, entonces:

$$h_2 \leq \frac{c\sigma^2}{k^* [\theta^* - c]} \quad (5.4.1)$$

Caso 2: $j = N_v$

$$\frac{\sigma^2}{h_2^2} \geq \frac{1}{(c + N_v h_2) h_2} [k^* (\theta^* - (c + N_v h_2))]$$

Teniendo en cuenta que $N_v h_2 = d - c$, y $h_2 > 0$ se obtiene

$$\frac{\sigma^2}{h_2} \geq \frac{k^* (\theta^* - d)}{d}$$

como $\theta^* - d \leq 0$,

$$h_2 \geq \frac{d\sigma^2}{k^* (\theta^* - d)} \quad (5.4.2)$$

Finalmente se llega a una condición trivial, ya que h_2 es positivo y el término $\frac{d\sigma^2}{k^* (\theta^* - d)}$ es negativo.

Positividad de d_i

$$d_i = 1 - 2a_i - 2\frac{k\sigma^2}{h_2^2} \geq 0$$

Caso 1: $i = 0$

$$1 - 2a_0 - 2\frac{k\sigma^2}{h_2^2} \geq 0$$

como $a_0 = 0$, se obtiene $1 \geq 2\frac{k\sigma^2}{h_2^2}$, es decir

$$k \leq \frac{h_2^2}{2\sigma^2} \quad (5.4.3)$$

Caso 2: $i = N_x$

$$1 - 2k(N_x)^2 - 2\frac{k\sigma^2}{h_2^2} \geq 0$$

Con lo cual se obtiene $1 \geq 2k \left[(N_x)^2 - \frac{\sigma^2}{h_2^2} \right]$ y como $N_x = \frac{S_{Max}}{h_1}$

se tiene

$$k \leq \frac{1}{2 \left[\left(\frac{S_{Max}}{h_1} \right)^2 - \left(\frac{\sigma}{h_2} \right)^2 \right]} \quad (5.4.4)$$

Teniendo en cuenta las condiciones para k definidas en 5.4.3 y 5.4.4 se tendría

$$k_1 \leq \frac{h_2^2}{2\sigma^2}; \quad k_2 \leq \frac{1}{2 \left[\left(\frac{S_{Max}}{h_1} \right)^2 - \left(\frac{\sigma}{h_2} \right)^2 \right]}$$

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

Positividad de e_j

$$e_j = k \left(\frac{\sigma^2}{h_2^2} + \lambda_j \right) \geq 0, \text{ pero } k > 0, \text{ luego}$$

$$\frac{\sigma^2}{h_2^2} + \frac{1}{(c + jh_2)} [k^*(\theta^* - (c + jh_2))] \geq 0$$

Por lo tanto

$$\frac{\sigma^2}{h_2^2} \geq -\frac{1}{(c + jh_2)} [k^*(\theta^* - (c + jh_2))]$$

Caso 1: $j = 0$

$$\frac{1}{h_2} \geq -\frac{k^*(\theta^* - c)}{c\sigma^2}$$

ya que $\theta^* - c \geq 0$

$$-\frac{c\sigma^2}{k^*(\theta^* - c)} \leq h_2$$

finalmente,

$$h_2 \geq \frac{c\sigma^2}{k^*(c - \theta^*)} \tag{5.4.5}$$

Lo cual es una condición trivial, pues $\frac{c\sigma^2}{k^*(c - \theta^*)}$ es negativo y h_2 es un valor positivo.

Caso 2: $j = N_v$

$$\frac{\sigma^2}{h_2^2} \geq -\frac{1}{(c + N_v h_2)} [k^*(\theta^* - (c + N_v h_2))]$$

Finalmente se obtiene

$$h_2 \leq \frac{d\sigma^2}{k^*(d - \theta^*)} \tag{5.4.6}$$

En resumen, eliminando las condiciones triviales para h_2 y tomando $h_2 \leq \min \{5,4,1, 5,4,6\}$ y $k \leq \min \{5,4,3, 5,4,4\}$ se establece el siguiente resultado.

Proposición 29. *Suponga que $0 \leq c \leq \theta^* \leq d$; $h_1 > 0$; $h_2 > 0$; $k > 0$ y $\rho \geq 0$. Si $2cd \leq \theta^*(c + d)$; entonces se tiene*

$$h_2 \leq \frac{c\sigma^2}{k^*[\theta^* - c]} \text{ y } k \leq \frac{1}{2 \left[\left(\frac{S_{\text{Max}}}{h_1} \right)^2 - \left(\frac{\sigma}{h_2} \right)^2 \right]}$$

y en consecuencia los coeficientes a_i , b_i , c_i , d_i y e_i son no negativos para $0 \leq i \leq N_x$ y $0 \leq j \leq N_v$.

5.4.2. Extrapolación y Positividad de las Fronteras.

Usando las aproximaciones 5.3.3, 5.3.4 y 5.3.5 suponga que

$$\begin{aligned}\Delta_{ij}^n(V) &= 0 && \text{para } i = \{0, N_x\} \text{ y } j = \{0, N_v\} \\ \Delta_i^n(V) &= 0 && \text{para } j = \{0, N_v\} \text{ y } 0 \leq i \leq N_x \\ \Delta_j^n(V) &= 0 && \text{para } i = \{0, N_x\} \text{ y } 0 \leq j \leq N_v\end{aligned}$$

Así se tienen las siguientes extrapolaciones

$$(V_{i+1,j+1}^n - V_{i-1,j+1}^n) - (V_{i+1,j-1}^n - V_{i-1,j-1}^n) = 0 \quad (5.4.7)$$

$$V_{i,j}^n = \frac{V_{i,j-1}^n + V_{i,j+1}^n}{2} \quad (5.4.8)$$

$$V_{i,j}^n = \frac{V_{i-1,j}^n + V_{i+1,j}^n}{2} \quad (5.4.9)$$

De las ecuaciones 5.3.7. El esquema numérico 5.3.6 puede reescribirse de la forma

$$\begin{aligned}V_{i,j}^{n+1} &= b_i [(V_{i+1,j+1}^n - V_{i-1,j+1}^n) - (V_{i+1,j-1}^n - V_{i-1,j-1}^n)] + k i^2 (V_{i-1,j}^n + V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n) \\ &+ k \frac{\sigma^2}{h_2^2} (V_{i,j-1}^n + V_{i,j+1}^n - 2V_{i,j}^n) + k \lambda_j (V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n) + V_{i,j}^n\end{aligned} \quad (5.4.10)$$

de las extrapolaciones obtenidas en 5.4.7, 5.4.9 y 5.4.8. El esquema 5.4.10 queda reducido a

$$V_{i,j}^{n+1} = k \lambda_j (V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n) + V_{i,j}^n, \quad (5.4.11)$$

para

$$i = \{0, N_x\}; 0 \leq j \leq N_v \quad \text{y} \quad j = \{0, N_v\}; 0 \leq i \leq N_x \quad \text{con} \quad 0 \leq n \leq N_\tau \quad (5.4.12)$$

Considere la condición de frontera $V(X, v, 0) = F(X) = \max(X - k, 0)$. Observe que

$$V_{i,j}^0 = \max(ih_1 - K, 0) = 0, \quad 0 \leq i \leq N_x \text{ y } 0 \leq j \leq N_v \quad (5.4.13)$$

Así, los valores específicos para cada frontera se establecen en la siguiente proposición.

Proposición 30. *Considere las fronteras en el dominio numérico del esquema 5.3.6 definidas por 5.4.12 .*

Entonces para $0 \leq j \leq N_v$

$$V_{0,j}^{n+1} = 0 \text{ y } V_{N_x,j}^{n+1} = S_{Max} - k, \quad \text{para } 0 \leq n \leq N_\tau$$

Demostración. La prueba se hará por inducción para cada frontera.

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

Parte 1. Observe de 5.4.13 que $V_{0,j}^{n+1} = 0$ para $n = 0$, es decir, $V_{0,j}^1 = k\lambda_j (V_{0,j+1}^0 - V_{0,j-1}^0) + V_{0,j}^0 = 0$.

Ahora suponga que $V_{0,j}^n = 0$; $0 \leq j \leq N_v$ (Hipótesis inductiva).

Se tiene que $V_{0,j}^{n+1} = k\lambda_j (V_{0,j+1}^n - V_{0,j-1}^n) + V_{0,j}^n$ es fácil ver por la hipótesis inductiva que $V_{0,j}^{n+1} = 0$. En particular, tome $j = 0$ así,

$$V_{0,0}^{n+1} = k\lambda_0 (V_{0,1}^n - V_{0,-1}^n) + V_{0,0}^n = 2k\lambda_0 (V_{0,1}^n - V_{0,0}^n) + V_{0,0}^n = 0 \quad \forall n. \text{ Del mismo modo, para } j = N_v$$

$$V_{0,N_v}^{n+1} = k\lambda_{N_v} (V_{0,N_v+1}^n - V_{0,N_v-1}^n) + V_{0,N_v}^n = 2k\lambda_{N_v} (V_{0,N_v}^n - V_{0,N_v-1}^n) + V_{0,N_v}^n = 0 \quad \forall n$$

Parte 2. Observe de 5.4.13 que $V_{N_x,j}^{n+1} = S_{Max} - K$, para $n = 0$, es decir, $V_{N_x,j}^1 = k\lambda_j (V_{N_x,j+1}^0 - V_{N_x,j-1}^0) + V_{N_x,j}^0 = S_{Max} - K$.

Ahora suponga que $V_{N_x,j}^n = 0$; $0 \leq j \leq N_v$ (Hipótesis inductiva).

