



Vigilada Mineducación

Evaluación del efecto de incluir la predicción de rendimientos mediante la técnica de *Support Vector Machines* en la eficiencia del modelo de media-varianza de Markowitz

Assessment of the impact of including yield prediction using the Support Vector Machines technique on the efficiency of the Markowitz mean-variance model

Eliana Jiset Aristizábal Nieto¹

Estefanía García Agudelo²

Tesis

Asesor

Juan Carlos Botero Ramírez, MBA

Maestría en Administración Financiera - MAF

Escuela de Finanzas, Economía y Gobierno

Universidad EAFIT

Medellín

2024

¹ ejaristizn@eafit.edu.co

² egarciaa1@eafit.edu.co

Resumen

La optimización de portafolios de inversión busca maximizar los rendimientos esperados dados ciertos niveles de riesgo, y durante este proceso se requiere tener diferentes variables en un sistema no lineal, ruidoso por la complejidad del mercado, entendiéndose como un sistema que se ve afectado por diferentes condiciones externas que pueden ser no controlables, donde está presente la volatilidad influenciada por factores no predecibles. En este trabajo, se lleva a cabo un análisis de los resultados obtenidos al integrar los modelos clásicos de conformación de portafolios, las técnicas de aprendizaje automático (Machine Learning), específicamente el conjunto de algoritmos denominados “Máquinas de Vectores de Soporte (SVM)” o *Support Vector Machines* por sus siglas en inglés. Estos algoritmos permiten analizar grandes cantidades de datos y estimar la serie histórica del retorno de los activos, obteniendo así un modelo de optimización híbrido. Para los experimentos numéricos, se emplean datos históricos de los mercados de valores de Estados Unidos y Colombia; un conjunto de los datos es usado para el entrenamiento del modelo (*Training Set*) y otro para las pruebas (*Testing Set*). Finalmente se evalúa la eficiencia del modelo de manera comparativa con la teoría de selección de cartera de media varianza propuesto por Markowitz.

Palabras clave: Optimización de portafolios; Machine Learning; Support Vector Machines; Predicción de rendimientos; Markowitz.

Abstract

Portfolio investment optimization aims to maximize expected returns given certain levels of risk. This process requires dealing with different variables in a nonlinear, noisy system due to market complexity. This is understood as a system that is affected by different external conditions that may be uncontrollable, where volatility influenced by unpredictable factors is present. In this study, an analysis of the results obtained by integrating machine learning techniques, specifically the set of algorithms called Support Vector Machines (SVM), into classical portfolio construction models is conducted. These algorithms allow for the analysis of large amounts of data and the estimation of asset return time series, resulting in a hybrid optimization model. Historical data from the stock markets of the United States and Colombia are used for numerical experiments; one set of data is used for model training (*Training Set*) and another for testing (*Testing Set*). Finally, the efficiency of the model is evaluated comparatively with the mean-variance portfolio selection theory proposed by Markowitz.

Key words: Portfolio Optimization; Machine Learning; Support Vector Machines; Yield Prediction; Markowitz.

Contenido

1.	Introducción	6
2.	Marco teórico	8
2.1	Modelo de Markowitz	9
2.2	<i>Support Vector Machines</i> (SVM)	10
2.3	<i>Support Vector Regression</i> (SVR).....	12
3.	Metodología	14
3.1	Selección de datos	14
3.2	Modelación de datos mediante SVR	17
3.4	Cálculo del portafolio óptimo – <i>Sharpe Ratio</i>	20
3.5	Cálculo de la riqueza – <i>Total Wealth</i>	21
4.	Resultados	22
4.1	Mercado de valores de Estados Unidos – Estrategia <i>B&S</i>	22
4.2	Mercado de valores de Estados Unidos – Estrategia <i>B&H</i>	29
4.3	Mercado de valores de Colombia – Estrategia <i>B&S</i>	36
4.4	Mercado de valores de Colombia – Estrategia <i>B&H</i>	42
5.	Conclusiones y recomendaciones	47
	Referencias	49

Índice de figuras

Figura 1. Definición del “margen” entre clases	11
Figura 2. Mapeo de datos no lineales en SVR	13
Figura 3. Correlación de activos portafolio Estados Unidos.....	15
Figura 4. Correlación de activos portafolio Colombia.....	16
Figura 5. Precios de las acciones de Estados Unidos, reales vs. <i>forecast</i> , desde 03 de enero a 15 de diciembre de 2023	23
Figura 6. Frontera eficiente de Markowitz Portafolio Estados Unidos estrategia <i>B&S</i>	28
Figura 7. Riqueza Total Portafolio Estados Unidos estrategia <i>B&S</i>	29
Figura 8. Precios de las acciones de Estados Unidos, reales vs. <i>forecast</i> , desde 31 de enero de 2022 a 15 de diciembre de 2023.....	30
Figura 9. Frontera eficiente de Markowitz Portafolio Estados Unidos estrategia <i>B&H</i>	35
Figura 10. Riqueza Total Portafolio Estados Unidos estrategia <i>B&H</i>	36
Figura 11. Precios de las acciones de Colombia, reales vs. <i>forecast</i> , desde 03 de enero a 15 de diciembre de 2023	37
Figura 12. Frontera eficiente de Markowitz Portafolio Colombia estrategia <i>B&S</i>	41
Figura 13. Riqueza Total Portafolio Colombia estrategia <i>B&S</i>	41
Figura 14. Precios de las acciones de Colombia, reales vs. <i>forecast</i> , desde 01 de enero de 2022 a 15 de diciembre de 2023	42
Figura 15. Frontera eficiente de Markowitz Portafolio Colombia estrategia <i>B&H</i>	46
Figura 16. Riqueza Total Portafolio Colombia estrategia <i>B&H</i>	46

Índice de tablas

Tabla 1. Portafolio de activos del mercado bursátil de EE. UU.	15
Tabla 2. Portafolio de activos del mercado bursátil de Colombia.....	16
Tabla 3. Rendimientos y Desviaciones Estándar anuales activos de Estados Unidos, estrategia <i>B&S</i>	24
Tabla 4. <i>Sharpe Ratios</i> activos portafolio de Estados Unidos, estrategia <i>B&S</i>	25
Tabla 5. Proporción de cada activo para el modelo de MV Portafolio Estados Unidos estrategia <i>B&S</i>	26
Tabla 6. Proporción de cada activo para el modelo de SVR-MV Portafolio Estados Unidos estrategia <i>B&S</i>	27
Tabla 7. Rendimientos y Desviaciones Estándar anuales activos de Estados Unidos, estrategia <i>B&H</i>	31
Tabla 8. <i>Sharpe Ratios</i> activos Estados Unidos, estrategia <i>B&H</i>	32
Tabla 9. Proporción de cada activo para el modelo de MV Portafolio Estados Unidos estrategia <i>B&H</i>	33
Tabla 10. Proporción de cada activo para el modelo de SVR-MV Portafolio Estados Unidos estrategia <i>B&H</i>	33
Tabla 11. Rendimientos y Desviaciones Estándar anuales activos de Colombia, estrategia <i>B&S</i> .38	38
Tabla 12. <i>Sharpe Ratios</i> activos portafolio de Colombia, estrategia <i>B&S</i>	38
Tabla 13. Proporción de cada activo para el modelo de MV Portafolio Colombia estrategia <i>B&S</i> 39	39
Tabla 14. Proporción de cada activo para el modelo de SVR-MV Portafolio Colombia estrategia <i>B&S</i>	39
Tabla 15. Rendimientos y Desviaciones Estándar anuales activos de Colombia, estrategia <i>B&H</i> 43	43
Tabla 16. <i>Sharpe Ratios</i> activos portafolio de Colombia, estrategia <i>B&H</i>	44
Tabla 17. Proporción de cada activo para el modelo de MV Portafolio Colombia estrategia <i>B&H</i> 44	44
Tabla 18. Proporción de cada activo para el modelo de SVR-MV Portafolio Colombia estrategia <i>B&H</i>	44

1. Introducción

La inversión en mercados de capitales se refiere a la compra y venta de activos financieros tales como los bonos, las acciones y los ETF (*Exchange-Traded Fund*), entre otros; este tipo de mercado ofrece a los inversionistas la oportunidad de obtener rendimientos a través del crecimiento del valor de los activos, los pagos de intereses, los dividendos y otro tipo de beneficios; sin embargo, estas inversiones conllevan riesgos que pueden ser tan altos como la posibilidad de la pérdida del capital, debido a que el precio de los activos, principalmente las acciones, está influenciado por una combinación de factores económicos y no económicos que pueden ser complejos y difíciles de predecir. Con el objetivo de diversificar el riesgo y maximizar los rendimientos esperados, se construyen los portafolios de inversión mediante un proceso que implica seleccionar y combinar cuidadosamente diferentes activos y decidir qué porcentaje del capital invertido se asignará a cada uno de ellos.

La selección, optimización y gestión de los portafolios de inversión se ha convertido en uno de los focos de investigación en el campo de las finanzas. Tradicionalmente existen varios modelos y enfoques de optimización, incluyendo dentro de los más comunes: (i) el modelo de media-varianza (MV) de Markowitz, que utiliza conceptos como la media y la varianza de los rendimientos; (ii) los modelos de programación lineal y cuadrática, que están sujetos a restricciones como límites de inversión, objetivos de rendimiento y tolerancia al riesgo; (iii) modelos de optimización de Riesgo-Valor en Riesgo (VaR); y (iv) modelos de simulación de Monte Carlo, para evaluar el rendimiento y el riesgo de diferentes carteras de inversión bajo diferentes escenarios del mercado. Estos modelos clásicos suelen utilizar el rendimiento histórico medio como rendimiento esperado, pero dado que el precio de las acciones se ve muy afectado por las condiciones del mercado y el sentimiento del inversionista, no es recomendable utilizar el rendimiento histórico medio como estimación de corto plazo.

La introducción del aprendizaje automático (*Machine Learning*) en el mundo de las finanzas, puede mejorar significativamente los modelos tradicionales y las hipótesis restrictivas que suponen. El aprendizaje automático permite construir modelos más flexibles y adaptativos que pueden capturar patrones complejos en los datos, lo que puede mejorar la precisión y robustez de los modelos de optimización. También pueden procesar y analizar estos tipos de datos de manera efectiva, lo que

permite su integración en modelos de optimización más avanzados. Estos modelos pueden entrenarse continuamente con nuevos datos según estén disponibles, lo que permite una optimización adaptativa en tiempo real. Esto significa que los modelos pueden ajustarse y mejorar con el tiempo a medida que se acumula más información, lo que aumenta su capacidad de tomar decisiones más precisas y eficientes.

En este trabajo de investigación se propone la integración de los algoritmos de *Support Vector Machines* al modelo de Markowitz, mediante la modelación de los valores históricos, que permita obtener una serie de retornos menos sujeta a movimientos bruscos del mercado, lo cual, sin duda, es mucho más deseable a la luz de los modelos de media-varianza. Estos datos así obtenidos se comparan con el valor medio histórico real. En la sección 2 del documento se realiza una reseña de la literatura para profundizar sobre el modelo de Markowitz y los recientes estudios disponibles del uso del aprendizaje automático en el ámbito de la economía y las finanzas. En los ítems 2.2 y 2.3 se explica la técnica de las Máquinas de Vectores de Soporte (SVM) considerada como una de las más poderosas técnicas de *Machine Learning*, y una alternativa eficiente ante las limitaciones de las redes neuronales artificiales (RNA) frente a la dimensionalidad y ruido de los datos, superando en precisión a otros modelos autorregresivos (Cuevas Soto et al., 2019). Para los experimentos numéricos se seleccionaron acciones de los mercados de Estados Unidos y Colombia, y se obtuvieron los datos históricos del precio durante el periodo de 2022 al 2023; la metodología aplicada para el procesamiento de los datos y el diseño del algoritmo se expone en el capítulo 3.

Finalmente, en el capítulo 4, se presentan los resultados obtenidos y se realiza el análisis comparativo para evaluar los efectos de integrar la técnica SVM en la eficiencia del modelo de optimización de portafolios de media varianza. Las conclusiones y discusiones finales se revelan en la sección 5.

2. Marco teórico

El modelo de Markowitz ha sido un referente teórico fundamental en la selección y optimización de portafolios de inversión (Mendizábal Zubeldía et al., 2002), y es de gran utilidad como punto de partida para entender el proceso de conformación de carteras y las restricciones de las hipótesis que supone, así como las condiciones básicas del comportamiento de los mercados de valores.

Los autores Milana & Ashta (2021) en su artículo “Artificial intelligence techniques in finance and financial markets: A survey of the literature” exponen el acelerado crecimiento en la adopción de la inteligencia artificial (IA) en las áreas de la economía y las finanzas. Las diversas formas en las que la IA afecta los mercados financieros han sido estudiadas y reportadas en documentos y publicaciones académicas en la última década, respondiendo a la necesidad de los inversionistas individuales, fondos de inversión y gestores financieros, para tener herramientas más avanzadas que les permitan maximizar los rendimientos.

Chaweewanchon & Chaysiri (2022) analizaron un modelo híbrido de predicción combinando, una red neuronal convolucional (CNN) y el algoritmo BiLSTM (bidirectional long short-term Memory), para la preselección de acciones, con el objetivo de garantizar insumos de acciones de alta calidad para la formación de carteras, para luego integrar los resultados al modelo de Media-Varianza (MV). Para el estudio recopilaron datos históricos del índice 50 de la bolsa de valores de Tailandia (SET50), cuyos resultados demostraron que una cartera conformada con menos de 10 acciones, preseleccionadas con los métodos estudiados, tiene mejores rendimientos utilizando como indicadores el rendimiento medio anualizado, la desviación estándar anualizada y el índice de Sharpe anualizado.

