



ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

TESIS DE MAESTRÍA:

**ESTUDIO DE LA DINÁMICA POBLACIONAL
DE *Aedes Aegypti* DESDE LA
PERSPECTIVA MATEMÁTICA CON
APLICACIÓN AL MUNICIPIO DE BELLO**

Rubén Darío Sierra García

Asesor:
Olga Lucia Quintero Montoya Dra.

MEDELLÍN
2014

Agradecimientos

A la doctora Olga Lucia Quintero Montoya, por su valiosa colaboración y la confianza que deposito en mí.

A la ingeniera matemática

Manuela Bastidas

A los profesores:

María Eugenia Puerta Yepes
José Albeiro Sánchez Cano
Sair Orieta Arboleda Sánchez

Por sus aportes y orientación.

Índice general

Agradecimientos	1
1. INTRODUCCIÓN	7
2. Marco Teórico	11
2.1. La Biología del <i>Aedes Aegypti</i>	11
2.1.1. El huevo	11
2.1.2. La larva	12
2.1.3. La pupa	12
2.1.4. Adulto	12
2.2. Modelos Poblacionales	13
2.2.1. Modelo exponencial	13
2.2.2. La Ecuación logística	15
2.2.3. Ecuación logística para un modelo discreto	17
2.2.4. Modelos dependientes del tiempo	17
2.3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	20
2.3.1. Método de aproximación de Adomian	22
2.3.2. Solución numérica	23
2.4. Diseño de Sistemas de Control	25
2.4.1. Estado	26
2.4.2. Variables de estado	26
2.4.3. Vector de estado	27
2.4.4. Espacio de estados	27
2.4.5. Ecuaciones en el espacio de estados	27
2.4.6. Controlabilidad	29
2.4.7. Observabilidad	30
3. Estado del Arte en los Modelos Poblacionales del <i>Aedes Aegypti</i>	33
3.1. Modelado con sistemas de ecuaciones diferenciales	33
3.1.1. Un modelo estocástico de la dinámica poblacional del <i>Aedes Aegypti</i> : Formulación y Aplicación a una ciudad con Clima Templado	34

3.1.2.	Seguimiento de estimación de los parámetros entomológicos del <i>Aedes aegypti</i> y modelizaciones matemáticas	39
3.1.3.	Dinámica estacional y no estacional del <i>Aedes aegypti</i> en Río de Janeiro, Brasil: Adaptación de los modelos matemáticos a los datos de la trampa	46
3.2.	Las matrices de proyección	49
3.2.1.	Dinámica poblacional del <i>Aedes aegypti</i> estructurada por etapas	51
3.2.2.	Simulación de la dinámica de poblacional del <i>Aedes aegypti</i> mediante un modelo que depende del clima	54
4.	Modelos Poblacionales del <i>Aedes Aegypti</i> para el municipio de Bello	57
4.1.	Solución Analítica	57
4.1.1.	Solución analítica del modelo estocástico de Otero para el municipio de Bello	59
4.1.2.	Solución Analítica del Modelo estacional y no estacional para el municipio de Bello	64
4.2.	Solución Numérica	68
4.2.1.	Modelo estocástico	68
4.2.2.	Modelo estacional y no estacional	72
4.3.	Estudio desde la perspectiva de los sistemas de control	76
4.3.1.	Linealización y análisis	76
4.3.2.	Forma canónica controlable	80
4.3.3.	Forma canónica observable	84
4.4.	Validación de los algoritmos	86
4.5.	Aportes	87
5.	Conclusiones	89
	Anexos	91
	Solución numérica y analítica de los modelos TCL, TSE Y TSL	91

Índice de figuras

2.1. Ciclo de vida del <i>Aedes Aegypti</i>	11
2.2. Crecimiento y decrecimiento exponencial[12]	14
2.3. Recta de fases para la ecuación logística[12]	16
2.4. Ecuación Logística[12]	16
2.5. Explosión de población[12]	18
2.6. Colapso de población[12]	19
2.7. Población periódica[12]	20
3.1. Las tasas de desarrollo de acuerdo con la Tabla 3.1 como una función de la temperatura. [10]	37
3.2. Dependencia de la población de huevos con el valor inicial. Los diferentes valores para la subpoblación de huevo se espe- tificaron de manera arbitraria en el día más frío del invierno. Las poblaciones no presentan ninguna sensibilidad observable a las condiciones iniciales cuando el próximo ciclo favorable (primavera–verano) se desarrolla. El ejemplo corresponde a la población de huevos para $BS = 50$. [10]	38
3.3. Número de crías Q_0 como función de la temperatura, con $kf = 0, 25$. El modelado asume solo un habitáculo para larvas y pupas (1) y 2 habitáculos distintos para larvas y pupas (2). [9]	45
3.4. Número de mosquitos M como función de la temperatura, con $kf = 0, 25$ y $C = 1$. El modelado asume solo un habitáculo para larvas y pupas (1) y 2 habitáculos distintos para larvas y pupas (2) [9]	45
3.5. Series de tiempo observadas y previstas del <i>Aedes aegypti</i> para los tres barrios de Río de Janeiro, de acuerdo con el modelo TCE con 6 valores de K (TCE t (k = 6)) y el modelo sinusoidal (TCE t (s)).	49
3.6. Raíces del sistema de Yussuf	54
3.7. Comparación de IAH real con la población de larvas modelado para año 2008	56
3.8. Modelo de la población de Aedes para el año 2008	56

4.1. Temperatura en el municipio de Bello para el mes de diciembre de 2012, registrado en el centro meterológico de Tulio Ospina (IDEAM)	58
4.2. Las tasas de desarrollo de acuerdo con la tabla 4.1 como función de la temperatura	59
4.3. Variación de las tasas de desarrollo en función de la temperatura diaria de Bello	59
4.4. Poblaciones de Huevos, Larvas, Pupas y Adultos, utilizando las condiciones iniciales del laboratorio de la SIU.	62
4.5. Poblaciones de Huevos, Larvas, Pupas y Adultos, utilizando las condiciones iniciales del laboratorio de la SIU y la temperatura del municipio de Bello.	64
4.6. Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo TCE (ecuación 3.13 + ecuación 3.14)	67
4.7. Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo TCL (ecuación 3.13 + ecuación 3.15)	67
4.8. Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo TSE (ecuación 3.12 + ecuación 3.14)	68
4.9. Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo estocástico y las condiciones iniciales del laboratorio.	70
4.10. Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo TCE (ecuación 3.13 + ecuación 3.14)	73
4.11. Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo TCL (ecuación 3.13 + ecuación 3.15)	75
4.12. Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo TSE (ecuación 3.12 + ecuación 3.14)	75
4.13. Lugar geométrico de las raíces del sistema	77
4.14. Estados (Modelo lineal) Simulación	79

Índice de tablas

3.1. Tipo de evento, los efectos sobre las poblaciones y las tasas de transición para el desarrollo modelo.	35
3.2. Coeficientes para el modelo enzimático de maduración	36
3.3. Coeficientes de los parámetros entomológicos para el mosquito hembra y fase acuática	40
3.4. Tiempo promedio de vida η (días) y su error σ_η (días), la tasa de mortalidad μ (días ⁻¹) y su error σ_μ (días ⁻¹) para larvas .	41
3.5. Tiempo promedio de vida η (días) y su error σ_η (días), la tasa de mortalidad μ (días ⁻¹) y su error σ_μ (días ⁻¹) para pupas	42
3.6. El calculo del tiempo de transición η (días) y su error σ_η (días), y la tasa de transición μ (días ⁻¹) y su error σ_μ (días ⁻¹) para larvas	43
3.7. El calculo del tiempo de transición η (días) y su error σ_η (días), y la tasa de transición μ (días ⁻¹) y su error σ_μ (días ⁻¹) para pupas	44
3.8. Simbolos usados en los modelos y sus valores	48
3.9. Tasas de desarrollo a 27,2 °C	52
3.10. Edad, la supervivencia diaria y el número de huevos puestos por día para cada etapa	53
4.1. Coeficientes para el modelo enzimático de maduración del municipio de Bello(Son característicos de la especie)	58
4.2. Valores de la variables en función del tiempo para la solución analítica del modelo estocástico	63
4.3. Valores de las variables en función del tiempo para la solución analítica del modelo TCE	66
4.4. Valores de las variables en función del tiempo para la solución numérica del modelo estocástico	71
4.5. Valores de las variables en función del tiempo para solución numérica del modelo TCE	74
4.6. Tasas de desarrollo a 22 °C	77
4.7. Valores para las y_i obtenidos utilizando el algoritmo desarrollado en la tesis (T) y los obtenidos en el artículo (A)	86

4.8.	Valores para las x, y obtenidos utilizando el algoritmo desarrollado en la tesis (T) y los obtenidos en el artículo (A) . . .	87
5.1.	Valores de las variables en función del tiempo para la solución analítica del modelo TCL	93
5.2.	Valores de las variables en función del tiempo para la solución numérica del modelo TCL	95
5.3.	Valores de las variables en función del tiempo para la solución analítica del modelo TSE	97
5.4.	Valores de las variables en función del tiempo para la solución numérica del modelo TSE	99
5.5.	Valores de las variables en función del tiempo para la solución analítica del modelo TSL	101
5.6.	Valores de las variables en función del tiempo para la solución numérica del modelo TSL	103

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El dengue es una enfermedad de gran impacto epidemiológico, social y económico, constituyendo un problema creciente para la salud pública mundial. Se estima que 80 millones de personas se infectan de dengue anualmente en 100 países, cerca de 550 mil enfermos necesitan hospitalización y 20.000 personas mueren como consecuencia del dengue.

El *Aedes aegypti*, es el principal vector de la enfermedad, ha logrado una rápida expansión en virtud de las condiciones favorables para su desarrollo; en las Américas está presente desde los Estados Unidos hasta la Argentina, a excepción de Canadá y Chile Continental [1].

Colombia, desde finales de 1980, es considerado un país endémico para la enfermedad debido a que cerca del 90 % del territorio nacional está infestado por el vector. Las tasas de incidencia de la enfermedad se han incrementado en los últimos años, pasando de 178 por 100.000 en 1999 a 493 por 100.000 en 2010. Desde su reemergencia en la década de los setenta, la transmisión del dengue ha presentado una amplia expansión geográfica e intensificación en el territorio Colombiano. Este fenómeno se pudo evidenciar mejor durante la última década, cuando se registró una tendencia creciente en el número de municipios que registran casos de dengue anualmente, pasando de 402 municipios con transmisión endémica en el año 1999, a 621 municipios en 2009. Durante el año 2010 se presentó la mayor epidemia de la historia de nuestro país, con un total de 157.202 casos de dengue, 221 muertes confirmadas y una letalidad de 2,26 %, teniendo un gran impacto en la salud de nuestra población[2].

Actualmente, el dengue sólo puede ser reducido por el control del mosquito ya que no hay medicamentos antivirales y la vacuna no está disponible. La principal medida de control del insecto vector consiste en la eliminación del almacenamiento de aguas abiertas para evitar que los insectos adultos se re-

produzcan. El problema con la eliminación del almacenamiento de agua en un entorno urbano es que es dependiente de la participación y la educación de la población.

Dado que el principal problema con respecto medidas de control de enfermedades transmitidas por mosquitos se relaciona con el control de la infestación de mosquitos, algunas de las principales preguntas que se plantean son ¿cuál es el tamaño de una población de mosquitos en un área en particular?, ¿cuál es la dinámica espacial y temporal de este tipo de población? lo que conduce a ¿qué se puede hacer para controlar una población semejante? Las respuestas a estas preguntas son factores determinantes en la toma de decisiones procesos para el diseño de medidas de control eficaces [3].

El ciclo de vida del mosquito se puede modelar utilizando un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden o un modelo matricial. El número de las etapas utilizadas en el ciclo de vida de mosquitos determina el número de ecuaciones diferenciales en el sistema, o la dimensión de la matriz de transición en el modelo matricial [4]. Dentro de los modelos matriciales Yusoff et. al utiliza la matriz de Leslie para describir la dinámica poblacional del *Aedes Aegytip* en Shan Alam, Malasia desarrollando primero un modelo deterministico [5]. Que posteriormente mejora y crea un modelo estocástico introduciendo un término que depende de la temperatura en la matriz de transición [6].

En investigaciones realizadas en Brasil Raquel M. Lana et. al. [7], [8], desarrolla 2 modelos para describir la dinámica poblacional del *Aedes Aegytip* en la ciudad de Rio de Janeiro, estos modelos uno lineal y el otro no lineal contienen términos que dependen de la temperatura y son parametrizados unos, utilizando valores obtenidos en investigaciones anteriores y los otros se ajustan a las condiciones de la geografía local. En este mismo país Hyun Mo Yanga et [9], elabora un modelo utilizando un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales pero esta vez los coeficientes son estimados en pruebas de laboratorio y son ajustados a temperaturas determinadas.

En Argentina Otero [10] elabora un modelo estocástico para representar la dinamica poblacional del *aedes aegytip* en una ciudad de clima templado, utilizando un sistema de 5 ecuaciones diferenciales con coeficientes que varían con la temperatura.

Este trabajo de maestria hace parte del proyecto “DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DE UN MODELO MATEMÁTICO PREDICTIVO DE OCURRENCIA DE DENGUE ” cuyo objetivo general es: Desarrollar e implementar un modelo matemático basado en variables ambientales para predecir la ocurrencia de dengue en el municipio de Bello.

El propósito de este trabajo de maestría es analizar las soluciones analíticas y numéricas de 2 modelos poblacionales utilizando para ello el método de descomposición de Adomian para la solución analítica y el método de Runge Kutta para la solución numérica. Las soluciones obtenidas serán evaluadas con las condiciones iniciales de los datos experimentales del laboratorio de la SIU y los datos de temperatura registrados en el puesto de control Tulio Ospina de Bello. Posteriormente se modelará utilizando herramientas de control.

El objetivo general es:

Estudiar la dinámica poblacional del *Aedes aegypti* desde la perspectiva matemática con aplicación al municipio de Bello.

Objetivos específicos:

1. Analizar las soluciones analíticas y numéricas de 2 de los modelos poblacionales para *Aedes aegypti* utilizando para ello el método de descomposición de Adomian para la solución analítica y el método de Runge Kutta para la solución numérica.
2. Las soluciones obtenidas serán evaluadas con las condiciones iniciales de los datos experimentales del laboratorio de la SIU y los datos de temperatura registrados en el puesto de control Tulio Ospina de Bello.
3. Posteriormente se modelará utilizando herramientas de los sistemas de control.

El logro de estos objetivos me permitirán dar respuesta a los siguientes interrogantes.

1. ¿La dinámica poblacional del vector del Dengue en el municipio de bello será modelable con los modelos ya desarrollados en la literatura?
2. ¿El análisis de los sistemas de control clásicos servirá para modelar la dinámica poblacional del vector del dengue a condiciones del municipio de bello?
3. ¿Será posible determinar en que estadio de crecimiento poblacional es más susceptible el vector del Dengue?

En el capítulo 2 se expondrá el marco teórico en el que se basa este trabajo de tesis, primero se parte de la biología del mosquito para continuar luego con los sistemas de solución analítica y numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, terminando con el estudio de los

sistemas de control en tiempo discreto. En el capítulo 3 se realiza un estudio de algunos modelos poblacionales desarrollados en el sur del continente americano y el sureste asiático, estos modelos fueron realizados utilizando sistemas de ecuaciones diferenciales y matrices de proyección, en el capítulo 4 se muestran los resultados y el análisis de la solución analítica y numérica de los modelos en la temperatura del municipio de Bello y el análisis de controlabilidad de uno de ellos, en capítulo 5 se dan las conclusiones y algunas recomendaciones para trabajos futuros.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. La Biología del *Aedes Aegypti*

El ciclo de vida de *A. aegypti* comprende el huevo, cuatro estadios larvales, un estadio de pupa y el de adulto (Fig 2.1).

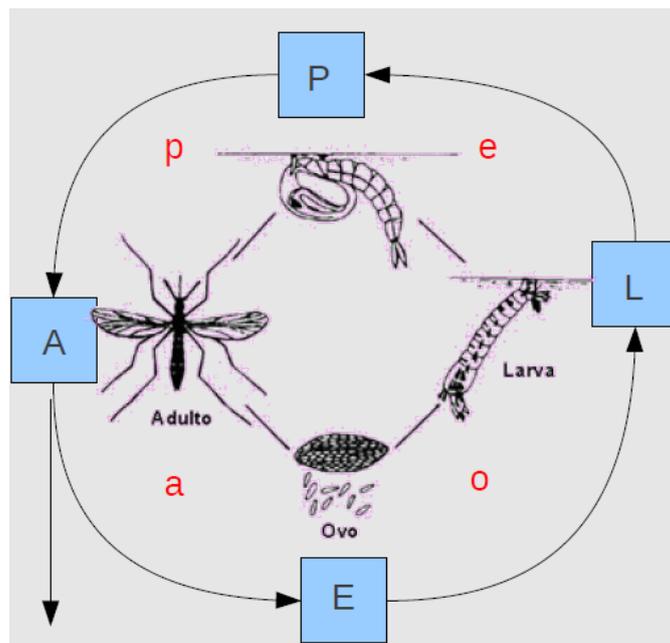


Figura 2.1: Ciclo de vida del *Aedes Aegypti*

2.1.1. El huevo

Los huevos de *A. aegypti* miden aproximadamente 1 mm de longitud; tienen forma de cigarro y son tersos. Son depositados por encima del nivel

del agua de las paredes del recipiente. Al momento de la postura son blancos, pero rápidamente cambian a negro brillante. Si el ambiente es húmedo y cálido, son fecundados en 48 h, pero puede prolongarse a cinco días si bajan las temperaturas; resisten largos períodos de desecación, hasta por un año, lo que es uno de los principales obstáculos para su control. Algunos hacen eclosión en los primeros 15 min de contacto con el agua y otros hasta que son mojados varias veces.

2.1.2. La larva

Las larvas son exclusivamente acuáticas. La fase larval es el período de alimentación y crecimiento. Las de *Aedes* se distinguen a simple vista de las de otros géneros, en la superficie del agua se mantienen casi verticales y nadan con un característico movimiento serpentino. Se identifican por dos prominentes espinas laterales del tórax y una hilera recta de siete a doce escamas del peine en el octavo segmento abdominal. La duración del desarrollo larval depende de la temperatura, la disponibilidad de alimento y la densidad de larvas en el recipiente. En condiciones óptimas, el período larval desde la eclosión hasta la fase de pupa, puede ser de cinco días, pero comúnmente es de 7 a 14 días. La mayor parte de los recipientes desechados sirven como sitio de reproducción (latas, neumáticos, botellas) y en algunos casos la desecación y el rebosamiento por la lluvia son perturbaciones y causan mortalidad en larvas y pupas.

2.1.3. La pupa

Las pupas también son acuáticas, no se alimentan; su función es la metamorfosis del estadio larval al adulto. Se mantienen en la superficie del agua debido a que tienen la propiedad de flotar, lo que facilita la emergencia del insecto adulto. El estadio de pupa dura dos a tres días, si antes no intervienen los factores ambientales.

2.1.4. Adulto

Es la fase reproductora de *A.aegypti*. Es un mosquito oscuro con bandas blancas en las bases de los segmentos torales y un característico diseño en forma de lira en el mesonoto (sección del tórax del mosquito). Los adultos permanecen vivos en laboratorio durante meses, pero en su ambiente natural sólo pueden vivir pocas semanas. Muchos adultos mueren en el momento de la emergencia o poco tiempo después, pero la supervivencia diaria es constante. Con una mortalidad diaria de 10%, la mitad de los mosquitos morirá durante la primera semana y el 95% durante el primer mes. A pesar de la gran reducción en número, si la población emergente original es grande, la población vieja será suficiente para transmitir la enfermedad y mantener una epidemia [11].

Estos estadios del *Aedes aegypti* serán utilizados para diseñar un sistema dinámico del crecimiento poblacional de la especie y analizar la influencia de la temperatura en su desarrollo. En la solución de este sistema se emplearán métodos analíticos, numéricos y de sistemas de control lineal para determinar la evolución de la población en el tiempo.

2.2. Modelos Poblacionales

Un modelo poblacional es un sistema dinámico, compuesto por una o varias ecuaciones diferenciales, que pretende predecir la evolución temporal en el número de individuos (o su densidad espacial) para un conjunto de especies. Para ello se parte de unas determinadas condiciones iniciales, y se asumen unas reglas que representan la interacción de las especies entre sí y su relación con el ecosistema o medio en que habitan, en términos de los recursos necesarios para la supervivencia.

En cualquier ecosistema existe un gran número de especies que compiten por unos recursos necesariamente limitados, con un objetivo común a todas ellas que es evitar la extinción. Esto hace que cada especie interactúe con todas las demás. Esta interacción puede tener distintos grados de intensidad, y puede ser beneficiosa para unas especies y perjudicial para otras. Por tanto un modelo poblacional totalmente general debe tener en cuenta todas estas interdependencias, lo cual conduce a una formulación de extraordinaria complejidad, que en algunos casos puede quedar lejos del alcance de los métodos analíticos y computacionales actuales.

Por ello resulta conveniente estudiar en primer lugar los modelos poblacionales con una única especie, es decir, aquellos en los que la especie estudiada no presenta interacciones fuertes con ninguna otra especie en particular del ecosistema. En otras palabras, la especie objeto del estudio no experimenta una depredación significativa por parte de otras especies, ni su supervivencia está vinculada a la existencia de una o varias presas en particular, sino más bien a la abundancia o escasez, en términos globales, de los recursos del ecosistema: alimento, energía, agua, luz, espacio, etc.

2.2.1. Modelo exponencial

La idea original detrás del modelo de Malthus fue la suposición de que el ritmo de aumento de una población es directamente proporcional a la población en cada instante, es decir:

$$\frac{dx}{dt} = rx \tag{2.1}$$

siendo x la población total de individuos en un instante determinado t , y r una constante de proporcionalidad. Si $r > 0$ la ecuación modela el crecimiento de una población, y si $r < 0$ se modela su decaimiento hasta la extinción. Por integración directa de la ecuación se obtiene:

$$x(t) = x_0 e^{rt} \quad (2.2)$$

siendo $x_0 = x(0)$ la población de la especie considerada en el instante $t = 0$.

También es posible considerar que $x(t)$ es la densidad de individuos de esa especie en función del tiempo, considerando fija la región espacial ocupada por esa población.

Suponiendo un valor de $r > 0$ dado, las curvas solución tienen un comportamiento exponencial creciente para todo valor de la condición inicial $x_0 > 0$.

Este modelo predice un crecimiento ilimitado en el número de individuos (explosión de población), por lo que no resulta realista para periodos prolongados de tiempo. La única solución de equilibrio, que además es inestable, es el caso trivial $x(t) = 0$.