Se tiene que $V_{N_x,j}^{n+1} = k\lambda_j (V_{N_x,j+1}^n - V_{N_x,j-1}^n) + V_{N_x,j}^n$ es fácil ver por la hipótesis inductiva que $V_{N_x,j}^{n+1} = 0$. En particular, tome $j = 0$ así,

$$V_{N_x,0}^{n+1} = k\lambda_0 (V_{N_x,1}^n - V_{N_x,-1}^n) + V_{N_x,0}^n = 2k\lambda_0 (V_{N_x,1}^n - V_{N_x,0}^n) + V_{N_x,0}^n = 0 \quad \forall n. \text{ Del mismo modo, para } j = N_v$$

$$V_{N_x,N_v}^{n+1} = k\lambda_{N_v} (V_{N_x,N_v+1}^n - V_{N_x,N_v-1}^n) + V_{N_x,N_v}^n = 2k\lambda_{N_v} (V_{N_x,N_v}^n - V_{N_x,N_v-1}^n) + V_{N_x,N_v}^n = 0 \quad \forall n$$

De las partes 1 y 2 la proposición queda demostrada. □

Corolario 31. Considere los puntos extremos del esquema 5.3.6 $V_{0,0}^{n+1}$, V_{0,N_v}^{n+1} , $V_{N_x,0}^{n+1}$, V_{N_x,N_v}^{n+1} , de la proposición 30 puede concluirse que

$$V_{0,0}^{n+1} = V_{0,0}^n = \dots = V_{0,0}^0 = 0; \quad V_{0,N_v}^{n+1} = V_{0,N_v}^n = \dots = V_{0,N_v}^0 = 0 \quad (5.4.14)$$

$$V_{N_x,0}^{n+1} = V_{N_x,0}^n = \dots = V_{N_x,0}^0 = S_{Max} - k; \quad V_{N_x,N_v}^{n+1} = V_{N_x,N_v}^n = \dots = V_{N_x,N_v}^0 = S_{Max} - k \quad (5.4.15)$$

Suponiendo que:

$$\begin{aligned} \dots \leq V_{i-1,j} \leq V_{i,j} \leq V_{i+1,j} \dots & \quad \forall j, \quad V_{i,j} \geq 0 \\ \dots \leq V_{i,j-1} \leq V_{i,j} \leq V_{i,j+1} \dots & \quad \forall i, \quad V_{i,j} \geq 0 \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

5.4.3. Positividad del Interior

Defina

$$\begin{aligned} \Delta_j^n &= V_{i+1,j}^n - V_{i,j}^n & \Delta_j^n &= V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n \\ \hat{\Delta}_j^n &= V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n & \hat{\Delta}_j^n &= V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n \end{aligned}$$

De la condición inicial observe que $V_{i,j}^0 \geq 0$ y además, $V_{i+1,j}^0 \geq V_{i,j}^0 \geq V_{i-1,j}^0$; $V_{i,j+1}^0 \geq V_{i,j}^0 \geq V_{i,j-1}^0$. Así,

$$\Delta_j^0 \geq 0; \quad \hat{\Delta}_j^0 \geq 0, \quad \Delta_i^0 \geq 0; \quad \hat{\Delta}_i^0 \geq 0$$

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

Es fácil observar que además

$$\dot{\Delta}_{j+1}^n - \dot{\Delta}_{j-1}^n \geq 0 \text{ y } \dot{\Delta}_{i+j+1}^n - \dot{\Delta}_{i-j-1}^n \geq 0$$

Proposición 32. *Considere el esquema numérico 5.3.6. Si $\dot{\Delta}_{j+1}^n - \dot{\Delta}_{j-1}^n \geq 0$, $n = 0, 1, \dots, N_\tau$ el esquema es positivo para $1 \leq i \leq N_x - 1$ y $1 \leq j \leq N_v - 1$.*

Demostración. El esquema numérico 5.3.6 puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} V_{i,j}^{n+1} &= b_i (V_{i+1,j+1}^n - V_{i+1,j-1}^n + V_{i-1,j-1}^n - V_{i-1,j+1}^n) + a_i (V_{i-1,j}^n + V_{i+1,j}^n) + c_j V_{i,j-1}^n + d_i V_{i,j}^n + e_j V_{i,j+1}^n \\ &= b_i \left(\dot{\Delta}_{i+1}^n - \dot{\Delta}_{i-1}^n \right) + a_i (V_{i-1,j}^n + V_{i+1,j}^n) + c_j V_{i,j-1}^n + d_i V_{i,j}^n + e_j V_{i,j+1}^n \end{aligned}$$

Observe que $V_{i,j}^1 = b_i \left(\dot{\Delta}_{i+1}^0 - \dot{\Delta}_{i-1}^0 \right) + a_i (V_{i-1,j}^0 + V_{i+1,j}^0) + c_j V_{i,j-1}^0 + d_i V_{i,j}^0 + e_j V_{i,j+1}^0$. Como $\dot{\Delta}_{i+1}^0 - \dot{\Delta}_{i-1}^0 \geq 0$; $V_{i,j}^0 \geq 0$ y los coeficientes a_i, b_i, c_j, d_i, e_j son todos positivos, entonces $V_{i,j}^1 \geq 0$, con $1 \leq i \leq N_x - 1$ y $1 \leq j \leq N_v - 1$.

Ahora suponga que $V_{i,j}^n \geq 0$ (Hipótesis inductiva)

puesto que $\dot{\Delta}_{j+1}^n - \dot{\Delta}_{j-1}^n \geq 0$ y los coeficientes a_i, b_i, c_j, d_i, e_j son todos positivos $\forall i, j, 0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_v$. Se concluye que $V_{i,j}^{n+1} \geq 0, 1 \leq i \leq N_x - 1$ y $1 \leq j \leq N_v - 1$.

Donde $i - 1, i, i + 1, i + 2 \in J$, y $n \in L$ y I, J, L son conjuntos de números enteros no negativos. Bajo los supuestos anteriores, para un payoff $V_{i,j}^0$ no negativo, la solución numérica $V_{i,j}^n$ es no negativa. \square

5.4.4. Positividad de las Fronteras

Frontera 1 Observe que por la proposición 30 las fronteras definidas en 5.4.12 son no negativas, es decir, $V_{0,j}^{n+1} \geq 0$ y $V_{N_x,j}^{n+1} \geq 0$ para $0 \leq j \leq N_v; 0 \leq n \leq N_\tau$.

Dado que $i = 0$ y $0 \leq j \leq N_v$, usando 5.4.11 se tiene $V_{0,j}^{n+1} = k\lambda_j (V_{0,j+1}^n - V_{0,j-1}^n) + V_{0,j}^n = 0$ por la proposición 32.

Frontera 1 Considere la frontera dada por $V_{i,N_v}^{n+1} = k\lambda_{N_v} (V_{N_x,N_v+1}^n - V_{N_x,N_v-1}^n) + V_{N_x,N_v}^n$. Usando las extrapolaciones obtenidas en 5.4.7, 5.4.9 y 5.4.8, se sigue que $V_{i,N_v}^{n+1} = 2k\lambda_{N_v} (V_{i,N_v}^n - V_{i,N_v-1}^n) + V_{i,j}^n$.

Nótese que $V_{i,N_v}^0 \geq 0$ pues $V_{i,N_v}^0 - V_{i,N_v-1}^0 = 0$, es decir $V_{i,N_v}^1 = V_{i,N_v}^0, \forall i$.

Ahora suponga que $V_{i,N_v}^n \geq 0, 1 \leq i \leq N_x - 1$ (Hipótesis Inductiva).

Observe que $0 \leq k^* (d - \theta^*) < 1$ y $\frac{T}{N_\tau} < 1$, así $0 \leq k^* (d - \theta^*) < 1$.

Por otro lado $0 \leq V_{i,N_v}^n - V_{i,N_v-1}^n < V_{i,N_v}^n$ de este modo $\frac{d}{dN_\tau} k^* (d - \theta^*) \frac{\Delta}{N_v-1} \leq V_{i,N_v}^n$. Pero $\frac{dT}{N_\tau} = 2k$, luego $2k \frac{k^*}{d} (d - \theta^*) \frac{\Delta}{N_v-1} \leq V_{i,N_v}^n$, pero $\lambda_{N_v} = \frac{1}{d} k^* (d - \theta^*)$. Finalmente $V_{i,N_v}^{n+1} + 2k\lambda_{N_v} (V_{i,N_v}^n - V_{i,N_v-1}^n) = V_{i,N_v}^n \geq 0$

Se tiene $i = N_x$ y $1 \leq j \leq N_v - 1$. Por lo tanto $V_{N_x,j}^{n+1} = k\lambda_j (V_{N_x,j+1}^n - V_{N_x,j-1}^n) + V_{N_x,j}^n = 0$ por la proposición 32 se verifica $V_{N_x,j}^n \geq 0$.

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

Considere la frontera dada por $V_{i,0}^{n+1} = k\lambda_0 (V_{i,1}^n - V_{i,-1}^n) + V_{i,0}^n$. Usando las extrapolaciones obtenidas en 5.4.7, 5.4.9 y 5.4.8, se sigue que $V_{i,0}^{n+1} = 2k\lambda_0 (V_{i,1}^n - V_{i,0}^n) + V_{i,0}^n$. Nótese que $V_{i,N_v}^0 \geq 0$ pues $V_{i,N_v}^0 - V_{i,N_v-1}^0 = 0$, es decir $V_{i,N_v}^1 = V_{i,N_v}^0, \forall i$.

Ahora suponga que $V_{i,N_v}^n \geq 0, 1 \leq i \leq N_x - 1$ (Hipótesis Inductiva).

