“Una Propuesta para determinar la Transformada Z Multiplicativa y Algunas de sus Aplicaciones.”

Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Matemáticas Aplicadas

Departamento de Ciencias Matemáticas

Escuela de Ciencias

Universidad Eafit

Presentado por:

Fabian Velasquez Clavijo

Asesor:

MSc. Freddy H. Marin Sanchez

Medellín-Colombia

Noviembre 2018

“A mis encantadoras hijas Serena y Mariana, a mi esposa amada María; por ser la fuente de toda mi inspiración “

“La ciencia solo avanza hasta que los limites propios del hombre lo permitan, y no hasta que las leyes universales lo determinen”

Fabian Velásquez Clavijo

Una Propuesta para determinar la Transformada Z Multiplicativa y Algunas de sus Aplicaciones.

Fabian Velasquez Clavijo[1] Fredy H. Marin Sanchez[2]

[1]fabianvelasquez@gmail.com
Estudiante de Maestría en Matemáticas Aplicadas
Universidad Eafit

[2]fmarinsa@eafit.edu.co
Magister en Matemáticas Aplicadas
Profesor Universidad Eafit
Medellín-Colombia

Resumen

En el presente artículo se propone una técnica para determinar transformada Z multiplicativa, la cual incluye algunas aplicaciones en la solución de ecuaciones en diferencias lineales multiplicativas. Primero se presenta una función muestreada en forma multiplicativa y luego con la transformada de Laplace multiplicativa se deduce la transformada Z multiplicativa, con todas sus propiedades. Luego se resuelve algunos modelos de tiempo discreto basados en ecuaciones en diferencias multiplicativas y sistemas acoplados de tiempo discreto, y finalmente se calculan soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales multiplicativas con la transformada Z multiplicativa.

Abstract

In the present article a technique to determine multiplicative Z transform is proposed, which includes some applications in the solution of multiplicative linear differences equations. First a function sampled in multiplicative form is presented and then with the multiplicative Laplace transform the multiplicative Z transform is deduced, with all its properties. Then we solve some discrete time models based on equations in multiplicative differences and coupled systems of discrete time, and finally we calculate numerical solutions of multiplicative differential equations with the Z-multiplicative transform.
.

Keywords:

Multiplicative Z Transform, Multiplicative Laplace Transform, Multiplicative Difference Equations, Discrete Time Models.

1. Introducción.

El cálculo multiplicativo o geométrico fue propuesto en 1972 por Grossman y Katz donde muestran otra forma de la derivada y la integral, preservando las propiedades fundamentales en forma multiplicativa [1]. A partir de la formulación de Grossman otros autores han propuesto ampliar más la teoría del cálculo no Newtoniano formulando diferentes versiones. Michael Grossman y Roberts Katz formulan las bases conceptuales del cálculo geométrico y bigeometrico [1]–[3].En 1999 Dick Stanley muestra los teoremas importantes del cálculo multiplicativo y su uso en las aproximaciones con polinomios de Taylor [4]. Recientemente otros autores han promovido la investigación y las aplicaciones del cálculo no newtoniano en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería. Bashirov *et al*. han realizado varias investigaciones en calculo multiplicativo integral, diferencial , ecuaciones diferenciales multiplicativas y análisis complejo multiplicativo [5]–[8].En 2009, F. Córdova-Lepe, realiza trabajos relacionados con el cálculo proporcional y la aplicación del cálculo multiplicativo en áreas como la economía [9]- [10]. A Ozyapici , B Bilgehan y M Riza proponen aplicaciones en el análisis numérico y el procesamiento de señales del cálculo multiplicativo [11]–[13].En 2004 H.R.Khatami, M.Jahanshahi y N.Aliev propusieron un método de solución para ecuaciones en diferencias no lineales basadas en diferencias multiplicativas [14], [15]. Misirili, Riza y Kadak entre 2011 y 2014 han formulado el método de Runge Kutta, el método de Adams Bashforth-Moulton para las ecuaciones diferenciales del cálculo multiplicativo y bigeometrico [16]–[19].

Las aplicaciones del cálculo no newtoniano se han incrementado en diversas áreas, por ejemplo en los sistemas dinámicos y la teoría del caos, con los trabajos de investigación de Aniszewska, Dorota y Ribaczuk [20]–[23].En 2012, Florack, Luc Van Assen y Hans aplican el cálculo multiplicativo en el análisis de imágenes médicas [24].En el 2016 Boruah *et al*. realizo trabajos de investigación en calculo geométrico relacionado con los conjuntos numéricos y las secuencias de diferencias multiplicativas [25], [26].. Ozyapici propone un análisis de señales exponenciales basado en el cálculo multiplicativo y muestra las funciones especiales asociadas a las derivadas fraccionarias multiplicativas [12],[14]. En 2017 Muhammet y Harun utilizan métodos numéricos fundamentales como el método de Euler multiplicativo para la solución de ecuaciones diferenciales parciales multiplicativas[27] . Muhammad, Farooq y Khalida resuelven ecuaciones no lineales con el método de Newton multiplicativo y algunas modificaciones del método de Halley [28].Boruah, Hasarika y Bipan resuelven ecuaciones diferenciales bigeometricas con métodos del análisis numérico [29].En 2018 Yalcin, Numak ,Celik proponen los métodos clásicos de variación de parámetros , coeficientes indeterminados e independencia lineal a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes multiplicativas [30] [31].

La transformada de Laplace multiplicativa propuesta en 2016 por Yalcin *et al.* surge como un método analítico para la solución de ecuaciones diferenciales multiplicativas [32].La diversidad de propiedades de la transformada de Laplace multiplicativa y su uso en la soluciones de ecuaciones diferenciales multiplicativas nos motivó a proponer una nueva transformada Z multiplicativa con propiedades muy interesantes para resolver de manera muy eficiente un tipo de ecuaciones en diferencias no lineales en el cálculo clásico que también son definidas ecuaciones en diferencias lineales en el cálculo multiplicativo.

El artículo está organizado de la siguiente manera, en la sección 2 se encuentran los fundamentos de la integral y derivada multiplicativa. En la sección 3 se encuentran las definiciones importantes y teoremas básicos de la transformada de Laplace multiplicativa. En la sección 4 se expone detalladamente la transformada Z multiplicativa, sus condiciones de existencia, sus teoremas importantes con sus correspondientes demostraciones. En la sección 5 se encuentra las aplicaciones de la nueva transformada Z como son; la solución de las ecuaciones en diferencias multiplicativas, los sistemas de ecuaciones en diferencias acoplados y la resolución de algunos modelos de tiempo discretos.

2. Fundamentos del Cálculo Multiplicativo.

En esta sección se muestran los principales elementos del cálculo multiplicativo propuesto por Grossman y Katz [1]–[3]. Primero se muestran las definiciones y teoremas más importantes de la derivada multiplicativa y después se ilustran algunas propiedades básicas de la integral multiplicativa.

2.1 Derivada Multiplicativa

La derivada multiplicativa de una función positiva $f(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ se deduce a partir de la derivada clásica de la función $\ln(f(t))$.Las operaciones multiplicativas se representan con el operador (*) y en (2) se puede ver la correspondencia entre la derivada multiplicativa y la newtoniana.

Definición 2.1.

Sea una función positiva $f(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ .La derivada multiplicativa de $f(t)$ se define como

$$f^*(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{f(t+\Delta t)}{f(t)}\right)^{\frac{1}{\Delta t}} \quad , con\ f(t) \in \mathbb{R}_+ . \tag{1}$$

Teorema 2.1. Sea $f(t)$ una función positiva y (*) diferenciable en t por tanto es diferenciable en sentido clásico, y la relación entre las derivadas está dada por

$$\ln(f^*(t)) = \frac{d}{\mathrm{dt}} \ln(f(t)) \quad , con\ f(t) \in \mathbb{R}_+ . \tag{2}$$

Teorema 2.2. Sea $f(t)$ una función positiva. Si $f(t)$ es n-veces (*) diferenciable entonces la n-esíma derivada multiplicativa se expresa como

$$f^{*(n)}(t) = e^{\frac{d^{(n)}(\ln(\mathrm{f(t)}))}{dt^n}} \quad , con\ f(t) \in \mathbb{R}_+ . \tag{3}$$

2.2. Propiedades de la Derivada.

Sea $f(t)$ y $g(t)$ funciones positivas, y $(*)$, $(')$¨los operadores correspondientes de la derivada multiplicativa y newtoniana.