Análogamente, para $r < 0$ se tiene un comportamiento exponencial decreciente que desemboca en la extinción de la población considerada, con lo cual la solución de equilibrio $x(t) = 0$ es estable. Es importante mencionar en este punto que aunque $x(t)$ no alcanza el valor cero en un tiempo finito, sí se produciría la extinción, a efectos prácticos, de la especie en un tiempo finito, pues el número de individuos es necesariamente una variable discreta.

La figura 2.2 representa ambos comportamientos de x frente a t para distintos valores de la condición inicial x_0 :

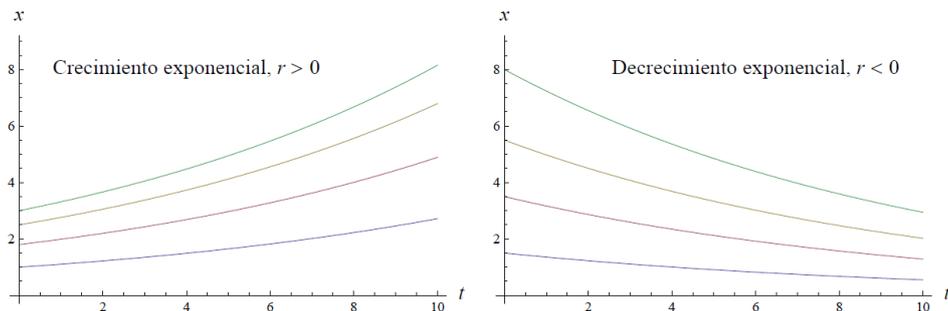


Figura 2.2: Crecimiento y decrecimiento exponencial[12]

2.2.2. La Ecuación logística

Puesto que el crecimiento exponencial no puede continuar de forma ilimitada, resulta necesario introducir modificaciones en el modelo exponencial. Estas modificaciones consisten en sustituir la constante de proporcionalidad r por una función $f(x)$ que decrece al aumentar x , de forma que un aumento de población penaliza los aumentos de población sucesivos, y así $x(t)$ no crece de forma ilimitada. La ecuación diferencial es en este caso:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)x \quad (2.3)$$

Uno de los modelos más sencillos es el de la ecuación logística, introducida por el matemático belga P. F. Verhulst en el siglo XIX, que toma la forma:

$$\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)x \quad (2.4)$$

siendo $r > 0$ una constante que recibe el nombre de **tasa de crecimiento intrínseca**, es decir, la tasa de crecimiento en ausencia de factores limitantes, y $K > 0$ la **capacidad límite o de soporte**, también llamado nivel de saturación, que es la máxima población $x(t)$ que se puede sostener o soportar a medida que avanza el tiempo.

La ecuación 2.4 es de tipo Bernoulli, y por tanto integrable de forma explícita. Su solución expresada de forma analítica es:

$$x(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{x_0} - 1\right)e^{-rt} + 1}, x_0 \neq 0 \quad (2.5)$$

Como la ecuación 2.4 es autónoma, podemos representar su recta de fase, es decir, el comportamiento cualitativo de $x(t)$ en el eje vertical. Es claro que las soluciones de equilibrio, también llamadas puntos críticos, para esta ecuación se tienen en $x = 0$ y $x = K$:

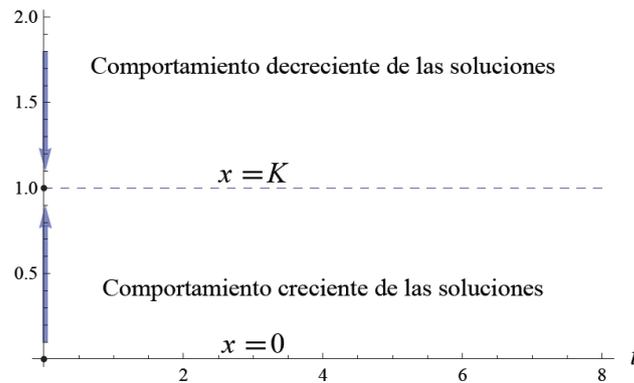


Figura 2.3: Recta de fases para la ecuación logística[12]

De aquí se deduce que $x(t) = 0$ es una solución de equilibrio inestable, y que la solución $x(t) = K$ (dibujada con línea de trazos) es una solución asintóticamente estable, lo cual queda evidenciado al representar la solución $x(t)$ para distintas condiciones iniciales:

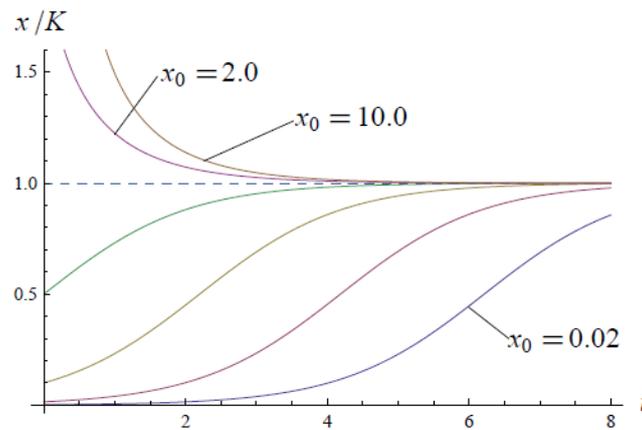


Figura 2.4: Ecuación Logística[12]

Se comprueba como para valores pequeños de x , el crecimiento de la especie sigue una pauta de tipo exponencial, pero cuanto más grande es la población $x(t)$ en un instante dado, más difícil se hace que x pueda seguir creciendo, de forma que al cabo de un tiempo, la población tiende asintóticamente hacia el valor de saturación.

Es importante tener presente que aunque muchas poblaciones siguen aproximadamente un modelo logístico, éste no es consecuencia de ninguna ley

fundamental, sino que es un modelo asumido a priori, partiendo de una tasa de cambio intrínseca que es lineal y decreciente.

2.2.3. Ecuación logística para un modelo discreto

Existen especies para las cuales las sucesivas generaciones no se solapan, es decir, que la generación progenitora no llega a coincidir en el tiempo con su descendencia. Podemos pensar en una especie de insectos que se reproduce por medio de huevos, de tal forma que todos los insectos de la generación antigua mueren antes de que los huevos con los insectos de la generación nueva eclosionen.

Esto nos permite plantear modelos de crecimiento discreto, gobernados por ecuaciones en diferencias, distintos de los modelos considerados hasta ahora, continuos y gobernados por ecuaciones diferenciales. En el caso del modelo logístico, la ecuación en diferencias toma la forma:

$$\Delta y = y_{n+1} - y_n = r\left(1 - \frac{y - y_n}{K}\right)y_n \quad (2.6)$$

siendo y_n la población de la especie en la n -ésima iteración. Con el cambio de variable:

$$\frac{r}{K(1+r)}y_n = x_n; \quad \frac{r}{K(1+r)}y_{n+1} = x_{n+1} \quad (2.7)$$

y reordenando terminos obtenemos:

$$x_{n+1} = (1+r)x_n(1-x_n) \quad (2.8)$$

Redefiniendo $1+r = R$ se sigue:

$$x_{n+1} = Rx_n(1-x_n) \quad (2.9)$$

donde R es obviamente una constante positiva. Esta ecuación en diferencias define una relación recursiva:

$$x \rightarrow f(x) = Rx(1-x) \quad (2.10)$$

que es uno de los casos más sencillos de ecuación no lineal que se pueden dar

2.2.4. Modelos dependientes del tiempo

Hasta ahora se han considerado exclusivamente ecuaciones autónomas, es decir, aquellas en las que $\frac{dx}{dt}$ no tiene una dependencia explícita con el

tiempo. Ahora vamos a abordar la dinámica de los modelos de especie única desde una perspectiva distinta, aquella en la que la tasa de crecimiento intrínseca, r , es una función del tiempo:

$$r = r(t) \quad (2.11)$$

que debe ser suficientemente regular. Para el propósito de este estudio basta con que $r(t)$ sea continua. De esta forma $x(t)$ queda definida por la siguiente ecuación diferencial en variables separadas:

$$\frac{dx}{dt} = r(t)x \quad (2.12)$$

donde podemos expresar $r(t)$ como $r(t) = n(t) - m(t)$, siendo:

- $n(t)$ la tasa de natalidad
- $m(t)$ la tasa de mortalidad
- $r(t)$ la tasa reproductiva

Si la condición inicial es $x(0) = x_0$ la solución al problema de valor inicial es:

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t r(s) ds} \quad (2.13)$$

En el caso en que $r(t) > r_0 > 0$ para todo instante $t > t_0$ se produce una explosión de población, que es el crecimiento exponencial en el tiempo e ilimitado que se esbozó en la sección (2.2.1). En efecto, se tiene:

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t r(s) ds} \geq x_0 e^{\int_0^t r_0 ds} = x_0 e^{r_0 t} \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

Para ilustrarlo con un ejemplo tomamos la función $r(t) = \log(t + 3)$ que es monótona creciente y estrictamente mayor que 1 para $t > 0$. Representando la solución para distintas condiciones iniciales:

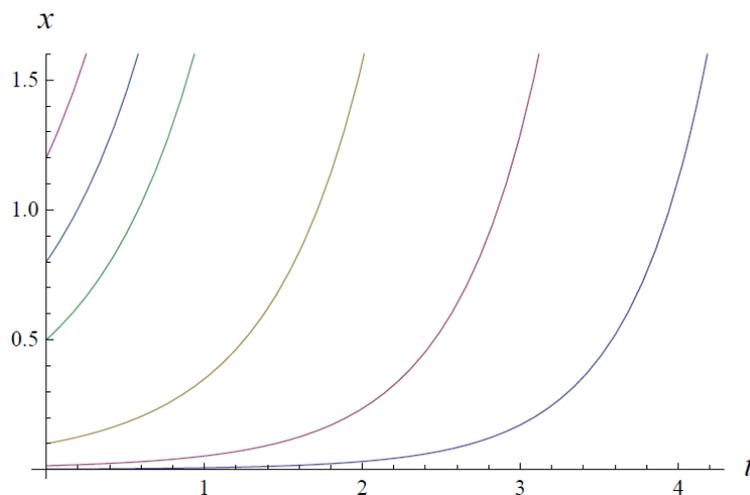


Figura 2.5: Explosión de población[12]

Si $r(t) \leq -r_1 < 0$ para todo $t > t_0$ se tiene un colapso de población, que se identifica con la extinción de la misma, ya que

$$0 \leq x(t) = x_0 e^{\int_0^t r(s) ds} \leq x_0 e^{\int_0^t -r_1 ds} = x_0 e^{-r_1 t} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad (2.15)$$

Si tomamos como ejemplo $r(t) = -0,5 \log(t+3)$ y representamos la solución para distintas condiciones iniciales se obtiene:

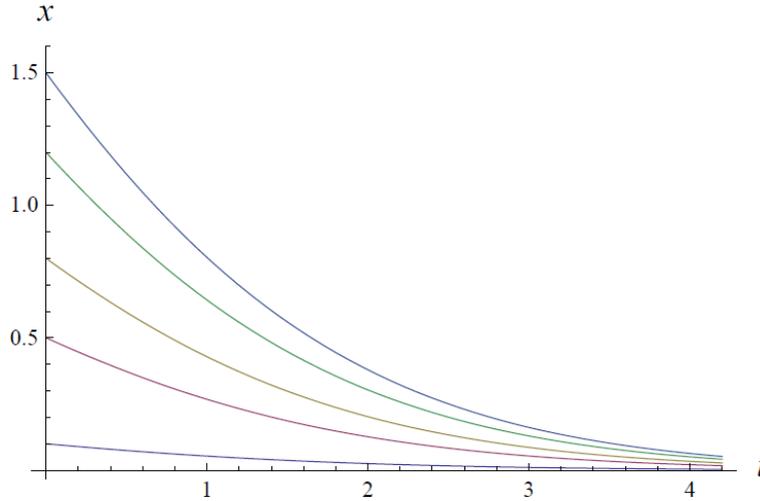


Figura 2.6: Colapso de población[12]

La situación $r(t) \rightarrow 0$ en la que además $\int_0^\infty |r(s)| ds < \infty$ origina una estabilización de la población, $x(t)$. En efecto, si ponemos $a = \int_0^\infty |r(s)| ds$ se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = x_0 e^{\int_0^\infty r(s) ds} \leq x_0 e^{\int_0^\infty |r(s)| ds} = x_0 e^a < \infty \quad (2.16)$$

Más interesante resulta la situación en que $r(t)$ exhibe un comportamiento periódico, lo cual puede deberse por ejemplo a una variación estacional en la disponibilidad de recursos (alimento, agua,...). Suponemos que $r(t)$ es una función periódica de periodo T , es decir, que $r(t+T) = r(t)$ y definimos:

$$R = \int_0^T r(s) ds \quad (2.17)$$

Veamos que $x(t) \rightarrow 1$ si $R > 0$. En efecto, si k es el número de periodos que se engloban en el intervalo $[0; t)$ podemos separar dicho intervalo como

$$[0; t) = [0; kT) \cup [kT; t)$$

de forma que

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^\infty r(s) ds} = x_0 e^{\int_0^{kT} r(s) ds} e^{\int_{kT}^t r(s) ds} = x_0 e^{kR} e^{\int_{kT}^t r(s) ds} \quad (2.18)$$

Como $r(t)$ es una función periódica se tiene que $\int_{kT}^t r(s)ds = \int_0^{t-kT} r(s)ds$ y haciendo $t_1 = t - kT$, con $t_1 \in [0, T)$ se tiene:

$$x(t) = e^{kR} x_0 e^{\int_0^{t_1} r(s)ds} = e^{kR} x(t_1) \quad (2.19)$$

que tiende a ∞ cuando $t \rightarrow \infty$ (pues $k \rightarrow \infty$) asumiendo que $x(t_1) > 0$ para todo t_1 . Análogamente se prueba que $x(t) \rightarrow 0$ si $R < 0$. Además es inmediato que si $R = 0$ entonces $x(t)$ es una función periódica. Ilustramos este último comportamiento con un ejemplo donde hemos tomado la función de periodo 2π

$$f(x) = \begin{cases} (\text{sent})^{2,5} & \text{si } t \in [0, \pi) \\ -(\text{sent})^{2,5} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (2.20)$$

tal que $R = \int_0^{2\pi} r(s)ds = 0$, como fácilmente se comprueba. Al representar la solución con distintas condiciones iniciales se obtiene:[12]

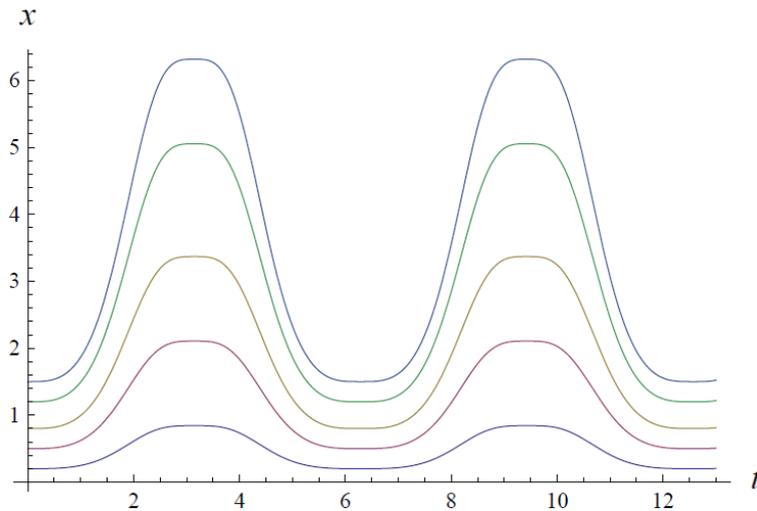


Figura 2.7: Población periódica[12]

2.3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene variables independientes, funciones y derivadas de funciones, la ecuación.

$$y' + 2xy = 0 \quad (2.21)$$

es una ecuación diferencial. Donde x es la variable independiente e y es la función desconocida. Una solución es una función $y = \phi(x)$ que satisface (2.21) de forma idéntica en x , es decir, $\phi'(x) + 2x\phi(x) \equiv 0$.

Se puede observar que todas las soluciones de (2.21) se pueden escribir en la forma $y = Ce^{-x^2}$ donde C pertenece al conjunto de los números reales. La ecuación (2.21) es una ecuación diferencial de primer orden. En general ecuación diferencial de primer orden tiene la forma.

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2.22)$$

Una función $y = y(x)$ se llama una *solución* de (2.22) en un intervalo J si $y(x)$ es diferenciable en J y

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0 \text{ para todo } x \in J$$

Si una ecuación diferencial contiene derivadas de orden superior, por ejemplo, hasta *enésimo* orden, entonces la ecuación se llama una *ecuación, diferencial, de orden n-ésimo* siempre tal ecuación se puede escribir en la forma general

$$F(x, y, y', \dots, y^n); = 0 \quad (2.23)$$

Aquí una solución se define como una función diferenciable *n-veces* de tal forma que la ecuación (2.23) es satisfecha idénticamente cuando $Y(x)$ y sus derivados estén sustituidas en F.

Sistemas de ecuaciones diferenciales. Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (en forma explícita) es un conjunto de ecuaciones simultáneas de la forma

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\dots \\ &\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Aquí las n funciones $f_1(x, y_1, \dots, y_n) \dots f_n(x, y_1, \dots, y_n)$ Se definen en un conjunto D $(n + 1) - dimensional$ $(x, y_1, \dots, y_n) - espacial$, una función vectorial $(y_1(x), \dots, y_n(x))$ es una solución (o una *integral*) de (2.24) en el intervalo J si las funciones $y_v(x)$ son diferenciables en J y si (2.24) satisface idénticamente cuando son sustituidos en la ecuación. Naturalmente, se requiere $(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \in D$ para $x \in J$ la notación vectorial se utilizará siempre que sea posible.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}, y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(x) \end{pmatrix}, y(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Por un operador no lineal vamos a significar uno que no es lineal, y por un operador lineal L vamos a significar uno que tiene las siguientes propiedades

$$L(\phi + \psi) = L(\phi) + L(\psi) \quad (2.26)$$

$$L(k\phi) = kL(\phi) \quad (2.27)$$

donde ϕ y ψ son funciones arbitrarias y k es una cantidad escalar.

Cuando un operador no lineal se iguala a cero o a una función dada, tenemos una ecuación no lineal. Por lo tanto, si se aplica el operador sobre una sola variable, se ve que la ecuación.

$$L(u) = f(x), \quad (2.28)$$

es una ecuación no lineal si $L(u)$ es un operador no lineal.

En el caso donde $L(u)$ es un operador lineal es habitual distinguir entre las ecuaciones $L(u) = 0$ y $L(u) = f(x)$ para referirse a la primera como una ecuación homogénea y a la segunda como una ecuación no homogénea. En el caso de una ecuación no lineal el término homogénea ya no se aplica. Si arbitrariamente se puede introducir el término ecuación nula para referirse a $L(u) = 0$, cuando $L(u)$ es un operador no lineal, y el término ecuación completa cuando se tiene $L(u) = f(x)$. [13].

2.3.1. Método de aproximación de Adomian

El método de aproximación de Adomian consiste en dividir la ecuación dada en una parte lineal y otra no lineal, invertir el operador de la derivada de mayor orden que figuran en el operador lineal y aplicarlo en ambos lados, se identifican las condiciones iniciales y / o límites y los términos relacionados con la variable independiente para realizar la primera aproximación, se descompone la función desconocida en una serie cuyos componentes son a determinar.

La función no lineal se descompone en términos de polinomios especiales llamados polinomios Adomian, y se buscan los términos sucesivos de la solución en serie por una relación de recurrencia mediante los polinomios de Adomian como sigue:

Considere la siguiente ecuación:

$$F(y(x)) = g(x) \quad (2.29)$$

donde F representa un operador diferencial ordinario no lineal y g es una función dada. El término lineal Fy es descompuesto en $Ly + Ry$, donde L es un operador invertible, que es tomado de la derivada de mayor orden y R es el remanente del operador lineal. Esta ecuación puede ser escrita como.

$$Ly + Ry + Ny = g \quad (2.30)$$

donde Ny representa el termino no lineal en Fy . Resolviendo para Ly ,

$$Ly = g - Ry - Ny \quad (2.31)$$

Operando L con su inverso L^{-1} produce

$$L^{-1}Ly = L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \quad (2.32)$$

Una expresion equivalente.

$$y = \Phi + L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny, \quad (2.33)$$

donde $L\Phi = 0$. Por ejemplo, para $L = \frac{d^2}{dx^2}$, L^{-1} es una integraci3n doble, y $\Phi = y(0) + xy'(x)$, la soluci3n y es representada como la serie inifinita de sumas.

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} y_n \quad (2.34)$$

y el t3rmino no lineal Ny suponiendo que es una funci3n anal3tica, se descompone de la siguiente manera

$$Ny = \sum_{i=0}^{\infty} A_n \quad (2.35)$$

donde los A_n son los polinomios de Adomian de y_0, y_1, \dots, y_n y son calculados con la f3rmula

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right) \Big|_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

reemplazando (2.35) y (2.36) en (2.34) obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \Phi + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} y_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.37)$$

cada termino de la serie (2.35) est3 dada por la relaci3n recurrente [14].

$$y_0 = \Phi + L^{-1}g \quad (2.38)$$

$$y_n = L^{-1}Ry_{n-1} - L^{-1}A_{n-1}, n \geq 1 \quad (2.39)$$

2.3.2. Soluci3n num3rica

La soluci3n a un sistema de ecuaciones lineales o no lineales tambi3n puede realizarse utilizando m3todos num3ricos, el software Matlab® posee una gran versatilidad en su lenguaje y permite resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales o no lineales utilizando diversos medios.

1. Mediante el uso de Matrices Exponenciales.
2. Mediante el uso de funciones ODE Solvers incorporadas en Matlab®
3. Mediante la creación de un propio programa que implemente el algoritmo de Runge-Kutta.