Observe que $0 \leq k^* (d - \theta^*) < 1$ y $\frac{T}{N_\tau} < 1$, así $0 \leq k^* (d - \theta^*) < 1$.

Por otro lado $0 \leq V_{i,N_v}^n - V_{i,N_v-1}^n < V_{i,N_v}^n$ de este modo $\frac{d}{d} \frac{T}{N_\tau} k^* (d - \theta^*) \Delta_{N_v-1}^n \leq V_{i,N_v}^n$. Pero $\frac{dT}{N_\tau} = 2k$, luego $2k \frac{k^*}{d} (d - \theta^*) \Delta_{N_v-1}^n \leq V_{i,N_v}^n$, pero $\lambda_{N_v} = \frac{1}{d} k^* (d - \theta^*)$. Finalmente $V_{i,N_v}^n + 2k\lambda_{N_v} (V_{i,N_v}^n - V_{i,N_v-1}^n) = V_{i,N_v}^n \geq 0$

5.4.5. Monotonicidad del Interior

Para realizar el análisis de la monotonicidad, se necesita conocer los coeficientes $a_{i+1}, b_{i+1}, c_{j+1}, d_{i+1}$ y e_{j+1} , en términos de su primer rezago

- Observe que el valor de λ_{j+1} corresponde a

$$\begin{aligned} \lambda_{j+1} &= \frac{k^* \theta^*}{h_2 (c + (j+1) h_2)} - \frac{k^*}{h_2} \\ &= \lambda_j - \frac{k^* \theta^*}{(c + (j+1) h_2) (c + j h_2)} \\ &= \lambda_j - \delta_j \end{aligned} \tag{5.4.17}$$

donde se ha definido

$$\delta_j = \frac{k^* \theta^*}{(c + (j+1) h_2) (c + j h_2)} \tag{5.4.18}$$

- Ahora se establecerán los valores correspondientes de $a_{i+1}, b_{i+1}, c_{j+1}, d_{i+1}$ y e_{j+1} .

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= k(i^2 + 2i + 1) \\ &= a_i + k(2i + 1) \\ &= a_i + \gamma_i \end{aligned} \tag{5.4.19}$$

donde $\gamma_i = k(2i + 1)$

$$\begin{aligned} b_{i+1} &= \frac{i\rho\sigma k}{2h_2} + \frac{\rho\sigma k}{2h_2} \\ &= b_i + \delta \end{aligned} \tag{5.4.20}$$

$$\begin{aligned} c_{j+1} &= k \left(\frac{\sigma^2}{h_2^2} - \lambda_{j+1} \right) \\ &= \frac{k\sigma^2}{h_2^2} - k\lambda_j + k\delta_j \\ &= c_j + k\delta_j \end{aligned} \tag{5.4.21}$$

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

$$\begin{aligned} d_{i+1} &= 1 - 2a_{i+1} - \frac{2k\sigma^2}{h_2^2} \\ &= d_i - 2\gamma_i \end{aligned} \tag{5.4.22}$$

$$\begin{aligned} e_{j+1} &= k \left(\frac{\sigma^2}{h_2^2} + \lambda_{j+1} \right) \\ &= k \frac{\sigma^2}{h_2^2} + k\lambda_j - k\delta_j \\ &= e_j - k\delta_j \end{aligned} \tag{5.4.23}$$

Definición 33. Considere el esquema $W(V_{ij}^n) = 0$, $i \in I$, $j \in J$, $n \in L$; donde I , J y L son conjuntos de enteros no negativos. Se dice que el esquema es i -monotono conservativo si suponiendo que $\Delta_j^n \geq 0$ entonces ocurre que $\Delta_j^{n+1} \geq 0$. Así mismo, el esquema es j -monotono conservativo si $\Delta_i^n \geq 0$ entonces $\Delta_i^{n+1} \geq 0$.

Proposición 34. Considere el esquema numérico 5.3.6 $1 \leq i \leq N_x - 1$; $1 \leq j \leq N_v - 1$ y las fronteras definidas en 5.4.12. Si $\Delta_i^n - \Delta_{i-1}^n \geq 0$ y $\Delta_j^n - \Delta_{j-1}^n \geq 0$ entonces, el esquema numérico 5.3.6 con sus fronteras 5.4.12 es i -monotono conservativo y j -monotono conservativo, con $0 \leq i \leq N_x$; $0 \leq j \leq N_v$, $0 \leq n \leq N_\tau$.

Demostración. i-monotonicidad

$$\begin{aligned} V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1} &= b_{i+1}V_{i,j-1}^n + a_{i+1}V_{i,j}^n - b_{i+1}V_{i,j+1}^n + c_jV_{i+1,j-1}^n + d_{i+1}V_{i+1,j}^n \\ &\quad + e_jV_{i+1,j+1}^n - b_{i+1}V_{i+2,j-1}^n + a_{i+1}V_{i+2,j}^n + b_{i+1}V_{i+2,j+1}^n \\ &\quad - b_iV_{i-1,j-1}^n - a_iV_{i-1,j}^n + b_iV_{i-1,j+1}^n - c_jV_{i,j-1}^n - d_iV_{i,j}^n \\ &\quad - e_jV_{i,j+1}^n + b_iV_{i+1,j-1}^n - a_iV_{i+1,j}^n - b_iV_{i+1,j+1}^n \end{aligned}$$

usando 5.4.19, 5.4.20 y 5.4.22 se tiene:

$$\begin{aligned} V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1} &= b_i \left[(V_{i+2,j+1}^n - V_{i+1,j+1}^n) - (V_{i,j+1}^n - V_{i-1,j+1}^n) \right] - \left[(V_{i+2,j-1}^n - V_{i+1,j-1}^n) - (V_{i,j-1}^n - V_{i-1,j-1}^n) \right] \\ &\quad + \delta \left[(V_{i+2,j+1}^n - V_{i+2,j-1}^n) - (V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n) \right] + a_i \left[(V_{i+2,j}^n - V_{i+1,j}^n) + (V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n) \right] \\ &\quad + \gamma_i \left[(V_{i+2,j}^n - V_{i+1,j}^n) - (V_{i+1,j}^n - V_{i,j}^n) \right] + c_j (V_{i+1,j-1}^n - V_{i,j-1}^n) + d_i (V_{i+1,j}^n - V_{i,j}^n) \\ &\quad + e_j (V_{i+1,j+1}^n - V_{i,j+1}^n) \\ &= b_i \left[\left(\Delta_{i+1}^{n,j+1} - \Delta_{i-1}^{n,j+1} \right) - \left(\Delta_{i+1}^{n,j-1} - \Delta_{i-1}^{n,j-1} \right) \right] + \delta \left[\left(\Delta_{i+2}^n - \Delta_i^n \right) \right] + a_i \left[\left(\Delta_{i+1}^n + \Delta_{i-1}^n \right) \right] \\ &\quad + \gamma_i \left[\Delta_{i+1}^n - \Delta_i^n \right] + c_j \Delta_{i-1}^n + d_i \Delta_i^n + e_j \Delta_{i+1}^n \end{aligned}$$

Suponga que $V_{i+2,j}^n \geq V_{i+1,j}^n \geq V_{i,j}^n \geq V_{i-1,j}^n \geq \dots \forall i \in I$ y $V_{i,j+2}^n \geq V_{i,j+1}^n \geq V_{i,j}^n \geq V_{i,j-1}^n \dots \forall j \in J$.

Se tiene $\Delta_{i+1}^{n,j+1} \geq \Delta_{i-1}^{n,j+1}$; $\Delta_{i+1}^{n,j-1} \geq \Delta_{i-1}^{n,j-1}$ y como $\Delta_{i+1}^n \geq \Delta_{i+1}^{n-1}$ y $\Delta_{i-1}^n \geq \Delta_{i-1}^{n-1}$

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

Se sigue que $\left(\frac{\Delta^n}{i+1} - \frac{\Delta^n}{i-1}\right) - \left(\frac{\Delta^n}{i+1} - \frac{\Delta^n}{i-1}\right) \geq 0$, $\frac{\Delta^n}{j} - \frac{\Delta^n}{j} \geq 0$, $\frac{\Delta^n}{i+1} + \frac{\Delta^n}{i-1} \geq 0$, $\frac{\Delta^n}{i+1} - \frac{\Delta^n}{i} \geq 0$

Finalmente como a_i, b_i, c_j, d_i, e_j son no negativos, $V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1} \geq 0$

De este modo se concluye que el esquema 5.3.6 es i -monotono conservativo para $1 \leq i \leq N_{x-1}$; $1 \leq j \leq N_{v-1}$; $0 \leq n \leq N_\tau$

j-monotonicidad

$$\begin{aligned} V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1} &= b_i V_{i-1,j}^n + a_i V_{i-1,j+1}^n - b_i V_{i-1,j+2}^n + d_i V_{i,j+1}^n + e_{j+1} V_{i,j+2}^n \\ &\quad + c_{j+1} V_{i,j}^n - b_i V_{i+1,j}^n + a_i V_{i+1,j+1}^n + b_i V_{i+1,j+2}^n \\ &\quad - b_i V_{i-1,j-1}^n - a_i V_{i-1,j}^n + b_i V_{i-1,j+1}^n - d_i V_{i,j}^n - e_j V_{i,j+1}^n \\ &\quad - c_j V_{i,j-1}^n + b_i V_{i+1,j-1}^n - a_i V_{i+1,j}^n - b_i V_{i+1,j+1}^n \end{aligned}$$

usando 5.4.21 y 5.4.23 y con un procedimiento análogo al anterior, puede probarse que el esquema 5.3.6 es j -monotono conservativo para $1 \leq i \leq N_{x-1}$; $1 \leq j \leq N_{v-1}$; $0 \leq n \leq N_\tau$ \square