$a)$ $(cf)^*(t) = f^*(t) \quad con\ c \in \mathbb{R}$

$b)$ $(fg)^*(t) = f^*(t)g^*(t)$

$c)$ $\left(\frac{f}{g}\right)^* (t) = \frac{f^*(t)}{g^*(t)}$

$d)$ $(f \circ g)^*(t) = f^*(h(t))^{h'(t)}$

$e)$ $(f+g)^*(t) = (f^*(t))^{\frac{f(t)}{f(t)+g(t)}} (g^*(t))^{\frac{g(t)}{f(t)+g(t)}}$

$f)$ $(f^g)^*(t) = f^*(t)^{g(t)} f(t)^{g'(t)}$.

Definición 2.2. Serie de Taylor Multiplicativa

Considere una función positiva $f(t)$ (*) diferenciable hasta de orden $n+1$.Para algún ζ entre t y a, la serie de Taylor multiplicativa se define como

$$f(t) = \prod_{k=0}^{n} f^{(*k)}(a)^{\frac{(t-a)^k}{k!}} . f^{(*(n+1))}(\zeta)^{\frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}} . \tag{4}$$

2.3 Integral Multiplicativa.

Definición 2.3.

La integral de Riemman multiplicativa de una función $f(t)$ positiva y acotada $[a \;\; b]$, con $-\infty < a < b < \infty$ donde $P = \{t_{0,} \dots., t_n\}$ es una partición de $I = [a \;\; b]$ se define como

$$S(f, P) = \prod_{i=0}^{n} f(\zeta_i)^{(t_i - t_{i-1})} \quad . \tag{5}$$

Teorema 2.3

La integral multiplicativa de una función positiva $f(t)$ y continua en el intervalo I esta dada por

$$\int f(t)^{dt} = e^{\int \ln(f(t))dt} \tag{6}$$

Teorema 2.4. Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

Sea una función positiva $f(t): [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, que es (*) integrable, (*) diferenciable y $f^*(t)$ su derivada multiplicativa.Entonces

$$\int_a^b f^*(t)^{dt} = \frac{f(b)}{f(a)} \; . \tag{7}$$

2.4. Propiedades de la Integral

a) $\int_a^b (f(t)^p)^{dt} = \left(\int_a^b f(t)^{dt}\right)^p$

$b)$ $\int_a^b (f(t)g(t))^{dx} = \int_a^b f(t)^{dt} . \int_a^b g(t)^{dt}$

$c)$ $\int_a^b \left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)^{dt} = \frac{\int_a^b f(t)^{dt}}{\int_a^b g(t)^{dt}}$

$d)$ $\int_a^b f(t)^{dt} = \int_a^c f(t)^{dt} . \int_c^b f(t)^{dt} \qquad , con \;\; f(t) \; y \;\; g(t) \;\; (*) \;\; integrables \; en \; [a, b]$

$e)$ $\int_a^a f(t)^{dt} = 1$.

3. Transformada de Laplace Multiplicativa

En esta sección se enuncian los elementos y propiedades más importantes de la transformada de Laplace propuesta por Yalcin [32].Se puede ver como la mayoría de propiedades de la transformada de Laplace multiplicativa son análogas a las propiedades de la transformada de Laplace clásica y por tanto permiten la solución de las ecuaciones diferenciales multiplicativas.

Definición 3.1 Transformada de Laplace Multiplicativa

Sea $f(t)$ una función positiva en el intervalo $[0,\infty)$. La transformada de Laplace Multiplicativa se define como:

$$\mathcal{L}_m\{f(t)\} = \int_0^\infty \left(f(t)^{e^{-st}}\right)^{dt}. \tag{8}$$

Teorema 3.1. Existencia de la Transformada de Laplace Multiplicativa.

Considere $f(t)$ una función positiva de orden α doblemente exponencial , con $|f(t)| \leq ke^{e^{\alpha t}}$ para $t > t_0$,dada en un intervalo $[0,\infty)$; y sea $\ln(f(t))$ una función continua definida a trozos en el intervalo $[0,\infty)$.Entonces $\mathcal{L}_m\{f(t)\}$ existe si $s > \alpha$.

Teorema 3.2.

Si $f(t)$ es una función positiva en $[a,b]$. entonces

$$\mathcal{L}_m\{f(t)\} = e^{\int_0^\infty e^{-st}\ln(f(t))dt} = e^{\mathcal{L}\{\ln(f(t))\}}. \tag{9}$$

3.2 Propiedades de la Transformada de Laplace Multiplicativa

Considere $f(t)$, $g(t)$ funciones positivas y a ,$b \in \mathbb{R}$.

a) Linealidad

$$\mathcal{L}_m\{f(t)^a g(t)^b\} = \mathcal{L}_m\{f(t)\}^a.\mathcal{L}_m\{g(t)\}^b$$

b) Desplazamiento en la Frecuencia

$$\mathcal{L}_m\left\{f(t)^{e^{at}}\right\} = F_m(s-a)$$

c) Desplazamiento en el Tiempo

Sea $\mathcal{L}_m\{f(t)\} = F_m(s)$ y $g(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ f(t-a), & t > a \end{cases}$. Entonces $\mathcal{L}_m\{g(t)\} = F_m(s)^{e^{-as}}$.

d) Escala.

Sea $\mathcal{L}_m\{f(t)\} = F_m(s)$ .Entonces $\mathcal{L}_m\{f(at)\} = F_m\left(\frac{s}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$.

e) Derivada de Transformada

Sea $\mathcal{L}_m\{f(t)\} = F_m(s)$. Entonces $\mathcal{L}_m\left\{f(t)^{t^n}\right\} = (F^{*(n)}(s))^{(-1)^n}$

f) Transformada de la Convolución

Sea $\mathcal{L}_m\{f(t)\} = F_m(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ .Entonces $\mathcal{L}_m\left\{\int_0^t f(x)^{g(t-x)dx}\right\} = F_m(s)^{G(s)}$

g) Transformada de Laplace de una Derivada

Sea $f(t)$ una función de orden α doblemente exponencial definida en el intervalo de $[0,T]$, y sea $f^*(t)$ la derivada multiplicativa de $f(t)$ una función continua a trozos definida en el intervalo de $[0,T]$.Entonces

$$\mathcal{L}_m\{f^*(t)\} = \frac{F_m(s)^s}{f(0)} \text{ , para } s > \alpha \text{ .}$$

Si $f(t)$ es $(*)$ n veces diferenciable y continúa a trozos. Entonces la transformad de Laplace multiplicativa de la derivada n-esíma multiplicativa de $f(t)$ es

$$\mathcal{L}_m\{f^{*(n)}(t)\} = \frac{F_m(s)^{s^n}}{f(0)^{s^{n-1}} f^*(0)^{s^{n-2}} f^{**}(0)^{s^{n-3}} \dots f(0)^{*(n-1)}} \quad , \qquad s > \alpha \text{ .}$$

4. Transformada Z Multiplicativa.

En esta sección se propone una nueva transformada que se denominara transformada Z multiplicativa determinada a partir de la transformada de Laplace multiplicativa. La transformada Z multiplicativa será aplicada a funciones positivas de tiempo discreto o de señales que han sido discretizadas. Se mostrara de forma detallada las definiciones y teoremas más importantes con sus respectivas demostraciones, que serán claves en el desarrollo de este trabajo. Se podrá ver la relación que hay entre la transformada Z multiplicativa con sus propiedades y la transformada Z clásica. Por último se propone la transformada Z inversa multiplicativa que más adelante será imprescindible junto con la transformada Z multiplicativa en la soluciones de ecuaciones en diferencias lineales multiplicativas.

En los trabajos de W. Hurewicz, W.K. Linvill y J.R. Ragazzini se puede ver que la señal discretizada $f_d(t)$ es una modulación de amplitud de pulso porque se representa como el producto de una señal continua $f(t)$ por una señal tren de impulsos $\delta_T = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - nT)$ siendo T el periodo de muestreo finito, tal como se muestra en la definición 4.1 [33]–[35].Es importante notar que en el proceso de muestreo de las señales que son tomadas del mundo real, las muestras se adquieren en tiempos positivos, es decir con $n \geq 0$. Por tal razón este trabajo de investigación se enfoca en el estudio detallado de la transformada Z multiplicativa para señales discretizadas en tiempos positivos, que en la transformada Z clásica haciendo la analogía se llamaría transformada Z multiplicativa unilateral.