Este ultimo es tal vez el método más difundido y más exacto para obtener soluciones aproximadas al problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (2.40)$$

Los distintos métodos de Runge-Kutta se deducen a partir del desarrollo de $y(x_n+h)$ donde h es el paso por iteración, o lo que es lo mismo, el incremento Δx_n entre los sucesivos puntos en serie de Taylor con residuo:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n+h) = y(x_n) + \frac{dy(x_n)}{dx}h + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2y(x_n)}{dx^2} + \dots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \frac{d^{(k+1)}y(c)}{dx^{(k+1)}} \quad (2.41)$$

Cuando $K = 1$ y el residuo $(\frac{h^2}{2})(\frac{dy(c)}{dx})$ es pequeño, se obtiene la fórmula iteración del procedimiento de Runge-Kutta de primer orden (o método básico de Euler)

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{dy(x_n)}{dx} = x_{n+1} + hf(x_n, y_n) \quad (2.42)$$

siendo el error local por truncamiento $O(h^2)$ y el error global de $O(h^1)$. El procedimiento de Runge-Kutta de cuarto orden consiste en determinar las constantes adecuadas para la formula.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4) \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 k_1 + \beta_5 k_2 + \beta_6 k_3) \end{aligned} \quad (2.43)$$

conocida con un polinomio de Taylor de cuarto grado. En el sistema tenemos 11 ecuaciones con 13 incógnitas, su error local de truncamiento $O(h^5)$ y su error global de $O(h^4)$. El conjunto de valores de las constantes que más se usa produce el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 4k_4) \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Este resultado se puede ampliar y utilizar el método de Runge-Kutta para solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (lineales o no). Para un sistema de 2 ecuaciones tendríamos por ejemplo.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f_1(t, x, y), & x(t_0) &= x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y), & y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

se debe resolver.[15]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ m_1 &= hf_1(t_n, x_n, y_n) & k_1 &= hf_2(t_n, x_n, y_n) \\ m_2 &= hf_1(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_1, y_n + \frac{1}{2}k_1) & k_2 &= hf_2(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_1, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ m_3 &= hf_1(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_2, y_n + \frac{1}{2}k_2) & k_3 &= hf_2(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_2, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ m_4 &= hf_1(t_n + h, x_n + m_3, y_n + k_3) & k_3 &= hf_2(t_n + h, x_n + m_3, y_n + k_3) \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.4. Diseño de Sistemas de Control

Los sistemas de control actuales son, por lo general no lineales. Sin embargo, si es posible aproximarlos mediante modelos matemáticos lineales, podemos usar uno o más métodos de diseño bien desarrollados. En un sentido práctico, las especificaciones de desempeño determinadas para el sistema particular sugieren cuál método usar.

Si se presentan las especificaciones de desempeño en términos de las características de respuesta transitoria y/o las medidas de desempeño en el dominio de la frecuencia, no tenemos otra opción que usar un enfoque convencional basado en los métodos del lugar geométrico de las raíces y/o la respuesta en frecuencia.

Si las especificaciones de desempeño se presentan como índices de desempeño en términos de las variables de estado, deben usarse los enfoques de control moderno. La tendencia moderna en los sistemas de ingeniería es hacia una mayor complejidad, debido principalmente a los requerimientos de las tareas complejas y la elevada precisión.

Los sistemas complejos pueden tener entradas y salidas múltiples y pueden variar en el tiempo. Debido a la necesidad de alcanzar los requerimientos cada vez más restrictivos en el desempeño de los sistemas de control, al aumento en la complejidad del sistema y a un acceso fácil a las computadoras

de gran escala, aproximadamente desde 1960 se ha desarrollado la teoría de control moderna, que es un nuevo enfoque del análisis y diseño de sistemas de control complejos. Este enfoque nuevo se basa en el concepto de estado.

El concepto de estado por sí mismo no es nuevo, dado que ha existido durante largo tiempo en el campo de la dinámica clásica y en otros medios. La teoría de control moderna contrasta con la teoría de control convencional en que la primera se aplica a sistemas con entradas y salidas múltiples, que pueden ser lineales o no lineales, en tanto que la segunda sólo se aplica a sistemas lineales con una entrada y una salida e invariantes con el tiempo. Asimismo, la teoría del control moderna es esencialmente un enfoque en el dominio del tiempo, en tanto que la teoría de control convencional es un enfoque complejo en el dominio de la frecuencia. [16]

Definiciones:

2.4.1. Estado

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominadas *variables de estado*) de modo que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$. Observe que el concepto de estado de ningún modo está limitado a los sistemas físicos. Se puede aplicar a sistemas biológicos, económicos, sociales y otros.

2.4.2. Variables de estado

Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Se necesitan al menos n variables x_1, x_2, \dots, x_n , para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico (por lo cual una vez que se proporciona la entrada para $t \geq t_0$ y se especifica el estado inicial en $t = t_0$, el estado futuro del sistema se determina por completo), tales n variables son un conjunto de variables de estado.

Las variables de estado no necesitan ser cantidades medibles u observables físicamente. Las variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no son medibles ni observables pueden seleccionarse como variables de estado. Tal libertad al elegir las variables de estado es una ventaja de los métodos de espacio de estados. Sin embargo, en la práctica es conveniente elegir cantidades que se midan con facilidad para las variables de estado, si es posible, debido a que las leyes del control óptimo requerirán la realimentación de todas las variables de estado con una ponderación conveniente.

2.4.3. Vector de estado

Si se necesitan n variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas n variables de estado se consideran los n componentes de un vector x . Tal vector se denomina *vector de estado*. Por tanto un vector de estado es aquel que determina de manera única el estado del sistema $x(t)$ para cualquier tiempo $t \geq t_0$, una vez que se obtiene el estado en $t = t_0$ y se especifica la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$.

2.4.4. Espacio de estados

El espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , el eje x_2 , ..., el eje x_n , se denomina *espacio de estados*. Cualquier estado puede representarse mediante un punto en el espacio de estados.

2.4.5. Ecuaciones en el espacio de estados

En el análisis en el espacio de estados, se centra en tres tipos de variables involucrados en el modelado de sistemas dinámicos: variables de entrada, variables de salida y variables de estado.

Aunque esta no es la única representación en el espacio de estados para un sistema determinado, excepto en que la cantidad de variables de estado es igual para cualquiera de las diferentes representaciones en el espacio de estados del mismo sistema.

El sistema dinámico debe incorporar elementos que memoricen los valores de la entrada para $t \geq t_1$.

Dado que los integradores de un sistema de control en tiempo continuo funcionan como dispositivos de memoria, las salidas de tales integradores se consideran las variables que definen el estado interno del sistema dinámico. Por tanto, las salidas de los integradores funcionan como variables de estado.

La cantidad de variables de estado necesarias para definir completamente la dinámica del sistema es igual a la cantidad de integradores que contiene el sistema.

Suponga que un sistema de entradas y salidas múltiples contiene n integradores.

También suponga que existen r entradas $u_1, u_2(t), \dots, u_r(t)$ y m salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$. Definen salidas de los integradores como variables de estado:

$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. el sistema se describe mediante.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Las salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ del sistema se obtienen mediante

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

si definimos

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las ecuaciones (2.47) y (2.48) se convierten en

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.49)$$

$$y = g(x, u, t) \quad (2.50)$$

en donde las ecuaciones (2.49) es la ecuacion de estado y la ecuación (2.50) es la ecuación de la salida. Si las funciones vectoriales A y B no involucran explícitamente el tiempo t , el sistema se denomian invariante con el tiempo. Si se linealizan las ecuaciones (2.47) y (2.48) alrededor del estado de operacion, tenemos las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.51)$$

$$y = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.52)$$

en donde $A(t)$ se denomina matriz de estado, $B(t)$ matriz de entrada, $C(t)$ matriz de salida y $D(t)$ matriz de transmisión directa.

Si las funciones vectoriales f y g no involucran el tiempo t explícitamente, el sistema se denomina sistema invariante con el tiempo. En este caso, las ecuaciones (2.51) y (2.52) se simplifican a

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (2.53)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (2.54)$$

La ecuación (2.53) es la ecuación de estado del sistema lineal e invariante con el tiempo. La ecuación (2.54) es la ecuación de salida para el mismo sistema.[16]

2.4.6. Controlabilidad

Se dice que un sistema de control es de estado completamente controlable, si es posible transferir el sistema de un estado inicial arbitrario a cualquier estado deseado, en un periodo finito, es decir, un sistema de control es controlable si todas las variables de estado pueden ser controladas en un periodo finito, mediante alguna señal de control no restringida. Si cualquiera de las variables de estado es independiente de la señal de control, entonces resulta imposible controlar esa variable de estado y , por lo tanto, el sistema es no controlable.

Puede no existir solución a un problema de control óptimo, si el sistema se considera no controlable. A pesar de que la mayor parte de los sistemas físicos son controlables, los modelos matemáticos correspondientes quizás no tengan la propiedad de controlabilidad, por lo tanto, es necesario saber la condición bajo la cual el sistema es controlable.

Controlabilidad completa del estado para un sistema de control en tiempo lineal e invariante en el tiempo. Considere el sistema de control en tiempo discreto definido por

$$x((k+1)T) = Gx(kT) + Hu(kT) \quad (2.55)$$

donde $x(kT)$ = vector estado (de dimensión n) en el k -ésimo instante de muestreo

$U(kT)$ = señal de control en el k -ésimo instante de muestreo

\mathbf{G} = matriz de $n \times n$ (\mathbf{A} en tiempo discreto)

\mathbf{H} = matriz de $n \times l$ (\mathbf{B} en tiempo discreto)

\mathbf{T} = periodo de muestreo

Suponemos que $\mathbf{u}(\mathbf{kT})$ es constante para $kT \leq t < (k+1)T$

El sistema de control en tiempo discreto dado para la ecuación (2.55) se dice es de estado completamente, o simplemente de estado controlable, si existe una señal de control constante por intervalos $u(kt)$ definida a lo largo de un número finito de períodos de muestreo que, al partir de cualquier estado inicial, el estado $x(kT)$ pueda ser transferido al estado deseado x_f en n períodos de muestreo como máximo.

En vista que la solución de la ecuación (2.55) es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(nT) &= G^n \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} H u(jT) \\ &= G^n \mathbf{x}(0) + G^{n-1} H u(0) + G^{n-2} H u(T) + \dots + H u((n-1)T) \end{aligned} \quad (2.56)$$

se obtiene

$$\mathbf{x}(nT) - \mathbf{G}^n \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u((n-1)T) \\ u((n-2)T) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Dado que \mathbf{H} es una matriz de $n \times 1$ se encuentra que cada una de las matrices $\mathbf{H}, \mathbf{G}\mathbf{H}, \dots, \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$ es una matriz $n \times 1$ o un vector columna. Si el rango de la matriz siguiente es n , es decir

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} = n \quad (2.58)$$

entonces los n vectores $\mathbf{H}, \mathbf{G}\mathbf{H}, \dots, \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$ pueden abarcar el todo el espacio de n dimensiones. La matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

comúnmente se conoce como *matriz de controlabilidad*

2.4.7. Observabilidad

Un sistema se dice ser completamente observable si cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$ se puede determinar a partir de la observación de $\mathbf{y}(kT)$ sobre un número finito de períodos de muestreo. El sistema, por lo tanto, es completamente observable, si cualquier transición del estado de manera eventual afecta a todos los elementos del vector de salida. El concepto de observabilidad es útil para resolver el problema de la reconstrucción de variables de estado no medibles. Considerese el sistema de control en tiempo discreto sin excitación definido por.

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}u(kT) \quad (2.60)$$

$$y(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}u(kT) \quad (2.61)$$

entonces

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{n-j-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(jt) \quad (2.62)$$

y $y(kT)$ es

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C} \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C} \mathbf{G}^{n-j-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(jt) + \mathbf{D} \mathbf{u}(kT) \quad (2.63)$$

Dado que las matrices \mathbf{G} ; \mathbf{H} ; \mathbf{C} y \mathbf{D} son conocidas, y $\mathbf{u}(kT)$ también lo es, el segundo y el tercer término del segundo miembro de ésta última ecuación son cantidades conocidas. Por lo tanto, pueden restarse del valor observado de $\mathbf{y}(kT)$. Entonces para la investigación de una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa, basta considerar el sistema descrito por la ecuaciones (2.61) y (2.62)

Una vez que a partir de la observación de la salida se pueda determinar $\mathbf{x}(0)$, también podrá determinarse $\mathbf{x}(kT)$, ya que $u(0), u(T), \dots, u((k-1)T)$ son conocidas.

Observabilidad completa de los sistemas en tiempo discreto. Considere el sistema definido por la ecuaciones (2.60) y (2.61). El sistema es completamente observable si, dada la salida $\mathbf{y}(kT)$ sobre un número infinito de periodos de muestreo, es posible determinar el vector estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

En vista que la solución $\mathbf{x}(kT)$ de la ecuación (2.61) es

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) \quad (2.64)$$

se obtiene

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C} \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) \quad (2.65)$$

La observabilidad completa significa que, dado $y(0), y(T), y(2T), \dots$, es posible determinar $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Para determinar n incógnitas, se necesita únicamente n valores de $\mathbf{y}(kT)$. Por lo tanto, se puede utilizar los primeros n valores de $\mathbf{y}(kT)$ o $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(T), \dots, \mathbf{y}(kT)$ que permita determinar $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. En el caso de un sistema completamente observable, dados

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(T) &= \mathbf{C} \mathbf{G} \mathbf{x}(0) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mathbf{y}((n-1)T) &= \mathbf{C} \mathbf{G}^{n-1} \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (2.66)$$

se debe ser capaz de determinar $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Al observar $\mathbf{y}(kT)$ es un vector de dimensión m , las ecuaciones simultáneas anteriores dan como resultado nm ecuaciones, todas ellas incluyendo $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. A fin de obtener un solo conjunto de soluciones $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ a partir de esta nm ecuaciones, se debe escribir exactamente de entre ellas n ecuaciones lineales independientes. Esto requiere que la matriz $nm \times n$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \dots \\ \mathbf{CG} \\ \dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \dots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

sea de rango n

Notando que el rango de una matriz y de su transpuesta conjugada es el mismo, es posible enunciar la condición de correspondiente a la observabilidad completa como sigue. Una condición necesaria y suficiente para que el sistema definido por las ecuaciones (2.60) y (2.61) sea completamente observable es que el rango de la matriz de $n \times nm$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^* : \mathbf{G}^* \mathbf{C}^* : \dots : (\mathbf{G}^*)^{n-1} \mathbf{C}^* \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

sean n . La matriz dada por la ecuación (2.68) se conoce comúnmente como *matriz de observabilidad*, los asteriscos indican transpuestas conjugadas. Si las matrices \mathbf{C} y \mathbf{G} son reales, entonces la notación de transposición conjugada como $\mathbf{G}^* \mathbf{C}^*$ puede ser cambiada a notación de transposición, como $\mathbf{G}^T \mathbf{C}^T$ [17]

Los conceptos anteriormente expuestos serán usados para el estudio de los modelos poblacionales aplicado a la dinámica del mosquito en el municipio de Bello

Capítulo 3

Estado del Arte en los Modelos Poblacionales del *Aedes Aegypti*

Este capítulo se centra en los modelos poblacionales del *Aedes Aegypti* primero, se analizarán los modelos en ecuaciones diferenciales lineales y no lineales en sus parámetros es decir, en las tasas de desarrollo de las etapas de vida del *Aedes Aegypti* relacionadas en la sección 2.1, este análisis comienza con el modelo propuesto por Otero que plantea un sistema no lineal de 5 ecuaciones diferenciales para describir la dinámica poblacional del *Aedes Aegypti* en la ciudad de Buenos Aires, luego Yang plantea un sistema de 3 ecuaciones y los parámetros de estas son calculados a partir de datos experimentales, Lana utiliza un sistema de 4 ecuaciones diferenciales donde los parámetros son tomados de los modelos desarrollados con anterioridad por Otero, Yang y otros. Finalmente se presenta el modelo desarrollado por Yusoff que utiliza matrices de transición para calcular la población de *Aedes Aegypti* en Malasia, los elementos de la matriz son calculados a partir del sistema propuesto por Otero

3.1. Modelado con sistemas de ecuaciones diferenciales

El ciclo de vida del mosquito es modelado usando un sistema de ecuaciones diferenciales lineales o no lineales de primer orden u orden superior. El número de estados usado en el el ciclo de vida del mosquito determinan el número de ecuaciones en el sistema.[18]. El ciclo de vida mostrado en la fig.1 se modela por medio del siguiente sistema.[19]

$$\frac{dE}{dt} = oA - mE - eE$$

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= eE - mL - pL \\
\frac{dP}{dt} &= pL - mP - aP \\
\frac{dA}{dt} &= aP - mA
\end{aligned}
\tag{3.1}$$

Donde E es el número de huevos, L es el número de larvas, P es el número de Pupas, A es el número de hembras adultas, a es el coeficiente gonotrófico, m son las tasas de mortalidad de huevos, larvas, pupas y adultos respectivamente y, e, p y a son las tasas de desarrollo de huevos, larvas y pupas.

Los modelos poblacionales realizados en los últimos años han variado este sistema, es así como algunos autores han trabajado con sistemas de 3 ecuaciones[9], 4 ecuaciones[7] y 5 ecuaciones[10] que en adelante serán llamados estados.

3.1.1. Un modelo estocástico de la dinámica poblacional del *Aedes Aegypti*: Formulación y Aplicación a una ciudad con Clima Templado

En este trabajo se desarrolla un modelo para la evolución del *Aedes aegypti* como una cadena de Markov [20] teniendo en cuenta las cuatro etapas de la vida del mosquito: huevo, larva, pupa y adulto. Por cada etapa de vida, los cambios pertinentes se modelan en términos de eventos aleatorios con tasas determinadas a partir de los datos biológicos disponibles para el *Aedes aegypti*. Las tasas dependen del tiempo a través de los parámetros meteorológicos. El modelo considera cinco poblaciones diferentes: huevos (E), larvas (L), pupas (P), hembras adultas que no han puesto huevos (A1) y hembras adultas que han puesto huevos (A2).

La población de los mosquitos machos no se considera explícitamente. La evolución de las cinco poblaciones se ve afectada por diez posibles eventos diferentes (la tabla 1 resume esta información). Los eventos se producen a tasas que dependen no sólo de los valores de la población, sino también de la temperatura, que a su vez es una función del tiempo ya que cambia en el transcurso del año. Por lo tanto, la dependencia de la temperatura presenta una dependencia del tiempo en las tasas de eventos.

En este sistema los parámetros biológicos del *Aedes aegypti* se dividen en dos los que dependen de la temperatura y los que no. Los parámetros que no dependen de la temperatura son: egn , número de huevos durante cada oviposición (63 huevos /oviposición), me mortalidad de huevos (0.011/d) y ma mortalidad de adultos (0.091/d).[10]

La mortalidad de larvas (ml) y de pupas (mp) dependen de la temperatura[10]

	Evento	Efecto	Tasa de Transicion
1	Oviposicion (A1)	$E \rightarrow E + egn$ $A1 \rightarrow A1 - 1$ $A2 \rightarrow A2 + 1$	$w_1(A1) = ovr1 \times A1$
2	Oviposicion (A2)	$E \rightarrow E + egn$	$w_2(A2) = ovr2 \times A2$
3	Muerte de huevos	$E \rightarrow E - egn$	$w_3(E) = m_e \times E$
4	Eclosión de huevos	$E \rightarrow E - 1$ $L \rightarrow L + 1$	$w_4(E, L) = erl(1 - \gamma(L)) \times E$
5	Muerte de larvas	$L \rightarrow L - L$	$w_5(L) = m_l \times L + \alpha \times L(L - 1)$
6	Pupación	$L \rightarrow L - 1$ $P \rightarrow P + 1$	$w_6(L) = lpr \times L$
7	Muerte de pupas	$P \rightarrow P - L$	$w_7(P) = (mp + (1 - ef)par)P$
8	Emergencia de adultos	$P \rightarrow P - 2$ $A1 \rightarrow A1 + 1$	$w_8(P) = par \times ef \times \frac{P}{2}$
9	Muerte de aultos(A1)	$A1 \rightarrow A1 - 1$	$w_9(A_1) = ma \times A1$
10	Muerte de aultos(A2)	$A2 \rightarrow A2 - 1$	$w_{10}(A_2) = ma \times A2$

Tabla 3.1: Tipo de evento, los efectos sobre las poblaciones y las tasas de transición para el desarrollo modelo.

y están dadas por la ecuación.

$$mp = ml = 0,01 + 0,9725exp\left(-\frac{(T-278)}{2,7035}\right) \quad (3.2)$$

donde T es la temperatura en grados Kelvin.

Los parámetros que también dependen de la temperatura son las tasas de desarrollo, llamadas tasas de eclosión de huevos (erl), pupación (lpr), emergencia de adultos (par) y los ciclos gonotropicos ($ovr1$ y $ovr2$).

El cálculo de las tasas de desarrollo se originó del modelo termodinámico presentado por Sharpe and DeMichele[21] y fue mas tarde simplificado por Schoofield[22].

$$R_D(T) = R_D(298^\circ K) \frac{\left(\frac{T}{298^\circ K}\right)exp\left(\left(\frac{\Delta H_A}{R}\right)\left(\frac{1}{298^\circ K} - \frac{1}{T}\right)\right)}{1 + exp\left(\left(\frac{\Delta H_H}{R}\right)\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T}\right)\right)} \quad (3.3)$$

R es la constante universal de los gases, H_A y H_H son las entalpias termodinamicas características del organismo. Estos valores se muestran en la tabla 3.2. El termino T_1 representa la temperatura cuando la mitad de las enzimas son activadas con T medida en grados Kelvin.

Este modelo es muy importante puesto que usa las entalpias y permite variar los parámetros con la temperatura

Ciclo de Desarrollo	$R_D(t)$	$R_D(298 \text{ °K})$	ΔH_A	ΔH_H	$T_{\frac{1}{2}}$
Eclosión de huevos	erl	0.24	10798	100000	14184
Desarrollo larval	lpr	0.2088	26018	55990	304.6
Desarrollo pupal	par	0.384	14931	- 472379	148
Ciclo gonotrofico(A1)	ovr1	0.216	15725	1756481	447.2
Ciclo gonotrofico(A2)	ovr2	0.372	15725	1756481	447.2

Tabla 3.2: Coeficientes para el modelo enzimático de maduración

La evolución de las poblaciones es modelado por un (dependiente de estado) proceso de Poisson [23], [20]; donde la probabilidad de que el estado (E, L, P, A1, A2) evolucione en el tiempo después de una ecuación de Kolmogorov hacia adelante (también conocida como ecuación maestra) que puede ser construido directamente a partir de la información recopilada en la Tabla 3.2

El modelo determinístico de ecuaciones diferenciales asociado es:

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= egn(ovr1 \times A1 + ovr2 \times A2) - me \times E - erl(1 - \gamma(L)) \times E \\
\frac{dL}{dt} &= erl(1 - \gamma(L)) \times E - ml \times L - \alpha \times L^2 - lpr \times L \\
\frac{dP}{dt} &= lpr \times L - mp \times P - par \times P \\
\frac{dA1}{dt} &= par \times ef \times \frac{P}{2} - ma \times A1 - ovr1 \times A1 \\
\frac{dA2}{dt} &= ovr1 \times A1 - ma \times A2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

El efecto inhibitor de la densidad de larvas en eclosión de los huevos $\gamma(L)$, que es un parámetro de control utilizado para la **convergencia del modelo**, se modela con una función escalón

$$\gamma(L) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{L}{BS} < a_0 \\ 0,63 & \text{si } \frac{L}{BS} \geq a_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

La depredación se cree que es un factor importante en el control del *Aedes aegypti* en América del Sur, donde el *Aedes aegypti* es un mosquito doméstico incapaz de sobrevivir en lugares desprotegidos como los grandes parques.