5.4.6. Monotonicidad de las Fronteras

Se proba que las fronteras definidas en 5.4.12 son j -monotono conservativas para $i = 0$ y para $i = N_x$ con $0 \leq j \leq N_v$ e i -monotono conservativas para $j = 0$ y $j = N_v$ con $1 \leq i \leq N_{x-1}$. Es decir que

$$V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n \geq 0 \Rightarrow V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1} \geq 0$$

$$V_{i+1,j}^n - V_{i,j}^n \geq 0 \Rightarrow V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i+1,j}^{n+1} \geq 0$$

Frontera 1 Para $i = 0$ con $0 \leq j \leq N_v$ se tiene la frontera $V_{0,j}^{n+1} = k\lambda_j (V_{0,j+1}^n - V_{0,j-1}^n) + V_{0,j}^n$. Por lo tanto

$$V_{0,j+1}^{n+1} - V_{0,j}^{n+1} = k\lambda_{j+1} (V_{0,j+2}^n - V_{0,j}^n) + V_{0,j+1}^n - k\lambda_j (V_{0,j+1}^n - V_{0,j-1}^n) - V_{0,j}^n$$

Teniendo en cuenta 5.4.17 se tiene,

$$\begin{aligned} V_{0,j+1}^{n+1} - V_{0,j}^{n+1} &= k(\lambda_j - \delta_j) (V_{0,j+2}^n - V_{0,j}^n) + V_{0,j+1}^n - k\lambda_j (V_{0,j+1}^n - V_{0,j-1}^n) - V_{0,j}^n \\ &= k\lambda_j [(V_{0,j+2}^n - V_{0,j}^n) - (V_{0,j+1}^n - V_{0,j-1}^n)] - k\delta_j (V_{0,j+2}^n - V_{0,j}^n) + V_{0,j+1}^n - V_{0,j}^n \\ &= k\lambda_j \left[\frac{\Delta^n}{j+1} - \frac{\Delta^n}{j} \right] - k\delta_j \frac{\Delta^n}{j+1} + V_{0,j+1}^n - V_{0,j}^n \end{aligned}$$

por la proposición 5.4.2 $\frac{\Delta^n}{j+1} = 0$, $\frac{\Delta^n}{j} = 0$ y $\frac{\Delta^n}{j} = 0$ y $V_{0,j+1}^n - V_{0,j}^n \geq 0$, en consecuencia, $V_{0,j+1}^{n+1} - V_{0,j}^{n+1} \geq 0$.

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA ALTERNATIVA PARA EL MODELO DE HESTON

Para $j = N_v$ y $1 \leq i \leq N_x - 1$ se tiene la frontera $V_{i,N_v}^{n+1} = k\lambda_{N_v} (V_{i,N_v+1}^n - V_{i,N_v-1}^n) + V_{i,N_v}^n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} V_{i,N_v+1}^{n+1} - V_{i,N_v}^{n+1} &= k\lambda_{N_v} (V_{i,N_v+2}^n - V_{i,N_v}^n) + V_{i,N_v+1}^n - k\lambda_{N_v} (V_{i,N_v+1}^n - V_{i,N_v-1}^n) - V_{i,N_v}^n \\ &= k\lambda_{N_v} [(V_{i,N_v+2}^n - V_{i,N_v}^n) - (V_{i,N_v+1}^n - V_{i,N_v-1}^n)] + V_{i,N_v+1}^n - V_{i,N_v}^n \\ &= k\lambda_{N_v} \left[\frac{\Delta}{N_v+1} \frac{n}{i} - \frac{\Delta}{N_v} \frac{n}{i} \right] + V_{i,N_v+1}^n - V_{i,N_v}^n \end{aligned}$$

por la proposición 5.4.2 $\frac{\Delta}{N_v+1} \frac{n}{i} - \frac{\Delta}{N_v} \frac{n}{i} \geq 0$ y $V_{i,N_v+1}^n - V_{i,N_v}^n \geq 0$, en consecuencia, $V_{i,N_v+1}^{n+1} - V_{i,N_v}^{n+1} \geq 0$.

Para $i = N_x$ con $0 \leq j \leq N_v$ se tiene la frontera $V_{N_x,j}^{n+1} = k\lambda_j (V_{N_x,j+1}^n - V_{N_x,j-1}^n) + V_{N_x,j}^n$. Por lo tanto

$$V_{N_x,j+1}^{n+1} - V_{N_x,j}^{n+1} = k\lambda_{j+1} (V_{N_x,j+2}^n - V_{N_x,j}^n) + V_{N_x,j+1}^n - k\lambda_j (V_{N_x,j+1}^n - V_{N_x,j-1}^n) - V_{N_x,j}^n$$

Teniendo en cuenta 5.4.17 se tiene,

$$\begin{aligned} V_{N_x,j+1}^{n+1} - V_{N_x,j}^{n+1} &= k(\lambda_j - \delta_j) (V_{N_x,j+2}^n - V_{N_x,j}^n) + V_{N_x,j+1}^n - k\lambda_j (V_{N_x,j+1}^n - V_{N_x,j-1}^n) - V_{N_x,j}^n \\ &= k\lambda_{N_v} [(V_{N_x,j+2}^n - V_{N_x,j}^n) - (V_{N_x,j+1}^n - V_{N_x,j-1}^n)] - k\delta_{N_v} (V_{N_x,j+2}^n - V_{N_x,j}^n) + V_{N_x,j+1}^n - V_{N_x,j}^n \\ &= k\lambda_{N_v} \left[\frac{\Delta}{j+1} \frac{n}{N_x} - \frac{\Delta}{j} \frac{n}{N_x} \right] - k\delta_{N_v} \frac{\Delta}{j+1} \frac{n}{N_x} + V_{i,N_v+1}^n - V_{i,N_v}^n \end{aligned}$$

por la proposición 5.4.2 $\frac{\Delta}{N_v+1} \frac{n}{N_x} - \frac{\Delta}{N_v} \frac{n}{N_x} \geq 0$ y $V_{i,N_v+1}^n - V_{i,N_v}^n \geq 0$, en consecuencia, $V_{0,j+1}^{n+1} - V_{0,j}^{n+1} \geq 0$.

Para $j = 0$ con $1 \leq i \leq N_x - 1$ se tiene la frontera $V_{i,0}^{n+1} = k\lambda_0 (V_{i,1}^n - V_{i,-1}^n) + V_{i,0}^n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} V_{i+1,0}^{n+1} - V_{i,0}^{n+1} &= k\lambda_0 (V_{i+1,1}^n - V_{i+1,-1}^n) + V_{i+1,0}^n - k\lambda_0 (V_{i,1}^n - V_{i,-1}^n) - V_{i,0}^n \\ &= k\lambda_{N_v} [(V_{i+1,1}^n - V_{i+1,-1}^n) - (V_{i,1}^n - V_{i,-1}^n)] + V_{i+1,0}^n - V_{i,0}^n \\ &= k\lambda_{N_v} \left[\frac{\Delta}{0} \frac{n}{i+1} - \frac{\Delta}{0} \frac{n}{i} \right] + V_{i+1,0}^n - V_{i,0}^n \end{aligned}$$

por la proposición 5.4.2 $\frac{\Delta}{0} \frac{n}{i+1} - \frac{\Delta}{0} \frac{n}{i} \geq 0$ y $V_{i,N_v+1}^n - V_{i,N_v}^n \geq 0$, en consecuencia, $V_{i+1,0}^{n+1} - V_{i,0}^{n+1} \geq 0$.

Por lo tanto se concluye que el esquema completo es i - monotono conservativo y j - monotono conservativo para $0 \leq i \leq N_x; 0 \leq j \leq N_v; 0 \leq n \leq N_\tau$.

5.4.7. Consistencia del Esquema

La consistencia de un esquema numérico con respecto a una ecuación diferencial parcial significa que la solución mediante el esquema de diferencias finito aproxima la solución exacta de la Ecuación en derivadas parciales, en otras palabras, el error de discretización tiende a anularse cuando disminuyen continuamente los intervalos de discretización.

Teorema 35. Para cualquiera de los parámetros fijos, el esquema 5.3.6 es consistente con la ecuación en derivadas parciales.

5.4.8. Estabilidad del Esquema

En esta parte se realiza un resumen de la teoría de estabilidad para métodos de diferencias finitas de problemas de valores iniciales. El análisis de estabilidad determina el crecimiento o decrecimiento de los errores numéricos que se cometen al resolver la ecuación en diferencias. Aunque una ecuación en diferencias tenga teóricamente, solución exacta, en la resolución práctica se cometen errores de redondeo. Si los errores se atenúan a medida que se realizan los cálculos, el esquema es estable; sin embargo, si no permanecen acotados, el esquema es inestable. El objetivo de un análisis de estabilidad en un problema de diferencias finitas se basa en encontrar las condiciones que los intervalos de discretización deben satisfacer para que el esquema sea estable.

Para analizar la estabilidad del esquema en el sentido de Von Neuman, el esquema 5.3.6 debe reescribirse en la forma

$$V_{i,j}^n = A^n \exp(I [\bar{k}_1 m + \bar{k}_2 n])$$

Donde I es unidad imaginaria, A^n es la amplitud de el nivel del tiempo n , $\bar{k}_i = \frac{2\pi h}{\lambda_i}$ son los ángulos de fase con longitud de onda λ_i . Además se tiene $i\Delta x = m$ y $j\Delta v = n$.