Definición 4.1 Una función discretizada $f_d(t)$ con periodo de muestreo finito T y con tiempo discreto $n \in \mathbb{Z}$, se define como el producto de la función $f(t)$ por una señal tren de impulsos de la siguiente manera

$$f_d(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT). \text{ .} \qquad \textbf{(10)}$$

Definición 4.2. Una función positiva y discretizada en sentido multiplicativo $f_{*d}(t)$ con periodo de muestreo finito T y con tiempo discreto $n \in \mathbb{Z}$, se define como el producto en el sentido multiplicativo de la función positiva $f(t)$ por la función tren de impulsos de la siguiente forma

$$f_{*d}(t) = \prod_{k=0}^{\infty} f(nT)^{\delta(t-nT)} \text{ .} \qquad (11)$$

4.3 Deducción de la Transformada Z Multiplicativa.

Se aplica la transformada de Laplace multiplicativa a la ecuación (11) por tanto

$$\mathcal{L}_m\left(\prod_{n=0}^{\infty} f(nT)^{\delta(t-nT)}\right) = \int_0^{\infty}\left(\left(\prod_{n=0}^{\infty} f(nT)^{\delta(t-nT)}\right)^{e^{-st}}\right)^{dt} \qquad (12)$$

Utilizando el teorema 2.3 de la sección 2 en (12) tenemos que

$$\mathcal{L}_m\left(\prod_{n=0}^{\infty} f(nT)^{\delta(t-nT)}\right) = \mathrm{e}^{\int_0^{\infty} e^{-st}\ln\left(\prod_{n=0}^{\infty} f(nT)^{\delta(t-nT)}\right)dt} \tag{13}$$

$$\mathcal{L}_m\left(\prod_{n=0}^{\infty} f(nT)^{\delta(t-nT)}\right) = \mathrm{e}^{\int_0^{\infty} e^{-st}\sum_{n=0}^{\infty}\ln(f(nT))^{\delta(t-nT)}dt} \tag{14}$$

$$\mathcal{L}_m\left(\prod_{n=0}^{\infty} f(nT)^{\delta(t-nT)}\right) = \mathrm{e}^{\int_0^{\infty} e^{-st}\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)\ln(f(nT))} \tag{15}$$

$$\mathcal{L}_m\left(\prod_{n=0}^{\infty} f(nT)^{\delta(t-nT)}\right) = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\infty}\ln(f(nT))\int_0^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt} \tag{16}$$

$$\mathcal{L}_m\left(\prod_{n=0}^{\infty} f(nT)^{\delta(t-nT)}\right) = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\infty}\ln(f(nT))e^{-nsT}} \tag{17}$$

En la ecuación (17) sea $z = e^{sT}$, entonces la transformada de Laplace de la función $f_{*d}(t)$ se define como una nueva transformada para funciones positivas de tiempo discreto n y se llamara transformada Z multiplicativa con el operador (Z_m): y su transformada Z multiplicativa será la función $F_m(z)$ con dominio en z

$$Z_m(f(nT) = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\infty}\ln(f(nT))z^{-n}} \tag{18}$$

$$Z_m(f(nT)) = F_m(z) \tag{19}$$

De (18) se observa que el exponente del lado derecho corresponde a la transformada zeta clásica de la función $\ln f(nT)$, por tanto se deduce una relación entre la transformada Z multiplicativa y la transformada Z clásica. Si se asume un periodo normalizado $T = 1$ entonces la ecuación (18) queda de la siguiente manera

$$Z_m(f(n) = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\infty}\ln(f(n))z^{-n}}. \tag{20}$$

Definición 4.3. Si $f(n)$ es una función positiva entonces la transformada Z multiplicativa se define como la función exponencial de la transformada Z clásica de $\ln(f(n))$ para algún $|z| \geq a$.

$$Z_m(f(n) = \mathrm{e}^{Z(\ln(f(n)))} = F_m(z) \tag{21}$$

Observe que si se aplica la propiedad de la suma de logaritmos, entonces la transformada Z multiplicativa se define como un productorio de potencias de la forma;

$$Z_m(f(n) = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\infty}\ln(f(n)^{z^{-n}}} \tag{22}$$

$$Z_m(f(n) = \mathrm{e}^{\ln\prod_{n=0}^{\infty} f(n)^{z^{-n}}} \tag{23}$$

$$Z_m(f(n) = \prod_{n=0}^{\infty} f(n)^{z^{-n}}. \tag{24}$$

Definición 4.4. Sea $f(n)$ una función positiva y de orden a doble exponencial, y $a > 1$.La transformada Z multiplicativa para algún $|z| \geq a$ se define como

$$Z_m(f(n)) = \prod_{n=0}^{\infty} f(n)^{z^{-n}} . \tag{25}$$

Definición 4.5. Sea $f(n)$ una función positiva en el intervalo $[0\ \infty)$ y sea la función ln(f(n)) dada en el intervalo $[0\ \infty)$.Existen constantes positivas $a > 1$, $k > 1$ y n_0 tal que

$$|f(n)| \leq k a^{a^n} \quad \forall\ n > n_0 . \tag{26}$$

Por tanto la función $f(n)$ se define de orden a doble exponencial.

Proposición 4. Existencia de la Transformada Z Multiplicativa

Sea $f(n)$ una función positiva en el intervalo $[0\ \infty)$ y de orden a doble exponencial, y sea la función $\ln(f(n))$ continua en el intervalo $[0\ \infty)$.Entonces $F_m(z)$ existe si $|z| > a$.

Demostración.

Si la serie $|\sum_{n=0}^{\infty} \ln(f(n)) z^{-n}| < \infty$, con $|z| > a$ entonces $F_m(z)$ converge. Luego se demostraría la convergencia de la serie.

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \ln(f(n)) z^{-n}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\ln(f(n))|}{|z^n|} \tag{27}$$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \ln(f(n)) z^{-n}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\ln(k a^{a^n})|}{|z|^n} \tag{28}$$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \ln(f(n)) z^{-n}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(k) + \ln(a^{a^n})}{|z|^n} \tag{29}$$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \ln(f(n)) z^{-n}\right| \leq \ln(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|z|^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(a^{a^n})}{|z|^n} \tag{30}$$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \ln(f(n)) z^{-n}\right| \leq \ln(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|z|^n} + \ln(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{|z|^n} \tag{31}$$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \ln(f(n)) z^{-n}\right| \leq \ln(k) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|z|}\right)^n + \ln(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{|z|}\right)^n \tag{32}$$

Se puede ver que si $|z| > a$ entonces las dos series geométricas del lado derecho son convergentes.

$$|\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \ln(f(n)) z^{-n}| \leq \ln(k) \left(\frac{|z|}{|z|-1}\right) + \ln(a) \left(\frac{|z|}{|z|-a}\right) < \infty \ si\ |z| > a \tag{33}$$

Si $e^{\sum_{n=0}^{\propto} \ln(f(nT)) z^{-n}} < \infty$ entonces $F_m(z)$ existe si y solo si $|z| > a$.

Proposición 4.1. Transformada Inversa Z Multiplicativa

Sea (Z_m^{-1}) el operador de la transformada inversa Z multiplicativa y (Z^{-1}) el operador de la transformada inversa Z clásica. Si $F_m(z)$ existe entonces la transformada Z inversa multiplicativa se representa como

$$Z_m^{-1}(F_m(z)) = \mathrm{e}^{Z^{-1}(\ln(F_m(z)))} \, . \quad (34)$$

Demostración.

Si se toma la definición 4.3 en (34) , se tiene que;

$$F_m(z) = \mathrm{e}^{Z(\ln(f(n)))} \quad (35)$$

$$\ln\big(F_m(z)\big) = Z(\ln(f(n))) \quad (36)$$

$$Z^{-1}(\ln\big(F_m(z)\big)) = Z^{-1}(Z(\ln(f(n))) \quad (37)$$

$$Z^{-1}(\ln\big(F_m(z)\big)) = \ln(f(n)) \quad (38)$$

$$f(n) = \mathrm{e}^{Z^{-1}(\ln\left(F_m(z)\right)} \quad (39)$$

$$Z_m^{-1}(F_m(z)) = \mathrm{e}^{Z^{-1}(\ln(F_m(z)))} \, . \quad (40)$$

Proposición 4.2. Linealidad.

Sea $f(n)$ y $g(n)$ funciones positivas con a ,$b \in \mathbb{R}$ y sus correspondientes transformadas Z multiplicativas $F_m(z)$ y $G_m(z)$. Entonces

$$Z_m(f(n)^a g(n)^b) = F_m(z)^a G_m(z)^b \, . \quad (41)$$

Demostración.