En este trabajo se tuvo en cuenta este efecto como una función de corrección no lineal de la mortalidad de larvas:

$$w_5(L) = m_l \times L + \alpha \times L(L - 1) \tag{3.6}$$

el valor de α se puede descomponer adicionalmente como

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{BS} \tag{3.7}$$

α_0 se asocia con la capacidad de carga de un solo (estandarizado) sitio de reproducción y BS el número de criaderos agrupados como un solo sitio en el modelo homogéneo equivalente.

El valor de α_0 se puede fijar para observar los valores en la región que está siendo simuladas.

Las tasas de desarrollo, tasas de eclosión de huevos (*erl*), pupación (*lpr*), emergencia de adultos (*par*) y los ciclos gonotrópicos (*ovr1* y *ovr2*). Son calculadas utilizando la ecuación (3.3).

Los resultados de estas tasas de desarrollo se muestran en la figura 6.

Como la viabilidad del mosquito en condiciones climáticas constantes sólo

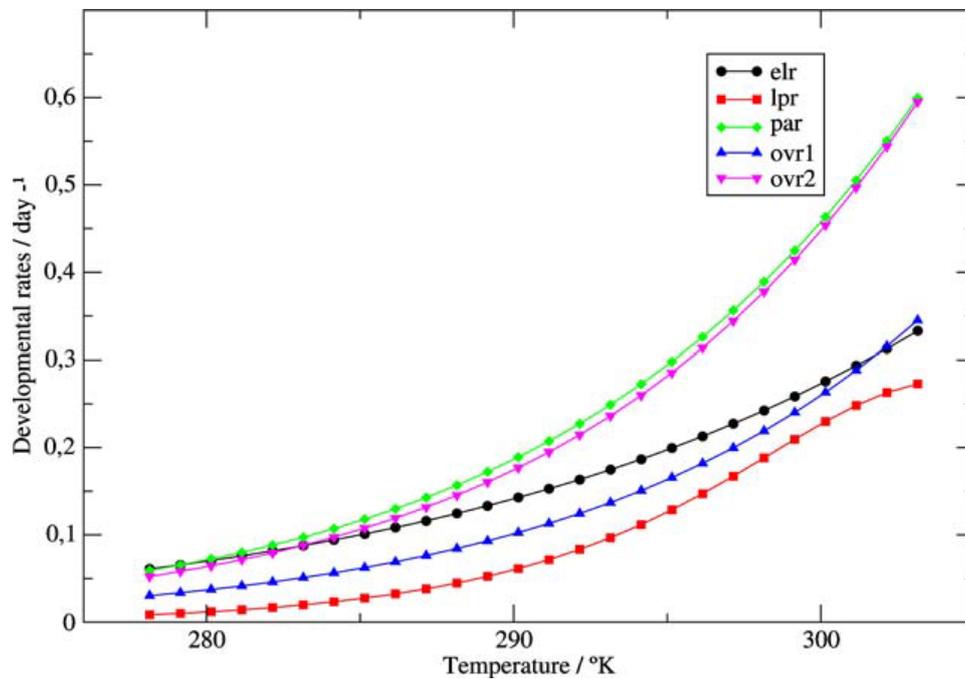


Figura 3.1: Las tasas de desarrollo de acuerdo con la Tabla 3.1 como una función de la temperatura. [10]

es relevante para los estudios de laboratorio, pero en cualquier área urbana el mosquito estará sujeto a los cambios estacionales en la temperatura. En este trabajo adoptó un modelo simple de la variación de temperatura media diaria que contiene sólo el componente determinista de la temperatura. El modelo se toma de Kir-aly y Jnosi (2002)[24] y tiene la forma:

$$T = a + b \cos\left(\frac{2\pi t}{365,25 \text{ dias}} + c\right) \quad (3.8)$$

En el capítulo 4 se verá cómo para Bello, la temperatura influye en los

parámetros y en la evolución del modelo.

Los valores para los parámetros a , b y c son tomados de los registros de temperatura en el período 1980-1990 (cuando *Aedes aegypti* reapareció en Buenos Aires) son: $a = 18.0$ °C; $b = 6.7$ °C y $c = 9,2$. La variación de temperatura durante el día no se tuvo en cuenta en el modelo, manteniendo el modelo simple.

Las simulaciones para el modelo homogéneo (3.4) se llevaron a cabo utilizando la aproximación de Poisson a intervalos de tiempo fijos[25]

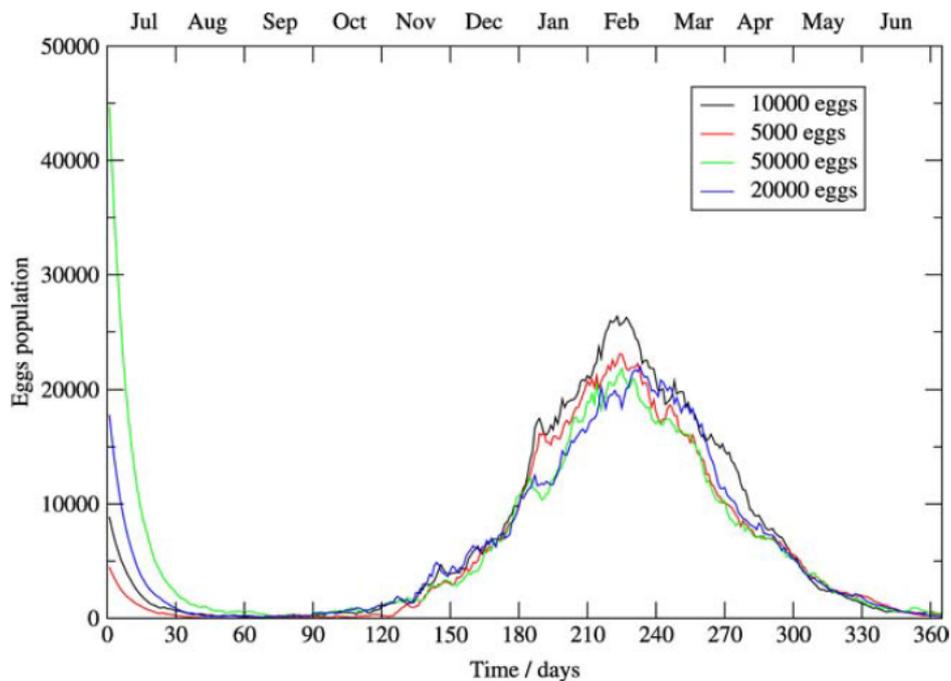


Figura 3.2: Dependencia de la población de huevos con el valor inicial. Los diferentes valores para la subpoblación de huevo se especificaron de manera arbitraria en el día más frío del invierno. Las poblaciones no presentan ninguna sensibilidad observable a las condiciones iniciales cuando el próximo ciclo favorable (primavera–verano) se desarrolla. El ejemplo corresponde a la población de huevos para $BS = 50$. [10]

Estos resultados muestran una fuerte capacidad de regulación del medio ambiente. La capacidad de carga del medio ambiente, como se refleja en el parámetro BS , regula las poblaciones de mosquitos, que, además, muestran poco o ningún recuerdo de la situación de la población un año antes.

En Colombia no se tienen estaciones que se relacionen de esta manera, por ello se mantendrá el valor de B_s definido por Otero.

Se podría decir a este respecto que el potencial reproductivo del *Aedes aegypti* promueve las poblaciones que se encuentran en el comienzo del período favorable (primavera) hasta los límites establecidos por el medio ambiente.[10]

3.1.2. Seguimiento de estimación de los parámetros entomológicos del *Aedes aegypti* y modelizaciones matemáticas

En este artículo Yang[9], plantea un modelo matemático para la población del *aedes aegypti* utilizando un sistema no lineal de 3 ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L &= kf\phi M\left(1 - \frac{L}{C}\right) - (\pi_l + \mu_l) \\ \frac{d}{dt}P &= \pi_l L - (\pi_p + \mu_p) \\ \frac{d}{dt}M &= \pi_p P - \mu_f M\end{aligned}\tag{3.9}$$

Donde L es el número de larvas, P es el número de pupas, M es el número de hembras adultas, π_l es la tasa de cambio de larva a pupa, π_p es la tasa de cambio de pupa a adulto, μ_l , μ_p y μ_f son las tasas de mortalidad de larvas, pupas y adultos, ϕ es la tasa de oviposición, k es el número de huevos que eclosionaron y f es la fracción de huevos que serán hembras.

Estos parámetros entomológicos se hallaron utilizando la función presentada por este mismo autor en 2003[26] y 2009[27], y ajustados con una función de temperatura de grado, m .

$$P_m(T) = \sum_{i=0}^m b_i T^i\tag{3.10}$$

donde T es la temperatura en $^{\circ}\text{C}$ y los coeficientes b_i con $i = 0, 1, 2, \dots, m$ son fijados con el método de estimación de mínimos cuadrados. Los coeficientes para la fase acuática y la hembra adulta se muestran en la tabla.

Parámetro	b_0	b_1	$b - 2$	b_3	b_4
ϕ	-5,400	61,800	$-2,124x10^{-1}$	$1,015x10^{-2}$	$-1,515x10^{-4}$
μ_f	$8,692x10^{-1}$	$-1,590x10^{-1}$	$1,116x10^{-2}$	$-3,408x10^{-4}$	$3,809x10^{-6}$
μ_q	2,130	$-3,797x10^{-1}$	$2,457x10^{-2}$	$-6,778x10^{-4}$	$6,794x10^{-6}$
π_q	$1,310x10^{-1}$	$-5,723x10^{-1}$	$1,164x10^{-2}$	$-1,341x10^{-3}$	$8,723x10^{-5}$

Tabla 3.3: Coeficientes de los parámetros entomológicos para el mosquito hembra y fase acuática

Con estos valores y los hallados experimentalmente se construyen las tablas donde se muestran los parametros entomológicos del *aedes aegypti*, experimentalmente se comprobo que todas las larvas mueren a temperaturas inferiores a 10 °C y superiores a 40 °C, tal como se habia observado en vector topics[28].

T (°C)	$\eta(dias)$	$\sigma_\eta(dias)$	$\mu(dias^{-1})$	$\sigma_\mu(dias^{-1})$
10.00	6.18297	0.49208	0.16173	0.1617
10.00	10.2783	1.83554	0.09729	0.27831
10.00	—	—	—	—
10.00	4.49375	0.12529	0.22253	0.00620
10.38	2.13283	0.11131	0.46886	0.02447
10.45	5.72900	0.15708	0.17455	0.00479
10.45	4.82959	0.35350	0.20706	0.01516
14.74	48.1622	3.43440	0.02076	0.00148
14.84	45.3399	3.79649	0.02206	0.00185
14.92	74.8001	9.14403	0.01337	0.00163
18.86	—	—	—	—
19.04	43.5404	43.8765	0.02297	0.02314
19.18	37.0100	$> 10^5$	0.02702	$> 10^5$
26.56	10.8940	0.43309	0.09179	0.00365
26.84	—	—	—	—
26.85	—	—	—	—
30.83	7.51068	1.53461	0.13314	0.02720
31.61	—	—	—	—
34.95	8.64234	2.07228	0.11571	0.02775
36.47	—	—	—	—
36.55	—	—	—	—
39.95	3.12558	0.07173	0.31994	0.00734
40.16	3.75316	0.08768	0.26644	0.00623
40.64	3.51105	0.17638	0.28482	0.01431

Tabla 3.4: Tiempo promedio de vida η (*días*) y su error σ_η (*días*), la tasa de mortalidad μ (*días*⁻¹) y su error σ_μ (*días*⁻¹) para larvas

T ($^{\circ}\text{C}$)	$\eta(\text{días})$	$\sigma_{\eta}(\text{días})$	$\mu(\text{días}^{-1})$	$\sigma_{\mu}(\text{días}^{-1})$
10.00	—	—	—	—
10.00	—	—	—	—
10.00	—	—	—	—
10.00	—	—	—	—
10.38	—	—	—	—
10.45	—	—	—	—
10.45	—	—	—	—
14.74	-8.2529	5.30102	-0.1212	0.07783
14.84	10.2122	3.07363	0.09792	0.02947
14.92	-1.0085	7.44476	-0.9916	7.31979
18.86	16.9053	11.2444	0.05915	0.03935
19.04	36.4790	33.4569	0.02741	0.02514
19.18	17.7674	4.28964	0.05628	0.01359
26.56	6.91721	3.11579	0.14457	0.06512
26.84	8.98919	38.4055	0.11124	0.47528
26.85	9.57738	11.9611	0.10441	0.13040
30.83	4.65792	1.33522	0.21469	0.06154
31.61	10.9952	162.716	0.09095	1.34594
34.95	4.73055	1.81534	0.21139	0.08112
36.47	7.49772	1.86159	0.13337	0.03312
36.55	5.19600	1.62414	0.19246	0.06016
39.95	—	—	—	—
40.16	—	—	—	—
40.64	—	—	—	—

Tabla 3.5: Tiempo promedio de vida η (*días*) y su error σ_{η} (*días*), la tasa de mortalidad μ (*días*⁻¹) y su error σ_{μ} (*días*⁻¹) para para pupas

Dentro de este intervalo de temperaturas se presenta una tasa de mortalidad que es mostrada en la tabla 3.5, y se resalta el hecho que a 18,86, 26,84, 26,85, 31,61, 36,47 y 36,55 $^{\circ}\text{C}$ todas las larvas sobrevivieron en el experimento. Adicionalmente se puede observar que la mortalidad de la pupas es mayor que la de las larvas, y que las tasas de transición aumentan con la temperatura.

T (°C)	$\eta(dias)$	$\sigma_{\eta}(dias)$	$\mu(dias^{-1})$	$\sigma_{\mu}(dias^{-1})$
10.00	—	—	—	—
10.00	—	—	—	—
10.00	—	—	—	—
10.00	—	—	—	—
10.38	—	—	—	—
10.45	—	—	—	—
10.45	—	—	—	—
14.74	56.1754	2.37911	0.01780	0.00075
14.84	32.4505	0.97845	0.03082	0.00093
14.92	56.3015	3.89307	0.01776	0.00123
18.86	10.3281	0.17539	0.09682	0.00164
19.04	11.9910	0.10279	0.08340	0.00072
19.18	12.4415	0.25025	0.08038	0.00162
26.56	7.83359	0.09920	0.12766	0.00162
26.84	6.85701	0.06939	0.14584	0.1458
26.85	6.08382	0.06355	0.16437	0.00172
30.83	4.86750	0.06065	0.20544	0.00256
31.61	5.85004	0.08189	0.17094	0.00239
34.95	3.91511	0.06784	0.25542	0.00443
36.47	6.66358	0.20162	0.15007	0.00454
36.55	4.81130	0.22707	0.20784	0.00981
39.95	—	—	—	—
40.16	—	—	—	—
40.64	—	—	—	—

Tabla 3.6: El calculo del tiempo de transición η (*días*) y su error σ_{η} (*días*), y la tasa de transición μ (*días*⁻¹) y su error σ_{μ} (*días*⁻¹) para para larvas

T (°C)	$\eta(dias)$	$\sigma_\eta(dias)$	$\mu(dias^{-1})$	$\sigma_\mu(dias^{-1})$
10.00	—	—	—	—
10.00	—	—	—	—
10.00	—	—	—	—
10.00	—	—	—	—
10.38	—	—	—	—
10.45	—	—	—	—
10.45	—	—	—	—
14.74	5.56510	4.38033	0.17969	0.14144
14.84	7.25580	1.80948	0.13782	0.03437
14.92	28.0859	10.3487	0.03561	0.01312
18.86	4.71540	0.32926	0.21207	0.01481
19.04	4.05790	0.21701	0.24643	0.01318
19.18	4.04970	0.50020	0.24693	0.03050
26.56	2.17841	0.20630	0.45905	0.04347
26.84	2.36875	0.15266	0.42216	0.02721
26.85	2.26668	0.15182	0.44117	0.02955
30.83	1.44307	0.17660	0.69297	0.08481
31.61	1.54566	0.18016	0.64697	0.07541
34.95	1.20538	0.14777	0.82961	0.10170
36.47	1.45127	0.41769	0.68905	0.19831
36.55	1.45948	0.43351	0.68518	0.20352
39.95	—	—	—	—
40.16	—	—	—	—
40.64	—	—	—	—

Tabla 3.7: El calculo del tiempo de transición η (*días*) y su error σ_η (*días*), y la tasa de transición μ (*días*⁻¹) y su error σ_μ (*días*⁻¹) para para pupas

La dependencia del numero de huevos y adultos con respecto a la temperatura es evidenciada en las figuras 3.3 y 3.4

Para las condiciones experimentales del proyecto de investigación, variaciones finas de la temperatura no son factibles, por ello se descarta el uso de este modelo.

No obstante, el comportamiento de los mosquitos se evalúan cuantitativamente con base en la figura 3.3 luego de una nueva fase experimental.

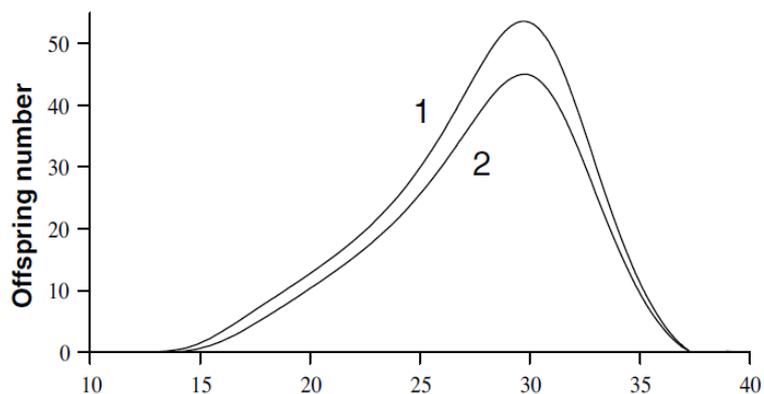


Figura 3.3: Número de crías Q_0 como función de la temperatura, con $kf = 0,25$. El modelado asume solo un habitáculo para larvas y pupas (1) y 2 habitáculos distintos para larvas y pupas (2).[9]

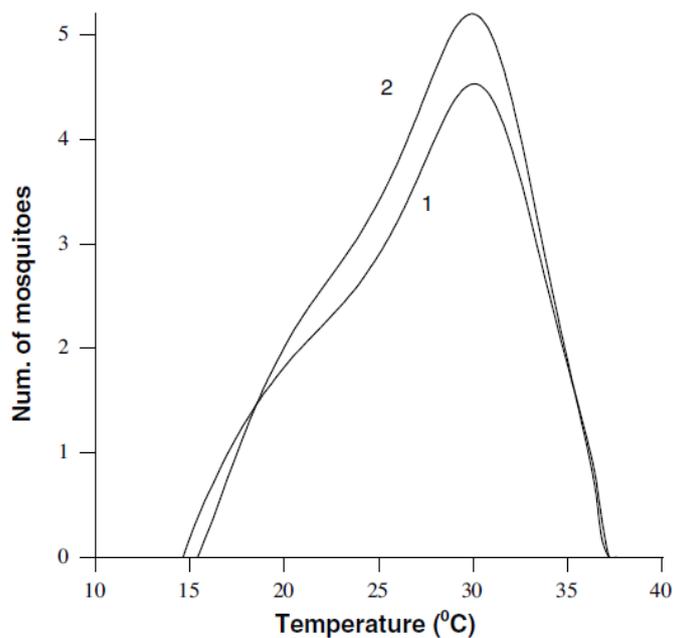


Figura 3.4: Número de mosquitos M como función de la temperatura, con $kf = 0,25$ y $C = 1$. El modelado asume solo un habitáculo para larvas y pupas (1) y 2 habitáculos distintos para larvas y pupas (2)[9]

Estos resultados corroboran estudios anteriores donde se demuestra una dependencia de la población del *aedes* y la temperatura.

3.1.3. Dinámica estacional y no estacional del *Aedes aegypti* en Río de Janeiro, Brasil: Adaptación de los modelos matemáticos a los datos de la trampa

En este artículo se revisa un conjunto de datos procedentes de un estudio realizado en Río de Janeiro entre septiembre de 2006 y marzo de 2008[29], estos datos son apropiados y comparados con distintos modelos mecanicistas del *Aedes aegypti*. El objetivo de este estudio fue validar un conjunto representativo de modelos entomológicos comparando los datos predichos y observados. A partir de este, se discute la validez de las hipótesis biológicas ubicuas presentes en la literatura de modelado del dengue y discutir el impacto de los patrones observados en la dinámica de la fiebre del dengue en Río de Janeiro. El modelo sobre el que se trabajó es el siguiente.

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= \sigma_0 W - [\sigma_1 + m_1]E \\
 \frac{dL}{dt} &= \sigma_1 E - [\sigma_2 + m_2]L \\
 \frac{dP}{dt} &= \sigma_2 L - [\sigma_3 + m_3]P \\
 \frac{dW}{dt} &= \sigma_3 P - m_4 W
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Se implementaron variaciones de este modelo, que combina características de diferentes modelos publicados que describen la dinámica poblacional del *A.aegypti*. Se diferencian en cómo se representan la dependencia de la temperatura las tasas de desarrollo y la regulación de la población dependiente de la densidad. Se consideran además modelos con capacidad de carga constante y modelos con capacidad de carga variables en el tiempo. Modelos candidatos se limitan a los modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias, que son los que componen la mayoría de los modelos de dengue.

Con respecto a dependencia de las tasas de transición con la temperatura No hay controversia con respecto a la importancia de la temperatura sobre el desarrollo del *A.aegypti*. Sin embargo, los modelos difieren en la forma en que implementan la dependencia de las tasas de transición con la temperatura.