Entonces $\xi = \frac{A^{n+1}}{A^n}$, luego el factor de amplificación satisface

$$\begin{aligned} \xi = & -4b [\sin(\bar{k}_1 \Delta x) \sin(\bar{k}_2 \Delta v)] + 2a \cos(\bar{k}_1 \Delta x) + d + c [\cos(\bar{k}_2 \Delta v) - I \sin(\bar{k}_2 \Delta v)] \\ & + e [\cos(\bar{k}_2 \Delta v) - I \sin(\bar{k}_2 \Delta v)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x, \Delta v \rightarrow 0} & \left| -4b [\sin(\bar{k}_1 \Delta x) \sin(\bar{k}_2 \Delta v)] + 2a \cos(\bar{k}_1 \Delta x) + d \right. \\ & \left. + c [\cos(\bar{k}_2 \Delta v) - I \sin(\bar{k}_2 \Delta v)] + e [\cos(\bar{k}_2 \Delta v) - I \sin(\bar{k}_2 \Delta v)] \right| \\ & = |2a_i + d_i + c_j + e_j| \end{aligned}$$

Es claro que los coeficientes del esquema numérico 5.3.6 cumplen

$$2a_i + d_i + c_j + e_j = 1,$$

con lo cual

$$|\xi| = |2a_i + d_i + c_j + e_j| = 1 \tag{5.4.24}$$

Por lo tanto, el esquema 5.3.6 es condicionalmente estable.

5.4.9. Convergencia del Esquema

Teorema 36. *Teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer.*

El teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer, válido para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, expresa que:

“Dado un problema de valores iniciales bien planteado y una aproximación en diferencias finitas que satisface la condición de consistencia, la estabilidad es una condición necesaria y suficiente para la convergencia.”

Usando el teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer y la condición 5.4.24 se puede concluir la convergencia del esquema 5.3.6.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS EXPERIMENTALES

6.1. Valoración de Opciones Call Europeas

En este capítulo se realizan algunos resultados numéricos experimentales asociados a la valoración de Opciones Call Europeas. Se realizan dos grupos de experimentos tomando valores positivos y negativos para la correlación de los movimientos Brownianos para activos que no pagan dividendos usando el esquema numérico 5.3.6. A continuación se presentan las superficies de pago para diferentes incrementos en el vector de precios y distintas fechas de expiración.

Experimento 1 En las siguientes gráficas se ilustran los resultados obtenidos con el método de diferencias finitas explícito con diferentes incrementos en el vector de precios, esto es, $h_1 = 10$, $h_1 = 5$ y $h_1 = 1$, valores constantes para los parámetros $r, T, \sigma, \rho, c, d, K, b, S_0$.

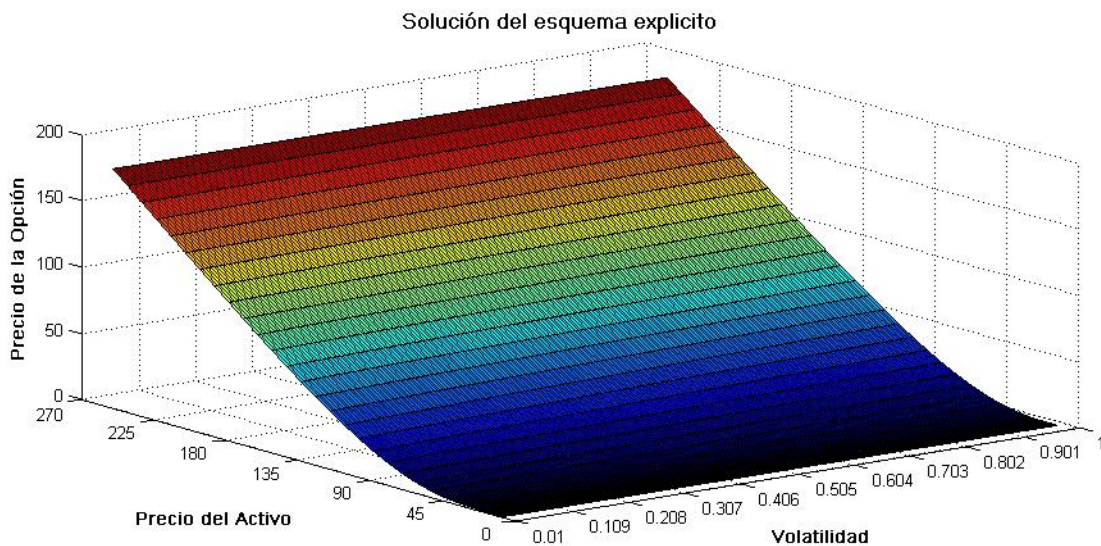


Figura 6.1.1: Solución del esquema explícito para ($h_1 = 10$). Parámetros $r = 0.05, T = 1, \sigma = 0.1, \rho = 0.5, c = 0.01, d = 1, K = 90, b = 270, S_0 = 100$

6 RESULTADOS NUMÉRICOS EXPERIMENTALES

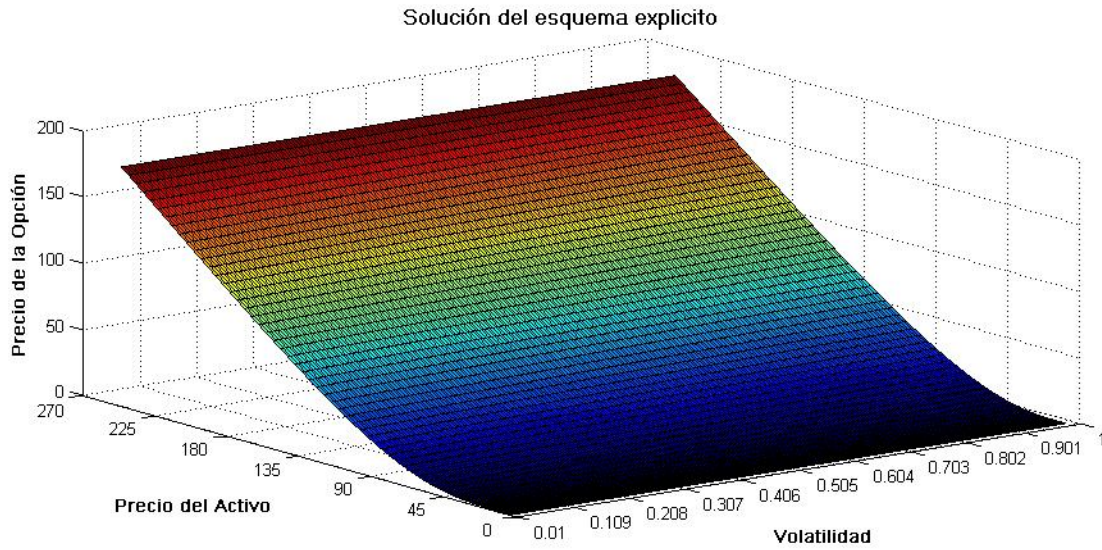


Figura 6.1.2: Solución del esquema explícito para ($h_1 = 5$). Parámetros $r = 0.05$, $T = 1$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 0.5$, $c = 0.01$, $d = 1$, $K = 90$, $b = 270$, $S_0 = 100$

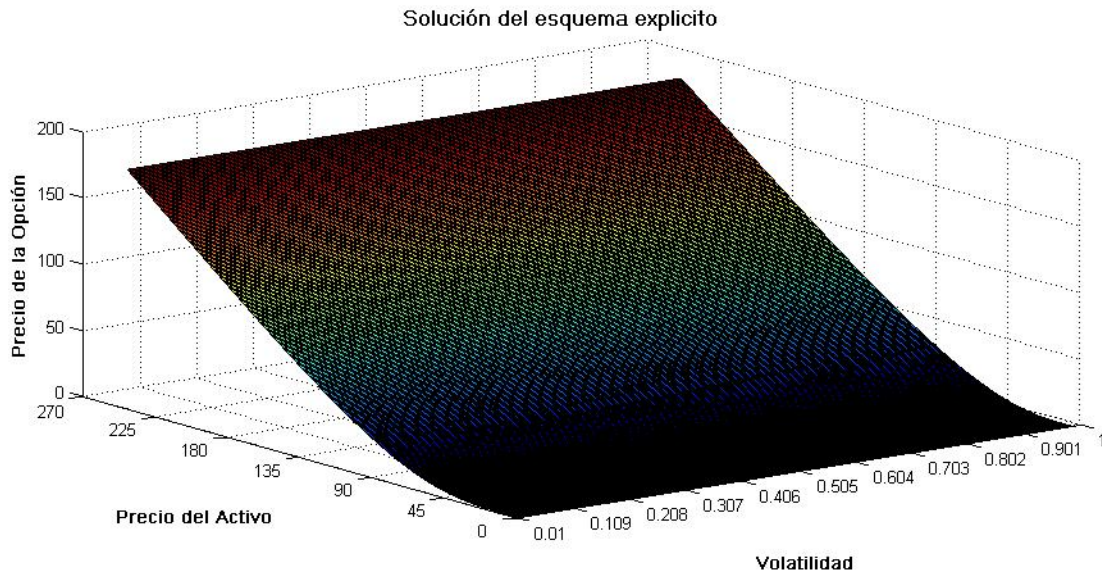


Figura 6.1.3: Solución del esquema explícito para ($h_1 = 1$). Parámetros $r = 0.05$, $T = 1$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 0.5$, $c = 0.01$, $d = 1$, $K = 90$, $b = 270$, $S_0 = 100$

Análisis de convergencia de Malla

En la siguiente gráfica se muestra el comportamiento del precio de la opción a medida que el incremento del precio se hace cada vez mas pequeño.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS EXPERIMENTALES