Si se aplica la definición 4.3 a la ecuación (41) se tiene que;

$$Z_m(f(n)^a g(n)^b) = \mathrm{e}^{Z(\ln f(n)^a g(n)^b)} \quad (42)$$

$$Z_m(f(n)^a g(n)^b) = \mathrm{e}^{Z(\ln f(n)^a + \ln g(n)^b)} \quad (43)$$

$$Z_m(f(n)^a g(n)^b) = \mathrm{e}^{Z(a \ln f(n) + \mathrm{b} \ln g(n))} \quad (44)$$

$$Z_m(f(n)^a g(n)^b) = \mathrm{e}^{aZ(\ln f(n)) + \mathrm{b}Z(\ln g(n))} \quad (45)$$

$$Z_m(f(n)^a g(n)^b) = \mathrm{e}^{aZ(\ln f(n))}\mathrm{e}^{bZ(\ln g(n))} \quad (46)$$

$$Z_m(f(n)^a g(n)^b) = e^{Z(\ln f(n))^a} e^{Z(\ln g(n))^b} \tag{47}$$

$$Z_m(f(n)^a g(n)^b) = F_m(z)^a G_m(z)^b \, . \tag{48}$$

Proposición 4.3. Desplazamiento en el tiempo a la derecha.

Sea $f(n)$ una función positiva y $F_m(z)$ la transformada Z multiplicativa correspondiente. Entonces

$$Z_m\big(f(n-1)\big) = f(-1)(F_m(z))^{z^{-1}} \, . \tag{49}$$

Demostración.

Si se considera la definición 4.3 en el lado izquierdo de (49) se tiene que;

$$Z_m(f(n-1)) = e^{\sum_{n=0}^{\infty} \ln(f(n-1))z^{-n}} \tag{50}$$

Tome $m = n - 1$, en la parte derecha de (50) , de esta forma

$$Z_m(f(n-1)) = e^{\sum_{m=-1}^{\infty} \ln(f(m))z^{-m-1}} \tag{51}$$

$$Z_m(f(n-1)) = e^{\ln(f(-1)) + \sum_{m=0}^{\infty} \ln(f(m))z^{-m-1}} \tag{52}$$

$$Z_m(f(n-1)) = e^{\ln(f(-1))} e^{z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \ln(f(m))z^{-m}} \tag{53}$$

$$Z_m\big(f(n-1)\big) = f(-1) e^{z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \ln(f(m))z^{-m}} \tag{54}$$

$$Z_m\big(f(n-1)\big) = f(-1)(e^{\sum_{m=0}^{\infty} \ln(f(m))z^{-m}})^{z^{-1}} \tag{55}$$

$$Z_m\big(f(n-1)\big) = f(-1)(F_m(z))^{z^{-1}} \, . \tag{56}$$

Proposición 4.4. Desplazamiento de k periodos a la derecha.

Sea $f(n)$ es una función positiva y su correspondiente transformada Z multiplicativa es $F_m(z)$. Si $k \in Z_+$ entonces

$$Z_m\big(f(n-k)\big) = f(-k) f(-k+1)^{z^{-1}} \dots f(-2)^{z^{-k+2}} f(-1)^{z^{-k+1}} (F_m(z))^{z^{-k}} \tag{57}$$

Demostración.

Si se toma la definición 4.3 en el lado izquierdo de (57) , se tiene que; (58)

$$Z_m\big(f(n-k)\big) = e^{\sum_{n=0}^{\infty} \ln(f(n-k))z^{-n}}.$$

Haciendo $m = n - k$ en el miembro derecho de la ecuación (58)

$$Z_m\big(f(n-k)\big) = \mathrm{e}^{\sum_{m=-k}^{\infty} \ln(f(m)) z^{-m-k}} \tag{59}$$

$$Z_m\big(f(n-k)\big) = \mathrm{e}^{\ln(f(-k)) + z^{-1}\ln(f(-k+1)) + z^{-2}\ln(f(-k+2)) + \cdots + z^{-k+1}\ln(f(-1)) + z^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}\ln(f(m))z^{-m}} \tag{60}$$

$$Z_m\big(f(n-k)\big) = \mathrm{e}^{\ln(f(-k))}\mathrm{e}^{\ln(f(-k+1))^{z^{-1}}}\mathrm{e}^{\ln(f(-k+2))^{z^{-2}}} \ldots \mathrm{e}^{\ln(f(-1))^{z^{-k+1}}}\left(\mathrm{e}^{\sum_{m=0}^{\infty}\ln(f(m))z^{-m}}\right)^{z^{-k}} \tag{61}$$

$$Z_m\big(f(n-k)\big) = f(-k)f(-k+1)^{z^{-1}}f(-k+2)^{z^{-2}} \ldots f(-2)^{z^{-k+2}}f(-1)^{z^{-k+1}}(F_m(z))^{z^{-k}} \tag{62}$$

Proposición 4.5. Desplazamiento en el tiempo k periodos a la izquierda.

Sea $f(n)$ es una función positiva y su correspondiente transformada Z multiplicativa es $F_m(z)$. Si $k \in Z_+$ entonces

$$Z_m\big(f(n+k)\big) = \frac{F_m(z)^{z^k}}{f(0)^{z^k}f(1)^{z^{k-1}}f(2)^{z^{k-2}}f(3)^{z^{k-3}} \ldots f(k-2)^{z^2}f(k-1)^{z}} \quad . \tag{63}$$

Demostración.

Si se toma la definición 4.3 en el lado izquierdo de (63) se tiene que;

$$Z_m\big(f(n+k)\big) = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\infty}\ln(f(n+k))z^{-n}} \tag{64}$$

Haciendo $m = n + k$ en el miembro derecho de la ecuación (68)

$$Z_m\big(f(n+k)\big) = \mathrm{e}^{\sum_{m=k}^{\infty}\ln(f(m))z^{-m+k}} \tag{65}$$

$$Z_m\big(f(n+k)\big) = \mathrm{e}^{z^k\sum_{m=k}^{\infty}\ln f((m))z^{-m}} \tag{66}$$

Si se suman y restan términos al exponente del lado derecho de la ecuación (66) para dejar la serie en términos de la transformada Z clásica del logaritmo natural de la función $f(x)$ se tiene que

$$Z_m\big(f(n+k)\big) = \mathrm{e}^{-z^k\left(z^{-0}\ln(f(0)) + z^{-1}\ln(f(1)) + z^{-2}\ln(f(2)) + \cdots + z^{-(k-1)}\ln(f(k-1))\right) + z^k\sum_{m=0}^{\propto}\ln(f(m))z^{-m}} \tag{67}$$

$$Z_m\big(f(n+k)\big) = \frac{z^k\mathrm{e}^{\sum_{m=0}^{\infty}\ln(f(m))z^{-m}}}{\mathrm{e}^{z^k\ln(f(0))}\mathrm{e}^{z^{k-1}\ln(f(1))}\mathrm{e}^{z^{k-2}\ln(f(2))} \ldots \mathrm{e}^{z^2\ln(f(k-2))}\mathrm{e}^{z\ln(f(k-1))}} \quad . \tag{68}$$

Al realizar las propiedades de los logaritmos en (68) se obtiene

$$Z_m\big(f(n+k)\big) = \frac{\left(\mathrm{e}^{\sum_{m=0}^{\infty}\ln(f(m))z^{-m}}\right)^{z^k}}{f(0)^{z^k}f(1)^{z^{k-1}}f(2)^{z^{k-2}}f(3)^{z^{k-3}} \ldots f(k-2)^{z^2}f(k-1)^{z}} \tag{69}$$

Luego la transformada Z multiplicativa del desplazamiento de k unidades en el tiempo a la izquierda se determina como

$$Z_m\big(f(n+k)\big) = \frac{F_m(z)^{z^k}}{f(0)^{z^k} f(1)^{z^{k-1}} f(2)^{z^{k-2}} f(3)^{z^{k-3}} \ldots f(k-2)^{z^2} f(k-1)^{z}} \quad . \tag{70}$$

Proposición 4.6. La Derivada de Transformada Zeta Multiplicativa

Sea $f(n)$ una función positiva y su correspondiente transformada Z multiplicativa $F_m(z)$.Si la transformada Z multiplicativa $F_m(z)$ es (*) diferenciable entonces

$$(\frac{d^*}{dz}(F_m(z)))^{-z} = Z_m(f(n)^n) \ . \tag{71}$$

Demostración.