Por ejemplo, Ferreira y Yang [30] utilizan una función de tres pasos, mientras que Yang et al. [31] utilizan funciones polinómicas derivados de los datos empíricos. Focks et al.[32] y Otero et al. [10] utilizan una representación mecanicista, la ecuación termodinámica. Luz et al. [33] utiliza funciones sinusoidales para imitar las variaciones de temperatura estacionales. Se introdujeron dos tipos de tasas de transición que dependen de la temperatura para crear extensiones del modelo básico (Eq. 3.11). El objetivo fue comparar y evaluar la sensibilidad del modelo a funciones alternativas presentes en

la literatura. La primera es la función de tres pasos adaptado de Ferreira y Yang [30], donde las tasas de transición asumen uno de los tres valores fijos, dependiendo de la temperatura media del aire. si

$$\begin{aligned} T < 22^\circ\text{C} &= \sigma_{il} \\ 22^\circ\text{C} \leq T \leq 26^\circ\text{C} &= \sigma_{im} \\ T > 26^\circ\text{C} &= \sigma_{ih} \end{aligned} \quad (3.12)$$

La razón es que en las ciudades tropicales, los períodos de tiempo se pueden dividir en condiciones favorables o desfavorables para el desarrollo del mosquito de acuerdo a la temperatura media del aire. Si la temperatura del aire es inferior 22°C , el desarrollo se retarda, tomando una media de 11 días la evolución de larva a pupa. Esto está de acuerdo con los experimentos de campo realizados cerca de la zona de estudio que muestran que bajo este régimen de temperatura, las larvas todavía estarían entre la segunda y tercera etapa después de 7 días desde la eclosión. Cuando la temperatura aumenta, la función predice un aumento gradual en la tasa de desarrollo. Desarrollo más rápido a temperaturas más altas (hasta 35°C) se apoya en datos de laboratorio [31], pero contradice los datos observados.

La segunda función es la ecuación termodinámica parametrizada para el *aedes aegypti*

$$R_D(T) = R_D(298^\circ\text{K}) \frac{\left(\frac{T}{298^\circ\text{K}}\right) \exp\left(\left(\frac{\Delta H_A}{R}\right)\left(\frac{1}{298^\circ\text{K}} - \frac{1}{T}\right)\right)}{\left(\frac{\Delta H_H}{R}\right)\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T}\right)} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\Delta H_H}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T}\right)\right)} \quad (3.13)$$

En este estudio, se introdujo la dependencia de la regulación de la densidad ya sea en la tasa de oviposición[30] o en la tasa de eclosión de los huevos [10] en la forma de una función logística. respectivamente:

$$\sigma_0 = \sigma_0^{max} \left[1 - \frac{E}{K}\right] \quad (3.14)$$

o

$$\sigma_1 = \sigma_1^{max} \left[1 - \frac{L}{K}\right] \quad (3.15)$$

donde K es la capacidad de carga, σ_0^{max} es la máxima tasa de oviposición y σ_1^{max} es la máxima tasas de eclosión. La capacidad de carga, K, se consideró inicialmente como un parámetro de tiempo invariable. Formulaciones posteriores permitieron la variación temporal mediante la partición de la ventana de tiempo de datos en k partes y la calibración de K por separado para cada uno. Los parámetros utilizados se muestran en la tabla 3.8.

Parámetro	Valor	Referencias
Tasa de oviposición	$1,0\text{día}^{-1}$	Ferreira and Yang(2003)
Tasa de desarrollo: Modelos con funcion paso.		
Tasa de eclosión de huevos(σ_1)	$(l, m, h) = (1/4, 5, 1/3, 3, 1/2)\text{día}^{-1a}$	
Tasa de pupación(σ_2)	$(l, m, h) = (1/11, 7, 1/8, 1/4, 4)\text{día}^{-1a}$	Ferreira and Yang(2003)
Tasa de emergencia(σ_3)	$(l, m, h) = (1/4, 6, 1/3, 1, 1/6)\text{día}^{-1a}$	
Tasas de desarrollo: Modelos con funciones cineticas		
Tasa de eclosión de huevos(σ_1)	$\sigma(298), a_1, b_1, T_{\frac{1}{2}} = (0,24, 10798, 100000, 14184)_b$	Sharpe and DeMichele (1977), Schoofield et al. (1981) and Focks et al. (1993a)
Tasa de pupación(σ_2)	$\sigma(298), a_1, b_1, T_{\frac{1}{2}} = (0,2088, 26018, 55990, 304,6)_b$	
Tasa de emergencia(σ_3)	$\sigma(298), a_1, b_1, T_{\frac{1}{2}} = (0,384, 14931, -472379, 148)_b$	
Tasa de mortalidad de huevos(m_1)	$1/100\text{día}^{-1}$	
Tasa de mortalidad de larvas(m_2)	$1/3\text{día}^{-1}$	
Tasa de mortalidad de pupas(m_3)	$1/70\text{día}^{-1}$	Ferreira and Yang(2003)
Tasa de mortalidad de adultos(m_4)	$1/1,17,5\text{día}^{-1}$	
Capacidad de carga (K)	Fijada huevos/trampa/semana	

Tabla 3.8: Símbolos usados en los modelos y sus valores

La combinación de las funciones de temperatura y densidad descritos anteriormente llevo cuatro modelos, llamados TSE, TSL, TCE y TCL.

1. TSE: La temperatura depende de la función paso + la densidad depende de la oviposición, ecuación 3.12 + ecuación 3.14
2. TCE: Función termodinámica + la densidad depende de la oviposición, ecuación 3.13 + ecuación 3.14
3. TSL: La temperatura depende de la función paso + la densidad depende del desarrollo larval, ecuación 3.12 + ecuación 3.15
4. TCL: Función termodinámica + la densidad depende del desarrollo larval, ecuación 3.13 + ecuación 3.15

Los modelos fueron simulados y calibrados usando TerraME, un entorno de programación de código abierto para el modelado del dinámica espacial. La figura 3.5 muestra las mejores curvas de ajuste generados por los cuatro modelos con K constante.

En general, todos los modelos predicen una mayor abundancia de mosquitos durante el verano y los meses de otoño (enero a mayo), no detectan la ya elevada abundancia de mosquitos observado durante la primavera, especialmente en el primer año, en todos los barrios. La primavera en Río de Janeiro se caracteriza por temperaturas medias que van desde 23 a 26.°, un rango de temperatura a la que el desarrollo *A.aegypti* es muy sensible.

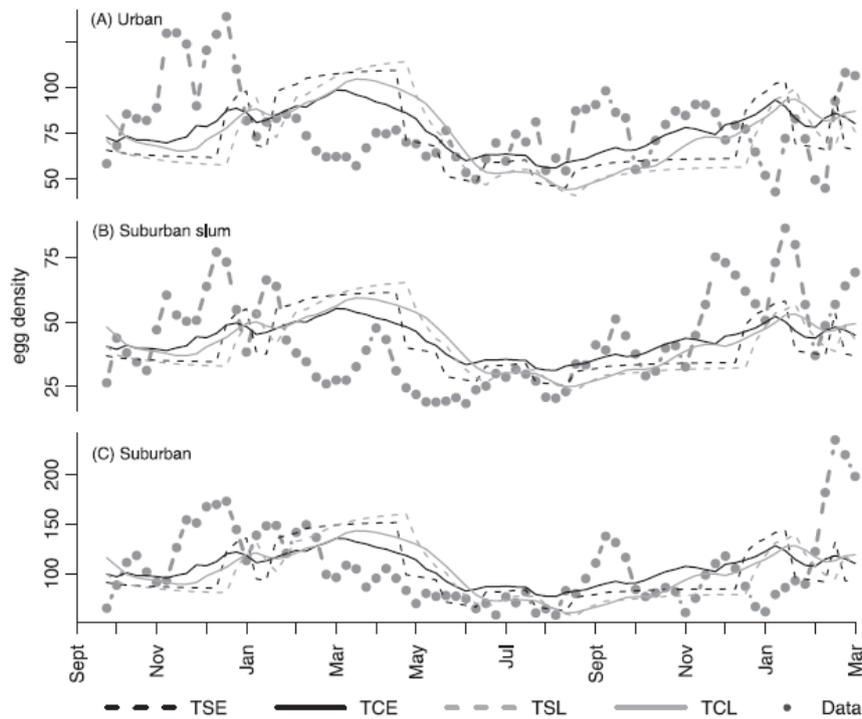


Figura 3.5: Series de tiempo observadas y previstas del *Aedes aegypti* para los tres barrios de Río de Janeiro, de acuerdo con el modelo TCE con 6 valores de K (TCE t ($k = 6$)) y el modelo sinusoidal (TCE t (s)).

3.2. Las matrices de proyección

Representan una alternativa muy importante al uso de tablas de vida en estudios demográficos. Al igual que las tablas de vida, combinan información sobre la supervivencia y la fertilidad de una población estructurada y sirven también para examinar la dinámica de la población a lo largo del tiempo, es decir, para "proyectar" la evolución de la estructura de la población en el futuro.

Existen 2 tipos.

1. *Matriz de Leslie*: para estructuras de edades.
2. *Matrices de Lefkovitch*: para estructuras de tamaño, de estadios, etapas, o mixtas.

Son matrices cuadradas. Su dimensión es igual al número de clases de edad o estadios.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Cada elemento a_{ij} representa la contribución de los individuos de la clase j en el censo actual, al conjunto de individuos de la clase i en el censo siguiente.

Elementos:

F_j : reproducción

P_{ij} : probabilidad de supervivencia

$G - ij$: probabilidad de transición [=cambio de estado]

Las tasas vitales se combinan para formar los elementos de la matriz.

Estructura de edades (matriz de Leslie)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & F_2 & F_3 & F_4 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$P_j = s_j$$

Estructura de estadios o fases (matriz de Lefkovitch)

$$A = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & F_{41} \\ G_{21} & P_{22} & 0 & 0 \\ 0 & G_{32} & P_{33} & 0 \\ 0 & 0 & G_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$P_{ij} = s_j(1 - g_{ij}) \quad (3.19)$$

$$G_{ij} = s_j g_{ij} \quad (3.20)$$

Calculo de F_j :

Censo pre-reproductivo

$$F_j = s_0 f_j \quad (\text{Leslie y Lefkovitch}) \quad (3.21)$$

Censo post-reproductivo

$$F_j = s_j f_{j+1} \quad (\text{Leslie}) \quad (3.22)$$

$$F_j = s_j f_j \quad (\text{Lefkovitch}) \quad (3.23)$$

Una vez calculada la matriz de transición se realiza la proyección de la población de la siguiente manera.[34]

$$\mathbf{n}(\mathbf{t} + 1) = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{n}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t)n_1(t) & a_{12}(t)n_2(t) & a_{13}(t)n_3(t) \\ a_{21}(t)n_1(t) & a_{22}(t)n_2(t) & a_{23}(t)n_3(t) \\ a_{31}(t)n_1(t) & a_{32}(t)n_2(t) & a_{33}(t)n_3(t) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

La ecuación:

$$\mathbf{n}(\mathbf{n} + 1) = \mathbf{A}\mathbf{n}(\mathbf{t}) \quad (3.26)$$

es análoga a:

$$N_{t+1} = \lambda N_t \quad (3.27)$$

[N_t es igual a la suma de los elementos de $n(t)$]

que es la ecuación del modelo de crecimiento exponencial, para varios periodos de tiempo. El cálculo matricial nos permite obtener λ como el autovalor dominante de la matriz \mathbf{A} , que tiene relación directa con la estabilidad de la solución de la ecuación diferencial que rige el comportamiento poblacional del mosquito o el polo dominante del sistema linealizado desde el enfoque de control como se verá en el capítulo 4.

3.2.1. Dinámica poblacional del *Aedes aegypti* estructurada por etapas

En este artículo Yusoff[4] construye una matriz de transición utilizando la clasificación hecha por Otero[10] del ciclo de vida del *Aedes aegypti* y la versión lineal y discreta del sistema de ecuaciones utilizada por este para describir las etapas de transición del mosquito. Obsérvese que este modelo hace una representación discretizada del sistema de ecuaciones diferenciales de Otero. La aproximación discreta de esta ecuación no involucra el tiempo de muestreo explícitamente, pero se asume 1.

$$\begin{aligned} E(t+1) &= egn(ovr1xA1(t) + ovr2xA2(t)) - mexE(t) - erlxE(t) \\ L(t+1) &= erlxE(t) - mlxL(t) - lprxL(t) \\ P(t+1) &= lprxL(t) - mpXP(t) - parXP(t) \\ A1(t+1) &= parXP(t) - maxA1(t) - ovr1xA1(t) \\ A2(t+1) &= ovr1xA1(t) - maxA2(t) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Donde E es el número de huevos, L es el número de larvas, P es el número de Pupas, A1 es el número de hembras que no han puesto huevos, A2 es el

número de hembras que han puesto huevos. En este sistema los parámetros toman los mismos valores utilizados por Otero

Los parámetros que no dependen de la temperatura son: egn , número de huevos durante cada oviposición (63 huevos /oviposición), me mortalidad de huevos (0.011/d) y ma mortalidad de adultos (0.091/d). La mortalidad de larvas (ml) y de pupas (mp) dependen de la temperatura y estan dadas por la ecuación (3.2). Las tasas de desarrollo: tasas de eclosión de huevos (erl), pupación (lpr), emergencia de adultos (par) y los ciclos gonotropicos ($ovr1$ y $ovr2$). Son igualmente calculadas utilizando el modelo termodinámico presentado por Sharpe and DeMichele[21] y fue mas tarde simplificado por Schoofield[22] ecuacion(3.3)[10].

Para hallar los G_i y los P_i utiliza unas variaciones de la ecuaciones (3.19) y (3.20) hechas por Boardman[35] los nuevos G_i y P_i son:

$$G_i = \frac{s_i^{d_i}(1 - s_i)}{1 - s_i^{d_i}} \quad (3.29)$$

$$P_i = \frac{s_i(1 - s_i^{d_i-1})}{1 - s_i^{d_i}} \quad (3.30)$$

Donde s_i es la rata de supervivencia en el estado i y d_i es la duración en el estado i .

Utilizando (3.3) realiza el calculo de las tasas de desarrollo para la temperatura promedio de Malasia 27,2°C, obteniendo los valores mostrados en la tabla 3.9.

Estado	$R_D(27,2^\circ\text{C})$
Huevo	0.27901
Larva	0.23376
Pupa	0.47149
Adulto(1)	10.26801
Adult0(2)	20.46158

Tabla 3.9: Tasas de desarrollo a 27,2°C

Para hallar las soluciones de las ecuaciones (3.29) y (3.30), se necesita conocer los valores de s_i que es la probabilidad de supervivencia en el estado i , $(1 - m_i)$, y, d_i la duración del mosquito en el estado i , para calcular este último utiliza la ecuación

$$CD_t = \sum_{t=0}^n R_D(T_t) \quad (3.31)$$

Que es el acumulado de las tasas de desarrollo diarias a una temperatura determinada. Con estos valores se calcula la duración del mosquito en cada etapa y la probabilidad de supervivencia en esta etapa y se obtiene la siguiente tabla.

Estado	Edad(días)	Supervivencia diaria	Huevos puestos
Huevos	< 4	0.9890	0
Larvas	4 – 8	0.9898	0
Pupas	9 – 10	0.9898	0
Adultos(1)	11 – 14	0.9100	8
Adultos(2)	15 – 24	0.9100	16

Tabla 3.10: Edad, la supervivencia diaria y el número de huevos puestos por día para cada etapa

La matriz de Lefkovitch para el *Aedes aegypti* a una temperatura de 27.2 grados es.

$$A = \begin{bmatrix} 0,74584 & 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0,24316 & 0,79588 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,19392 & 0,49744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,49240 & 0,71360 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,19640 & 0,85260 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Los valores propios de esta matriz son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1,44203 \\ \lambda_2 &= 0,7847416 + 0,65795i \\ \lambda_3 &= 0,78474 - 0,65795i \\ \lambda_4 &= 0,13616 \\ \lambda_5 &= 0,45769 \end{aligned}$$

El mayor valor real positivo es mayor es λ_1 que indica que la población puede incrementarse un 44 % después de cada ciclo. Este crecimiento es ilógico y se sustenta este resultado en el hecho que no se tuvo en cuenta las variaciones de temperatura y el hacinamiento larval entre otras.

En analogía con un sistema de control, los polos de este sistema esta en el semieje positivo del eje lo que significa que el sistema es inestable.

Esto se debe a que en este modelo no se incluye un término de control como el usado en Otero para garantizar la convergencia del sistema completo de ecuaciones diferenciales no lineales de la ecuación 3.4.

De esta manera, puesto que no existe una variable de control en la ecuación para los huevos, el sistema puede diverger en su solución analítica y

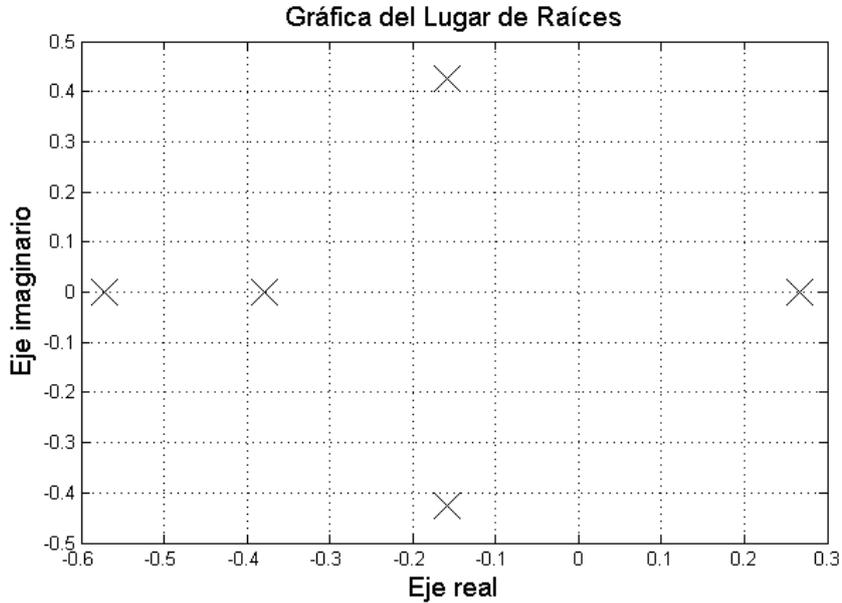


Figura 3.6: Raíces del sistema de Yussof

numérica de acuerdo a las condiciones de temperatura externas.

Se propone mejorar el modelo creando uno que dependa del clima para modificar las ecuaciones de eclosión de huevos y la supervivencia de las larvas.

3.2.2. Simulación de la dinámica de poblacional del *Aedes aegypti* mediante un modelo que depende del clima

En este trabajo Yussoff y su equipo proponen un modelo que dependa de la temperatura, proponiendo una función que dependiera de la lluvia para determinar la tasa de eclosión de huevos bajo varios supuestos. Esto debido a que existen varios estudios que relacionan el clima y el incremento de la población del Aedes (Focks[24], Otero[5], Tan[36]).

Para este trabajo, sólo el proceso de eclosión de los huevos (G_{21}) en (3.18) es considerado, mientras que todos los demás parámetros se mantienen constantes en la temperatura especificada en el trabajo anterior. El mosquito hembra pone los huevos en el borde del agua y se necesitan las inundaciones para poder incubar [5]. Por lo tanto, la función con respecto al tiempo de la eclosión de los huevos. Se puede representar de la siguiente manera

$$G_{21}(t) = s_1 c_1 \left(\frac{wd(t-1)}{wd_{max}} \right)^{c_2} \quad (3.33)$$

Donde $wd(t)$ es la profundidad del agua en el momento t y wd_{max} es la altura máxima del lugar de reproducción. Los parámetros $c1$ y $c2$ son mayores que cero. La elección de los valores de $c1$ y $c2$ son basados en las siguientes condiciones:

1. Cuando $wd(t - 1) = 0$, $G_{21}(t) = 0$, no ocurre eclosión.
2. Cuando $wd(t - 1) = wd_{max}$, la eclosión de los huevos supervivientes es igual a la tasa de desarrollo a la temperatura especificada.[4]
3. El valor de $c2$ es seleccionado tal que la eclosión se incremente más rápidamente para altos valores de wd , por tanto, se creará una función cuadrática similar

Ahora, la matriz de transición para este modelo será:

$$A = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & F_{41} & F_{51} \\ G_{21}(t) & P_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{32} & P_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{43} & P_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{53} & P_{55} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Para hallar el mejor valor de $C2$ se procedió de la siguiente manera, se simulo la población semanal del mosquito durante 2 años, el mejor valor de $c2$ se seleccionó como aquel que dio como resultado una población de larvas semejante al AHI reportado. A continuación, con el valor $C2$ elegido, se determinó la población de modelado de mosquito hembra. En todas las simulaciones, se utilizaron varios valores iniciales de huevos con el fin de obtener un número razonable para ser tabulados. Se descubrió que diferentes valores iniciales no tienen significancia en el resultado obtenido y esto confirmó el mismo resultado hallado por Otero[10]

$C2 = 5$ fue el mejor valor hallado para el modelado de la población de las larvas, en comparación con los datos del IAH. Esta comparación fue hecha representando los datos obtenidos como una función seno dada de la siguiente forma.

$$\alpha(t) = a + \sum_{k=1}^n b_k \sin(2k\omega t + \phi_1) \quad (3.35)$$

En (50), $\omega = p/52$, teniendo 52 semanas en un año como un período. El valor de k clasifica la función seno para ser de orden k armónico.

La figura 3.7 muestra los resultados de la comparación de población de larvas con el índice AHI para el año 2008.

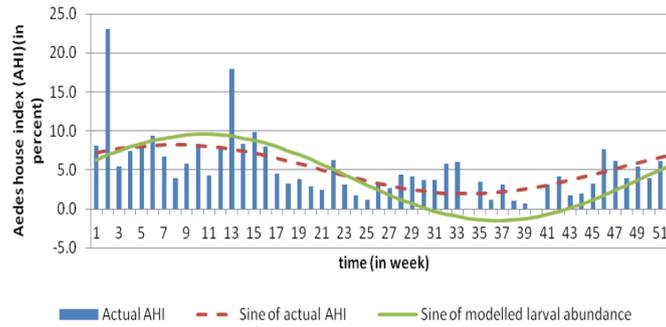


Figura 3.7: Comparación de IAH real con la población de larvas modelado para año 2008

La figura 3.8 muestra la comparación de la simulación de la población de adultos para distintos valores de k y los valores obtenidos en los censos realizados. Cabe mencionar que, el resultado presentado no representa a la población actual, pero le da la tendencia de la abundancia del mosquito. Se observa una gran aproximación de la simulación y los datos reportados por las dependencias de salud de Malasia.