Diferentes técnicas de aprendizaje automático también fueron documentadas por Aithal et al., (2023), en su trabajo de investigación en el que incluyen la comparación de 7 algoritmos metaheurísticos aplicados en las diferentes fases de la cartera: selección de activos, optimización y gestión. Los conceptos claves y modelos usados en su artículo son: 1) Equally-Weighted (EW) Portfolio 2) Market Cap Weighted (MCW) Portfolio 3) Global Minimum Variance (GMV) Portfolio 4) Maximum Sharpe Ratio (MSR) Portfolio 5) K-Means clustering Algorithm 6) Genetic Algorithm (GA) 7) Ant Colony Optimization (ACO) Algorithm 8) Particle Swarm Optimization (PSO)

Algorithm 9) Firefly Algorithm 10) Artificial Bee Colony (ABC) Optimization Algorithm 11) Tabu Search 12) Simulated Annealing (SA) y 13) Sliding Window. Las conclusiones clave de este manuscrito son la selección y clasificación de carteras con el algoritmo K-Means, la optimización de carteras mediante algoritmos metaheurísticos y la gestión de carteras con la ayuda de una ventana deslizante.

Wang & Kim (2019) en su artículo proponen un modelo (Least Squares Support Vector Machines (LSSVM) – Mean-Variance) para la gestión de carteras basado en LSSVM. Para verificar la confiabilidad del modelo llevaron a cabo una investigación empírica y diseñaron un algoritmo para ilustrar el desempeño del modelo, utilizando datos históricos de la bolsa de valores de Shanghai. Los resultados teóricos que obtuvieron muestran que el modelo propuesto es útil en comparación al modelo tradicional de Markowitz, al comparar las fronteras eficientes y la riqueza total de ambos modelos.

Entre otros autores, Gunjan & Bhattacharyya (2023), Jiang et al. (2017), Jang & Seong (2023), Nafia et al. (2023), también realizaron investigaciones enfocadas en la conformación y optimización de portafolios usando diferentes técnicas de aprendizaje profundo (*Deep Learnig*).

2.1 Modelo de Markowitz

Markowitz desarrolla su modelo sobre la base del comportamiento racional del inversor, es decir, se basa en la premisa de que los inversores son aversos al riesgo y desean maximizar la rentabilidad esperada. Por lo tanto, busca optimizar el rendimiento esperado de una cartera para un nivel de riesgo dado o, alternativamente, minimizar el riesgo para un nivel de rendimiento objetivo. El conjunto de carteras eficientes puede calcularse resolviendo el siguiente programa cuadrático paramétrico:

$$\text{Min} \quad \sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i * w_j * cov(r_i, r_j)$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i * E(r_i) = \gamma$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w_i \geq 0$$

Donde:

- w_i , es la proporción del presupuesto del inversionista destinado al activo financiero i e incógnita del programa.
- $\sigma^2(R_p)$, es la varianza de la cartera p .
- $cov(r_i, r_j)$, es la covarianza entre los rendimientos de los valores i y j .

$E(R_p)$ es la rentabilidad o rendimiento esperado de la cartera p , de tal forma que al variar el parámetro γ obtendremos en cada caso, al resolver el programa, el conjunto de proporciones w_i que minimizan el riesgo de la cartera, así como su valor correspondiente.

El conjunto de pares $[E(R_p), \sigma^2(R_p)]$ o combinaciones rentabilidad-riesgo de todas las carteras eficientes es denominado *frontera eficiente*. Una vez conocida ésta, el inversionista, de acuerdo con sus preferencias, elegirá su cartera óptima.

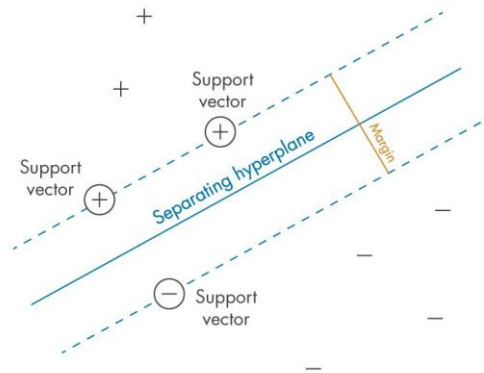
2.2 Support Vector Machines (SVM)

Support Vector Machines, es un algoritmo de aprendizaje supervisado que se utiliza en muchos problemas de clasificación y regresión. La técnica SVM fue desarrollada por Vladimir Vapnik y sus colaboradores en el marco de la teoría de aprendizaje estadístico (Vapnik, 1995).

El objetivo del algoritmo SVM es encontrar un hiperplano que separe de la mejor forma posible dos clases diferentes de puntos de datos. El término “de la mejor forma posible” implica el hiperplano con el margen más amplio entre las dos clases, representado por los signos más y menos en la figura 1. El margen se define como la anchura máxima de la región paralela al hiperplano que no tiene puntos de datos interiores. El algoritmo solo puede encontrar este hiperplano en problemas

que permiten separación lineal; en la mayoría de los problemas prácticos, el algoritmo maximiza el margen flexible permitiendo un pequeño número de clasificaciones erróneas (MathWorks, n.d.).

Figura 1. Definición del “margen” entre clases



Fuente: MathWorks, n.d.

Las SVM pueden usar diferentes funciones de *kernel* para mapear los datos a un espacio de características de mayor dimensión, donde la separación lineal pueda ser posible, incluso cuando los datos son intrínsecamente no lineales en el espacio original.

Ventajas:

- **Eficaz** en espacios de grandes dimensiones.
- Sigue siendo eficaz en los casos en los que el número de dimensiones es mayor que el número de muestras.
- Utiliza un subconjunto de puntos de entrenamiento en la función de decisión (llamados vectores de soporte), por lo que también es **eficiente en memoria**.
- **Versátil**: se pueden especificar diferentes funciones del Kernel para la función de decisión. Se proporcionan núcleos comunes, pero también es posible especificar núcleos personalizados.

2.3 Support Vector Regression (SVR)

Las SVR utilizan el mismo principio de los SVM con algunos cambios, siendo útiles para problemas de regresión en lugar de clasificación. En lugar de encontrar un hiperplano que separe las clases, las SVR buscan encontrar una función de regresión que se ajuste lo mejor posible a los puntos de datos, al tiempo que limita el error dentro de un cierto margen o tolerancia (también conocido como la banda de soporte).

Al igual que las SVM, las SVR pueden utilizar diferentes funciones de *kernel* para mapear los datos a un espacio de características de mayor dimensión, lo que les permite manejar datos no lineales. En otras palabras, separar datos por sus características de forma lineal puede tornarse muy complejo, mientras que, al aumentar la dimensión de esas características, el problema puede reducir notablemente su complejidad (Camacho, 2020).

$$y = \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_i^*) * (\varphi(x_i), \varphi(x)) + b$$

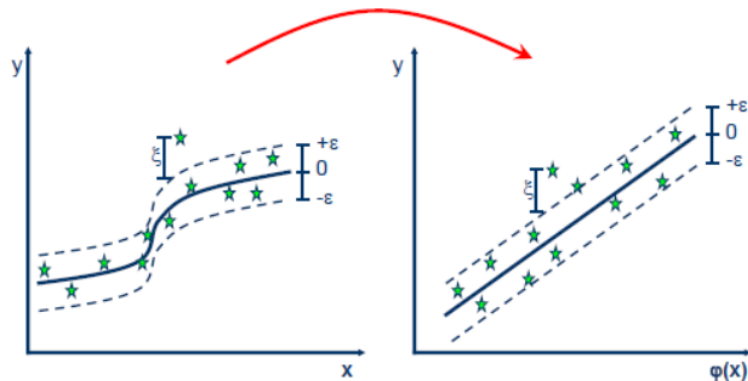
$$y = \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_i^*) * K(x_i, x) + b$$

Donde:

- y es la variable dependiente,
- α_i y α_i^* se refieren a multiplicadores de Lagrange no-negativos para cada observación x_i .
- Por su parte b se refiere al sesgo en la estimación.

Como se observa, la función utilizada para predecir nuevos valores depende únicamente de los vectores de soporte.

Figura 2. Mapeo de datos no lineales en SVR



Fuente: Camacho, 2020.

Para las funciones *kernel* se tienen varias opciones: lineal, polinómica, sigmoide, función de base radial (RBF) o gaussiana. La función RBF es la que comúnmente se usa para el entrenamiento de algoritmos.

$$K(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{\|x_1 - x_2\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Lo más llamativo de esta expresión del *kernel* RBF es que solo depende de x_1 y x_2 , que son vectores que representan características de observaciones individuales en los datos de entrada que se tienen. Realmente lo que este *kernel* está haciendo es comparar x_1 y x_2 para determinar si son similares o no, en el espacio de las características de los datos.

Sigma (σ): Sigma es un parámetro del *kernel* RBF que determina la "propagación" de la función del *kernel*, controlando cuánta influencia tiene cada punto de datos en los puntos cercanos en el espacio de características. También se conoce como parámetro de ancho de banda. Un valor más pequeño de sigma da como resultado una mayor similitud entre los puntos de datos, lo que lleva a un hiperplano de decisión más suave, mientras que un valor más grande de sigma permite una mayor flexibilidad y captura patrones más complejos en los datos.

3. Metodología

Para abordar el problema de investigación planteado, se realiza inicialmente una revisión de la literatura sobre los modelos de optimización de portafolios tradicionales y las diferentes técnicas o algoritmos de aprendizaje automático que se han venido explorando en los últimos años y que han sido aplicados al ámbito de las finanzas. Se define el modelo de media-varianza de Markowitz, como la base para el desarrollo de los experimentos numéricos y el algoritmo *Support Vector Machines* (SVM) para la predicción de los rendimientos, que después serán usados en el modelo base, para finalmente evaluar de manera comparativa los resultados de usar el modelo con los datos originales y el modelo con la integración de los datos obtenidos mediante la técnica SVM. Para todo el tratamiento matemático se usó la herramienta Python.

A continuación, se describe la metodología usada durante las diferentes etapas del desarrollo del trabajo: selección de los datos, predicción de los rendimientos, aplicación del modelo de Markowitz y el cálculo de los indicadores de desempeño *Sharpe Ratio* y *Total Wealth*.

3.1 Selección de datos

Se conformaron dos portafolios, uno para el mercado de Estados Unidos y el segundo para el mercado de Colombia, con el objetivo de probar el desempeño del análisis matemático en dos mercados que difieren principalmente por su tamaño y liquidez, diversidad de empresas cotizadas, el tipo de moneda y la sensibilidad al mercado global.

El portafolio del mercado de valores de los Estados Unidos se compone de los 10 activos que se encuentran listados en la tabla 1. Para la selección, se tuvieron en cuenta los siguientes criterios:

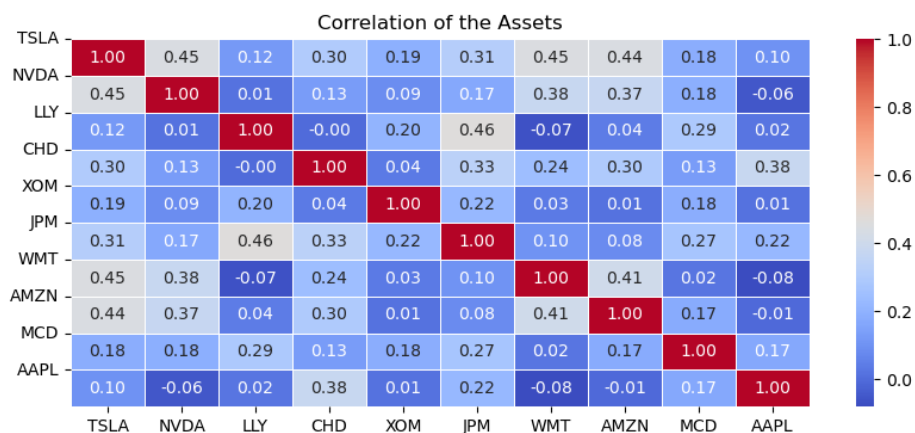
- Acciones más transadas
- Sectores industriales diversificados
- Promedio de rendimientos positivos
- Radios de Sharpe positivos

Tabla 1. Portafolio de activos del mercado bursátil de EE. UU.

Empresa	Tickers	Sector
Tesla Inc	TSLA	Automóviles y piezas de automóviles
NVIDIA Corporation	NVDA	Semiconductores y equipos de semiconductores
Eli Lilly and Company	LLY	Productos farmacéuticos
Church & Dwight Company Inc	CHD	Productos y servicios personales y para el hogar
Exxon Mobil Corp	XOM	Gas de petróleo
JPMorgan Chase & Co	JPM	Servicios bancarios
Walmart Inc	WMT	Comercio minorista de alimentación y droguería
Amazon.com Inc	AMZN	Venta al por menor diversificada
McDonald's Corporation	MCD	Hoteles y servicios de ocio
Apple Inc	AAPL	Ordenadores, teléfonos y electrodomésticos

Fuente: Elaboración propia, 2024.

Para validar la diversificación del portafolio, se presenta la matriz de correlaciones, en la cual se evidencia numéricamente y mediante el gráfico tipo mapa de calor, la baja correlación entre los diferentes activos.