Se realiza la derivada newtoniana de la transformada Z clásica de la función $\ln(f(n))$ y luego en (74) se aplica la derivada multiplicativa de $Z_m\big(f(n)\big)$ de la siguiente manera;

$$\frac{d}{dz}(Z(\ln f(n))) = -z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} n \ln(f(n))\, z^{-n} \tag{72}$$

$$\frac{d}{dz}(Z(\ln f(n))) = -z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \ln(f(n)^n) z^{-n} \tag{73}$$

$$\frac{d^*}{dz}\Big(Z_m\big(f(n)\big)\Big) = \mathrm{e}^{\left(\mathrm{e}^{Z(\ln(f(n)))}\frac{\frac{d}{dz}(Z(\ln(f(n))))}{\mathrm{e}^{Z(\ln(f(n)))}}\right)} \tag{74}$$

$$\frac{d^*}{dz}\Big(Z_m\big(f(n)\big)\Big) = \mathrm{e}^{\frac{d}{dz}(Z(\ln(f(n))))} \tag{75}$$

$$\frac{d^*}{dz}\Big(Z_m\big(f(n)\big)\Big) = \mathrm{e}^{-z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\ln(f(n)^n)z^{-n}} \tag{76}$$

$$\frac{d^*}{dz}\Big(Z_m\big(f(n)\big)\Big) = (\mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\infty}\ln(f(n)^n)z^{-n}})^{-z^{-1}} \tag{77}$$

$$\frac{d^*}{dz}\Big(Z_m\big(f(n)\big)\Big) = (Z_m((f(n))^n))^{-z^{-1}} \tag{78}$$

$$(\frac{d^*}{dz}(F_m(z)))^{-z} = Z_m(f(n)^n) \quad . \tag{79}$$

Proposición 4.7. Transformada Zeta Multiplicativa para la Convolución.

Considere $f(n)$ y $g(n)$ funciones positivas, y $f(n) * g(n)$ la convolución en sentido multiplicativo. Si $F_m(z)$ y $G_m(z)$ son las transformadas Z multiplicativas correspondientes y $G(z)$ la transformada Z clásica de $g(n)$. Entonces

$$Z_m((f(n) * g(n)) = (F_m(z))^{G(z)} \,. \tag{80}$$

Demostración.

Se aplica la transformada Z multiplicativa al lado izquierdo de la ecuación (80) de la siguiente forma;

$$Z_m(f(n) * g(n)) = Z_m\left(\prod_{k=0}^{\infty} f(k)^{g(n-k}\right) \tag{81}$$

$$Z_m(f(n) * g(n)) = Z_m(e^{\sum_{k=0}^{\infty} \ln(f(k))^{g(n-k)}}) \tag{82}$$

$$Z_m(f(n) * g(n)) = Z_m(e^{\sum_{k=0}^{\infty} g(n-k) \ln(f(k))}) \tag{83}$$

$$Z_m(f(n) * g(n)) = \mathrm{e}^{Z(\ln e^{\sum_{k=0}^{\infty} g(n-k) \ln(f(k))})} \tag{84}$$

$$Z_m((f(n) * g(n)) = \mathrm{e}^{Z(\sum_{k=0}^{\infty} g(n-k) \ln(f(k)))}. \tag{85}$$

Si se aplica la propiedad de la transformada Z clásica de la convolución en (85) se tiene que;

$$Z_m((f(n) * g(n)) = \mathrm{e}^{Z(g(n))Z(\ln(f(n)))} \tag{86}$$

$$Z_m((f(n) * g(n)) = (\mathrm{e}^{Z(\ln(f(n)))})^{Z(g(n))} \tag{87}$$

$$Z_m\big((f(n) * g(n)\big) = \big(F_m(z)\big)^{G(z)} \,. \tag{88}$$

Proposición 4.8. Escalamiento en tiempo

Sea $\alpha \neq 0$ y $f(n)$ una función positiva. Si $F_m(z)$ es la transformada Z multiplicativa de $f(n)$ entonces

$$Z_m\big(f(\alpha n)\big) = F_m\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right) . \tag{89}$$

Demostración.

Si se toma la definición 4.3 en el lado izquierdo de (89) se tiene que;

$$Z_m\big(f(\alpha n)\big) = \mathrm{e}^{Z(\ln(f(\alpha n)))} \tag{90}$$

$$Z_m\big(f(\alpha n)\big) = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\propto} \ln(f(\alpha n)) z^{-n}} \tag{91}$$

Sea $m = \alpha n$, por tanto

$$Z_m\big(f(\alpha n)\big) = \mathrm{e}^{\sum_{m=0}^{\infty} \ln(f(m)) z^{-\frac{m}{\alpha}}} \tag{92}$$

$$Z_m\big(f(\alpha n)\big) = \mathrm{e}^{\sum_{m=0}^{\infty} \ln(f(m)) \left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-m}} \tag{93}$$

$$Z_m\big(f(\alpha n)\big) = F_m\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right) \tag{94}$$

Proposición 4.9. Escalamiento en Frecuencia.

Sea $\alpha \neq 0$ y $f(n)$ función positiva. Si $F_m(z)$ es la transformada Z multiplicativa de $f(n)$ entonces

$$Z_m\big(f(n)^{\alpha^n}\big) = F_m(\alpha^{-1}z) \ . \tag{95}$$

Demostración.

Si se toma la definición 4.3 en el lado izquierdo de (95) se tiene que;

$$Z_m\big(f(n)^{\alpha^n}\big) = \mathrm{e}^{Z(\ln(f(n)^{\alpha^n}))} \tag{96}$$

$$Z_m\big(f(n)^{\alpha^n}\big) = \mathrm{e}^{Z(\alpha^n \ln(f(n)))} \tag{97}$$

$$Z_m\big(f(n)^{\alpha^n}\big) = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\propto} \alpha^n \ln(f(n)) z^{-n}} \tag{98}$$

$$Z_m\big(f(n)^{\alpha^n}\big) = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\propto} \ln(f(n)) (\alpha^{-1}z)^{-n}} \tag{99}$$

$$Z_m\big(f(n)^{\alpha^n}\big) = F_m(\alpha^{-1}z) \ . \tag{100}$$

Proposición 4.10. Valor Inicial.

Considere $f(n)$ una función positiva y su transformada Z multiplicativa $F_m(z)$. Entonces

$$\lim_{z\to\infty} F_m(z) = f(0) \ . \tag{101}$$

Demostración.

Aplicando la definición 4.3 en (101) se tiene que

$$\lim_{z\to\infty} F_m(z) = \lim_{z\to\infty} \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\infty} \ln(f(n))z^{-n}} \ . \tag{102}$$

$$\lim_{z\to\infty} F_m(z) = \lim_{z\to\infty} \mathrm{e}^{\ln(f(0)+\sum_{n=1}^{\infty} \ln(f(n))z^{-n}} \tag{103}$$

$$\lim_{z\to\infty} F_m(z) = \mathrm{f}(0) \lim_{z\to\infty} \mathrm{e}^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln(f(n))z^{-n}} \tag{104}$$

$$\lim_{z\to\infty} F_m(z) = \mathrm{f}(0)\ \mathrm{e}^{\lim_{z\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ln(f(n))z^{-n}} \tag{105}$$

En el exponente del lado derecho de (105) se puede notar que el límite de cada término de la serie es cero, por tanto

$$\lim_{z\to\infty} F_m(z) = f(0)\ \mathrm{e}^{0} \ . \tag{106}$$

$$\lim_{z\to\infty} F_m(z) = f(0) \ . \tag{107}$$

Proposición 4.11. Valor Final.

Considere $f(n)$ una función positiva con $f(-1) = 1$, y su transformada Z multiplicativa correspondiente $F_m(z)$. Entonces

$$\lim_{z\to 1} F_m(z)^{1-z^{-1}} = f(\infty) \ . \tag{108}$$

Demostración.

Considere

$$.\frac{F_m(z)}{f(-1)F_m(z)^{z^{-1}}} = Z_m\left(\frac{f(n)}{f(n-1)}\right) \tag{109}$$

$$F_m(z)^{1-z^{-1}} = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{f(n)}{f(n-1)}\right)z^{-n}} \tag{110}$$

$$F_m(z)^{1-z^{-1}} = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\infty} (\ln(f(n))-\ln(f(n-1)))z^{-n}} \tag{111}$$

Aplicando limite en ambos lados de (111) cuando $z \to 1$ se tiene que

$$\lim_{z\to 1} F_m(z)^{1-z^{-1}} = \mathrm{e}^{\lim_{z\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} (\ln(f(n))-\ln(f(n-1)))z^{-n}} \ . \tag{112}$$

$$\lim_{z\to 1} F_m(z)^{1-z^{-1}} = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\infty} (\ln(f(n))-\ln(f(n-1)))} \tag{113}$$

Cabe notar que el exponente del lado derecho de (113) es una serie telescópica. Si se expande la serie telescópica todos sus términos se cancelan a excepción de $f(\infty)$ de la siguiente manera

$$\lim_{z\to 1} F_m(z)^{1-z^{-1}} = \mathrm{e}^{\ln(f(\infty))} \tag{114}$$

$$\lim_{z\to 1} F_m(z)^{1-z^{-1}} = f(\infty) \ . \tag{115}$$

En la **Tabla 1** se muestra la transformada Z multiplicativa de algunas funciones clásicas.