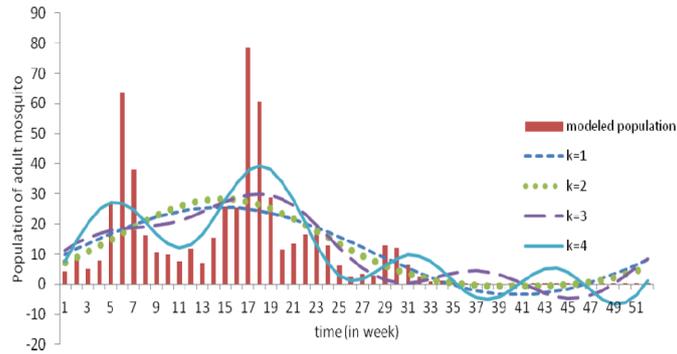


Figura 3.8: Modelo de la población de Aedes para el año 2008

Capítulo 4

Modelos Poblacionales del *Aedes Aegypti* para el municipio de Bello

4.1. Solución Analítica

Se hallará la solución analítica de los modelos estocásticos planteados por Otero (Un modelo estocástico de la dinámica poblacional del *Aedes Aegypti*: Formulación y Aplicación a una ciudad con Clima Templado. sección 3.1.1) y Lana (Dinámica estacional y no estacional del *Aedes aegypti* en Río de Janeiro, Brasil: Adaptación de los modelos matemáticos a los datos de la trampa. sección 3.1.3) sujeto a las condiciones climáticas de Bello fig 4.1.

Para hallar las tasas de transición se utiliza la ecuación termodinámica propuesta por Schoofield [22] y los coeficientes para el modelo de maduración desarrollado por Focks [32]

La ecuación termodinámica es la expresada en la ecuación (3.3)

$$R_D(T) = R_D(298^\circ K) \frac{\left(\frac{T}{298^\circ K}\right) \exp\left(\left(\frac{\Delta H_A}{R}\right)\left(\frac{1}{298^\circ K} - \frac{1}{T}\right)\right)}{1 + \exp\left(\left(\frac{\Delta H_H}{R}\right)\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right)}$$

Los coeficientes para esta ecuación son los que aparecen en la tabla 4.1:

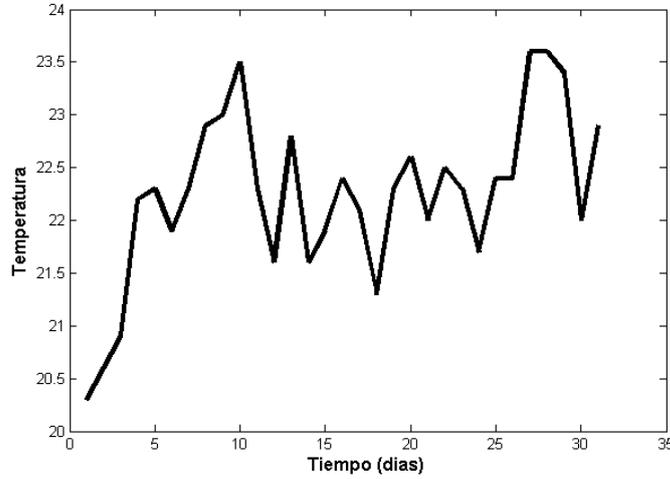


Figura 4.1: Temperatura en el municipio de Bello para el mes de diciembre de 2012, registrado en el centro meterológico de Tulio Ospina (IDEAM)

Ciclo de Desarrollo	$R_D(t)$	$R_D(298^\circ\text{K})$	ΔH_A	ΔH_H	$T_{\frac{1}{2}}$
Eclosión de huevos	erl	0.24	10798	100000	14184
Desarrollo larval	lpr	0.2088	26018	55990	304.6
Desarrollo pupal	par	0.384	14931	- 472379	148
Ciclo gonotrofico(A1)	ovr1	0.216	15725	1756481	447.2
Ciclo gonotrofico(A2)	ovr2	0.372	15725	1756481	447.2

Tabla 4.1: Coeficientes para el modelo enzimático de maduración del municipio de Bello(Son característicos de la especie)

Estas tasas de desarrollo aumentan con la temperatura como se puede observar en la figura 4.2.

La variación de estas tasas de desarrollo a la temperatura de Bello se observa en la figura 4.3, se puede ver que los cambios de las tasas de desarrollo es poca con en el transcurso del tiempo debido a que las fluctuaciones de la temperatura en Bello son pequeñas y la temperatura tiende a ser constante.

Con los valores de las tablas 3.8 y 4.1 se halla la solución analítica para el modelo estocástico de Otero y los modelos TCE,TCL,TSE y TSL planteados por Lana.

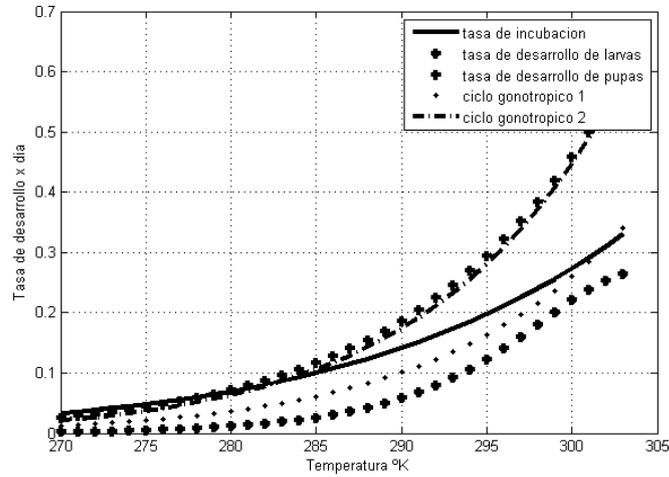


Figura 4.2: Las tasas de desarrollo de acuerdo con la tabla 4.1 como función de la temperatura

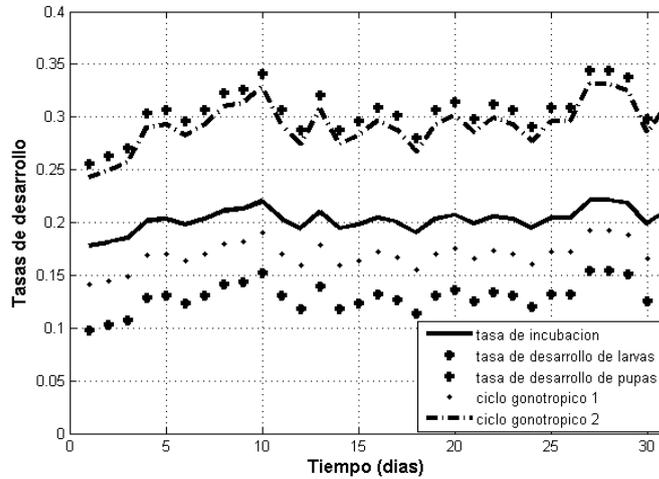


Figura 4.3: Variación de las tasas de desarrollo en función de la temperatura diaria de Bello

4.1.1. Solución analítica del modelo estocástico de Otero para el municipio de Bello

Para hallar la solución analítica de este modelo se utilizara el método de aproximación de Adomian visto en la sección 2.2.1.

En el sistema de ecuaciones diferenciales que representa este modelo (ec.

3.3) existe un término no lineal $\alpha x L^2$ en la segunda ecuación y para hallar la solución del sistema se debe hallar los A_n del término no lineal. El algoritmo para hallar los A_n es el expresado en la ecuación (2.11)

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(u_0) \\
A_1 &= u_1 f^{(1)}(u_0) \\
A_2 &= u_2 f^{(1)}(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 f^{(2)}(u_0) \\
A_3 &= u_3 f^{(1)}(u_0) + u_1 u_2 f^{(2)}(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 f^{(3)}(u_0) \\
A_4 &= u_4 f^{(1)}(u_0) + (u_1 u_3 + \frac{1}{2!} u_2^2) f^{(2)}(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 f^{(3)}(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 f^{(4)}(u_0) \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Para un término cuadrático tenemos.

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0^2 \\
A_1 &= 2u_0 u_1 \\
A_2 &= u_1^2 + 2u_0 u_2 \\
A_3 &= 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2 \\
A_4 &= u_2^2 + 2u_1 u_3 + 2u_0 u_4
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Para el término no lineal del modelo tendríamos

$$\begin{aligned}
A_0 &= L_0^2 \\
A_1 &= 2L_0 L_1 \\
A_2 &= L_1^2 + 2L_0 L_2 \\
A_3 &= 2L_0 L_3 + 2L_1 L_2 \\
A_4 &= L_2^2 + 2L_1 L_3 + 2L_0 L_4
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Estos términos son reemplazados en la ecuación recurrente (2.13) y (2.14), para hallar la solución al sistema de ecuaciones y suponiendo unas condiciones iniciales $E_0, L_0, P_0, A1_0$ y $A2_0$ para las variables $E(t), L(t), P(t), A1(t)$ y $A2(t)$ los y_n del sistema son :

$$\begin{aligned}
E_0 &= E_0 \\
L_0 &= L_0 \\
P_0 &= P_0 \\
A1_0 &= A1_0 \\
A2_0 &= A2_0 \\
E_1 &= (-me - erl(1 - \gamma(L)))E_0 + (egn * ovr1)A1_0 + (egn * ovr2)A2_0)t \\
L_1 &= (-\alpha * L_0^2 + (ml + lpr) * E_0 - (ml + lpr) * L_0)t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= (lpr * L_0 - (mp + par) * P_0)t \\
A1_1 &= (-(ma + ovr1) * A1_0 + (par * \frac{ef}{2}) * P_0)t \\
A2_1 &= (ovr1 * A1_0 - ma * A2_0)t \tag{4.4} \\
E_2 &= ((me - erl(1 - \gamma(L)))^2 E_0 - (me - erl(1 - \gamma(L)))(egn * ovr1)A1_0 \\
&\quad - (me - erl(1 - \gamma(L)))(egn * ovr2)A2_0 - (egn * ovr1)(-(ma + ovr1)A1_0 \\
&\quad + ovr1(egn * ovr2)A1_0 + (egn * ovr1)(par * \frac{ef}{2})P_0 - ma(egn * ovr2)A2_0) \frac{t^2}{2} \\
L_2 &= (2\alpha^2 * L_0^3 - (ml + lpr)^2 * E_0 + (ml + lpr)^2 * L_0) - \alpha(me - erl(1 - \gamma(L)))E_0 \\
&\quad + (ml + lpr)(egn * ovr1)A1_0 + (ml + lpr)(egn * ovr2)A2_0 + 3\alpha(ml + lpr) * L_0^2 \\
&\quad - 2\alpha(ml + lpr) * E_0 * L_0^2 \frac{t^2}{2} \\
P_2 &= ((mp + par)^2 * P_0 - (mp + par)lpr * L_0 - \alpha lpr * L_0^2 - (ml + lpr)lpr * L_0 \\
&\quad + (ml + lpr)lpr * E_0) \frac{t^2}{2} \\
A1_2 &= ((ma + ovr1)^2 * A1_0 - (ma + ovr1)(par * \frac{ef}{2}) * P_0 + (par * \frac{ef}{2})lpr * L_0 \\
&\quad + (par * \frac{ef}{2})(mp + par) * P_0) \frac{t^2}{2} \\
A2_2 &= (ma^2 * A2_0 - ma * ovr1 * A1_0 - (ma + ovr1)ovr1 * A1_0 + \frac{ef}{2} * ovr1 * P_0) \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

La solución al sistema sería:

$$\begin{aligned}
E &= E_0 + (-(me - erl(1 - \gamma(L)))E_0 + (egn * ovr1)A1_0 + (egn * ovr2)A2_0)t \\
&\quad + ((me - erl(1 - \gamma(L)))^2 E_0 - (me - erl(1 - \gamma(L)))(egn * ovr1)A1_0 \\
&\quad - (me - erl(1 - \gamma(L)))(egn * ovr2)A2_0 - (egn * ovr1)(-(ma + ovr1)A1_0 \\
&\quad + ovr1(egn * ovr2)A1_0 + (egn * ovr1)(par * \frac{ef}{2})P_0 - ma(egn * ovr2)A2_0) \frac{t^2}{2} \\
L &= L_0 + (-\alpha * L_0^2 + (ml + lpr) * E_0 - (ml + lpr) * L_0)t + (2\alpha^2 * L_0^3 - (ml + lpr)^2 * E_0 \\
&\quad + (ml + lpr)^2 * L_0) - \alpha(me - erl(1 - \gamma(L)))E_0 + (ml + lpr)(egn * ovr1)A1_0 \\
&\quad + (ml + lpr)(egn * ovr2)A2_0 + 3\alpha(ml + lpr) * L_0^2 - 2\alpha(ml + lpr) * E_0 * L_0^2 \frac{t^2}{2} \\
P &= P_0 + (lpr * L_0 - (mp + par) * P_0)t + ((mp + par)^2 * P_0 - (mp + par)lpr * L_0 \\
&\quad - \alpha lpr * L_0^2 - (ml + lpr)lpr * L_0 + (ml + lpr)lpr * E_0) \frac{t^2}{2} \tag{4.5} \\
A1 &= A1_0 + (-(ma + ovr1) * A1_0 + (par * \frac{ef}{2}) * P_0)t + ((ma + ovr1)^2 * A1_0 \\
&\quad - (ma + ovr1)(par * \frac{ef}{2}) * P_0 + (par * \frac{ef}{2})lpr * L_0 + (par * \frac{ef}{2})(mp + par) * P_0) \frac{t^2}{2} \\
A2 &= A2_0 + (ovr1 * A1_0 - ma * A2_0)t + (ma^2 * A2_0 - ma * ovr1 * A1_0
\end{aligned}$$

$$- (ma + ovr1)ovr1 * A1_0 + \frac{ef}{2} * ovr1 * P_0) \frac{t^2}{2}$$

Remplazando los datos de la tabla 4.1 y los datos de temperatura de la figura 4.1 en la ecuación (3.3) se obtienen los valores para los coeficientes de (4.5), la solución para el sistema se muestra en la figura 4.4.

En este caso y las demás simulaciones las condiciones iniciales del sistema se toman de los datos experimentales tomados en el laboratorio de la SIU por la Doctora Sair Arboleda.

Estos valores son:

$$E_0 = 162$$

$$L_0 = 30$$

$$P_0 = 12$$

$$A1_0 = 1$$

$$A2_0 = 1$$

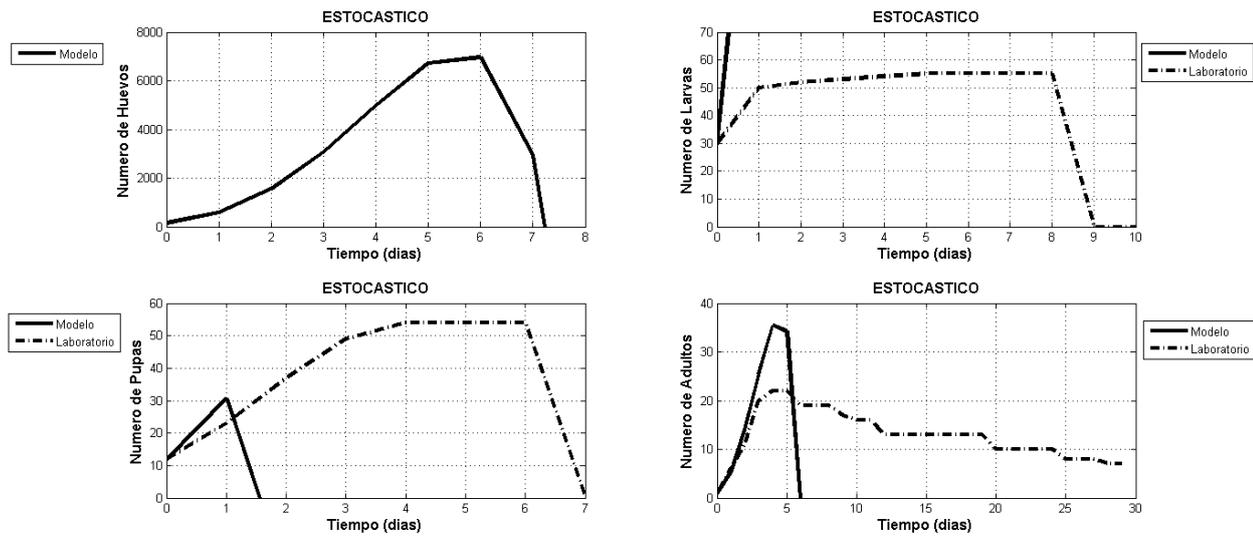


Figura 4.4: Poblaciones de Huevos, Larvas, Pupas y Adultos, utilizando las condiciones iniciales del laboratorio de la SIU.

<i>Tiempo</i>	<i>Huevos</i>	<i>Larva</i>	<i>Pupas</i>	<i>Adultos1</i>	<i>Adultos2</i>
0	166,0	75,0	54,0	22,0	22,0
1,0	692,0	866,0	33,9	22,2	23,2
2,0	$1,23 \cdot 10^3$	$3,79 \cdot 10^3$	-14,3	21,6	24,6
3,0	$1,99 \cdot 10^3$	$8,89 \cdot 10^3$	-113,0	19,9	27,3
4,0	$2,6 \cdot 10^3$	$1,61 \cdot 10^4$	-236,0	16,7	29,3
5,0	$3,05 \cdot 10^3$	$2,54 \cdot 10^4$	-369,0	12,6	30,4
6,0	$3,77 \cdot 10^3$	$3,7 \cdot 10^4$	-577,0	6,57	33,2
7,0	$4,68 \cdot 10^3$	$5,08 \cdot 10^4$	-861,0	-2,05	37,2
8,0	$5,37 \cdot 10^3$	$6,67 \cdot 10^4$	$-1,15 \cdot 10^3$	-11,3	40,1
9,0	$6,43 \cdot 10^3$	$8,5 \cdot 10^4$	$-1,55 \cdot 10^3$	-24,8	45,2
10,0	$5,98 \cdot 10^3$	$1,04 \cdot 10^5$	$-1,65 \cdot 10^3$	-28,4	41,4
11,0	$5,87 \cdot 10^3$	$1,26 \cdot 10^5$	$-1,82 \cdot 10^3$	-34,7	39,7
12,0	$7,6 \cdot 10^3$	$1,51 \cdot 10^5$	$-2,54 \cdot 10^3$	-58,7	49,1
13,0	$6,74 \cdot 10^3$	$1,77 \cdot 10^5$	$-2,55 \cdot 10^3$	-59,5	43,2
14,0	$7,52 \cdot 10^3$	$2,06 \cdot 10^5$	$-3,08 \cdot 10^3$	-77,6	47,0
15,0	$8,69 \cdot 10^3$	$2,37 \cdot 10^5$	$-3,77 \cdot 10^3$	-102,0	53,3
16,0	$8,7 \cdot 10^3$	$2,69 \cdot 10^5$	$-4,13 \cdot 10^3$	-114,0	52,8
17,0	$7,88 \cdot 10^3$	$3,03 \cdot 10^5$	$-4,18 \cdot 10^3$	-116,0	47,5
18,0	$9,96 \cdot 10^3$	$3,42 \cdot 10^5$	$-5,36 \cdot 10^3$	-158,0	59,4
19,0	$1,11 \cdot 10^4$	$3,82 \cdot 10^5$	$-6,2 \cdot 10^3$	-188,0	65,6
20,0	$1,02 \cdot 10^4$	$4,22 \cdot 10^5$	$-6,35 \cdot 10^3$	-193,0	60,4
21,0	$1,18 \cdot 10^4$	$4,67 \cdot 10^5$	$-7,48 \cdot 10^3$	-234,0	69,6
22,0	$1,17 \cdot 10^4$	$5,12 \cdot 10^5$	$-7,99 \cdot 10^3$	-252,0	69,2
23,0	$1,06 \cdot 10^4$	$5,58 \cdot 10^5$	$-8,07 \cdot 10^3$	-254,0	62,6
24,0	$1,29 \cdot 10^4$	$6,1 \cdot 10^5$	$-9,63 \cdot 10^3$	-311,0	76,1
25,0	$1,33 \cdot 10^4$	$6,62 \cdot 10^5$	$-1,04 \cdot 10^4$	-341,0	78,9
26,0	$1,83 \cdot 10^4$	$7,23 \cdot 10^5$	$-1,31 \cdot 10^4$	-447,0	109,0
27,0	$1,9 \cdot 10^4$	$7,79 \cdot 10^5$	$-1,42 \cdot 10^4$	-485,0	114,0
28,0	$1,87 \cdot 10^4$	$8,37 \cdot 10^5$	$-1,49 \cdot 10^4$	-509,0	113,0
29,0	$1,33 \cdot 10^4$	$8,91 \cdot 10^5$	$-1,33 \cdot 10^4$	-444,0	81,0
30,0	$1,75 \cdot 10^4$	$9,58 \cdot 10^5$	$-1,6 \cdot 10^4$	-548,0	106,0

Tabla 4.2: Valores de la variables en función del tiempo para la solución analítica del modelo estocástico

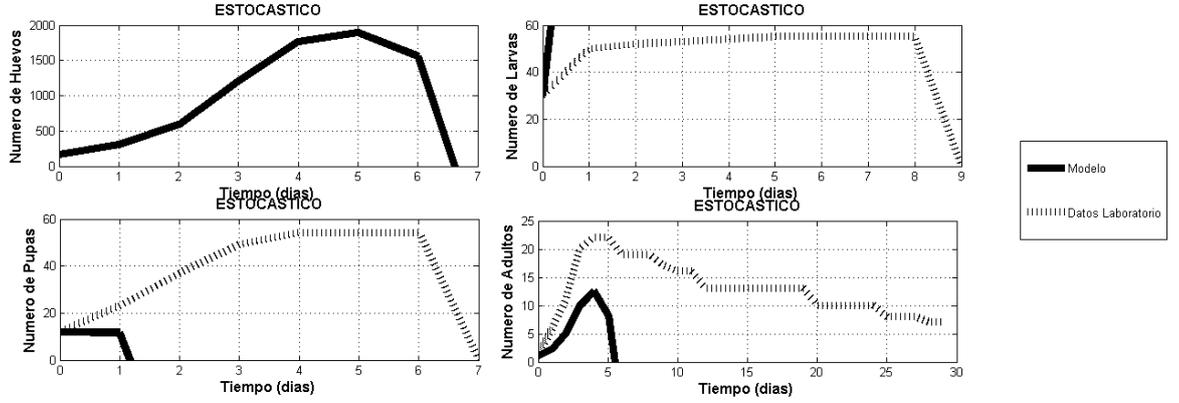


Figura 4.5: Poblaciones de Huevos, Larvas, Pupas y Adultos, utilizando las condiciones iniciales del laboratorio de la SIU y la temperatura del municipio de Bello.

Se puede observar como las tasas de desarrollo y por ende la temperatura tienen un gran impacto en la respuesta de los sistemas, para una temperatura constante como la del laboratorio (27°C) el número de individuos en los estadios de huevos, pupas y adultos es mayor que el número de los mismos a temperatura variable. Las tendencias de crecimiento y desvanecimiento que presentan las poblaciones de pupas y adultos del modelo en la figura 4.4 son cualitativamente similares a las que presenta las poblaciones de pupas y adultos en el laboratorio.