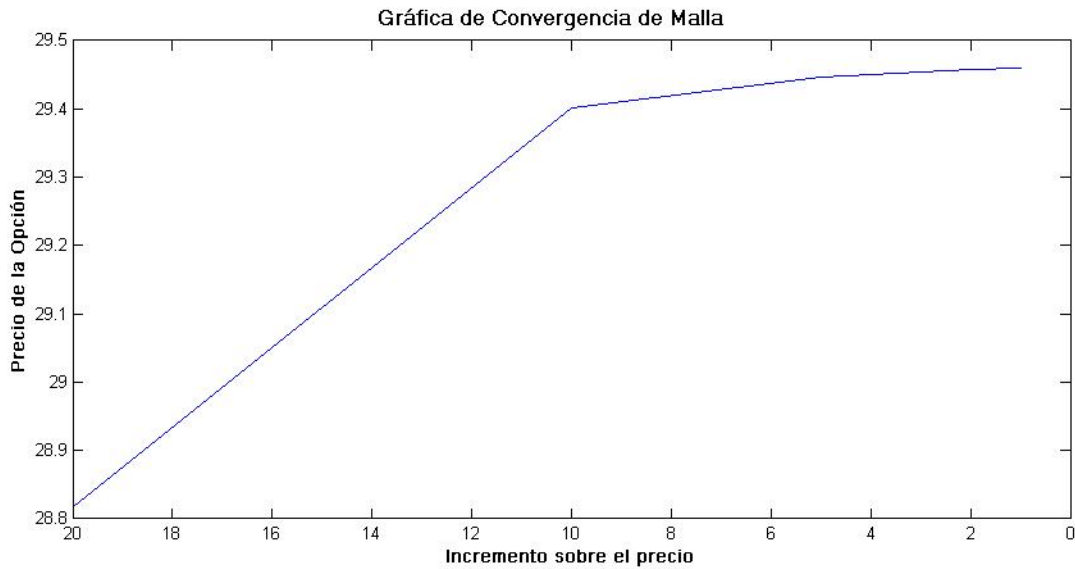


Figura 6.1.4: Análisis de convergencia de Malla ($h_1 = 20, 10, 5, 2, 1$): $r = 0.05$, $T = 1$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 0.5$, $c = 0.01$, $d = 1$, $K = 90$, $b = 270$, $S_0 = 100$

Se puede observar que a medida que h_1 disminuye, el precio de la opción converge, en este caso se aproxima a 29,45990781215879

Ahora se muestran las graficas de las superficies de pago cambiando el tiempo de expiración.

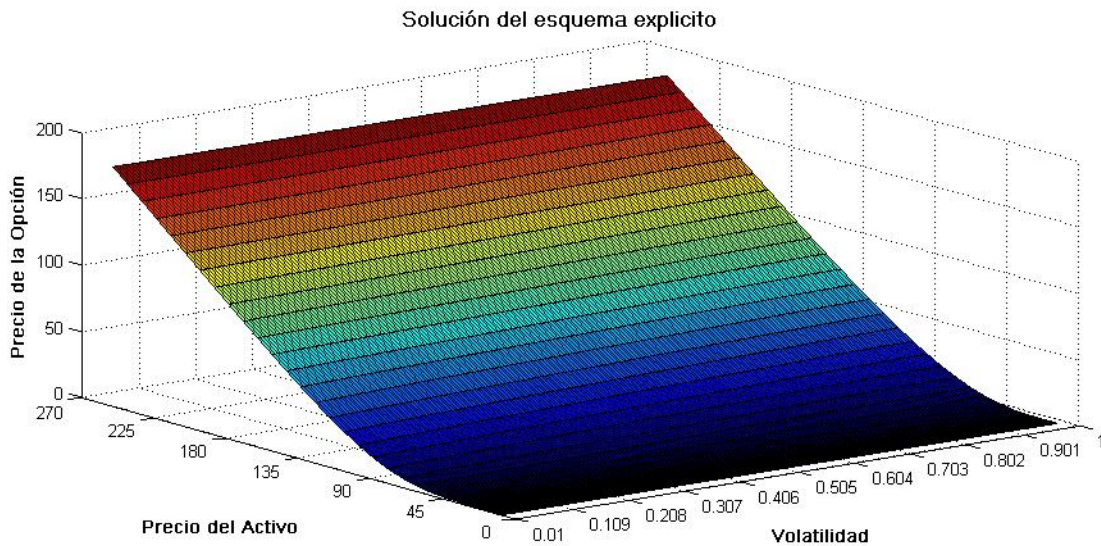


Figura 6.1.5: Solución del esquema explícito para ($h_1 = 10$). Parámetros $r = 0.05$, $T = \frac{1}{2}$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 0.5$, $c = 0.01$, $d = 1$, $K = 90$, $b = 270$, $S_0 = 100$

6 RESULTADOS NUMÉRICOS EXPERIMENTALES

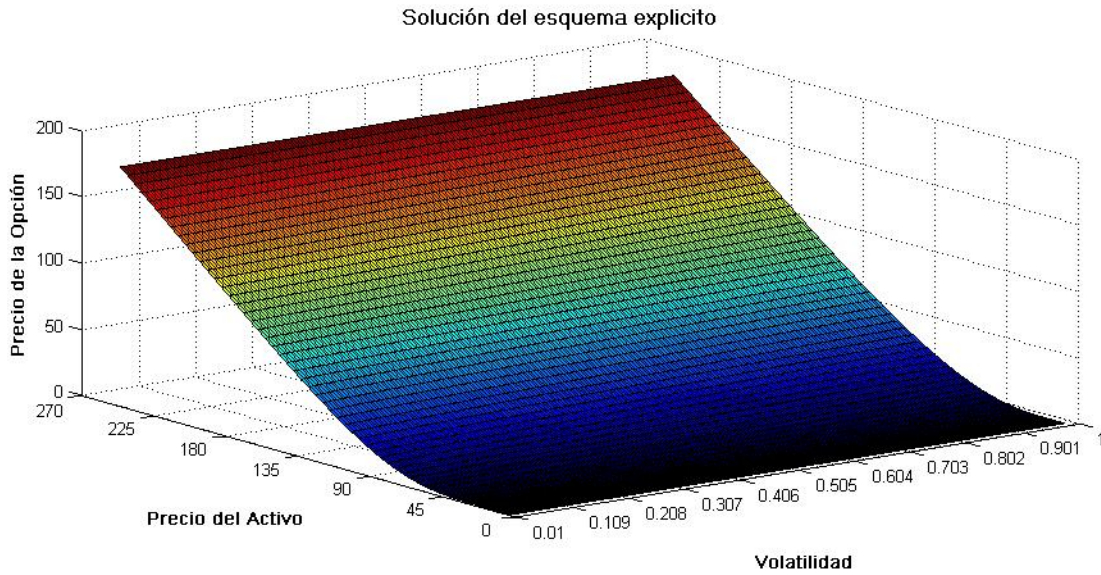


Figura 6.1.6: Solución del esquema explícito para $(h_1 = 5)$. Parámetros $r = 0.05$, $T = \frac{1}{2}$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 0.5$, $c = 0.01$, $d = 1$, $K = 90$, $b = 270$, $S_0 = 100$

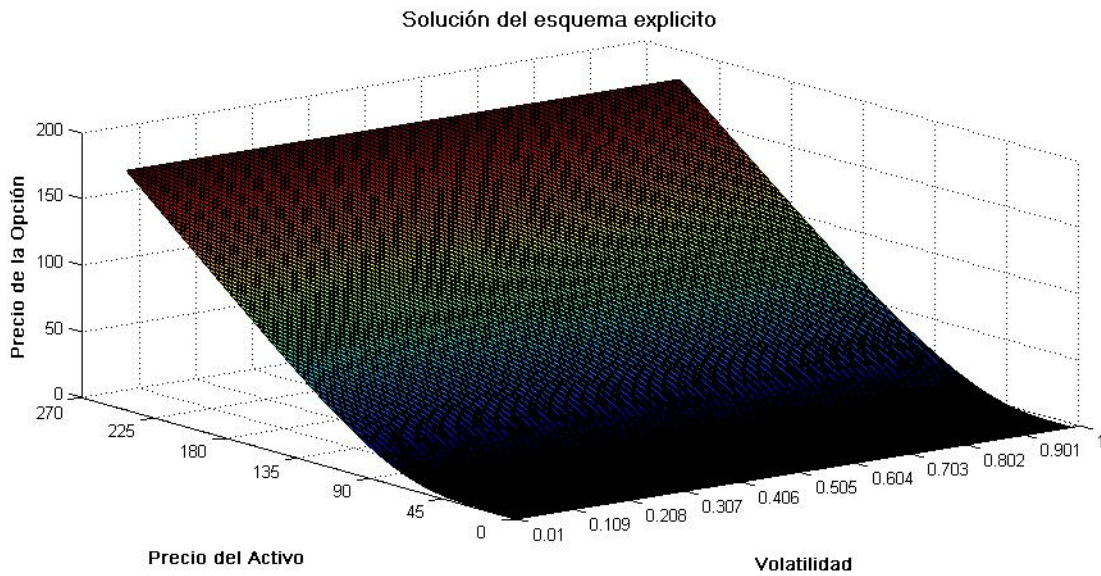


Figura 6.1.7: Solución del esquema explícito Parámetros $(h_1 = 1)$: $r = 0.05$, $T = \frac{1}{2}$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 0.5$, $c = 0.01$, $d = 1$, $K = 90$, $b = 270$, $S_0 = 100$

Análisis de convergencia de Malla

En la siguiente gráfica se muestra el comportamiento del precio de la opción a medida que el incremento del precio se hace cada vez mas pequeño.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS EXPERIMENTALES