$f(n)$	$F_m(z)$
$e^{\delta(n)}$	e
$e^{\mu(n)}$	$e^{\frac{z}{z-1}}$
e^{b^n}	$e^{\frac{z}{z-b}}$
$e^{\frac{1}{n!}}$	$e^{e^{\frac{1}{z}}}$
e^n	$e^{\frac{z}{(z-1)^2}}$
e^{n^2}	$\frac{z(z+1)}{e^{(z+1)^3}}$
$e^{\cos(an)}$	$\frac{z(z-\cos(a))}{e^{z^2-2z\cos(a)+1}}$
$e^{\mathrm{sen}(an)}$	$\frac{z\,sen(a)}{e^{z^2-2z\cos(a)+1}}$
$e^{\cosh(an)}$	$\frac{z(z-\cosh(a))}{e^{z^2-2z\cosh(a)+1}}$
$e^{b^n}\cos(an)$	$\frac{z^2-b\cos(a)z}{e^{z^2-2b\cos(a)z+b^2}}$
$e^{b^n}\mathrm{sen}(an)$	$\frac{b\,sen(a)z}{e^{z^2-2b\cos(a)z+b^2}}$

Tabla 1. Transformada Z multiplicativa de algunas funciones clásicas.

5. Aplicaciones de la Transformada Z Multiplicativa para la solución de Ecuaciones en Diferencias Multiplicativas.

En esta sección se resolverán de forma muy eficiente algunos ejemplos de solución de ecuaciones en diferencias de la forma que se define en la ecuación (116) con transformada Z multiplicativa. En los trabajos de Khatami, Jahanshahi y Aliev se propuso un método de solución para ecuaciones de la forma que se muestra en (116) [14], [15].Además se aplica la transformada Z multiplicativa para resolver algunos modelos de tiempo discreto que son útiles en algunas ramas de la ciencia como es el modelo de Varley,Gradwell y Hasel en análisis de poblaciones de insectos, o la ecuación Lyness propuesta inicialmente por Lyness en 1942 para analizar un problema de números. Luego se resuelve un sistema acoplado de ecuaciones en diferencias lineales multiplicativas con transformada Z multiplicativa. Por último se hace una discretización de una ecuación diferencial multiplicativa de orden uno con diferencias finitas para luego resolver la ecuación en diferencias generada con transformada Z multiplicativa y así hallar la solución numérica en un tiempo menor evitando la recursividad.

Definición 5.1

Sean los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ y retardos $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{Z}$, y $f(n)$ una función positiva de orden a doble exponencial. La ecuación en diferencias finitas multiplicativa se define como;

$$y(n-r_1)^{\alpha_1}y(n-r_2)^{\alpha_2}\ldots y(n-r_m)^{\alpha_m} = f(n) \ . \qquad (116)$$

La ecuación (116) se puede linealizar aplicando la función logaritmo y luego se aplica la transformada Z clásica. Pero también se puede resolver sin necesidad de linealizarla aplicando directamente la transformada Z multiplicativa por medio de las proposiciones 4.4 y 4.5 de la sección 4.

Ejemplo 5.1. Considere la ecuación en diferencias

$$\frac{x(n-2)x(n-1)}{x(n)} = 1 \quad \text{con } x(-1) = 1 \;, \quad \text{y} \quad x(-2) = 3 \tag{117}$$

Se aplica las proposiciones 4.2, 4.3 y 4.4 a la ecuación en diferencias (117) relacionadas con desplazamientos en el tiempo a la derecha.

$$\frac{Z_m(x(n-2))Z_m(x(n-1))}{Z_m(x(n))} = Z_m(1) \tag{118}$$

$$\frac{x(-2)x(-1)^{z^{-1}}X_m(z)^{z^{-2}}x(-1)X_m(z)^{z^{-1}}}{X_m(z)} = 1 \tag{119}$$

$$\frac{X_m(z)^{z^{-2}+z^{-1}}}{X_m(z)} = \frac{1}{3} \tag{120}$$

$$X_m(z)^{z^{-2}+z^{-1}-1} = \frac{1}{3} \tag{121}$$

$$X_m(z) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{z^{-2}+z^{-1}-1}} \tag{122}$$

$$X_m(z) = e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{z^{-2}+z^{-1}-1}\right)}} \tag{123}$$

$$X_m(z) = e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{z^{-2}+z^{-1}-1}\right)} \tag{124}$$

$$y(n) = Z_m^{-1}(X_m(z)) \tag{125}$$

$$Z_m^{-1}\big(X_m(z)\big) = e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)Z^{-1}\left(\frac{1}{z^{-2}+z^{-1}-1}\right)} \tag{126}$$

$$Z_m^{-1}\big(X_m(z)\big) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\left((1-\sqrt{5})^{n+1}-(1+\sqrt{5})^{n+1}\right)}{(2^{n+1})\sqrt{5}}} \tag{127}$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2^{-n-1}\left((1-\sqrt{5})^{n+1}-(1+\sqrt{5})^{n+1}\right)}{\sqrt{5}}} \;, \qquad \forall\, n \geq 0 \tag{128}$$

Se observa que en (128) el exponente del lado derecho corresponde con la función generadora $F(n+1)$ de la secuencia de Fibonacci en $n+1$ de la siguiente manera

$$x(n) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{F(n+1)} \qquad , \forall\, n \geq 0 \;. \tag{129}$$

Ejemplo 5.2. Considere la ecuación en diferencias con problema de valor inicial.

$$\frac{y(n)^2 y(n-2)}{y(n-1)} = 3 \quad , \text{con} \quad y(-1) = 1\,, \quad y(-2) = 3 \tag{130}$$

Se aplica las proposiciones 4.2 y 4.4 a la ecuación en diferencias (130).

$$\frac{Z_m(y(n)^2)Z_m(y(n-2))}{Z_m(y(n-1))} = Z_m(3) \tag{131}$$

$$\frac{y(-2)y(-1)^{z^{-1}}Y_m(z)^{z^{-2}}Y_m(z)^2}{y(-1)Y_m(z)^{z^{-1}}} = 3^{\frac{z}{z-1}} \tag{132}$$

$$\frac{3Y_m(z)^{z^{-2}}Y_m(z)^2}{Y_m(z)^{z^{-1}}} = 3^{\frac{z}{z-1}} \tag{133}$$

$$Y_m(z)^{z^{-2}-z^{-1}+2} = 3^{\frac{z}{z-1}-1} \tag{134}$$

$$Y_m(z)^{\frac{2z^2-z+1}{z^2}} = 3^{\frac{1}{z-1}} \tag{135}$$

$$Y_m(z) = 3^{\frac{z^2}{(z-1)(2z^2-z+1)}} \tag{136}$$

$$y(n) = Z_m^{-1}(Y_m(z)) \tag{137}$$

$$y(n) = e^{\ln(3)Z^{-1}\left(\frac{z^2}{(z-1)(2z^2-z+1)}\right)} \tag{138}$$

$$y(n) = (3)^{\frac{((-7-i\sqrt{7})\left(\frac{1}{4}+\frac{i\sqrt{7}}{4}\right)^n+i(\sqrt{7}+7i)\left(\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{7}}{4}\right)^n+14)}{28}}, \qquad \forall\, n \geq 0\,. \tag{139}$$

Ejemplo 5.3. La ecuación de Lyness

La ecuación de Lyness fue propuesta inicialmente en 1942 por Lyness para analizar un problema de números [36],[37]. La ecuación de Lyness de orden 2 tiene la forma

$$x(n+1) = \frac{\alpha + \beta x(n)}{\lambda x(n-1)} \quad . \tag{140}$$

Si $\alpha = 0$ entonces la ecuación (140) adquiere la forma de la ecuación (116) y se puede resolver con la transformada Z multiplicativa de la siguiente forma;

$$x(n+1) = \frac{\beta x(n)}{\lambda x(n-1)} \tag{141}$$

$$\frac{X_m(z)^z}{x(0)^z} = \frac{\beta X_m(z)}{\lambda x(-1)X_m(z)^{z^{-1}}} \tag{142}$$

$$\frac{X_m(z)^z X_m(z)^{z^{-1}}}{X_m(z)} = \frac{\beta x(0)^z}{\lambda x(-1)} \tag{143}$$

$$X_m(z)^{\frac{z^2-z+1}{z}} = \left(\frac{\beta}{\lambda x(-1)}\right) x(0)^z \tag{144}$$

$$X_m(z) = (x(0))^{\frac{z^2}{z^2-z+1}} \left(\frac{\beta}{\lambda x(-1)}\right)^{\frac{z}{z^2-z+1}} \tag{145}$$

$$x(n) = Z_m^{-1}(X_m(z)) \tag{146}$$

$$x(n) = e^{\ln(x(0))Z^{-1}\left(\frac{z^2}{z^2-z+1}\right)}\, e^{\ln\left(\frac{\beta}{\lambda x(-1)}\right)Z^{-1}\left(\frac{z^2}{z^2-z+1}\right)} \tag{147}$$

$$x(n) = x(0)^{\frac{2sen\left(\frac{\pi(n+1)}{3}\right)}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\beta}{\lambda x(-1)}\right)^{\frac{2sen\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\sqrt{3}}} \qquad \forall\, n \geq 0. \tag{148}$$

Ejemplo 5.4. Modelo de Varley, Gradwell y Hasell

El modelo Varley Gradwell Hasell [38] [39] se representa como una ecuación en diferencias no lineal que rige el comportamiento de algunas poblaciones de insectos, y se define por la ecuación

$$y(n+1) = \frac{\lambda y(n)^{1-b}}{\alpha} \quad \text{, con } y(0) = y_0 \quad \text{y} \quad \alpha, b, \lambda > 0\ . \tag{149}$$

El parámetro λ representa la tasa reproductiva y el término $\frac{y(n)^{1-b}}{\alpha}$ es la fracción de la población que sobrevive hasta la etapa adulta.