4.1.2. Solución Analítica del Modelo estacional y no estacional para el municipio de Bello

Para el sistema de ecuaciones planteado en este modelo el término no lineal aparece en la primera y segunda ecuación y es el producto de la multiplicación de 2 variables del sistema, huevos por adultos en la primera y huevos por larvas en el segundo. En este caso los A_n están definidos de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
 A_0 &= u_0 v_0 \\
 A_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0 \\
 A_2 &= u_2 v_0 + u_0 v_2 + u_1 v_1 \\
 A_3 &= u_0 v_3 + u_2 v_1 + u_1 v_2 + u_3 v_0 \\
 A_4 &= u_2 v_2 + u_4 v_0 + u_0 v_4 + u_3 v_1 + u_1 v_3
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Estos términos son reemplazados en la ecuación recurrente (2.13) y (2.14), para hallar la solución al sistema de ecuaciones y suponiendo unas condiciones iniciales E_0, L_0, P_0 y A_0 para las variables $E(t), L(t), P(t)$ y $A(t)$ los y_n

del sistema son :

$$\begin{aligned}
E_0 &= E_0 \\
L_0 &= L_0 \\
P_0 &= P_0 \\
A_0 &= A_0 \\
E_1 &= (ovimax * A_0 - (erl + ml)E_0 - \frac{ovimax}{k}E_0 * A_0)t \\
L_1 &= (erl * E_0 - (ml + lpr) * L_0)t \\
P_1 &= (lpr * L_0 - (mp + par) * P_0)t \\
A_1 &= (par * P_0 - ma * A_0)t \\
E_2 &= ((\frac{ovimax}{k})^2 E_0 * A_0^2) - 2(erl + ml)\frac{ovimax}{k}E_0 * A_0 - ovimax * \frac{ovimax}{k}A_0 \\
&+ ma\frac{ovimax}{k}E_0 * A_0 - \frac{ovimax}{k}par * E_0 * P_0 + (erl + ml)^2 E_0 - ovimax(erl + ml)A_0 \\
&- ovimax * ma * A_0 + ovimax * par * P_0) \frac{t^2}{2} \\
L_2 &= ((ml + lpr)^2 * L_0 - erl(ml + lpr) * E_0 - (erl + ml)lpr * E_0 + \frac{ovimax}{k}erl * E_0 * A_0) \frac{t^2}{2} \\
P_2 &= ((mp + par)^2 * P_0 - lpr(mp + par) * L_0 + erl * lpr * E_0 - (ml + lpr)lpr * L_0) \frac{t^2}{2} \\
A_2 &= (ma^2 * A_0 - par * ma * P_0 + lpr * par * L_0 - (mp + par)par * P_0) \frac{t^2}{2}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

La solución para el sistema es:

$$\begin{aligned}
E &= E_0 + (ovimax * A_0 - (erl + ml)E_0 - \frac{ovimax}{k}E_0 * A_0)t + ((\frac{ovimax}{k})^2 E_0 * A_0^2) \\
&- 2(erl + ml)\frac{ovimax}{k}E_0 * A_0 - ovimax * \frac{ovimax}{k}A_0 + ma\frac{ovimax}{k}E_0 * A_0 \\
&- \frac{ovimax}{k}par * E_0 * P_0 + (erl + ml)^2 E_0 - ovimax(erl + ml)A_0 - ovimax * ma * A_0 \\
&+ ovimax * par * P_0) \frac{t^2}{2} \\
L &= L_0 + (erl * E_0 - (ml + lpr) * L_0)t + ((ml + lpr)^2 * L_0 - erl(ml + lpr) * E_0 \\
&- (erl + ml)lpr * E_0 + \frac{ovimax}{k}erl * E_0 * A_0) \frac{t^2}{2} \\
P &= P_0 + (lpr * L_0 - (mp + par) * P_0)t + ((mp + par)^2 * P_0 - lpr(mp + par) * L_0 \\
&+ erl * lpr * E_0 - (ml + lpr)lpr * L_0) \frac{t^2}{2} \\
A &= A_0 + (par * P_0 - ma * A_0)t + (ma^2 * A_0 - par * ma * P_0 + lpr * par * L_0 \\
&- (mp + par)par * P_0) \frac{t^2}{2}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

<i>Tiempo</i>	<i>Huevos</i>	<i>Larva</i>	<i>Pupas</i>	<i>Adultos1</i>
0	166,0	75,0	54,0	22,0
1,0	119,0	91,0	48,5	32,9
2,0	87,2	97,7	44,9	43,0
3,0	81,2	95,1	39,9	58,0
4,0	118,0	88,7	29,1	72,6
5,0	195,0	83,2	12,8	86,6
6,0	353,0	77,4	-22,7	116,0
7,0	625,0	79,9	-91,6	164,0
8,0	971,0	96,0	-178,0	218,0
9,0	1522,0	139,0	-336,0	313,0
10,0	1788,0	155,0	-348,0	316,0
11,0	2177,0	188,0	-403,0	346,0
12,0	3388,0	336,0	-784,0	563,0
13,0	3644,0	349,0	-737,0	537,0
14,0	4788,0	500,0	-1044,0	707,0
15,0	6355,0	740,0	-1511,0	964,0
16,0	7411,0	890,0	-1733,0	1099,0
17,0	7944,0	940,0	-1700,0	1088,0
18,0	10990,0	1488,0	-2699,0	1611,0
19,0	13440,0	1955,0	-3488,0	2033,0
20,0	14440,0	2066,0	-3500,0	2077,0
21,0	17990,0	2788,0	-4688,0	2699,0
22,0	20000,0	3166,0	-5166,0	2966,0
23,0	21000,0	3266,0	-5099,0	2966,0
24,0	26440,0	4455,0	-7011,0	3955,0
25,0	29880,0	5166,0	-7988,0	4488,0
26,0	39770,0	7777,0	-12330,0	6644,0
27,0	44550,0	8888,0	-13880,0	7466,0
28,0	48330,0	9655,0	-14770,0	7977,0
29,0	43990,0	8044,0	-11550,0	6466,0
30,0	55330,0	11000,0	-16110,0	8800,0

Tabla 4.3: Valores de las variables en función del tiempo para la solución analítica del modelo TCE

Para este modelo existe una mejor aproximación de la información arrojada por el modelo en las poblaciones de larvas, pupas y adultos y los datos experimentales. La mejor aproximación es a temperatura del laboratorio en las poblaciones de larvas y adultos. Los tiempos de vida para larvas y pupas son muy aproximados a los correspondientes dentro del ciclo de vida del

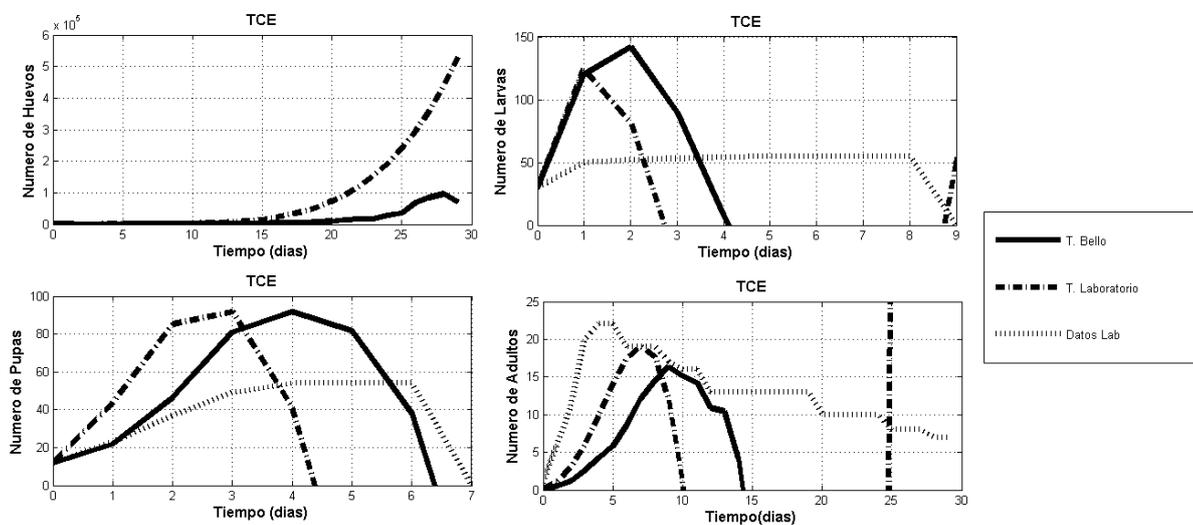


Figura 4.6: Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo TCE (ecuación 3.13 + ecuación 3.14)

mosquito

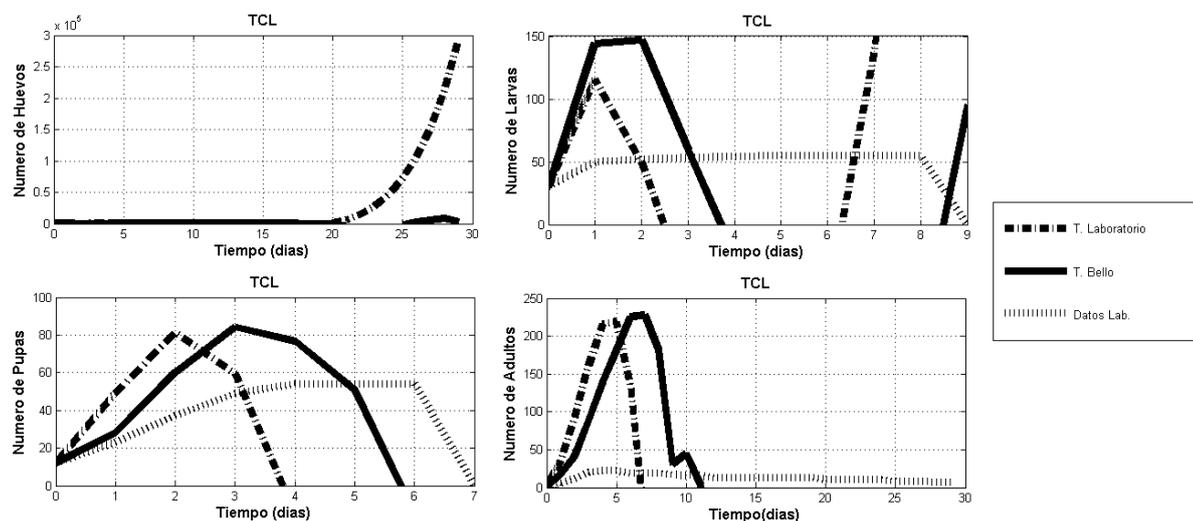


Figura 4.7: Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo TCL (ecuación 3.13 + ecuación 3.15)

Al igual que en el modelo anterior, en este modelo existe una mejor

aproximación de la información arrojada por el modelo en las poblaciones de larvas, pupas y adultos con los datos experimentales. La mejor aproximación es a temperatura del laboratorio en las poblaciones de larvas y pupas. Los tiempos de vida para larvas y pupas son muy aproximados a los correspondientes dentro del ciclo de vida del mosquito. Se puede observar un resurgimiento de la población de larvas 4 días después de su primera extinción.

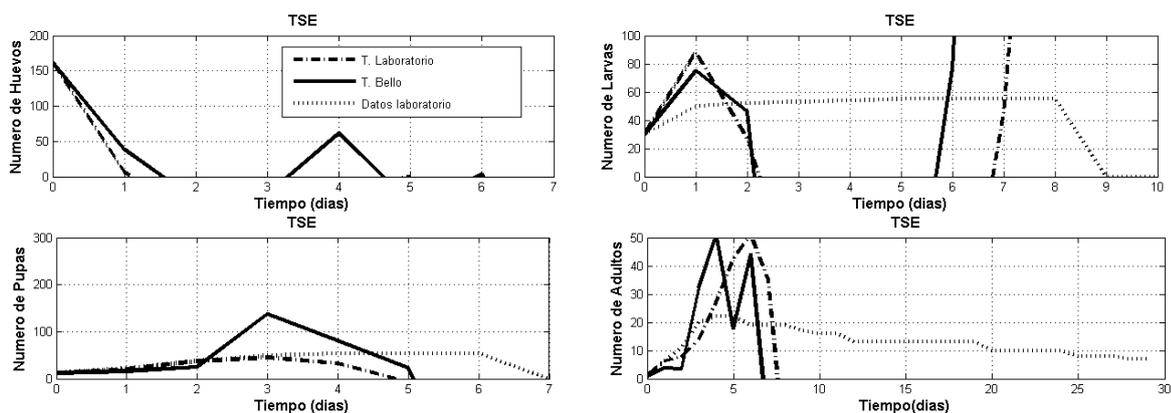


Figura 4.8: Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo TSE (ecuación 3.12 + ecuación 3.14)

En el modelo TSE la temperatura varía con una función paso, por esta razón la mejor aproximación del modelo se da cuando se utiliza una temperatura constante, contrario a los otros modelos, se presenta una rápida extinción de la población de huevos, que es un comportamiento lógico debido a que este modelo presenta una restricción al crecimiento de esta población en su modelo matemático. Las variaciones de la temperatura durante el mes en el que se realiza la simulación se ve reflejada en el comportamiento del modelo cuando se utiliza la temperatura de Bello.

4.2. Solución Numérica

4.2.1. Modelo estocástico

De acuerdo a lo visto en el sección 2.2 para resolver un sistema de ecuaciones por el metodo de Runge- Kuta se debe resolver un sistema como el planteado en la ecuación (2.26), que en este caso seria resolver

$$E_{n+1} = E_n + \frac{1}{6}(k_1e + 2k_2e + 2k_3e + k_4e)$$

$$\begin{aligned}
L_{n+1} &= L_n + \frac{1}{6}(k1l + 2k2l + 2k3l + k4l) \\
P_{n+1} &= P_n + \frac{1}{6}(k1p + 2k2p + 2k3p + k4p) \\
A1_{n+1} &= A1_n + \frac{1}{6}(k1a1 + 2k2a1 + 2k3a1 + k4a1) \\
A2_{n+1} &= A2_n + \frac{1}{6}(k1a2 + 2k2a2 + 2k3a2 + k4a2)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

donde

$$\begin{aligned}
k1e &= h * fe(E_{n-1}, A1_{n-1}, A2_{n-1}, (me + erl * (1 - \gamma)), (egn * ovr1), (egn * ovr2)) \\
k1l &= h * fl(E_{n-1}, L_{n-1}, (erl * (1 - \gamma)), (ml + lpr), (\alpha)) \\
k1p &= h * fp(L_{n-1}, P_{n-1}, (lpr), (mp + par)) \\
k1a1 &= h * fa1(P_{n-1}, A1_{n-1}, (par * \frac{ef}{2}), (ma + ovr1)) \\
k1a2 &= h * fa2(A1_{n-1}, A2_{n-1}, ovr1, ma) \\
\\
k2e &= h * fe(E_{n-1} + \frac{1}{2} * k1e, A1_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a1, A2_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a2, (me + erl * (1 - \gamma)), \\
&\quad (egn * ovr1), (egn * ovr2)) \\
k2l &= h * fl(E_{n-1} + \frac{1}{2} * k1e, L_{n-1} + \frac{1}{2} * k1l, (erl * (1 - \gamma)), (ml + lpr), (\alpha)) \\
k2p &= h * fp(L_{n-1} + \frac{1}{2} * k1l, P_{n-1} + \frac{1}{2} * k1p, (lpr), (mp + par)) \\
k2a1 &= h * fa1(P_{n-1} + \frac{1}{2} * k1p, A1_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a1, (par * \frac{ef}{2}), (ma + ovr1)) \\
k2a2 &= h * fa2(A1_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a1, A2_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a2, ovr1, ma) \\
\\
k3e &= h * fe(E_{n-1} + \frac{1}{2} * k2e, A1_{n-1} + \frac{1}{2} * k2a1, A2_{n-1} + \frac{1}{2} * k2a2, (me + erl * (1 - \gamma)), \\
&\quad (egn * ovr1), (egn * ovr2)) \\
k3l &= h * fl(E_{n-1} + \frac{1}{2} * k2e, L_{n-1} + \frac{1}{2} * k2l, (erl * (1 - \gamma)), (ml + lpr), (\alpha)) \\
k3p &= h * fp(L_{n-1} + \frac{1}{2} * k2l, P_{n-1} + \frac{1}{2} * k2p, (lpr), (mp + par)) \\
k3a1 &= h * fa1(P_{n-1} + \frac{1}{2} * k2p, A1_{n-1} + \frac{1}{2} * k2a1, (par * \frac{ef}{2}), (ma + ovr1)) \\
k3a2 &= h * fa2(A1_{n-1} + \frac{1}{2} * k2a1, A2_{n-1} + \frac{1}{2} * k2a2, ovr1, ma) \\
\\
k4e &= h * fe(E_{n-1} + k3e, A1_{n-1} + k3a1, A2_{n-1} + k3a2, (me + erl * (1 - \gamma)), \\
&\quad (egn * ovr1), (egn * ovr2)) \\
k4l &= h * fl(E_{n-1} + k3e, L_{n-1} + k3l, (erl * (1 - \gamma)), (ml + lpr), (\alpha))
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
k4p &= h * fp(L_{n-1} + k3l, P_{n-1} + k3p, (lpr), (mp + par)) \\
k4a1 &= h * fa1(P_{n-1} + k3p, A1_{n-1} + k3a1, (par * \frac{ef}{2}), (ma + ovr1)) \\
k4a2 &= h * fa2(A1_{n-1} + k3a1, A2_{n-1} + k3a2, ovr1, ma)
\end{aligned}$$

Las funciones fe , fl , fp , $fa1$ y $fa2$ se forman apartir del sistema de ecuaciones (3.4)

$$\begin{aligned}
fe &= -(me + erl * (1 - \gamma)) * E_{n-1} + (egn * ovr1) * A1_{n-1} + (egn * ovr2) * A2_{n-1} \\
fl &= (erl * (1 - \gamma)) * E_{n-1} - (ml + lpr) * L_{n-1} + \alpha * L_{n-1}^2 \\
fp &= lpr * L_{n-1} - (mp + par) * P_{n-1} \\
fa1 &= (par * \frac{ef}{2}) * P_{n-1} - (ma + ovr1)A1_{n-1} \\
fa2 &= ovr1 * A1_{n-1} - ma * A2_{n-1}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

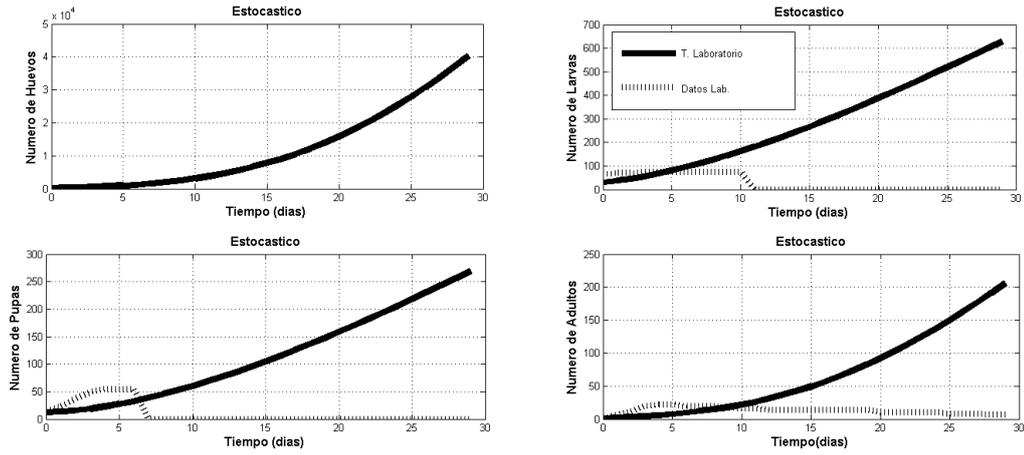


Figura 4.9: Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo estocástico y las condiciones iniciales del laboratorio.

<i>Tiempo</i>	<i>Huevos</i>	<i>Larva</i>	<i>Pupas</i>	<i>Adultos1</i>	<i>Adultos2</i>
0	166,0	75,0	54,0	22,0	22,0
1,0	313,0	64,1	51,9	22,2	22,3
2,0	466,0	59,0	49,7	22,3	22,7
3,0	658,0	58,9	47,3	22,4	23,2
4,0	852,0	62,6	45,1	22,4	23,8
5,0	1033,0	68,0	43,4	22,3	24,2
6,0	1222,0	75,3	42,1	22,2	24,7
7,0	1433,0	84,5	41,2	22,1	25,3
8,0	1644,0	93,7	40,8	21,9	25,9
9,0	1866,0	104,0	41,1	21,8	26,5
10,0	2044,0	109,0	41,3	21,7	26,9
11,0	2199,0	113,0	41,5	21,5	27,2
12,0	2388,0	121,0	42,3	21,5	27,7
13,0	2533,0	124,0	42,9	21,4	28,0
14,0	2688,0	128,0	43,6	21,3	28,3
15,0	2855,0	134,0	44,6	21,4	28,6
16,0	3011,0	138,0	45,6	21,4	28,9
17,0	3144,0	140,0	46,3	21,4	29,1
18,0	3299,0	145,0	47,4	21,5	29,5
19,0	3466,0	151,0	48,9	21,7	29,8
20,0	3600,0	153,0	50,0	21,9	30,1
21,0	3766,0	158,0	51,5	22,1	30,5
22,0	3911,0	162,0	52,8	22,4	30,8
23,0	4044,0	163,0	53,8	22,6	31,0
24,0	4199,0	168,0	55,2	23,0	31,4
25,0	4344,0	171,0	56,6	23,3	31,8
26,0	4544,0	180,0	59,0	23,9	32,3
27,0	4733,0	185,0	61,4	24,5	33,0
28,0	4922,0	189,0	63,6	25,2	33,5
29,0	5055,0	186,0	64,7	25,6	33,9
30,0	5222,0	191,0	66,3	26,2	34,4

Tabla 4.4: Valores de las variables en función del tiempo para la solución numérica del modelo estocástico

El comportamiento del modelo bajo este esquema de solución es divergente para todas las poblaciones, asemejándose al comportamiento que presenta la solución analítica del mismo sistema en la población de larvas.