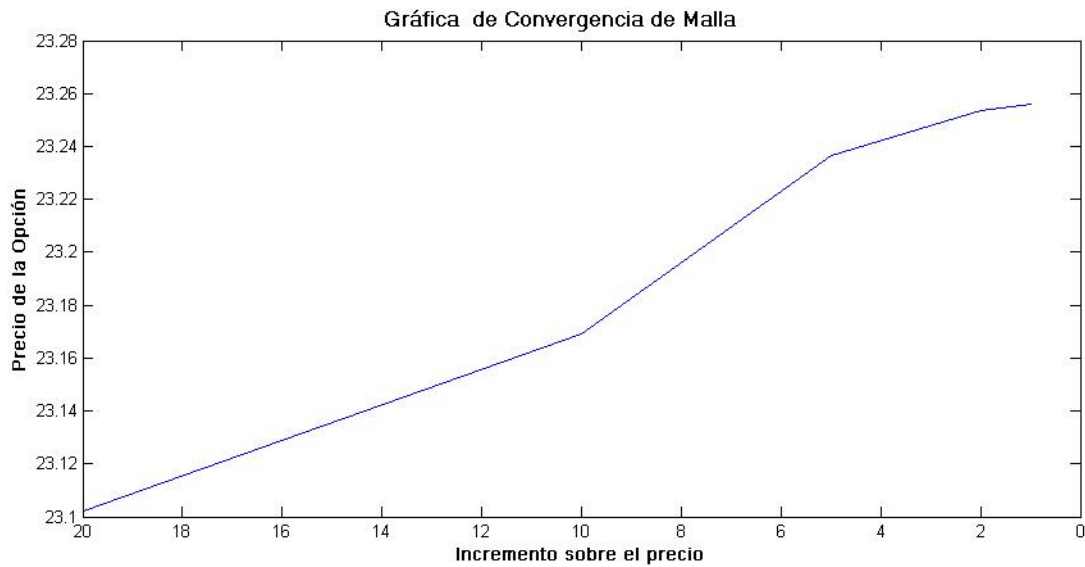


Figura 6.1.8: Análisis de convergencia de Malla ($h_1 = 20, 10, 5, 2, 1$): $r = 0.05$, $T = \frac{1}{2}$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 0.5$, $c = 0.01$, $d = 1$, $K = 90$, $b = 270$, $S_0 = 100$

Se puede observar que a medida que h_1 disminuye el precio de la opción converge, en este caso se aproxima a 23,25585655668357

Experimento 2 Las siguientes gráficas se ilustran los resultados obtenidos con el método de diferencias finitas explícito con diferentes incrementos en el vector de precios, esto es $h_1 = 10$, $h_1 = 5$ y $h_1 = 1$, valores constantes para los parámetros r , T , σ , ρ , c , d , K , b , S_0 .

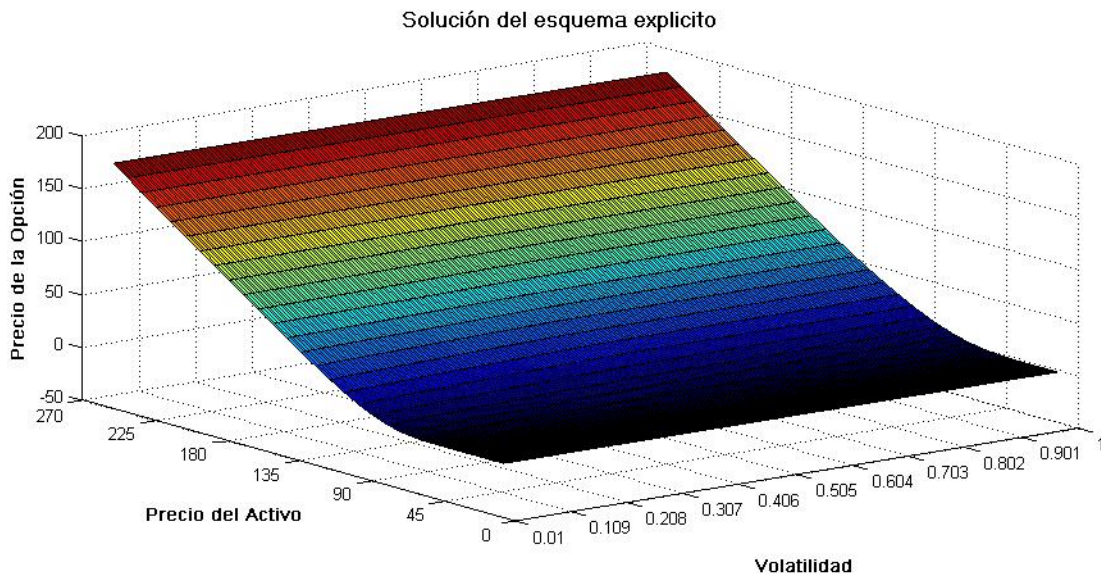


Figura 6.1.9: Solución del esquema explícito para ($h_1 = 10$). Parámetros $r = 0.05$, $T = \frac{1}{4}$, $\sigma = 0.1$, $\rho = -0.5$, $c = 0.01$, $d = 1$, $K = 90$, $b = 270$, $S_0 = 100$

6 RESULTADOS NUMÉRICOS EXPERIMENTALES

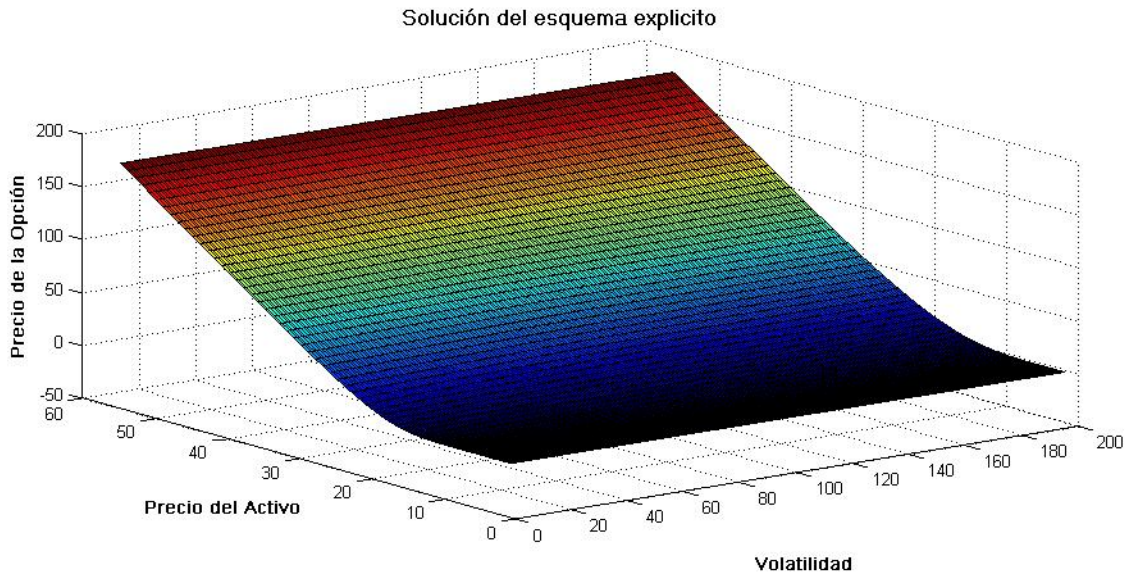


Figura 6.1.10: Solución del esquema explícito para $(h_1 = 5)$. Parámetros $r = 0.05$, $T = \frac{1}{4}$, $\sigma = 0.1$, $\rho = -0.5$, $c = 0.01$, $d = 1$, $K = 90$, $b = 270$, $S_0 = 100$

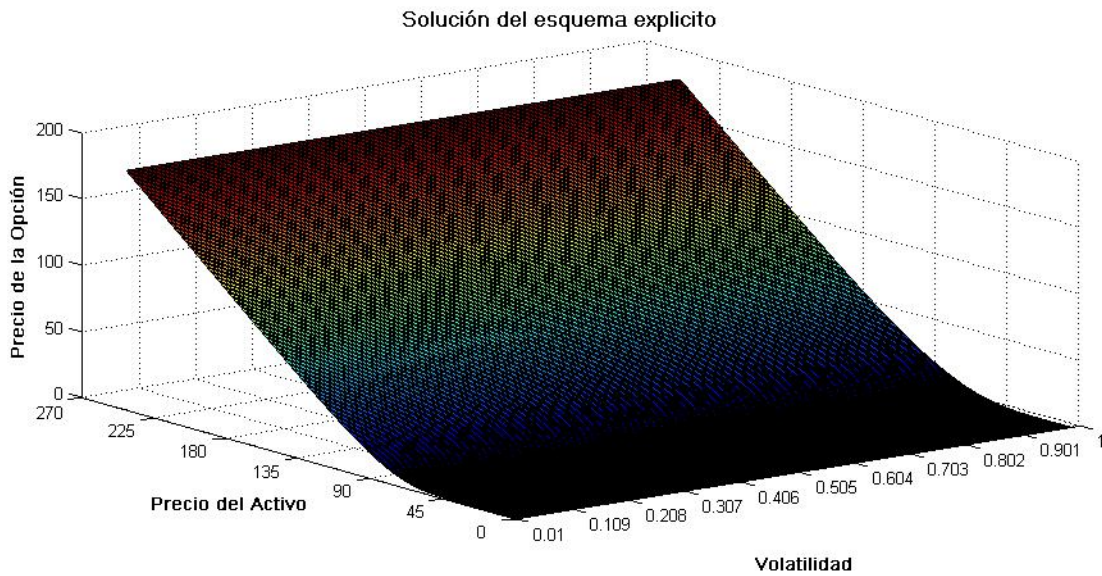


Figura 6.1.11: Solución del esquema explícito para $(h_1 = 1)$. Parámetros $r = 0.05$, $T = \frac{1}{4}$, $\sigma = 0.1$, $\rho = -0.5$, $c = 0.01$, $d = 1$, $K = 90$, $b = 270$, $S_0 = 100$