Al aplicar la transforma Z multiplicativa podemos hallar la población de insectos $y(n)$

$$Z_m(y(n+1)) = Z_m\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) Z_m(y(n)^{1-b}) \tag{150}$$

$$\frac{Y_m(z)^z}{y(0)^z} = Y_m(z)^{1-b} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{z}{z-1}} \tag{151}$$

$$Y_m(z)^{z+b-1} = y(0)^z \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{z}{z-1}} \tag{152}$$

$$Y_m(z) = y(0)^{\left(\frac{z}{z+b-1}\right)} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{z}{(z+b-1)(z-1)}} \tag{153}$$

$$y(n) = Z_m^{-1}(Y_m(z)) \tag{154}$$

$$y(n) = y(0)^{Z^{-1}\left(\frac{z}{z+b-1}\right)} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{Z^{-1}\left(\frac{z}{(z+b-1)(z-1)}\right)} \tag{155}$$

$$y(n) = {y_0}^{(1-b)^n} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\left(\frac{1}{b}\right)(1-(1-b)^n)} \qquad \forall\, n \geq 0\ . \tag{156}$$

Ejemplo 5.5. Sistema No Lineal de Ecuaciones en Diferencias.

Cengiz Cinar en el 2004 propone analizar un modelo discreto basado en un sistema de ecuaciones en diferencias de tipo multiplicativo [40]. El sistema está dado por las siguientes ecuaciones

$$x(n+1) = \frac{1}{y(n)} \tag{157}$$

$$y(n+1) = \frac{y(n)}{x(n-1)y(n-1)} \quad , \tag{158}$$

con condiciones iniciales del sistema acoplado : $y(0),\ y(-1),\ x(0) \quad y \quad x(-1)$.

Con el uso de la transformada Z multiplicativa se resuelve el sistema de ecuaciones propuesto por Cinar.

$$Z_m\big(x(n+1)\big) = \frac{Z_m(1)}{Z_m\big(y(n)\big)} \tag{159}$$

$$Z_m\big(y(n+1)\big) = \frac{Z_m(y(n))}{Z_m(x(n-1))Z_m(y(n-1))} \tag{160}$$

$$\frac{X_m(z)^z}{x(0)^z} = \frac{1}{Y_m(z)} \tag{161}$$

$$\frac{Y_m(z)^z}{y(0)^z} = \frac{Y_m(z)}{x(-1)y(-1)Y_m(z)^{z^{-1}}X_m(z)^{z^{-1}}} \tag{162}$$

$$Y_m(z) = \frac{x(0)^z}{X_m(z)^z} \tag{163}$$

$$Y_m(z)^{z+z^{-1}-1} = \frac{y(0)^z}{x(-1)y(-1)X_m(z)^{z^{-1}}} \tag{164}$$

La variable $Y_m(z)$ de la ecuación (157) se sustituye en la ecuación (158) como se muestra a continuación

$$\frac{x(0)^{z(z+z^{-1}-1)}X_m(z)^{z^{-1}}}{X_m(z)^{z(z+z^{-1}-1)}} = \frac{y(0)^z}{x(-1)y(-1)} \tag{165}$$

$$X_m(z)^{\frac{-z^3+z^2-z+1}{z}} = \left(\frac{1}{x(-1)y(-1)}\right)\left(\frac{y(0)^z}{x(0)^{z^2-z+1}}\right) \tag{166}$$

$$X_m(z) = \left(\frac{1}{x(-1)y(-1)}\right)^{\frac{z}{-z^3+z^2-z+1}}\left(\frac{y(0)^{\frac{z^2}{-z^3+z^2-z+1}}}{x(0)^{\frac{z^3-z^2+z}{-z^3+z^2-z+1}}}\right) \tag{167}$$

$$x(n) = Z_m^{-1}(X_m(z)) \tag{168}$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{x(-1)y(-1)}\right)^{Z^{-1}\left(\frac{z}{-z^3+z^2-z+1}\right)}\left(\frac{y(0)^{Z^{-1}\left(\frac{z^2}{-z^3+z^2-z+1}\right)}}{x(0)^{Z^{-1}\left(\frac{z^3-z^2+z}{-z^3+z^2-z+1}\right)}}\right) \tag{169}$$

$$x(n) = \frac{y(0)^{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)}}{x(0)^{\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)}\left(x(-1)y(-1)\right)^{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)}} \tag{170}$$

De la ecuación (157) despejamos $y(n)$ en términos de $x(n+1)$ de la siguiente forma

$$y(n) = \frac{1}{x(n+1)} \tag{171}$$

$$y(n) = \frac{x(0)^{\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right)-1\right)}\left(x(-1)y(-1)\right)^{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right)-1\right)}}{y(0)^{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right)-1\right)}}. \tag{172}$$

Ejemplo 5.6. Solución Numérica de una Ecuación Diferencial Multiplicativa

Considere una ecuación diferencial con problema de valor inicial

$$y^{*}(t) = y(t) \qquad y(0) = e \tag{173}$$

Se desea aproximar $y(t)$ en $t = 1$ por el método de diferencias multiplicativas [41], con diversos valores de h cercanos a cero. La derivada multiplicativa de primer orden se aproxima con su correspondiente diferencia finita de un paso hacia adelante.

$$\left(\frac{y(n+1)}{y(n)}\right)^{\frac{1}{h}} = y(n) \qquad y(0) = e\,. \tag{174}$$

Al despejar $y(n+1)$ de la ecuación (174) se obtiene

$$y(n+1) = y(n)^{h+1} \qquad y(0) = e \quad . \tag{175}$$

Se resuelve la ecuación (175) con transformada Z multiplicativa de la siguiente forma

$$Z_m\big(y(n+1)\big) = Z_m\left(y(n)^{h+1}\right) \tag{176}$$

$$\frac{Y_m(z)^z}{y(0)^z} = Y_m(z)^{h+1} \tag{177}$$

$$Y_m(z) = y(0)^{\frac{z}{z-h-1}} \tag{178}$$

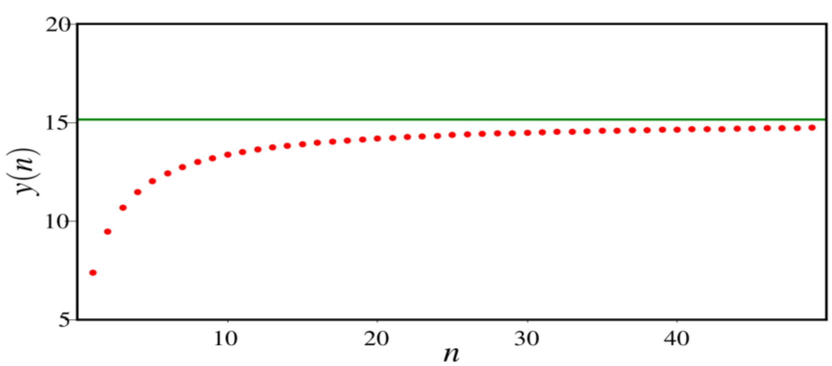
$$y(n) = Z_m^{-1}\left(y(0)^{\frac{z}{z-h-1}}\right) \tag{179}$$

$$y(n) = e^{(h+1)^n} \tag{180}$$

Se considera la relación entre el tiempo continuo y discreto dada por la expresión $h = \frac{t}{n}$ y el valor real de la ecuación (173) es $y(1) = e^e$ .Luego

$$y(n) = e^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \qquad , con \;\; n \in \mathbb{Z}_+ \;\; . \qquad 181)$$

Se puede ver en (181) que si n tiende a infinito entonces el exponente del lado derecho tiene a e por tanto $y(n)$ se acerca al valor real $y(1) = e^e$ que está representado en la gráfica 1 por una línea verde y las aproximaciones de $y(n)$ con puntos rojos.