Figura 3. Correlación de activos portafolio Estados Unidos

Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

El portafolio del mercado de acciones en Colombia se compone de las 5 acciones listadas en la tabla 2. Para la selección de este portafolio se consideraron los siguientes criterios:

- Acciones más negociadas
- Sectores industriales diversificados

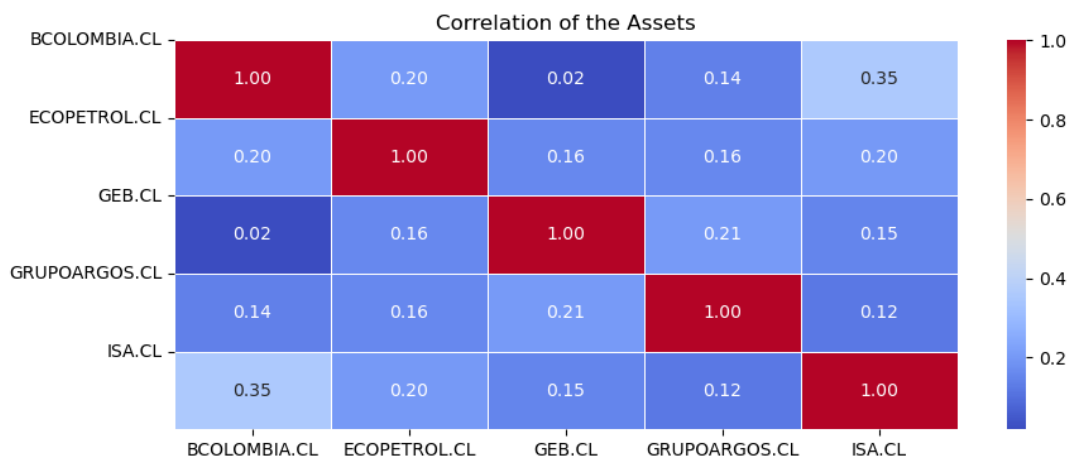
Tabla 2. Portafolio de activos del mercado bursátil de Colombia

Empresa	Tickers	Sector
Bancolombia S.A.	BCOLOMBIA.CL	Servicios financieros
Ecopetrol S.A.	ECOPETROL.CL	Energía - Gas de petróleo
Grupo Energía Bogotá S.A. E.S.P.	GEB.CL	Suministros energía eléctrica y gas natural.
Grupo Argos S.A.	GRUPOARGOS.CL	Materiales de construcción
Interconexión Eléctrica S.A. E.S.P.	ISA.CL	Suministros – transmisión de energía

Fuente: Elaboración propia, 2024.

La matriz de correlaciones para este segundo portafolio también permite concluir sobre la característica de diversificación.

Figura 4. Correlación de activos portafolio Colombia



Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

Para las pruebas se consideran dos estrategias: *Buy & Sell* (Comprar y vender) y *Buy & Hold* (Comprar y retener). Para la primera se utilizan los datos de precios históricos diarios desde el 01-01-2023 al 15-12-2023, para un total de 240 datos. En la segunda estrategia se obtuvieron los datos históricos con frecuencia semanal desde el 01-01-2022 al 15-12-2023, para un total de 102 datos. En ambos casos se usa el precio de cierre ajustado. Con estas estrategias se pretende evaluar los resultados de aplicarlas en los portafolios de activos seleccionados.

Es importante notar que no se está buscando un portafolio estructural para un plazo largo. En su lugar se están verificando las dos estrategias mencionadas arriba, en donde en *Buy & Sell* analiza las bondades del modelo para armar portafolios en el cortísimo plazo (un día), mientras que en la estrategia *Buy & Hold* se asume que el portafolio tiene en el balance durante un poco más de tiempo (una semana). En todo caso, ambas estrategias corresponden más a una actividad de trading de corto plazo que a un portafolio estructural, con pocos cambios durante su vida.

3.2 Modelación de datos mediante SVR

Los datos históricos se descargan en Python mediante la librería de *yahoo finance*, y se construye el *DataFrame* con los precios de cierre ajustados (*Adj Close*), con el fin de tener en cuenta el efecto que eventos corporativos como splits o splits inversos que puedan tener en el precio de la acción. Los datos se dividen en un conjunto de entrenamiento (X_{train} , y_{train}) y un conjunto de prueba (X_{test} , y_{test}), con el 80% de los datos para el entrenamiento y el 20% de los datos para pruebas, para luego implementar el modelo de predicción mediante el algoritmo SVR (*Support Vector Regressor*) utilizando el kernel RBF (*Radial Basis Function*).

Para inicializar el modelo, se deben considerar dos parámetros: **C** y **gamma**. El parámetro **C**, común a todos los núcleos SVM, compensa la clasificación errónea de los ejemplos de entrenamiento con la simplicidad de la superficie de decisión. Una **C** baja suaviza la superficie de decisión, mientras que una **C** alta tiene como objetivo clasificar todos los ejemplos de entrenamiento correctamente, **gamma** define cuánta influencia tiene un solo ejemplo de entrenamiento. Cuanto mayor es la gamma, más cerca deben estar otros ejemplos para verse

afectados. En las pruebas realizadas se encontraron que los parámetros con mejor respuesta son $C=100$ y $\gamma = 0.01$.

Una vez que el modelo está inicializado con los parámetros deseados, se procede a entrenarlo con el conjunto de los datos de entrenamiento. En este caso, X_{train} son las características de entrenamiento y y_{train} son las etiquetas de entrenamiento. El método `fit()` ajusta el modelo a los datos proporcionados.

```
model.fit(X_train, y_train)
```

Posteriormente, el modelo entrenado es usado para hacer las predicciones haciendo uso del conjunto de datos de pruebas.

3.3 Cálculo de la frontera eficiente Markowitz

Para la construcción de la frontera eficiente, se resuelve el modelo de Markowitz explicado en el capítulo 2.1. El proceso de optimización en Python se realizó mediante la función `minimize` de la biblioteca `scipy.optimize` de la siguiente manera:

```
def minimize_variance(covariance_matrix, expected_returns, target_return)
```

Esta función toma tres argumentos:

- `Covariance_matrix` (la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos de los activos).
- `Expected_returns` (un vector que contiene los rendimientos esperados de cada activo).
- `Target_return` (el rendimiento objetivo deseado para el portafolio).

Luego, se define la función objetivo, la cual calcula la varianza del portafolio, utilizando la matriz de varianza-covarianza y los pesos de los activos:

```
objective_function = lambda w: np.dot(w.T, np.dot(covariance_matrix, w))
```

Y se definen las restricciones:

- **Constraint_return:** Restricción que garantiza que el rendimiento esperado del portafolio sea igual al rendimiento objetivo especificado.
- **Constraint_sum_weights:** Restricción que garantiza que la suma de los pesos de los activos en el portafolio sea igual a 1.
- **Non_negativity_constraint:** Restricción que garantiza que los pesos de los activos sean no negativos.

Se utilizó el método de Sequential Least Squares Programming (SLSQP), para encontrar el mínimo de la función objetivo, sujeto a las restricciones lineales y no lineales. El resultado almacenado corresponde a los pesos w que minimizan la varianza del portafolio dado un retorno esperado.

Mediante la siguiente función se calcula la frontera eficiente para un conjunto dado de activos, generando una serie de puntos que representan diferentes portafolios eficientes en términos de riesgo y rendimiento.

```
def efficient_frontier(covariance_matrix, expected_returns, num_points)
```

Después de calcular los rendimientos esperados, las desviaciones estándar y los pesos de los portafolios eficientes en la función *efficient_frontier*, estos son retornados como tres arrays NumPy. Estos arrays proporcionan información importante sobre cómo varía el rendimiento y el riesgo de un portafolio a medida que se ajustan los pesos de los activos.

- **Rendimientos de los portafolios eficientes:** El array *portfolio_returns* contiene los rendimientos esperados de cada portafolio en la frontera eficiente. Cada valor en este array representa el rendimiento esperado de un portafolio eficiente dado un rendimiento objetivo.
- **Desviaciones estándar de los portafolios eficientes:** El array *portfolio_std_devs* contiene las desviaciones estándar de cada portafolio en la frontera eficiente. Estas desviaciones estándar representan el riesgo asociado a cada portafolio eficiente y muestran cómo varía la volatilidad del portafolio a medida que se ajustan los pesos de los activos.

- **Pesos de los portafolios eficientes:** El array *portfolio_weights* contiene los pesos de los activos para cada portafolio en la frontera eficiente. Cada fila de este array representa los pesos asignados a cada activo en un portafolio eficiente dado. Estos pesos muestran cómo se distribuyen los fondos entre los diferentes activos para lograr una combinación óptima de rendimiento y riesgo.

3.4 Cálculo del portafolio óptimo – *Sharpe Ratio*

El *Sharpe Ratio* es comúnmente utilizado como una medida de desempeño de un portafolio en el mundo de las inversiones. Fue desarrollado por William F. Sharpe y es una medida de la rentabilidad ajustada al riesgo de un portafolio (Mendizábal Zubeldía et al., 2002; Support Vector Regression (SVR), n.d.).

El *Sharpe Ratio* se calcula dividiendo el exceso de rendimiento del portafolio sobre la tasa libre de riesgo entre la volatilidad del portafolio. Formalmente, se calcula de la siguiente manera:

$$SR = \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma(R_p)}$$

Donde:

$E(R_p)$: es el rendimiento esperado del portafolio.

R_f : es la tasa libre de riesgo, que representa el rendimiento de un activo libre de riesgo. Para este análisis se consideró como tasa libre de riesgo; en el caso del portafolio de Estados Unidos, el promedio histórico de la tasa Treasuries a 10 años corresponde a 3.54%, y en el caso del portafolio de Colombia, el promedio histórico de los bonos TES a 10 años que corresponde a 8.35%.

$\sigma(R_p)$: es la volatilidad del portafolio, medida generalmente como la desviación estándar de los rendimientos del portafolio.

El *Sharpe Ratio* proporciona una medida de cuánto rendimiento adicional se obtiene por cada unidad de riesgo asumida en comparación con un activo libre de riesgo. Por lo tanto, cuanto mayor

sea el *Sharpe Ratio*, mejor será el desempeño del portafolio en términos de la relación entre rendimiento y riesgo.

Con el fin de determinar el portafolio óptimo, se calcula el máximo *Sharpe Ratio* en Python mediante la siguiente función:

```
def Max_Sharpe_Ratio(expected_returns, covariance_matrix, risk_free_rate)
```

La función retorna los pesos óptimos encontrados que maximizan el *Sharpe Ratio*.

3.5 Cálculo de la riqueza – *Total Wealth*

Otro de los indicadores usados como medida de desempeño para comparar dos portafolios, es la riqueza total (*Total Wealth*), que se obtiene asumiendo que se compra la cartera de activos en determinado día y se vende al día o la semana siguiente, dependiendo de la estrategia seleccionada *Buy & Sell* o *Buy & Hold*, respectivamente.

La metodología implementada para este cálculo consiste en obtener el rendimiento entre el día 15 y el 18 de diciembre del año 2023, para cada activo de los portafolios, en el caso de la estrategia *B&S*, y el rendimiento medio semanal entre el 18 y el 29 de diciembre del año 2023, para la estrategia *B&H*. Se asume una inversión inicial de 100 millones y se compran los activos en las proporciones resultantes para los 10 portafolios seleccionados de la frontera eficiente de cada modelo. La riqueza total para cada portafolio se obtiene solucionando la siguiente función:

$$TW(P_i) = 100 * \sum_{i=1}^{10} E(r_i) * W_i$$

Donde:

$E(r_i)$: corresponde al rendimiento de cada activo del portafolio en el día o la semana después de la compra.

W_i : corresponde a la proporción de inversión de cada activo del portafolio, según lo arrojado por el modelo de Markowitz.

4. Resultados

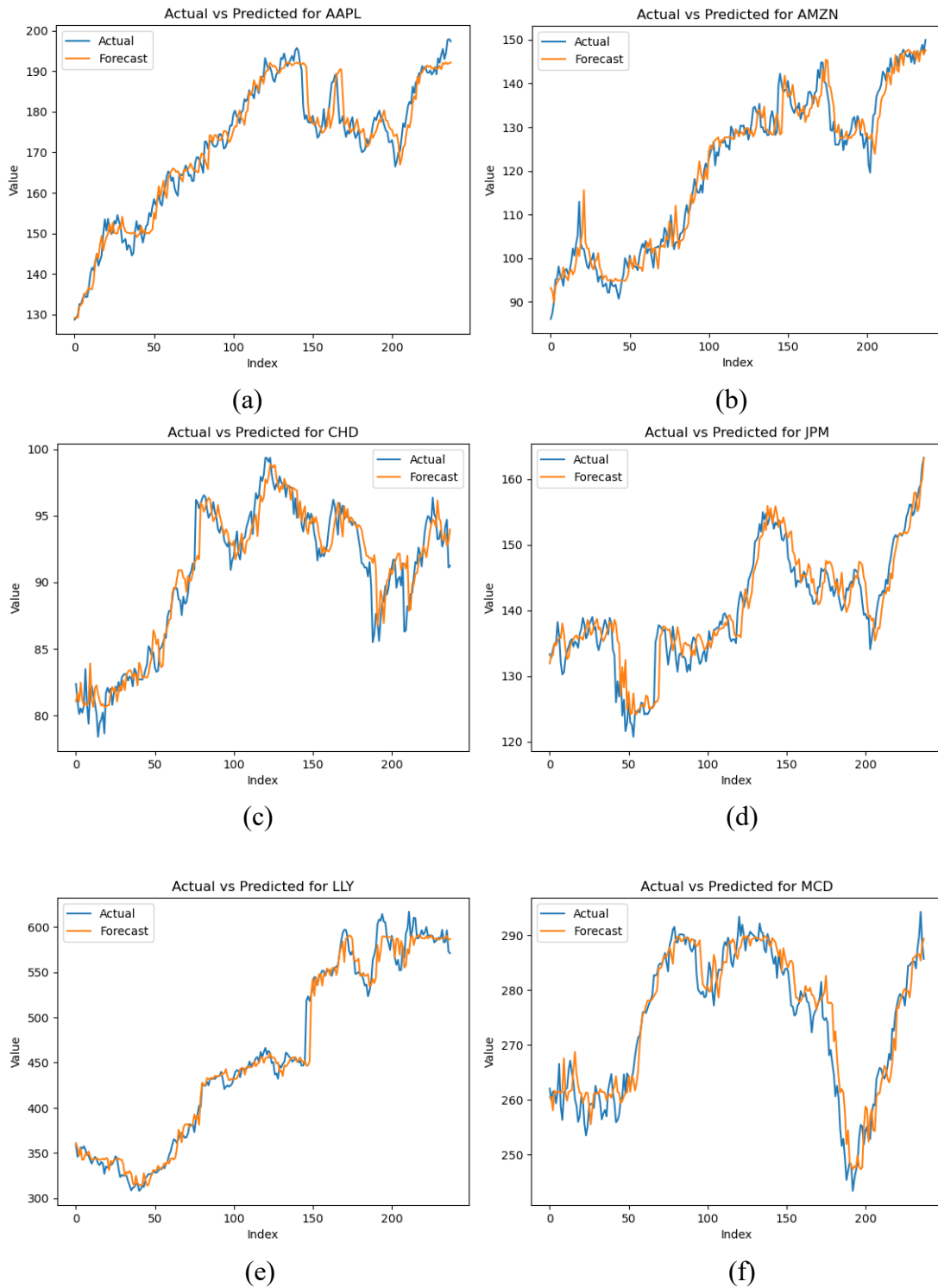
En esta sección, se presentan los resultados obtenidos del análisis matemático realizado, en función de los datos seleccionados de los precios históricos de las acciones de cada portafolio y los datos resultantes del modelo de regresión, aplicados a la optimización de los portafolios mediante el modelo de Markowitz, con el objetivo de evaluar el efecto en términos de la eficiencia de la optimización con ambos conjuntos de datos. Se empleó la metodología descrita en el capítulo anterior, centrándose en la comparación de los rendimientos y las desviaciones estándar para 10 de los portafolios seleccionados de la frontera eficiente y el portafolio óptimo. Los datos se presentan de manera tanto visual, a través de gráficos representativos, como numérica, para facilitar la comprensión de las tendencias y diferencias observadas. Este análisis comparativo pretende arrojar luz sobre la implementación de las técnicas de *Machine Learning* aplicadas en el campo de las finanzas, específicamente en la inversión en mercados bursátiles.