Análisis de convergencia de Malla

En la siguiente gráfica se muestra el comportamiento del precio de la opción a medida que el incremento del precio se hace cada vez mas pequeño.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS EXPERIMENTALES

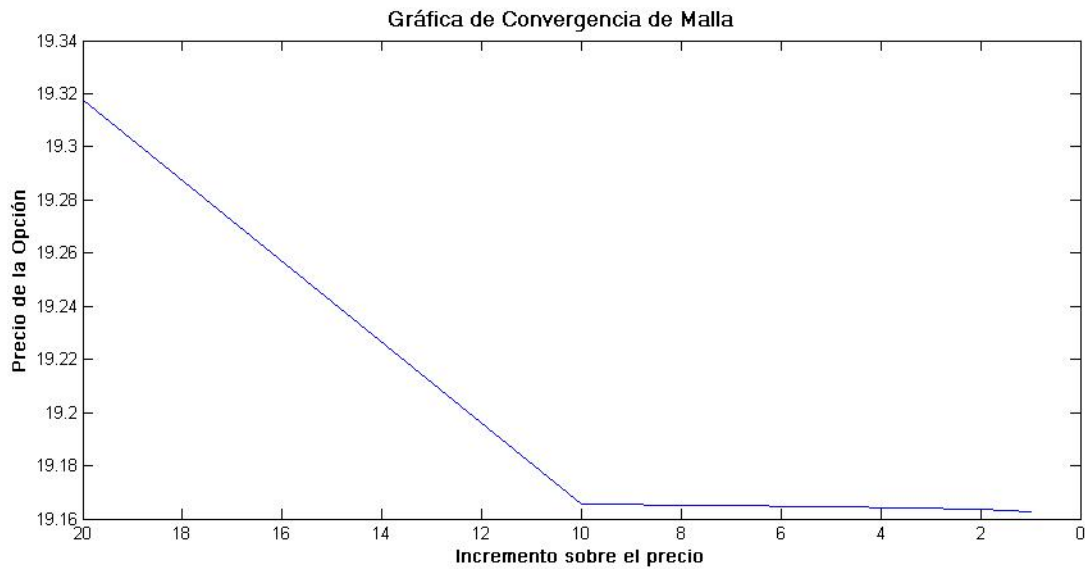


Figura 6.1.12: Análisis de convergencia de Malla ($h_1 = 20, 10, 5, 2, 1$): $r = 0.05$, $T = 1$, $\sigma = 0.1$, $\rho = -0.5$, $c = 0.01$, $d = 1$, $K = 90$, $b = 270$, $S_0 = 100$

Se puede observar que a medida que h_1 disminuye el precio de la opción converge , en este caso se aproxima a 19,16264904717931

CONCLUSIONES

El modelo de Heston (1993) es uno de los más comunes dentro de los modelos de volatilidad estocástica, esto se debe a la poderosa combinación de robustez y maniobrabilidad que presenta. Teniéndose en cuenta los supuestos del Modelo de Heston, es posible calcular analíticamente los precios de las opciones europeas que permite ajustar los parámetros de dicho modelo a datos del mercado.

En este trabajo se hizo una revisión adecuada de la literatura asociada a la solución numérica del modelo de Heston (1993) utilizando el método de diferencias finitas, la cual fue presentada en el capítulo 4.

En el presente trabajo se parte de la ecuación en derivadas parciales planteada por Heston, la cual se le transforma logrando pasar de ecuación diferencial con siete términos a una con cinco términos.

La ecuación obtenida se discretiza mediante el método de diferencias finitas y posteriormente se estudian las condiciones necesarias para que los parámetros sean positivos para que el sistema sea consistente, estable y convergente.

El esquema numérico construido no permite oscilaciones inapropiadas para la solución numérica porque es monótono conservativo en la dirección de los precios y en la dirección de la volatilidad.

La implementación computacional del esquema numérico es relativamente simple y con bajo costo computacional, la cual ofrece valores positivos para la opción para cualquier paso del tiempo.

Se ilustran gráficamente los resultados numéricos experimentales como superficies de pago para activos que no pagan dividendos con diferentes fechas de expiración y con correlaciones positivas y negativas para los procesos Brownianos.

Un trabajo posterior permitirá la concepción de un modelo híbrido de Heston con reversión a la media y su posterior solución numérica utilizando las técnicas descritas en este trabajo.

Bibliografía

- [1] A. Carmona. *Ecuaciones Diferenciales Estocásticas*. Tesis de grado. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Matemática. Universidad de Buenos Aires (2009).
- [2] A. Ermogenous. *Brownian motion and applications in the stock market*. Department of Applied Mathematics, Illinois Institute of Technology, Chicago USA, IL, 60616 (2006).
- [3] B. Lavenda. *Movimiento Browniano*. Investigación y Ciencia, N° 103 (1985).
- [4] B. Düring, M. Fournié, and A. Jüngel. *Convergence of a high-order compact finite difference scheme for a nonlinear Black-Scholes equation*. Math. Mod. Num. Anal. 38(2), 359–369 (2004).
- [5] B. Düring and M. Fournié. *High-order compact finite difference scheme for option pricing in stochastic volatility models*. Vienna University of technology. Institute for Analysis and Scientific Computing. ISBN 978-3-902627-03-2 (2010).
- [6] E. Mordecki. *Modelos matemáticos en finanzas*. I Jornada Internacional de Probabilidad y Estadística. Universidad de la República, Montevideo, Uruguay (2010).
- [7] E. Braun. *Un Movimiento en Zigzag*. Fondo De Cultura Económica. Volumen 13 de La Ciencia Para Todos. Tercera edición. ISBN 9681669290, 9789681669294. USA (1986).
- [8] E. Rafo-R Mejía. *Aplicaciones computacionales de las ecuaciones diferenciales estocásticas*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Vol 9 pp 64-75 (2006).
- [9] E. Schiavi y A. Muñoz. *Métodos Matemáticos de la Ingeniería Química*. Notas de clase. Tema 6. Métodos en diferencias finitas para la resolución de problemas de contorno, pp 1-19 (2006).
- [10] F. Marín y M. Bastidas. Numerical solution of pricing of european call option with stochastic volatility. International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences, Vol 13 N. 3, (2012).
- [11] F. Martinez. *Riesgos Financieros y Económicos*. Cengage Learning Editores. Segunda edición, pp 96-101 (2008).
- [12] G. Arregui. *Los Modelos Implícitos de Valoración de Opciones*. Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (2004).
- [13] H. Mora. *Factorizaciones de Cholesky, matrices definidas y semidefinidas positivas*. Universidad Central, Bogotá (2011).
- [14] J. Zavaleta y J. Mendoza. Aplicaciones Computacionales de las EDP's Asociadas a Procesos Estocásticos. Tesis para obtener el título de Licenciado en Matemáticas Aplicadas. Universidad Tecnológica de la MIXTECA; pp 72-78 (2007).
- [15] L. Rasmussen. *Pricing the European call option in the Heston model using finite difference methods*. Large Course Project. The University of Oxford (2011).

Bibliografía

- [16] L. Sensen. *Finite difference Schemes for heston model*. A Graduate Project. The University of Oxford (2008).
- [17] M. Bohner, Y. Zheng. *On Analytical Solutions of the Black-Scholes Equation*. Applied Mathematics Letters 22; 309-313 (2009).
- [18] M. Bohner, F. Marín and S. Rodríguez. *European Call Option pricing using the Adomian decomposition Method*. Advances in Dynamical System and Applications. v. 7 n. 2 25-38 (2012) .
- [19] M. Garcia, M. Calvo. *Estimación de Modelos de volatilidad Estocástica en series de rendimiento Bursatiles Universidad San Pablo CEU* (2005).
- [20] N. Moodley. *The Heston Model: A Practical Approach with Matlab Code*. Faculty of Science, Universidad de Witwatersrand , Johannesburg (2005).
- [21] P. Hanggi, F Marchesoni. *100 years of Brownian motion*. CHAOS An interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, DOI: 10.1063/1.1895505, Vol 15 pp 026101 (2005).
- [22] R. Kangro y R. Nicolaides. *Far field boundary conditions for Black-Scholes equations*. SIAM Journal on Numerical Analysis 38 (4), pp 1357-1368 (2000).
- [23] R. Kjellin and G. Lövgren. *Option Pricing Under Stochastic Volatility*. A numerical investigation of the Heston model. Institutionen för nationalekonomi med statistik (2006).
- [24] R. Ortiz. *Análisis comparativo de las metodologías modernas para la valuación de opciones sobre divisas*. México (2009).
- [25] R. Tamayo, H. Rodriguez. *Una revisión de los modelos de volatilidad estocástica*.vol 3 N 1 (2010).
- [26] S. Heston. *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*. The Review of Financial Studies, Vol. 6, pp. 327-343 (1993).
- [27] S. Heston, and S. Nandi. *A Closed Form GARCH Option Pricing Model*. The Review of Financial Studies, Vol 13; 585-625 (2000).
- [28] T. Mikosch . *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific. Singapore (2000).
- [29] X. Mao. *Stochastic Diferential Equations & Aplicacions*. Horwood Publishing Limited England (1997).