Grafica No 1. Aproximaciones numéricas de la ecuación diferencial multiplicativa con n = 50 puntos.

Conclusiones.

En este trabajo se propuso una nueva transformada análoga a la transformada Z clásica que se denominó transformada Z multiplicativa donde el dominio de la función subyacente es tomado en tiempo discreto. Se pudo observar que esta transformada Z multiplicativa es de fácil uso en análisis de algunos modelos de tiempo discreto que son no lineales y son muy útiles en algunas temáticas de las ramas de la ciencia como es el crecimiento de poblaciones, secuencias de números y la aproximación numérica de algunas ecuaciones diferenciales no lineales del cálculo clásico.

Se evidencio como la transformada Z multiplicativa es más eficiente de forma operativa con respecto al método propuesto por Khatami, Jahanshahi y Aliev en la resolución de ecuaciones en diferencias lineales multiplicativas. También se observó que la transformada Z multiplicativa tiene un alto desempeño en la aproximación numérica puntual de una ecuación diferencial multiplicativa cuando es discretizada por diferencias finitas, evitando así la recursividad de la ecuación en diferencias y acelerando el tiempo de cálculo de la solución numérica.

Las soluciones explicitas de una ecuación en diferencias que se generan con el uso de la transformada Z multiplicativa permiten ilustrar gráficamente las soluciones exactas que posteriormente pueden ser comparadas con las soluciones numéricas generadas por la recursividad de las ecuaciones en diferencias. Por último se presenta una tabla de la transformada Z multiplicativa de algunas funciones clásicas

Referencias.

[1] M. Grossman, *Non-Newtonian calculus*. Massachusetts, 1972.

[2] M. Grossman, *The First System of Weighted Differential and Integral Calculus*. Massachusetts, 1980.

[3] M. Grossman, *Bigeometric Calculus_ A System with a Scale-Free Derivative*. Massachusetts, 1983.

[4] D. Stanley, "A Multiplicative Calculus," *Primus*, vol. 9, no. 4, pp. 310–326, 1999.

[5] A. Bashirov and M. Riza, "Complex Multiplicative Calculus," pp. 1–21, 2011.

[6] A. E. Bashirov, E. Misirli, Y. Tandoğdu, and A. Özyapici, "On modeling with multiplicative differential equations," *Appl. Math.*, vol. 26, no. 4, pp. 425–438, 2011.

[7] A. E. Bashirov, E. M. Kurpinar, and A. Özyapici, "Multiplicative calculus and its applications," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 337, no. 1, pp. 36–48, 2008.

[8] A. Bashirov, "On line and double multiplicative integrals," vol. 3, no. 1, pp. 103–107, 2013.

[9] M. Cordova-Lepe, Fernando and Pinto, "From quotient operation toward a proportional calculus," *Int. J. Math. Game Theory Algebr.*, vol. 18, no. 6, pp. 527–536, 2009.

[10] F. Córdova-lepe and F. Córdova-lepe, "The multiplicative derivative as a measure of elasticity in economics," no. October, 2006.

[11] H. Özyapıcı, İ. Dalcı, and A. Özyapıcı, "Integrating accounting and multiplicative calculus: an

effective estimation of learning curve,” *Comput. Math. Organ. Theory*, 2016.

[12] A. Ozyapici, Y. Gurefe, and E. Missirli, “Generalization of Special Functions and its Applications to Multiplicative and Ordinary Fractional Derivatives,” 2017.

[13] A. Ozyapici and B. Bilgehan, “Finite product representation via multiplicative calculus and its applications to exponential signal processing,” *Numer. Algorithms*, vol. 71, no. 2, pp. 475–489, 2016.

[14] H. Khatami, M. Jahanshahi, and N. Aliev, “An Analytical Method for Some Nonlinear Difference Equations by Discrete Multiplicative Differentiation,” *Proceedings, pp*, no. July, 2004.

[15] M. Jahanshahi, N. Aliev, and H. Khatami, “An Analytic-Numerical Method for Solving Difference Equations with Variable Coefficients by Discrete Multiplicative Integration,” *Proceedings, pp*, no. July, 2004.

[16] U. Kadak and M. Özlük, “Generalized Runge-Kutta method with respect to the non-Newtonian calculus,” *Abstr. Appl. Anal.*, vol. 2015, 2015.

[17] M. Riza and B. EminaĞA, “Bigeometric Calculus and Runge Kutta Method,” pp. 1–16, 2014.

[18] M. Riza and H. Akt??re, “The Runge-Kutta method in geometric multiplicative calculus,” *LMS J. Comput. Math.*, vol. 18, no. 1, pp. 539–554, 2015.

[19] E. Misirli and Y. Gurefe, “Multiplicative Adams Bashforth–Moulton methods,” *Numer Algor*, vol. 57, pp. 425–439, 2011.

[20] D. Aniszewska and M. Rybaczuk, “Analysis of the multiplicative Lorenz system,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 25, no. 1, pp. 79–90, 2005.

[21] D. Aniszewska and M. Rybaczuk, “Chaos in multiplicative systems,” no. June, pp. 1–8, 2015.

[22] D. Aniszewska and M. Rybaczuk, “Lyapunov type stability and Lyapunov exponent for exemplary multiplicative dynamical systems,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 54, no. 4, pp. 345–354, 2008.

[23] D. Aniszewska and M. Rybaczuk, “Multiplicative Hénon map,” vol. 480060, p. 480060, 2016.

[24] L. Florack and H. Van Assen, “Multiplicative calculus in biomedical image analysis,” *J. Math. Imaging Vis.*, vol. 42, no. 1, pp. 64–75, 2012.

[25] K. Boruah and B. Hazarika, “Application of geometric calculus in numerical analysis and difference sequence spaces,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 449, no. 2, pp. 1265–1285, 2017.

[26] K. Boruah and B. Hazarika, “Bigeometric Calculus and its applications,” pp. 1–24, 2016.

[27] O. Mathematics and H. Selvitopi, “Numerical methods for the multiplicative partial differential equations,” pp. 1344–1350, 2017.

[28] M. Waseem, M. A. Noor, F. A. Shah, and K. I. Noor, “An efficient technique to solve nonlinear equations using multiplicative calculus,” pp. 679–691, 2018.

[29] K. Boruah, B. Hazarika, and A. E. Bashirov, “Solvability of Bigeometric Differential Equations by Numerical Methods ∗,” vol. 0, no. 0, pp. 1–20, 2018.

[30] N. Yalcin and E. Celik, “Solution of multiplicative homogeneous linear differential equations with constant exponentials,” vol. 67, no. 2, pp. 58–67, 2018.

[31] N. Yalçın and E. Çelik, “The Solution of Multiplicative Non-Homogeneous Li- near Differential Equations,” no. January, 2018.

[32] N. Yalcin, E. Celik, and A. Gokdogan, “Multiplicative Laplace transform and its applications,” *Opt. - Int. J. Light Electron Opt.*, vol. 127, no. 20, pp. 9984–9995, 2016.

[33] W. Hurewicz, *Filter and Servo Systems with Pulsed Data*. New York: McGraw-Hill Book Company.,

1947.

[34] W. K. Linvill, “Sampled Data Control Systems Studies throw Comparison with Amplitude Modulation.,” *Trans.IAEE*, vol. 70, pp. 1779–1788, 1951.

[35] L. . Ragazzini, J.R ; Zadeh, “The Analysis of Sampled Data Systems,” *Trans.IAEE*, vol. 71, no. November, pp. 225–234, 1952.

[36] C. Darwen and W. T. Patula, “Properties of a Certain Lyness Equation,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 218, no. 2, pp. 458–478, 1998.

[37] M. R. S. Kulenovi, “Stability of Lyness ’ equation with period – three coefficient,” vol. 12, pp. 153–161, 2004.

[38] R. M. May, G. R. Conway, M. P. Hassell, and T. R. E. Southwood, “Time Delays, Density-Dependence and Single-Species Oscillations,” *J. Anim. Ecol.*, vol. 43, no. 3, p. 747, 1974.

[39] B. E. Society and A. Ecology, “IN SINGLE-SPECIES POPULATIONS,” vol. 44, no. 1, pp. 283–295, 1975.

[40] C. Çinar, “On the positive solutions of the difference equation system x n+1=1/yn, yn+1=yn/x n-1yn-1,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 158, no. 2, pp. 303–305, 2004.

[41] A. O. and E. M. M.Riza, “Multiplicative Finite Difference Methods,” vol. 67, no. 4, pp. 745–754, 2009.