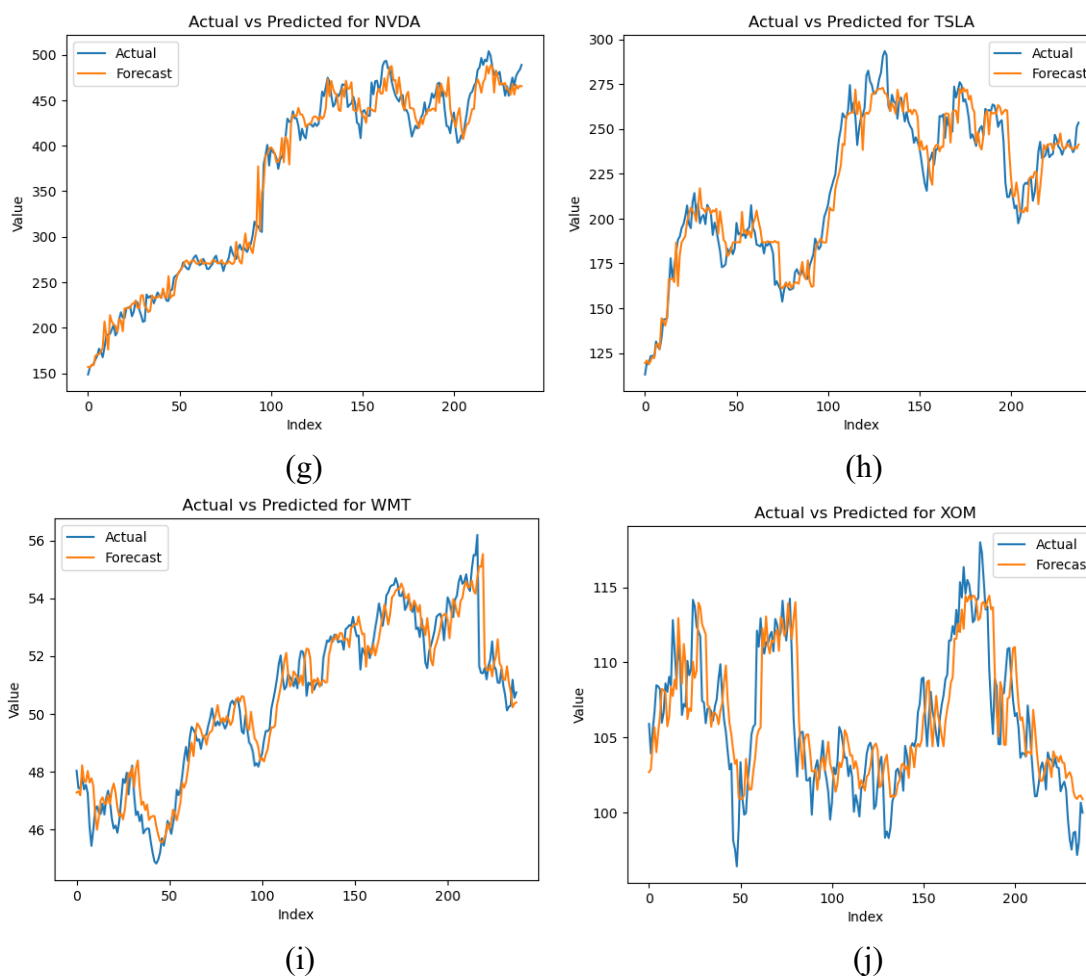
Los resultados se organizan en los siguientes capítulos de acuerdo con el portafolio de cada mercado de valores: Estados Unidos y Colombia, así como las estrategias de comprar y vender (*B&S*) y comprar y retener (*B&H*).

4.1 Mercado de valores de Estados Unidos – Estrategia *B&S*

En las siguientes gráficas se observa la tendencia de los precios de cierre históricos entre el 03 de enero y el 15 de diciembre del año 2023, de los 10 activos seleccionados para el portafolio del mercado de Estados Unidos. La línea azul muestra los datos reales y la línea naranja los datos obtenidos a partir del algoritmo SVR entrenado. Se observa que las predicciones de los precios siguen el comportamiento de los datos reales históricos, atenuándose un poco en los picos. La tendencia *forecast* se desplaza hacia la derecha debido al rezago implementado para el entrenamiento del algoritmo. Después de varias pruebas se identificó que, con un rezago de tres días para este tipo de estrategia (*B&S*), se obtenía el mejor ajuste a los datos reales. De esta manera, los datos resultantes del modelo siguen la tendencia, suavizando los picos.

Figura 5. Precios de las acciones de Estados Unidos, reales vs. *forecast*, desde 03 de enero a 15 de diciembre de 2023





Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

Los rendimientos anuales medios y la desviación estándar anual, tanto para los datos históricos reales como para los datos *forecast*, se consignan en la siguiente tabla.

Tabla 3. Rendimientos y Desviaciones Estándar anuales activos de Estados Unidos, estrategia *B&S*

Activos	Rendimiento medio anual Real	Desviación estándar anual Real	Rendimiento medio anual <i>Forecast</i>	Desviación estándar anual <i>Forecast</i>
AAPL	0.506722	0.201747	0.439206	0.183986
AMZN	0.642361	0.334031	0.541263	0.321071
CHD	0.146039	0.192689	0.170796	0.164367

JPM	0.264245	0.210150	0.245810	0.198432
LLY	0.524183	0.292251	0.564900	0.315397
MCD	0.120866	0.141022	0.120228	0.127367
NVDA	1.408205	0.490282	1.370956	0.662983
TSLA	1.036169	0.530094	0.919716	0.588997
WMT	0.093187	0.156764	0.077808	0.139624
XOM	0.009981	0.251369	0.003576	0.212188

Fuente: Elaboración propia, 2024.

De igual forma, se calcularon los *Sharpe Ratios* mostrados en la tabla 4, para cada uno de los activos, considerando los datos anteriores y la tasa libre de riesgo mencionada en el capítulo 3.4. Para el mercado de Estados Unidos se observa que la mayoría son positivos y en algunos casos superiores a uno, lo que indica que los rendimientos son altos en comparación con el riesgo asumido.

Los *Sharpe Ratios* obtenidos con los valores modelados son menores a los obtenidos con los valores reales, excepto para el caso de Church & Dwight Company Inc, Eli Lilly and Company y McDonald's Corporation. Los resultados de este indicador permiten hacer una inferencia inicial de los activos en los cuales se invertiría en mayor proporción, siendo en su orden las acciones de NVIDIA Corporation, Apple Inc, Tesla Inc, Amazon.com Inc y Eli Lilly and Company.

Tabla 4. *Sharpe Ratios* activos portafolio de Estados Unidos, estrategia B&S

Activos	<i>Sharpe Ratio</i> Datos reales	<i>Sharpe Ratio</i> Datos Forecast
AAPL	2.336206	2.194764
AMZN	1.817078	1.575548
CHD	0.574183	0.823742
JPM	1.088963	1.060363
LLY	1.672477	1.678838

MCD	0.606045	0.666011
NVDA	2.800030	2.014465
TSLA	1.887907	1.501395
WMT	0.368621	0.303730
XOM	-0.101122	-0.149980

Fuente: Elaboración propia, 2024.

En las siguientes tablas se relacionan los datos de cada combinación de proporción de inversión que minimizan el riesgo, medido como la desviación estándar, para distintos valores de rendimientos esperados seleccionados de la frontera eficiente; estos resultados se obtuvieron al resolver el programa cuadrático paramétrico del modelo de Markowitz, explicado en el capítulo 3.3. La tabla 5 corresponde a los resultados obtenidos mediante los datos reales y la tabla 6, mediante los datos *forecast*.

Tabla 5. Proporción de cada activo para el modelo de mv Portafolio Estados Unidos estrategia B&S

Portafolio	$E(R_p)$	$\sigma^2(R_p)$	%AAPL	%AMZN	%CHD	%JPM
1.	0.588557	0.165052	0.1853	0.0703	0.1702	0.0958
2.	0.684986	0.190591	0.1832	0.0744	0.1313	0.0630
3.	0.781415	0.218717	0.1892	0.0733	0.0732	0.0160
4.	0.877844	0.248972	0.1579	0.0718	0.0000	0.0000
5.	0.974274	0.282187	0.0270	0.0658	0.0000	0.0000
6.	1.070703	0.319275	0.0000	0.0072	0.0000	0.0000
7.	1.167132	0.361826	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8.	1.263562	0.409209	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9.	1.311776	0.434227	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10.	1.359991	0.459965	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Portafolio	%LLY	%MCD	%NVDA	%TSLA	%WMT	%XOM
1.	0.2176	0.0000	0.1792	0.0297	0.0192	0.0326
2.	0.2590	0.0000	0.2278	0.0501	0.0000	0.0112
3.	0.2981	0.0000	0.2807	0.0695	0.0000	0.0000
4.	0.3379	0.0000	0.3402	0.0921	0.0000	0.0000
5.	0.3558	0.0000	0.4314	0.1200	0.0000	0.0000
6.	0.3173	0.0000	0.5372	0.1383	0.0000	0.0000
7.	0.2143	0.0000	0.6469	0.1388	0.0000	0.0000
8.	0.1047	0.0000	0.7553	0.1400	0.0000	0.0000

9.	0.0503	0.0000	0.8100	0.1397	0.0000	0.0000
10.	0.0000	0.0000	0.8704	0.1296	0.0000	0.0000

Fuente: Elaboración propia, 2024.

Tabla 6. Proporción de cada activo para el modelo de SVR-MV Portafolio Estados Unidos estrategia *B&S*

Portafolio	$E(R_p)$	$\sigma^2(R_p)$	%AAPL	%AMZN	%CHD	%JPM
1.	0.569389	0.161770	0.3564	0.1302	0.0892	0.0595
2.	0.663691	0.192988	0.3664	0.1560	0.0000	0.0000
3.	0.757993	0.232740	0.2030	0.1591	0.0000	0.0000
4.	0.852295	0.280171	0.0390	0.1606	0.0000	0.0000
5.	0.946597	0.333843	0.0000	0.0890	0.0000	0.0000
6.	1.040899	0.394883	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7.	1.135201	0.462562	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8.	1.229503	0.535664	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9.	1.276654	0.573608	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10.	1.323805	0.615694	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Portafolio	%LLY	%MCD	%NVDA	%TSLA	%WMT	%XOM
1.	0.2240	0.0000	0.1254	0.0152	0.0000	0.0000
2.	0.2733	0.0000	0.1685	0.0358	0.0000	0.0000
3.	0.3177	0.0000	0.2411	0.0790	0.0000	0.0000
4.	0.3638	0.0000	0.3128	0.1238	0.0000	0.0000
5.	0.3452	0.0000	0.4057	0.1600	0.0000	0.0000
6.	0.3027	0.0000	0.5066	0.1907	0.0000	0.0000
7.	0.1820	0.0000	0.6207	0.1973	0.0000	0.0000
8.	0.0608	0.0000	0.7343	0.2049	0.0000	0.0000
9.	0.0011	0.0000	0.7919	0.2071	0.0000	0.0000
10.	0.0000	0.0000	0.8955	0.1045	0.0000	0.0000

Fuente: Elaboración propia, 2024.

Los datos de los portafolios óptimos obtenidos al maximizar el *Sharpe Ratio*, se presentan a continuación:

Portafolio óptimo con datos reales

AAPL:	19.08%	MCD:	0.00%
AMZN:	7.30%	NVDA:	25.48%
CHD:	10.29%	TSLA:	6.00%
JPM:	3.91%	WMT:	0.00%
LLY:	27.94%	XOM:	0.00%

Sharpe Ratio:	3.4145	MCD:	0.00%
Retorno:	73.63%	NVDA:	11.83%
Desviación Estándar:	20.53%	TSLA:	1.19%
		WMT:	0.00%
		XOM:	0.00%

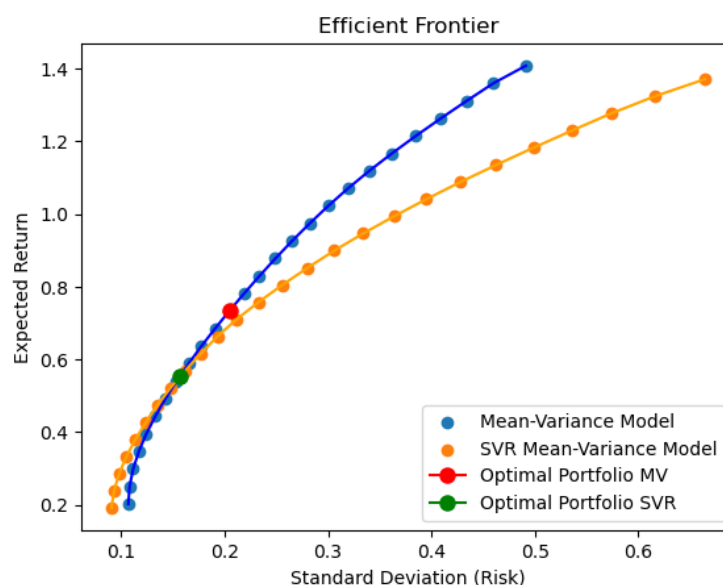
Portafolio óptimo con datos *Forecast*

AAPL:	35.17%	Sharpe Ratio:	3.3024
AMZN:	12.82%	Retorno:	55.31%
CHD:	10.83%	Desviación Estándar:	15.68%
JPM:	6.74%		
LLY:	21.42%		

El portafolio óptimo del modelo MV base (con datos reales) arroja un retorno más alto al invertir la mayor proporción en acciones Eli Lilly and Company (27.94%), NVIDIA Corporation (25.48%) y Apple Inc (19.08%). Tanto el retorno como el riesgo del portafolio óptimo del modelo MV base, son mayores en comparación con el portafolio óptimo del modelo SVR-MV.

La figura 6, corresponde a las fronteras eficientes de los modelos MV y SVR-MV, donde también se incluyen los portafolios óptimos. Se observa que solo en el caso de los portafolios con un rendimiento entre el 20% - 40%, el riesgo es menor en el caso del modelo SVR, y para los portafolios de mayor riesgo, el retorno es mayor siguiendo el modelo MV base.

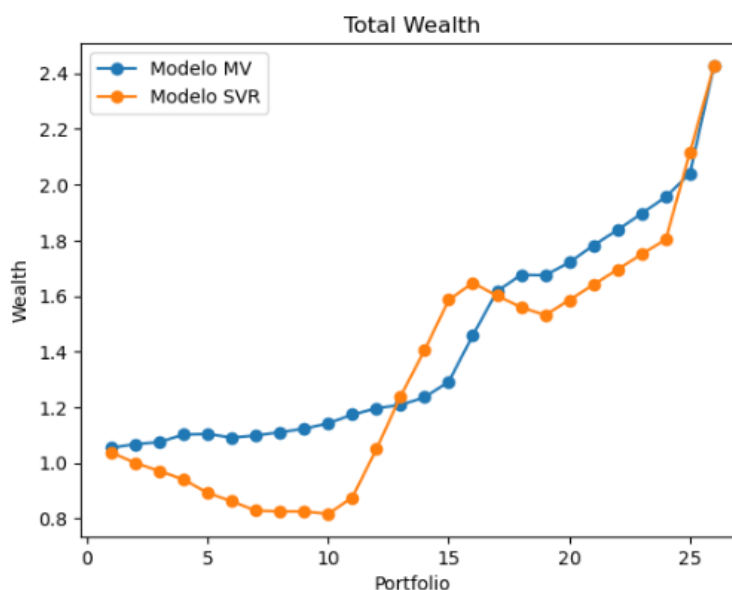
Figura 6. Frontera eficiente de Markowitz Portafolio Estados Unidos estrategia *B&S*



Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

La riqueza total (*Total Wealth*) de cada portafolio, se usa como medida de la eficiencia, con el fin de comparar entre los dos modelos. Cada punto de la figura 7 se obtuvo con la metodología descrita en el capítulo 3.5. En la mayoría de los portafolios, la riqueza obtenida con el modelo SVR-MV es inferior en comparación con el modelo de MV base, aplicando la estrategia de comprar y vender (*B&S*).

Figura 7. Riqueza Total Portafolio Estados Unidos estrategia *B&S*

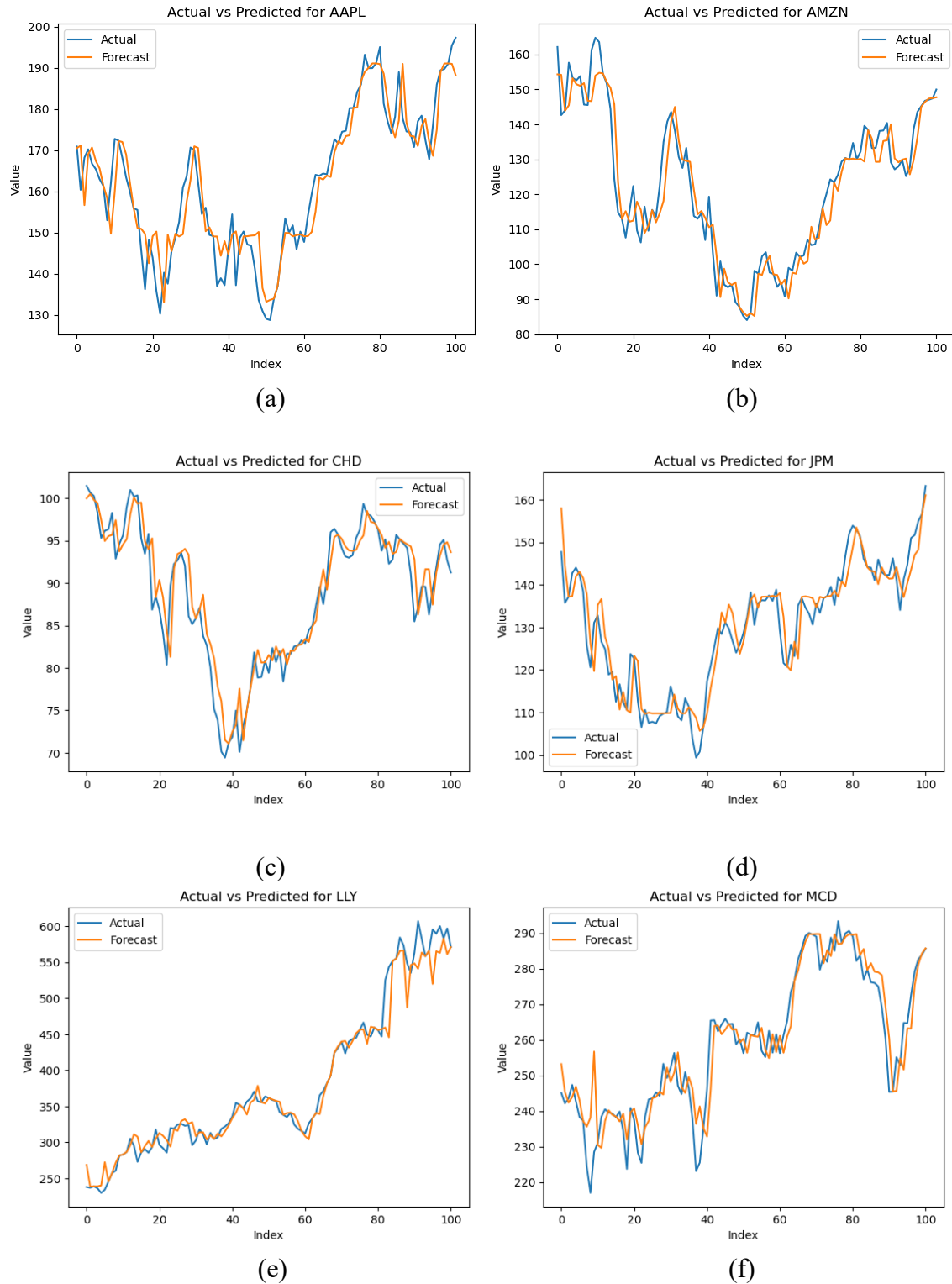


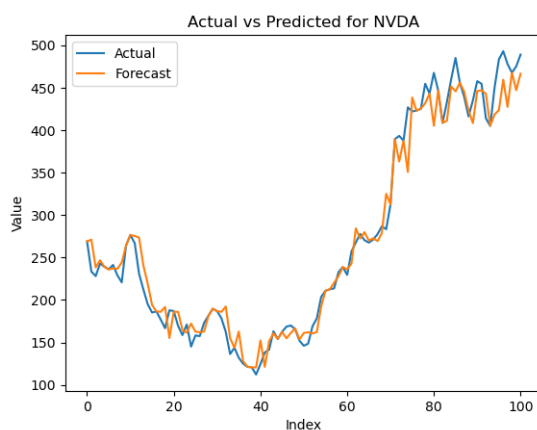
Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

4.2 Mercado de valores de Estados Unidos – Estrategia *B&H*

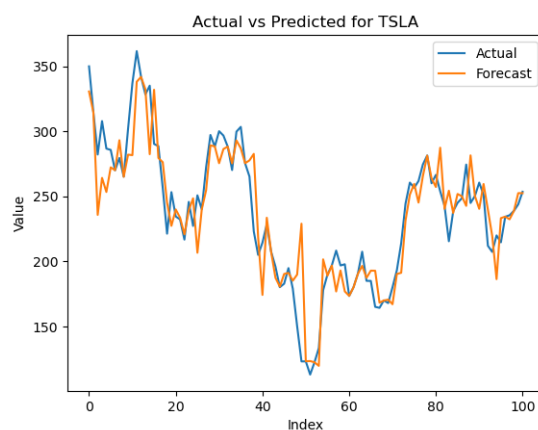
Para la estrategia comprar y retener (*B&H*) se entrenó el algoritmo SVR, a partir de los datos semanales de los precios de cierre de las acciones seleccionadas para el portafolio de Estados Unidos. En las siguientes gráficas se observa la tendencia de los datos reales (línea azul) vs los datos *forecast* (línea naranja), obtenidos a partir del modelo autorregresivo para cada activo. La tendencia *forecast* se desplaza hacia la derecha debido al rezago implementado para el entrenamiento del algoritmo. Después de varias pruebas se identificó que, con un rezago de una semana para este tipo de estrategia (*B&H*), se obtenía el mejor ajuste a los datos reales. De esta manera, los datos resultantes de la predicción siguen la tendencia, suavizando los picos.

Figura 8. Precios de las acciones de Estados Unidos, reales vs. *forecast*, desde 31 de enero de 2022 a 15 de diciembre de 2023

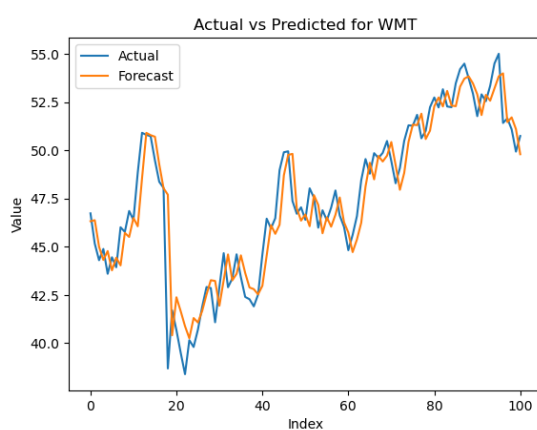




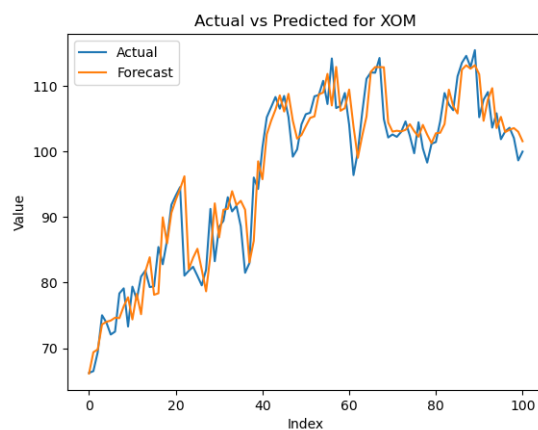
(g)



(h)



(i)



(j)

Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

Los rendimientos anuales medios y la desviación estándar anual, tanto para los datos históricos reales como para los datos *forecast*, se consignan en la siguiente tabla.

Tabla 7. Rendimientos y Desviaciones Estándar anuales activos de Estados Unidos, estrategia *B&H*

Activos	Rendimiento medio anual Real	Desviación estándar anual Real	Rendimiento medio anual <i>Forecast</i>	Desviación estándar anual <i>Forecast</i>
AAPL	0.115110	0.276556	0.067671	0.245001
AMZN	0.035119	0.390307	0.025313	0.359477

CHD	-0.026690	0.223002	-0.016843	0.213094
JPM	0.064736	0.281995	0.041581	0.281450
LLY	0.461332	0.288611	0.541112	0.501013
MCD	0.077621	0.185422	0.083244	0.178929
NVDA	0.435915	0.521301	0.502934	0.675437
TSLA	0.031463	0.613274	0.154302	0.753343
WMT	0.071029	0.230804	0.055824	0.209631
XOM	0.285938	0.320960	0.251317	0.274543

Fuente: Elaboración propia, 2024.

Los *Sharpe Ratios* que se obtienen para la estrategia *Buy & Hold* son inferiores a la estrategia *Buy & Sell*, obteniendo incluso resultados negativos. En el caso de los datos *forecast*, nuevamente gran parte de los resultados son inferiores a los obtenidos con los datos reales, excepto por las acciones de McDonald's Corporation, Tesla Inc y Exxon Mobil Corp.

Tabla 8. *Sharpe Ratios* activos Estados Unidos, estrategia *B&H*

Activos	<i>Sharpe Ratio</i> Datos reales	<i>Sharpe Ratio</i> Datos <i>Forecast</i>
AAPL	0.288225	0.131718
AMZN	-0.000721	-0.028061
CHD	-0.278430	-0.245163
JPM	0.104029	0.021960
LLY	1.475797	1.009380
MCD	0.227701	0.267390
NVDA	0.768298	0.692195
TSLA	-0.006419	0.157832
WMT	0.154369	0.097427
XOM	0.780590	0.786460

Fuente: Elaboración propia, 2024.

Los datos de cada combinación de proporción de inversión que minimizan el riesgo medido como la desviación estándar, para distintos valores de rendimientos esperados seleccionados de la frontera eficiente, se consignan en las siguientes tablas. La tabla 9 corresponde a los resultados obtenidos mediante los datos reales y la tabla 10, mediante los datos *forecast*.

Tabla 9. Proporción de cada activo para el modelo de MV Portafolio Estados Unidos estrategia *B&H*

Portafolio	$E(R_p)$	$\sigma^2(R_p)$	%AAPL	%AMZN	%CHD	%JPM
1.	0.158422	0.155735	0.0000	0.0300	0.1999	0.0000
2.	0.192078	0.158958	0.0000	0.0106	0.1686	0.0000
3.	0.225735	0.164169	0.0000	0.0000	0.1310	0.0000
4.	0.259392	0.171389	0.0000	0.0000	0.0902	0.0000
5.	0.293049	0.180394	0.0000	0.0000	0.0534	0.0000
6.	0.326705	0.190930	0.0000	0.0000	0.0124	0.0000
7.	0.360362	0.202999	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8.	0.394019	0.216739	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9.	0.427675	0.234831	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10.	0.461332	0.290051	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Portafolio	%LLY	%MCD	%NVDA	%TSLA	%WMT	%XOM
1.	0.1568	0.3659	0.0237	0.0000	0.0573	0.1664
2.	0.2052	0.3413	0.0465	0.0000	0.0482	0.1796
3.	0.2559	0.3115	0.0650	0.0000	0.0418	0.1948
4.	0.3102	0.2849	0.0800	0.0000	0.0252	0.2095
5.	0.3692	0.2522	0.0940	0.0000	0.0117	0.2196
6.	0.4227	0.2210	0.1102	0.0000	0.0000	0.2337
7.	0.4832	0.1420	0.1283	0.0000	0.0000	0.2465
8.	0.5445	0.0459	0.1476	0.0000	0.0000	0.2619
9.	0.6657	0.0000	0.1665	0.0000	0.0000	0.1678
10.	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Fuente: Elaboración propia, 2024.

Tabla 10. Proporción de cada activo para el modelo de SVR-MV Portafolio Estados Unidos estrategia *B&H*

Portafolio	$E(R_p)$	$\sigma^2(R_p)$	%AAPL	%AMZN	%CHD	%JPM
1.	0.175556	0.141662	0.0000	0.0325	0.1629	0.0000
2.	0.214035	0.150379	0.0000	0.0137	0.1144	0.0000
3.	0.252515	0.163165	0.0000	0.0000	0.0677	0.0000

4.	0.290995	0.179304	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5.	0.348714	0.209934	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6.	0.387194	0.234307	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7.	0.425673	0.26916	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8.	0.464153	0.314631	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9.	0.502633	0.367792	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10.	0.541112	0.503537	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Portafolio	%LLY	%MCD	%NVDA	%TSLA	%WMT	%XOM
1.	0.1036	0.2915	0.0460	0.0253	0.0761	0.2619
2.	0.1354	0.2880	0.0697	0.0297	0.0460	0.3031
3.	0.1676	0.2757	0.0936	0.0339	0.0160	0.3455
4.	0.2002	0.2631	0.1162	0.0348	0.0000	0.3857
5.	0.2653	0.0887	0.1555	0.0384	0.0000	0.4521
6.	0.3207	0.0000	0.1835	0.0332	0.0000	0.4626
7.	0.4118	0.0000	0.2204	0.0044	0.0000	0.3634
8.	0.5107	0.0000	0.2577	0.0000	0.0000	0.2316
9.	0.6111	0.0000	0.2949	0.0000	0.0000	0.0939
10.	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Fuente: Elaboración propia, 2024.

Los datos de los portafolios óptimos obtenidos al maximizar el *Sharpe Ratio*, se presentan a continuación:

Portafolio óptimo con datos reales

AAPL:	0.00%
AMZN:	0.00%
CHD:	0.00%
JPM:	0.00%
LLY:	61.10%
MCD:	0.00%
NVDA:	16.07%
TSLA:	0.00%
WMT:	0.00%
XOM:	22.82%

Sharpe Ratio:	1.6781
Retorno:	41.72%
Desviación Estándar:	22.75%

Portafolio óptimo con datos *Forecast*

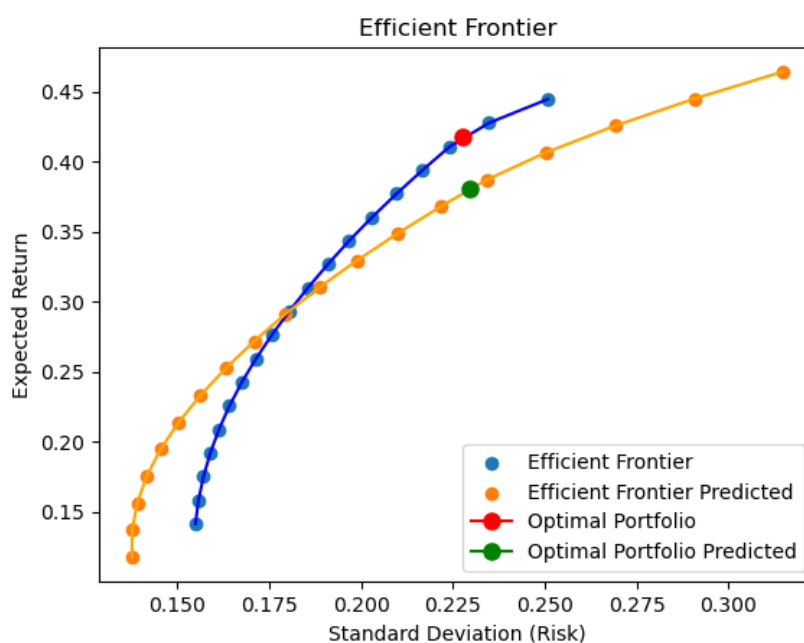
AAPL:	0.00%
AMZN:	0.00%
CHD:	0.00%
JPM:	0.00%
LLY:	30.43%
MCD:	0.00%
NVDA:	17.76%
TSLA:	3.82%
WMT:	0.00%
XOM:	47.99%

Sharpe Ratio:	1.5029
Retorno:	38.05%
Desviación Estándar:	22.96%

El portafolio óptimo del modelo MV base (con datos reales) arroja un retorno más alto al invertir el 61.10% del valor inicial en acciones de Eli Lilly and Company, el 22.82% en acciones de Exxon Mobil Corp y el 16.07% en acciones de NVIDIA Corporation. El riesgo es levemente menor en comparación al portafolio óptimo del modelo SVR-MV.

La figura 9, corresponde a las fronteras eficientes de los modelos MV y SVR-MV, también se incluyen los portafolios óptimos. Se observa que solo en el caso de los portafolios con un rendimiento entre el 10% - 28%, el riesgo es menor en el caso del modelo SVR, y para los portafolios de mayor riesgo, el retorno es mayor para los portafolios del modelo MV base.

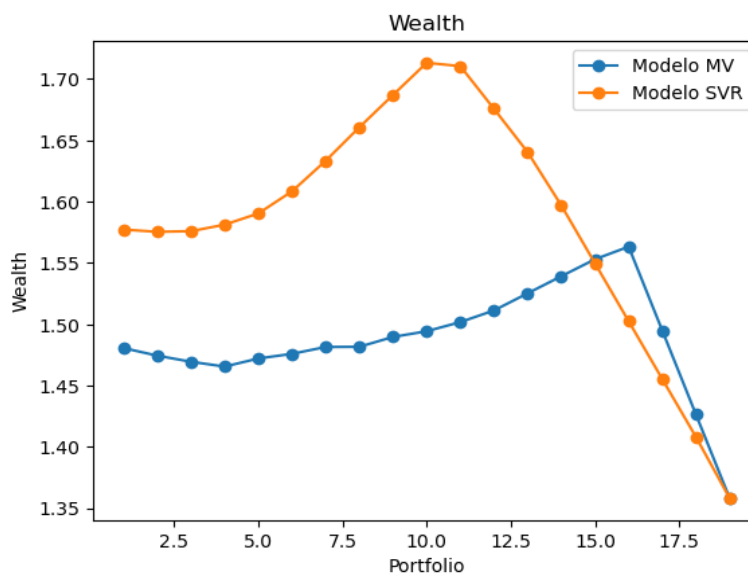
Figura 9. Frontera eficiente de Markowitz Portafolio Estados Unidos estrategia *B&H*



Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

En el caso de la riqueza total obtenida con la estrategia *Buy & Hold*, se observa que, para los portafolios con menor riesgo, es mayor con el modelo SVR-MV, mientras que para los portafolios de riesgo bajo es mayor la riqueza obtenida con el modelo MV base.

Figura 10. Riqueza Total Portafolio Estados Unidos estrategia *B&H*

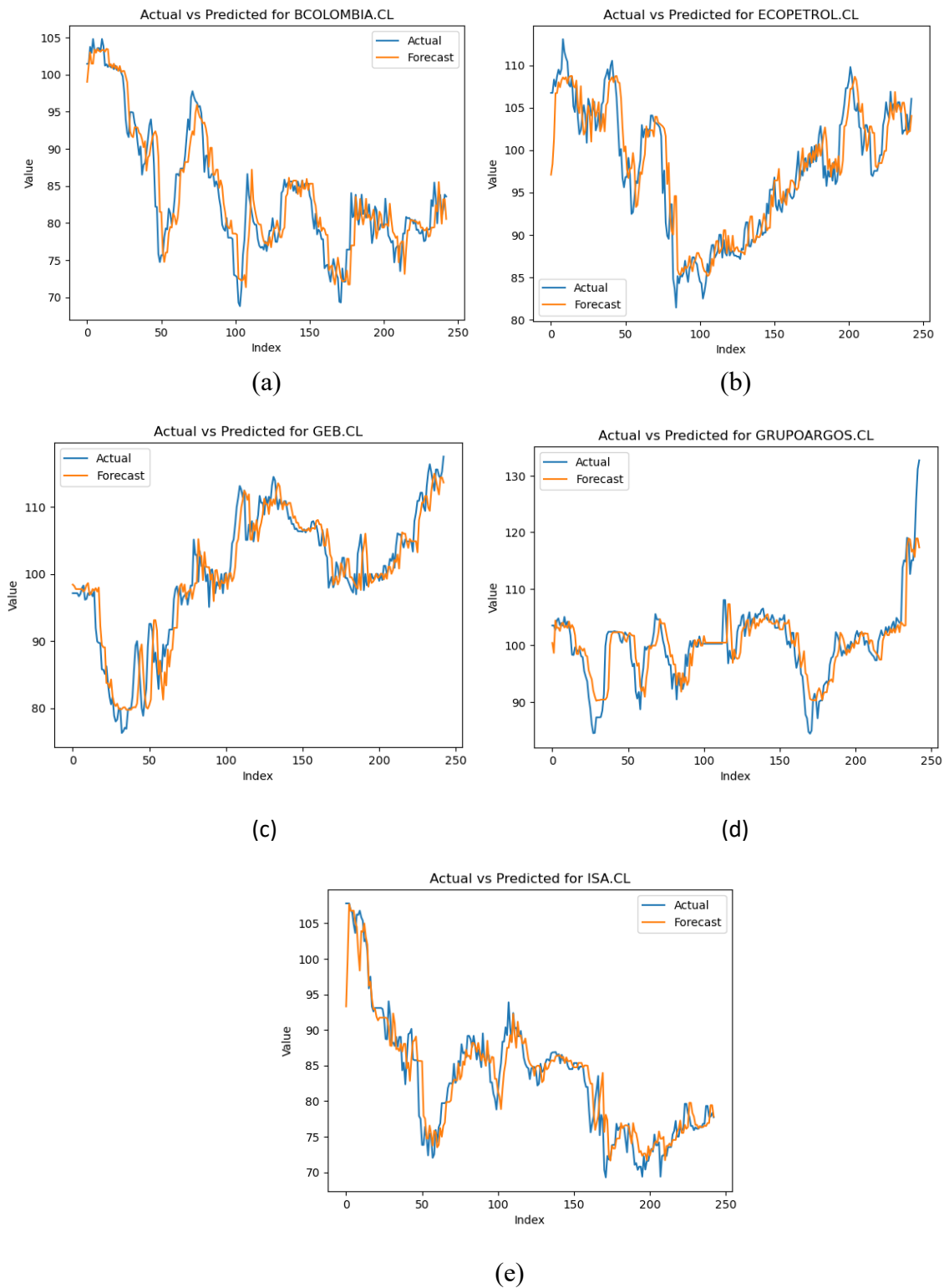


Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

4.3 Mercado de valores de Colombia – Estrategia *B&S*

En las siguientes figuras se observa la tendencia de los precios de cierre históricos entre el 02 de enero y el 15 de diciembre del año 2023, de los 5 activos seleccionados para el portafolio del mercado de Colombia. La línea azul muestra los datos reales y la línea naranja los datos obtenidos a partir del algoritmo SVR entrenado. De manera equivalente al resultado de la modelación de los datos para el portafolio de Estados Unidos, la tendencia *forecast* se desplaza tres días, obteniendo el mejor ajuste a los datos reales. Se observa que las estimaciones de los precios siguen el comportamiento de los datos reales históricos, atenuándose un poco en los picos.

Figura 11. Precios de las acciones de Colombia, reales vs. *forecast*, desde 03 de enero a 15 de diciembre de 2023



Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

Los rendimientos anuales medios y la desviación estándar anual, tanto para los datos históricos reales como para los datos *forecast*, se consignan en la siguiente tabla.

Tabla 11. Rendimientos y Desviaciones Estándar anuales activos de Colombia, estrategia *B&S*

Activos	Rendimiento medio anual Real	Desviación estándar anual Real	Rendimiento medio anual <i>Forecast</i>	Desviación estándar anual <i>Forecast</i>
BCOLOMBIA.CL	-0.114300	0.373650	-0.153295	0.351521
ECOPETROL.CL	0.110156	0.314828	0.112010	0.281420
GEB.CL	0.220581	0.332470	0.201981	0.323985
GRUPOARGOS.CL	0.348572	0.343379	0.204164	0.294130
ISA.CL	-0.183171	0.385324	-0.203074	0.324943

Fuente: Elaboración propia, 2024.

También se calcularon los *Sharpe Ratios* mostrados en la tabla 12, para cada uno de los activos, considerando los datos anteriores y la tasa libre de riesgo mencionada en el capítulo 3.4. Para el mercado de Colombia, se aprecia que los resultados de este indicador son bajos y en algunos casos negativos, indicando que los rendimientos son relativamente bajos en comparación con el riesgo asumido.

Los *Sharpe Ratios* obtenidos con los valores modelos son menores a los obtenidos con los valores reales, excepto para el caso de Ecopetrol. Los resultados de este indicador permiten hacer una inferencia inicial de los activos en los cuales se invertiría en mayor proporción, que serían en orden las acciones del Grupo Argos, el Grupo de Energía de Bogotá y Ecopetrol.

Tabla 12. *Sharpe Ratios* activos portafolio de Colombia, estrategia *B&S*

Activos	<i>Sharpe Ratio</i> Datos reales	<i>Sharpe Ratio</i> Datos <i>Forecast</i>
BCOLOMBIA.CL	-0.529372	-0.829484
ECOPETROL.CL	0.084668	0.098152
GEB.CL	0.412311	0.369210

GRUPOARGOS.CL	0.771951	0.696622
ISA.CL	-0.692069	-0.793265

Fuente: Elaboración propia, 2024.

En las siguientes tablas se relacionan los datos de cada combinación de proporción de inversión que minimizan el riesgo, medido como la desviación estándar, para distintos valores de rendimientos esperados seleccionados de la frontera eficiente. Estos resultados se obtuvieron al resolver el programa cuadrático paramétrico del modelo de Markowitz, explicado en el capítulo 3.3. La tabla 13 corresponde a los resultados obtenidos mediante los datos reales y la tabla 14, mediante los datos *forecast*.

Tabla 13. Proporción de cada activo para el modelo de MV Portafolio Colombia estrategia *B&S*

Portafolio	$E(R_p)$	$\sigma^2(R_p)$	% BCOL	%ECOP	% GEB	%G.ARG	% ISA
1.	0.165212	0.203959	0.1276	0.2620	0.2808	0.2808	0.0486
2.	0.183548	0.207430	0.1125	0.2622	0.2899	0.3102	0.0249
3.	0.201884	0.211924	0.0956	0.2682	0.2989	0.3367	0.0004
4.	0.220220	0.217621	0.0572	0.2618	0.3079	0.3729	0.0000
5.	0.238556	0.224707	0.01857	0.2563	0.3148	0.4102	0.0000
6.	0.256892	0.233459	0.0000	0.2156	0.3146	0.4697	0.0000
7.	0.275228	0.245965	0.0000	0.1400	0.3122	0.5477	0.0000
8.	0.293564	0.262034	0.0000	0.0644	0.3097	0.6258	0.0000
9.	0.311900	0.281157	0.0000	0.0000	0.2865	0.7134	0.0000
10.	0.330236	0.308193	0.0000	0.0000	0.1432	0.8567	0.0000

Fuente: Elaboración propia, 2024.

Tabla 14. Proporción de cada activo para el modelo de SVR-MV Portafolio Colombia estrategia *B&S*

Portafolio	$E(R_p)$	$\sigma^2(R_p)$	% BCOL	%ECOP	% GEB	%G.ARG	% ISA
1.	0.156717	0.186138	0.0985	0.3134	0.3098	0.2530	0.0251
2.	0.174046	0.190981	0.0760	0.3255	0.3218	0.2720	0.0045
3.	0.191375	0.196593	0.0418	0.3312	0.3284	0.2985	0.0000
4.	0.208704	0.203092	0.0001	0.3458	0.3315	0.3224	0.0000
5.	0.226034	0.212419	0.0000	0.2697	0.3272	0.4030	0.0000
6.	0.243363	0.226489	0.0000	0.1949	0.3203	0.4847	0.0000
7.	0.260692	0.244482	0.0000	0.1202	0.3133	0.5663	0.0000
8.	0.278021	0.265603	0.0000	0.0455	0.3063	0.6480	0.0000
9.	0.295350	0.289584	0.0000	0.0000	0.2527	0.7472	0.0000
10.	0.312679	0.319468	0.0000	0.0000	0.1263	0.8736	0.0000

Fuente: Elaboración propia, 2024.

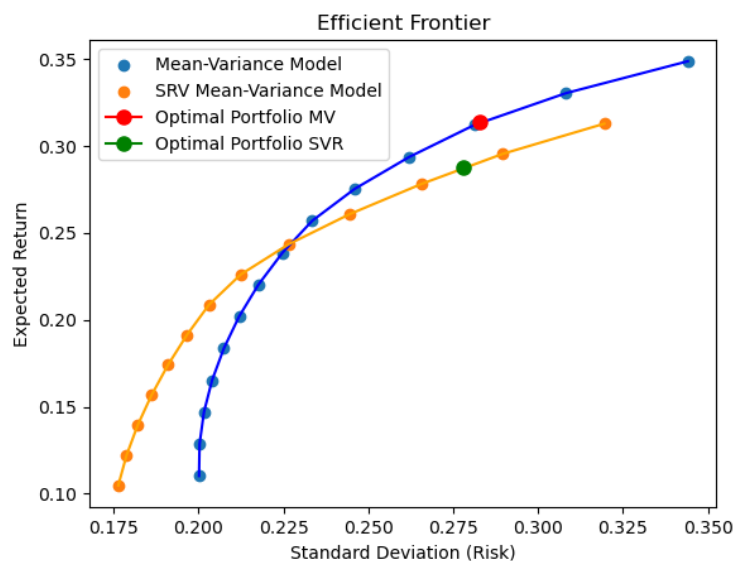
A partir de los puntos $[E(R_p), \sigma^2(R_p)]$ de las tablas anteriores, se construye la frontera eficiente que se visualiza en la figura 12. Además, se incluyen la combinación rendimiento vs. riesgo del portafolio óptimo, tanto para el modelo de media-varianza base, como para el modelo incluyendo SVR. Los portafolios óptimos se obtienen encontrando las proporciones de inversión en cada activo que maximiza el *Sharpe Ratio*.

Graficando las dos fronteras eficientes superpuestas, se identifica que para rendimientos inferiores al 23% aproximadamente, el riesgo asumido es menor para los portafolios eficientes obtenidos con datos *forecast* y para riesgos más altos, con desviación estándar superior a 24% aproximadamente, se obtienen mayores rendimientos en los portafolios seleccionados usando los datos reales.

El portafolio óptimo que tiene mayor rendimiento se obtiene con los datos reales, al distribuir la inversión inicial un 27.48% en las acciones del Grupo de Energía de Bogotá y el 72.52% en las acciones de Grupo Argos. El riesgo es levemente superior, al riesgo obtenido en el portafolio óptimo con datos *forecast*.

Portafolio óptimo con datos reales		Portafolio óptimo con datos <i>Forecast</i>	
BCOLOMBIA.CL:	0.00%	BCOLOMBIA.CL:	0.00%
ECOPETROL.CL:	0.00%	ECOPETROL.CL:	0.55%
GEB.CL:	27.48%	GEB.CL:	30.29%
GRUPOARGOS.CL:	72.52%	GRUPOARGOS.CL:	69.16%
ISA.CL:	0.00%	ISA.CL:	0.00%
<i>Sharpe Ratio:</i>	0.8124	<i>Sharpe Ratio:</i>	0.7332
Retorno:	31.34%	Retorno:	28.73%
Desviación Estándar:	28.30%	Desviación Estándar:	27.79%

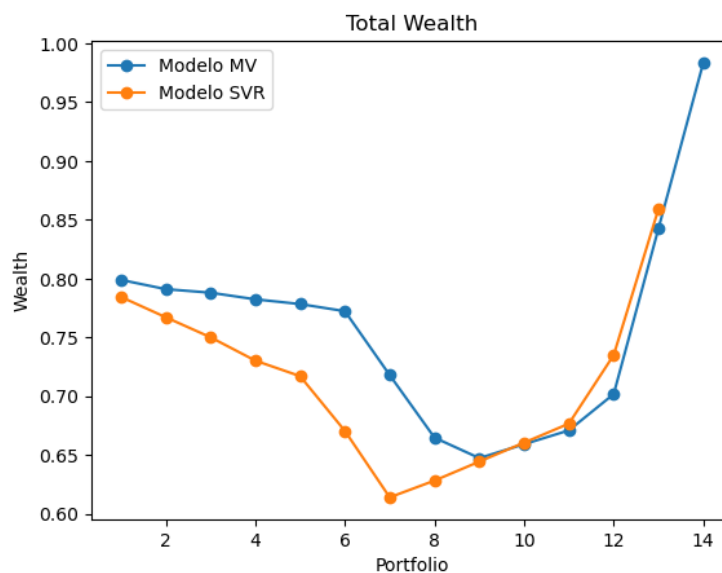
Figura 12. Frontera eficiente de Markowitz Portafolio Colombia estrategia *B&S*



Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

La riqueza total (*Total Wealth*) de cada portafolio, se usa como medida de la eficiencia para comparar entre los dos modelos. Cada punto de la figura 13 se obtuvo con la metodología descrita en el capítulo 3.5. La riqueza obtenida con el modelo de SVR-MV es inferior aplicando la estrategia de comprar y vender, en comparación al modelo de MV base.

Figura 13. Riqueza Total Portafolio Colombia estrategia *B&S*



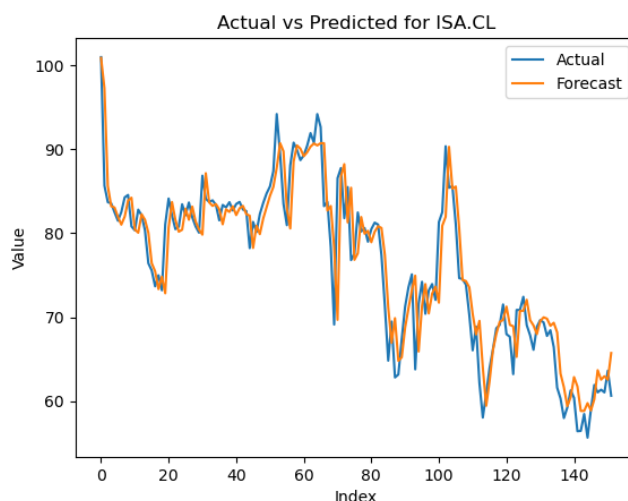
Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

4.4 Mercado de valores de Colombia – Estrategia *B&H*

Para la estrategia comprar y retener (*B&H*), se entrenó el algoritmo SRV a partir de los datos semanales de los precios de cierre de las acciones seleccionadas para el portafolio de Colombia. En las siguientes figuras se observa la tendencia de los datos reales (línea azul) vs los datos *forecast* (línea naranja), obtenidos a partir del modelo autorregresivo para cada activo. Los datos resultantes del modelo siguen la tendencia, atenuando las observaciones extremas, con el desplazamiento de una semana, equivalente al rezago definido para esta estrategia (*B&H*).

Figura 14. Precios de las acciones de Colombia, reales vs. *forecast*, desde 01 de enero de 2022 a 15 de diciembre de 2023





(e)

Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

Los rendimientos anuales medios y la desviación estándar anual, tanto para los datos históricos reales como para los datos *forecast*, se consignan en la siguiente tabla.

Tabla 15. Rendimientos y Desviaciones Estándar anuales activos de Colombia, estrategia *B&H*

Activos	Rendimiento medio anual Real	Desviación estándar anual Real	Rendimiento medio anual Forecast	Desviación estándar anual Forecast
BCOLOMBIA.CL	0.111289	0.391629	0.096449	0.360666
ECOPETROL.CL	0.144860	0.389234	0.082166	0.314583
GEB.CL	0.025553	0.293760	-0.031964	0.268795
GRUPOARGOS.CL	0.090444	0.419513	-0.002401	0.335724
ISA.CL	-0.100029	0.375369	-0.091772	0.336591

Fuente: Elaboración propia, 2024.

Los *Sharpe Ratios* que se obtienen para la estrategia *Buy & Hold*, son inferiores a la estrategia *Buy & Sell*. En el caso de los datos *forecast*, los resultados son en su mayoría negativos con excepción de la acción de Bancolombia.

Tabla 16. *Sharpe Ratios* activos portafolio de Colombia, estrategia *B&H*

Activos	<i>Sharpe Ratio</i> Datos reales	<i>Sharpe Ratio</i> Datos <i>Forecast</i>
BCOLOMBIA.CL	0.070957	0.035903
ECOPETROL.CL	0.157644	-0.004241
GEB.CL	-0.197259	-0.429562
GRUPOARGOS.CL	0.016553	-0.255869
ISA.CL	-0.488929	-0.520728

Fuente: Elaboración propia, 2024.

Los datos de cada combinación de proporción de inversión que minimizan el riesgo medido como la desviación estándar, para distintos valores de rendimientos esperados seleccionados de la frontera eficiente, se consignan en las siguientes tablas. La tabla 17 corresponde a los resultados obtenidos mediante los datos reales y la tabla 18, mediante los datos *forecast*.

Tabla 17. Proporción de cada activo para el modelo de MV Portafolio Colombia estrategia *B&H*

Portafolio	$E(R_p)$	$\sigma^2(R_p)$	% BCOL	%ECOP	% GEB	%G.ARG	% ISA
1.	0.060416	0.238354	0.1614	0.1990	0.4287	0.1246	0.0861
2.	0.068860	0.240682	0.1799	0.2163	0.4235	0.1296	0.0504
3.	0.077305	0.243716	0.1993	0.2327	0.4169	0.1356	0.0152
4.	0.085749	0.247799	0.2091	0.2729	0.3684	0.149	0.0000
5.	0.094194	0.254573	0.2109	0.3322	0.2885	0.1682	0.0000
6.	0.102638	0.264040	0.2131	0.3899	0.2075	0.1893	0.0000
7.	0.111083	0.275923	0.2149	0.4483	0.1270	0.2096	0.0000
8.	0.119527	0.289924	0.2185	0.5061	0.0464	0.2288	0.0000
9.	0.127971	0.307472	0.1990	0.6133	0.0000	0.1875	0.0000
10.	0.144860	0.390512	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Fuente: Elaboración propia, 2024.

Tabla 18. Proporción de cada activo para el modelo de SVR-MV Portafolio Colombia estrategia *B&H*

Portafolio	$E(R_p)$	$\sigma^2(R_p)$	% BCOL	%ECOP	% GEB	%G.ARG	% ISA
1.	0.031545	0.215927	0.1786	0.3169	0.3557	0.1486	0.0000
2.	0.038035	0.219938	0.2108	0.3425	0.3170	0.1295	0.0000
3.	0.044526	0.225291	0.2366	0.3739	0.2735	0.1158	0.0000

4.	0.051016	0.231904	0.2653	0.4025	0.2318	0.1003	0.0000
5.	0.057507	0.239670	0.2939	0.4313	0.1904	0.0841	0.0000
6.	0.063997	0.248489	0.3171	0.4651	0.1448	0.0728	0.0000
7.	0.070487	0.258227	0.3523	0.4877	0.1076	0.0522	0.0000
8.	0.076978	0.268810	0.3803	0.5175	0.0669	0.0351	0.0000
9.	0.083468	0.280133	0.4092	0.5459	0.0253	0.0195	0.0000
10.	0.089958	0.294640	0.5455	0.4544	0.0000	0.0000	0.0000

Fuente: Elaboración propia, 2024.

Los datos de los portafolios óptimos obtenidos al maximizar el *Sharpe Ratio*, se presentan a continuación:

Portafolio óptimo con datos reales

BCOLOMBIA.CL:	7.30%
ECOPETROL.CL:	92.70%
GEB.CL:	0.00%
GRUPOARGOS.CL:	0.00%
ISA.CL:	0.00%

Sharpe Ratio:	0.1575
Retorno:	14.24%
Desviación Estándar:	37.40%

Portafolio óptimo con datos *Forecast*

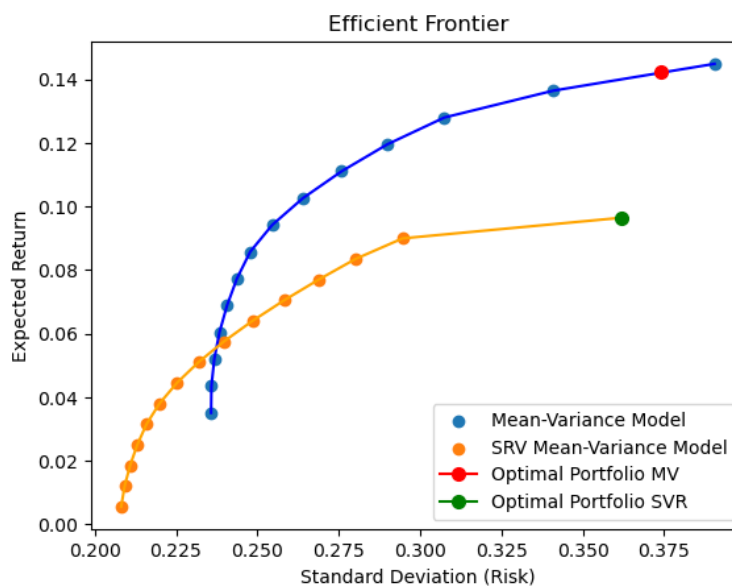
BCOLOMBIA.CL:	100.0%
ECOPETROL.CL:	0.00%
GEB.CL:	0.00%
GRUPOARGOS.CL:	0.00%
ISA.CL:	0.00%

Sharpe Ratio:	0.0357
Retorno:	9.64%
Desviación Estándar:	36.19%

El portafolio óptimo del modelo MV base (con datos reales) arroja un retorno más alto al invertir el 7.3% del valor inicial en las acciones de Bancolombia y el 92.70% en las acciones de Ecopetrol. El riesgo es levemente mayor en comparación al portafolio óptimo del modelo SVR-MV.

La figura 15, corresponde a las fronteras eficientes de los modelos MV y SVR-MV, donde también se incluyen los portafolios óptimos. Se observa que solo en el caso de los portafolios con un rendimiento entre el 4% - 5%, el riesgo es menor en el caso del modelo SVR, y para los portafolios de mayor riesgo, el retorno es mayor para los portafolios del modelo MV base.

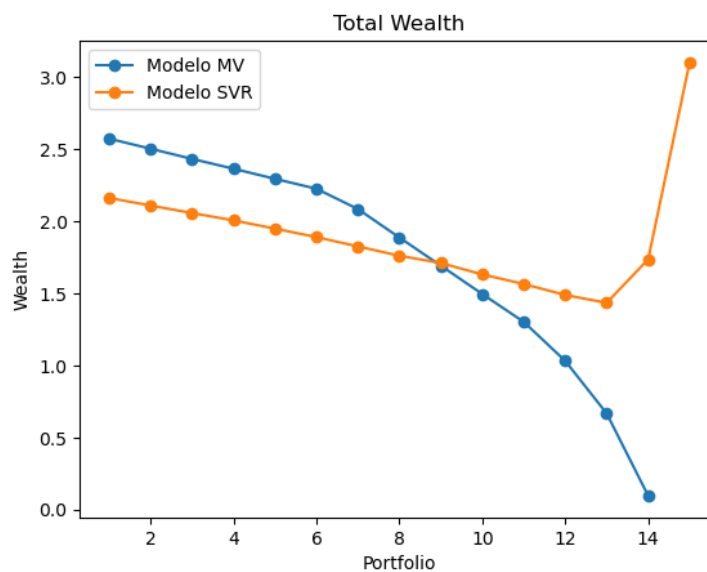
Figura 15. Frontera eficiente de Markowitz Portafolio Colombia estrategia *B&H*



Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

En el caso de la riqueza total obtenida con la estrategia *Buy & Hold*, en la figura 16 se observa que, para los portafolios con riesgo alto, es mayor con el modelo SVR-MV, mientras que, para los portafolios de riesgo bajo, es mayor la riqueza obtenida con el modelo MV base.

Figura 16. Riqueza Total Portafolio Colombia estrategia *B&H*



Fuente: Elaboración propia en Python, 2024.

5. Conclusiones y recomendaciones

En el presente trabajo de investigación, se ha explorado el papel fundamental que desempeñan las técnicas de *Machine Learning* en la optimización de portafolios de inversión en el contexto financiero, y cómo en los últimos años se ha convertido en el foco de estudio para buscar nuevas herramientas o mejorar las existentes, con el objetivo de apoyar el trabajo de los diferentes actores que interactúan con los mercados bursátiles. Si bien se identifica que las técnicas clásicas de optimización, como el modelo de media-varianza de Markowitz, son una base importante de análisis, también son muy susceptibles de mejoras al incluir las técnicas predictivas como es el caso del *Support Vector Regression* (SVR), que permiten modelar la serie histórica de retornos de los activos, buscando ajustarse a los patrones de largo plazo que se van formando.

El análisis fue aplicado en dos mercados de valores muy diferentes por su tamaño, desarrollo, composición y liquidez; por estas razones, los criterios de selección de los activos para el portafolio de Estados Unidos fueron más exigentes, mientras que para el caso de Colombia los criterios se limitaron a los activos más negociados. No obstante, se encontró que la técnica de *Support Vector Regression* (SVR), se ajusta con una respuesta muy similar para ambos conjuntos de datos, siguiendo la tendencia del comportamiento histórico de los precios de cada activo, pero suavizando los picos que pueden ser entendidos como euforia o pánico del mercado. Lo anterior arroja un conjunto de datos *forecast* que se cubre ante este comportamiento impredecible, permitiendo al inversionista tomar decisiones más objetivas.

A partir de los resultados comparativos proporcionados por los experimentos numéricos, se identifica que el modelo híbrido SVR Mean-variance tiene mejor comportamiento en cuanto a rendimiento para portafolios con desviaciones estándar más bajas, mientras que, para los portafolios de mayor riesgo, el modelo Mean-variance tradicional tiene tasas más altas de retorno; esto puede concluirse comparando las fronteras eficientes de ambos modelos. En la primera parte de la curva, el modelo de Mean-variance tradicional siempre está por debajo del modelo propuesto, mientras que al final de la curva sucede lo contrario.

Utilizando el indicador de desempeño *Sharpe Ratio* para cada uno de los activos que conforman los portafolios, es posible tener una inferencia inicial de los activos que podrían tener una

proporción más alta en el resultado de la optimización. Al maximizar el *Sharpe Ratio* en búsqueda de los portafolios óptimos, tanto para el conjunto de datos reales como para el conjunto de datos *forecast*, se obtuvo en todos los casos, es decir, para los portafolios de Estados Unidos y Colombia con las estrategias *Buy&Sell* y *Buy&Hold*, que el mejor rendimiento se obtiene con los datos reales, y el nivel de riesgo, medido con la desviación estándar, no es significativamente más alto al obtenido con los datos *forecast*. Con esto se concluye que la predicción puede contribuir a una selección más acertada de portafolios de inversión, no influenciada por las condiciones extremas del mercado.

En resumen, este trabajo ha demostrado los efectos de aplicar las técnicas de *Machine Learning*, específicamente *Support Vector Regression (SVR)*, en los modelos tradicionales de optimización de portafolios con las estrategias de *trading* de corto plazo, encontrando como hallazgo más significativo que los portafolios con mejores rendimientos para desviaciones estándar bajas, son los resultantes del modelo híbrido SVR Mean-variance. Se propone como estudios futuros, evaluar la eficiencia con un conjunto de datos de mayor plazo y con una estrategia que busque construir un portafolio estructural con pocos cambios durante su vida.

Referencias

- Aithal, P. K., Geetha, M., Dinesh, U., Savitha, B., & Menon, P. (2023). Real-Time Portfolio Management System Utilizing Machine Learning Techniques. *IEEE Access*, *11*, 32595–32608. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3263260>
- Camacho, J. A. (2020). *Support Vector Regression (SVR)*. <https://www.jacobsoft.com.mx/en/support-vector-regression/>
- Chaweewanchon, A., & Chaysiri, R. (2022). Markowitz Mean-Variance Portfolio Optimization with Predictive Stock Selection Using Machine Learning. *International Journal of Financial Studies*, *10*(3). <https://doi.org/10.3390/ijfs10030064>
- Cuevas Soto, V., Alvares Iriarte, S., Azcona Romero, M., & Rodríguez Rogert, I. (2019). Predictive power of the Support Vector Machine. An application to the financial planning. *Revista Cubana de Ciencias Informáticas*, *13*(3), 59–75. <http://rcci.uci.cu>
- Gunjan, A., & Bhattacharyya, S. (2023). A brief review of portfolio optimization techniques. *Artificial Intelligence Review*, *56*(5), 3847–3886. <https://doi.org/10.1007/s10462-022-10273-7>
- Jang, J., & Seong, N. Y. (2023). Deep reinforcement learning for stock portfolio optimization by connecting with modern portfolio theory. *Expert Systems with Applications*, *218*. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.119556>
- Jiang, Z., Xu, D., & Liang, J. (2017). *A Deep Reinforcement Learning Framework for the Financial Portfolio Management Problem*. <http://arxiv.org/abs/1706.10059>
- MathWorks. (n.d.). *Introducción a Support Vector Machine (SVM)*. Retrieved March 24, 2024, from <https://la.mathworks.com/discovery/support-vector-machine.html>
- Mendizábal Zubeldía, A., Miera Zabalza, L. M., & Zubia Zubiaurre, M. (2002). *El modelo de Markowitz en la gestión de carteras 1 ALAITZ MENDIZÁBAL ZUBELDIA* (Vol. 2, Issue 1).
- Milana, C., & Ashta, A. (2021). Artificial intelligence techniques in finance and financial markets: A survey of the literature. In *Strategic Change* (Vol. 30, Issue 3, 189–209). Blackwell Publishing. <https://doi.org/10.1002/jsc.2403>
- Nafia, A., Yousfi, A., & Echaoui, A. (2023). Equity-Market-Neutral Strategy Portfolio Construction Using LSTM-Based Stock Prediction and Selection: An Application to S&P500 Consumer Staples Stocks. *International Journal of Financial Studies*, *11*(2). <https://doi.org/10.3390/ijfs11020057>
- Support Vector Regression (SVR). (n.d.). *Support Vector Regression (SVR)*. Retrieved March 27, 2024, from <https://www.jacobsoft.com.mx/en/support-vector-regression/>
- Vapnik, Vladimir. (1995). *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer Science.
- Wang, J., & Kim, J. (2019). Applying Least Squares Support Vector Machines to Mean-Variance Portfolio Analysis. *Mathematical Problems in Engineering*, *2019*. <https://doi.org/10.1155/2019/4189683>