4.2.2. Modelo estacional y no estacional

Para hallar la solución numérica a estos modelos el sistema a resolver sería.

$$\begin{aligned}
 E_{n+1} &= E_n + \frac{1}{6}(k1e + 2k2e + 2k3e + k4e) \\
 L_{n+1} &= L_n + \frac{1}{6}(k1l + 2k2l + 2k3l + k4l) \\
 P_{n+1} &= P_n + \frac{1}{6}(k1p + 2k2p + 2k3p + k4p) \\
 A_{n+1} &= A_n + \frac{1}{6}(k1a + 2k2a + 2k3a + k4a)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Los k_i se calculan con un sistema similar a (4.10)

$$\begin{aligned}
 k1e &= h * feggtce(E_{n-1}, A_{n-1}, ovimax, \frac{ovimax}{k}, erl + ml) \\
 k1l &= h * flarltce(E_{n-1}, L_{n-1}, erl, ml + lpr) \\
 k1p &= h * fpupl(L_{n-1}, P_{n-1}, lpr, mp + par) \\
 k1a &= h * fadul(P_{n-1}, A_{n-1}, par, ma) \\
 k2e &= h * feggtce(E_{n-1} + \frac{1}{2} * k1e, A_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a, ovimax, \frac{ovimax}{k}, erl + ml) \\
 k2l &= h * flarltce(E_{n-1} + \frac{1}{2} * k1e, L_{n-1} + \frac{1}{2} * k1l, erl, ml + lpr) \\
 k2p &= h * fpupl(L_{n-1} + \frac{1}{2} * k1l, P_{n-1} + \frac{1}{2} * k1p, lpr, mp + par) \\
 k2a &= h * fadul(P_{n-1} + \frac{1}{2} * k1p, A_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a, par, ma) \\
 k3e &= h * feggtce(E_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2e, A_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2a, ovimax, \frac{ovimax}{k}, erl + ml) \\
 k3l &= h * flarltce(E_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2e, L_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2l, erl, ml + lpr) \\
 k3p &= h * fpupl(L_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2l, P_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2p, lpr, mp + par) \\
 k3a &= h * fadul(P_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2p, A_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2a, par, ma) \\
 k4e &= h * feggtce(E_{n-1} + k3e, A_{n-1} + k3a, ovimax, \frac{ovimax}{k}, erl + ml) \\
 k4l &= h * flarltce(E_{n-1} + k3e, L_{n-1} + k3l, erl, ml + lpr) \\
 k4p &= h * fpupl(L_{n-1} + k3l, P_{n-1} + k3p, lpr, mp + par) \\
 k4a &= h * fadul(P_{n-1} + k3p, A_{n-1} + k3a, par, ma)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

y las funciones fe , fl , fp y fa se forman apartir del sistema de ecuaciones (3.11)

$$fe = ovimax * A_{n-1} - \frac{ovimax}{k} * E_{n-1}A_{n-1} - (erl + ml) * E_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
fl &= erl * E_{n-1} - (ml + lpr) * L_{n-1} \\
fp &= lpr * L_{n-1} - (mp + par) * P_{n-1} \\
fa &= par * P_{n-1} - ma * A_{n-1}
\end{aligned}
\tag{4.14}$$

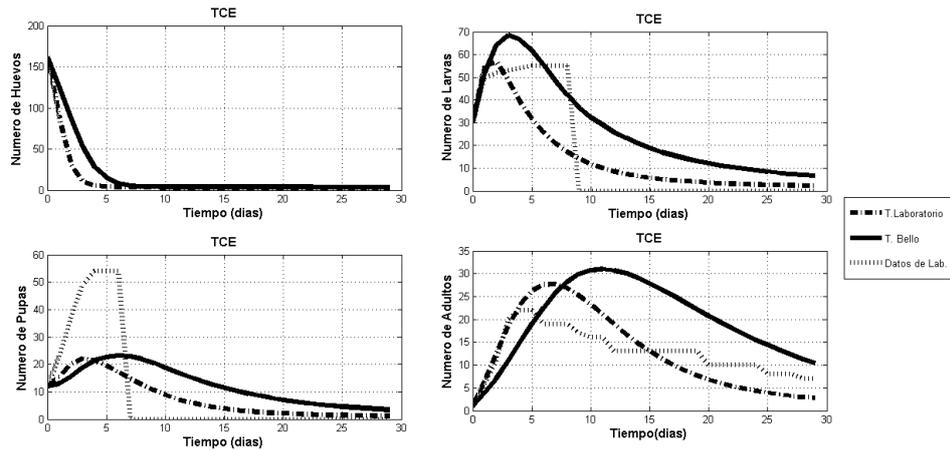


Figura 4.10: Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo TCE (ecuación 3.13 + ecuación 3.14)

Para este modelo donde las tasas de desarrollo dependen de la ecuación termodinámica y el efecto inhibitorio se presenta en la ovoposición, el efecto inhibitorio produce una rápida disminución del número de huevos con el tiempo. El comportamiento de la población de adultos es muy aproximado cualitativa y cuantitativamente

<i>Tiempo</i>	<i>Huevos</i>	<i>Larva</i>	<i>Pupas</i>	<i>Adultos</i> ¹
0	166,0	75,0	54,0	22,0
1,0	152,0	80,5	52,2	25,0
2,0	139,0	85,3	50,7	27,8
3,0	124,0	89,8	49,3	31,1
4,0	110,0	93,2	48,2	34,1
5,0	98,1	95,6	47,3	36,8
6,0	86,9	97,2	46,6	39,3
7,0	76,2	97,9	46,1	42,0
8,0	66,9	97,8	45,7	44,4
9,0	58,4	96,9	45,3	46,9
10,0	52,1	96,0	44,8	48,7
11,0	47,2	95,1	44,3	50,2
12,0	42,3	93,4	43,8	51,9
13,0	38,7	92,0	43,3	53,2
14,0	35,5	90,4	42,7	54,4
15,0	32,7	88,4	42,2	55,6
16,0	30,4	86,5	41,6	56,6
17,0	28,7	85,0	41,0	57,4
18,0	27,0	82,9	40,4	58,3
19,0	25,6	80,6	39,8	59,1
20,0	24,5	78,7	39,1	59,7
21,0	23,5	76,6	38,5	60,2
22,0	22,8	74,5	37,8	60,7
23,0	22,2	72,9	37,1	61,0
24,0	21,7	70,9	36,4	61,3
25,0	21,3	69,0	35,7	61,5
26,0	20,7	66,5	35,0	61,6
27,0	20,3	64,2	34,2	61,6
28,0	20,0	62,1	33,4	61,5
29,0	19,9	60,6	32,7	61,4
30,0	19,8	58,9	31,9	61,2

Tabla 4.5: Valores de las variables en función del tiempo para solución numérica del modelo TCE

El modelo TCL figura 4.11, presenta un comportamiento similar al que presenta la solución del modelo TCE, aunque el crecimiento de las poblaciones es menor al que se presentó en el modelo anterior.

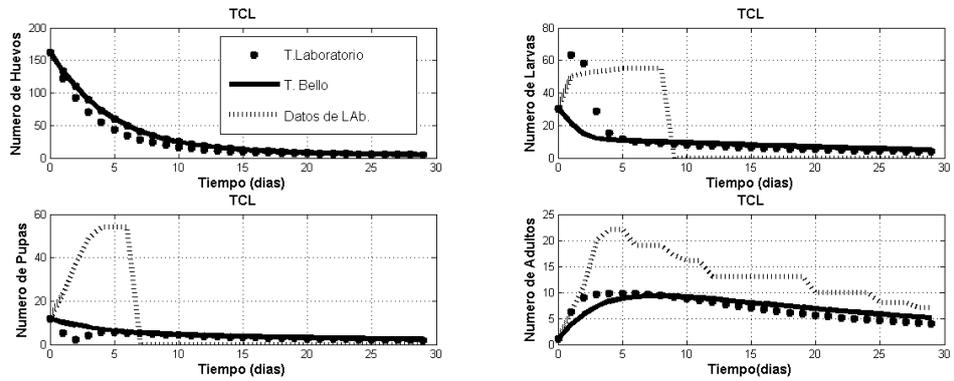


Figura 4.11: Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo TCL (ecuación 3.13 + ecuación 3.15)

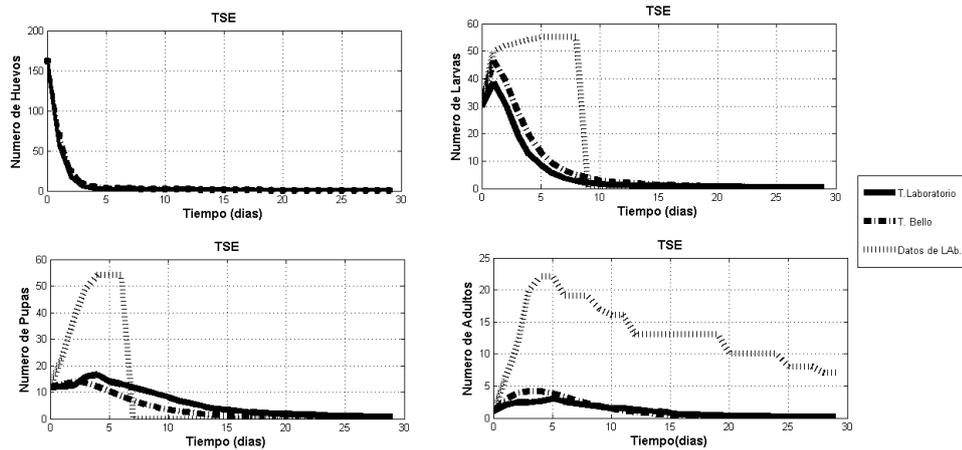


Figura 4.12: Poblaciones para el municipio de Bello utilizando el modelo TSE (ecuación 3.12 + ecuación 3.14)

Así y todo las tasas de desarrollo de este modelo varíen con la función paso y las del modelo TCL varíen de forma continua, el comportamiento de estos modelos es muy similar, aunque con un crecimiento menor. No sé tubo en cuenta los resultados del modelo TSL debido a que no presentaba ninguna aproximación con los datos experimentales

4.3. Estudio desde la perspectiva de los sistemas de control

4.3.1. Linealización y análisis

Analizaremos el sistema lineal asociado a las ecuaciones de estado del modelo poblacional expresado en la ecuación (3.3) para conocer más a fondo las relaciones existentes entre las poblaciones y poder determinar, puntos de operación o equilibrio, además de analizar posibles estrategias de control u observación de cada etapa.

El sistema no lineal del modelo estocástico de Otero que incluye el término de control en la ecuación diferencial para los huevos es:

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= egn(ovr1 \times A1 + ovr2 \times A2) - me \times E - erl(1 - \gamma(L)) \times E \\
 \frac{L}{dt} &= erl(1 - \gamma(L)) \times E - ml \times L - \alpha \times L^2 - lpr \times L \\
 \frac{dP}{dt} &= lpr \times L - mp \times P - par \times P \\
 \frac{dA1}{dt} &= par \times ef \times \frac{P}{2} - ma \times A1 - ovr1 \times A1 \\
 \frac{dA2}{dt} &= ovr1 \times A1 - ma \times A2
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

El jacobiano del sistema es:

$$\frac{dM}{dt} = J^*M = \begin{bmatrix} (-erl - ml) & 0 & 0 & (egn \times ovr1) & (egn \times ovr2) \\ erl & -(ml + par) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & lpr & -(mp + par) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (par \times \frac{ef}{2}) & -(ma + ovr1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ovr1 & -ma \end{bmatrix} M \tag{4.16}$$

El jacobiano está evaluado en el punto del sistema equivalente a $(E; L; P; A1; A2) = (\bar{E}; \bar{L}; \bar{P}; \bar{A1}; \bar{A2})$ que supone un equilibrio trivial en el sistema para una temperatura de 22 °C.

Los valores de los parámetros para esta temperatura son:

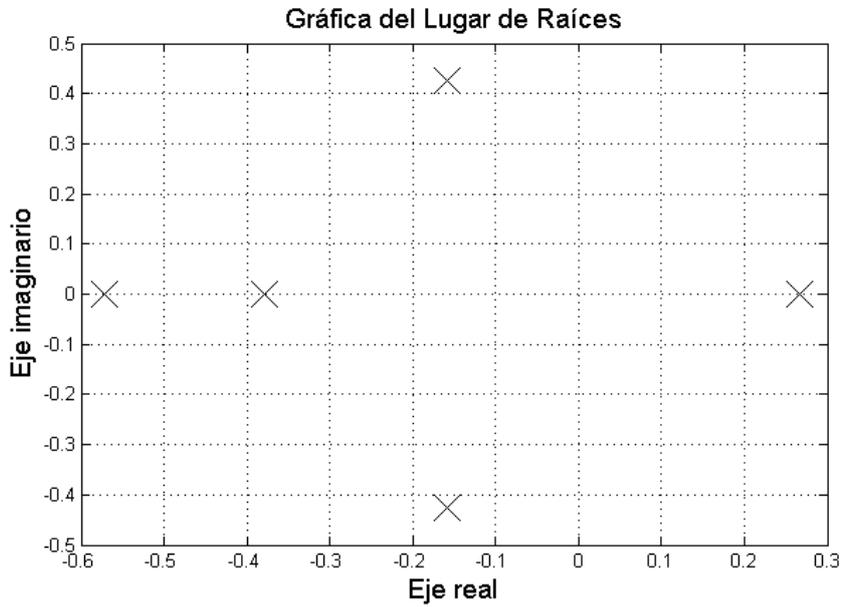


Figura 4.13: Lugar geométrico de las raíces del sistema

Parametro	$R_D(22^\circ\text{C})$
erl	0.1933
lpr	0.0670
par	0.2981
ovr1	0.1685
ovr2	0.2851

Tabla 4.6: Tasas de desarrollo a 22°C

Ahora bien, al calcular $\det(J - \lambda I)$ se obtienen los siguientes valores y vectores propios.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,2221 \\ \lambda_2 &= -0,1452 + 0,3612i \\ \lambda_3 &= -0,1452 - 0,3612i \\ \lambda_4 &= -0,4916 \\ \lambda_5 &= -0,3837 \end{aligned}$$

Dado que no todas las raíces del sistema están en el semiplano negativo no se puede asegurar que el sistema es estable, aunque dado que la mayoría de ellas es negativo, es posible decir que es estable en la mayoría de las direcciones.

Es importante resaltar que las raíces más cercanas al eje imaginario dominarán la dinámica de la respuesta mientras que aquellas que estén más alejadas dejarán de influir en la respuesta del sistema rápidamente.

En general la cercanía o lejanía de las raíces del origen de coordenadas no es muy diciente al determinar la sub o sobreamortiguación del sistema. Ahora bien, dado que existe un valor propio con parte real mayor a cero y los demás tienen parte real menor a cero, se puede asegurar que el punto de equilibrio (trivial) propuesto, es un punto de silla en una dirección.

Ahora con la linealización propuesta y el punto de equilibrio el modelo lineal de la población de *Aedes aegypti* Puede ser tratada de manera tal que se puede evaluar la influencia de algunas posibles acciones de control sobre este sistema.

Entonces el sistema se puede redefinir según el capítulo 2.3.

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= (-me - erl) \times E + egn(ovr1 \times A1 + ovr2 \times A2) + u_1 \\
\frac{dL}{dt} &= erl \times E - (ml + lpr) \times L + u_2 \\
\frac{dP}{dt} &= lpr \times L - (mp + par) \times P + u_3 \\
\frac{dA1}{dt} &= \frac{(par \times ef)}{2} \times P - (ma + ovr1) \times A1 + u_4 \\
\frac{dA2}{dt} &= ovr1 \times A1 - ma \times A2 + u_5 \\
Y &= Cx(t)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Donde cada una de las entradas de control u_i corresponde a la fumigación, eliminación o desaparición del estado i .

La matriz C es variable y depende de las salidas que se quieran obtener(medir), en adelante se realizarán los análisis para:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (1, 0, 0, 0, 0) \\
C_2 &= (0, 1, 0, 0, 0) \\
C_3 &= (0, 0, 1, 0, 0) \\
C_4 &= (0, 0, 0, 1, 0) \\
C_5 &= (0, 0, 0, 0, 1)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Donde:

C1, implica la medición de sólo los huevos.

C2, implica la medición de sólo las larvas.

C3, implica la medición de sólo las pupas.

C4, implica la medición de sólo los adultos

C5, implica la medición de sólo los adultos cuando están en fase reproductiva.

Además si simultaneamente se esperaría medir todos los estados el análisis corresponde a

$$C_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

A continuación se muestra una evaluación de la respuesta del modelo lineal a temperatura constante de 22°C

En este caso, se mantiene constante la temperatura puesto que al realizar la linealización del sistema se asumen los parámetros constantes, es decir, trasladamos el conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas en transiciones a un espacio de estados lineal invariante con el tiempo.

Adicionalmente, en el proceso de linealización, el término de control dinámico de los huevos agregado por Otero, se elimina del sistema.

En la Figura 4.16 se muestra la evolución de los 5 estados del sistema lineal (a temperatura $T = 22^\circ\text{C}$) sin considerar entradas de control y como se esperaría es claro el aumento de la población de mosquitos *Aedes* y se esperaría un crecimiento proporcional del número de casos de dengue.

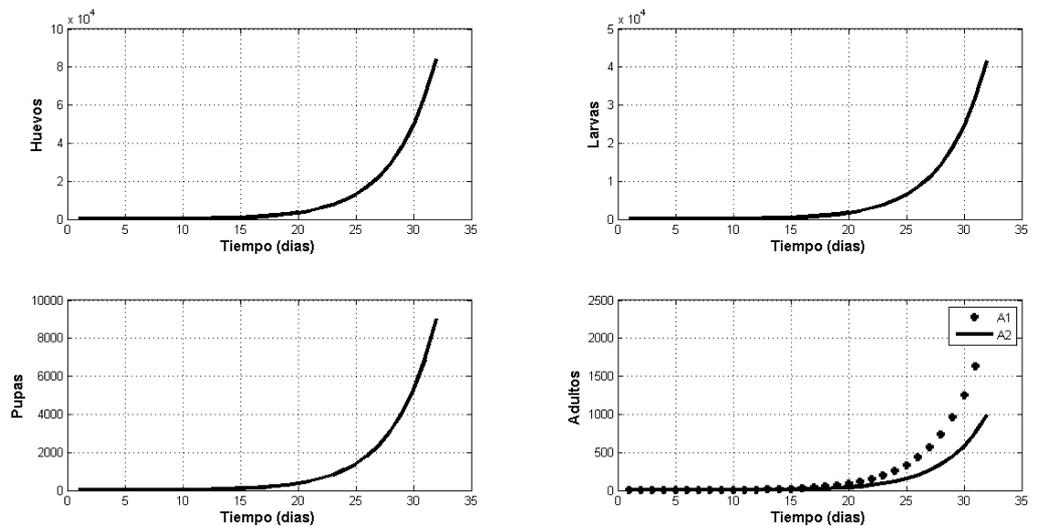


Figura 4.14: Estados (Modelo lineal) Simulación

4.3.2. Forma canónica controlable

El modelo presentado se puede escribir de la siguiente manera

$$\dot{x}_1 = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.20)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.21)$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{dL}{dt} \\ \frac{dP}{dt} \\ \frac{dA1}{dt} \\ \frac{dA2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-erl - ml) & 0 & 0 & (egn.ovr1) & (egn.ovr2) \\ erl & -(ml + par) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & lpr & -(mp + par) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (par \cdot \frac{ef}{2}) & -(ma + ovr1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ovr1 & -ma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ L \\ P \\ A1 \\ A2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$y(t) = C_i \begin{bmatrix} E \\ L \\ P \\ A1 \\ A2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Sea S la matriz de controlabilidad y M la matriz definida a partir de los coeficientes de la ecuación característica

$$P(\lambda) = a_5\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad (4.24)$$

$$P(\lambda) = -\lambda^5 - 0,9453\lambda^4 - 0,3354\lambda^3 - 0,0554\lambda^2 + 0,0130\lambda + 0,0064$$

Entonces

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B \\ 1 & 28,1821 & -5,9172 & 0,7625 & -0,0047 \\ 1 & 0,1206 & 5,6080 & -1,6211 & 0,2796 \\ 1 & -0,2428 & 0,0833 & 0,3501 & -0,2172 \\ 1 & -0,1318 & 0,0036 & 0,0094 & 0,0409 \\ 1 & 0,0755 & -0,0286 & 0,0032 & 0,0013 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

y por otra parte

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,0130 & -0,0554 & -0,3354 & -0,9435 & 1 \\ -0,0554 & -0,3354 & -0,9435 & 1 & 0 \\ -0,3354 & -0,9435 & 1 & 0 & 0 \\ -0,9435 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Se define $P = SM$ como la transformación de similitud de la forma canónica controlable obteniendo

$$P = SM = \begin{bmatrix} -0,2878 & -3,1623 & -32,8424 & 27,2386 & 1 \\ -0,0655 & -7,0081 & 5,1589 & -0,8229 & 1 \\ -0,5490 & 0,2975 & 0,0230 & 1,1863 & 1 \\ 0,0512 & -0,0052 & -0,2074 & -1,0753 & 1 \\ 0,0167 & -0,0506 & -0,4353 & -0,8680 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Ahora bien, el determinante $\det(P) = 2.6497 = 0$ entonces P es no singular y existe su inversa.

Entonces se reescribe el sistema

$$\tilde{A} = P^{-1}AP$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1,8870 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2,4511 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3,0563 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3,7842 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4,7004 & -0,0130 & 0,0554 & 0,3354 & 0,9435 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\tilde{B} = P^{-1}B$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y para cada C_i

$$\tilde{C} = C_1P = \begin{bmatrix} -0,2878 & 3,1623 & 32,8424 & 27,2386 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= C_2P = \begin{bmatrix} -0,0655 & -7,0081 & 5,1589 & -0,8229 & 1 \end{bmatrix} \\
&= C_3P = \begin{bmatrix} -0,5490 & 0,2975 & -0,0230 & -1,1863 & 1 \end{bmatrix} \\
&= C_4P = \begin{bmatrix} 0,0512 & -0,0052 & 0,2074 & -1,0753 & 1 \end{bmatrix} \\
&= C_5P = \begin{bmatrix} 0,0167 & -0,0506 & -0,4353 & -0,8680 & 1 \\ -0,2878 & -3,1623 & -32,8424 & 27,2386 & 1 \\ -0,0655 & -7,0081 & 5,1589 & -0,8229 & 1 \\ -0,5490 & 0,2975 & -0,0230 & -1,1863 & 1 \\ 0,0512 & -0,0052 & -0,2074 & -1,0783 & 1 \\ 0,0167 & -0,0506 & -0,4353 & -0,8680 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De esto puede verse que, como P^{-1} existe, lo que significa que S^{-1} existe, el sistema es completamente controlable, lo cual quiere decir que cada variable del proceso se puede controlar para llegar a un cierto objetivo en tiempo finito, a través de las entradas de control u_i . Esto se puede comprobar hallando la matriz de controlabilidad para cada entrada de control u_i

Para $u_i = C_1$ tenemos:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

la matriz de controlabilidad S es

$$S = \begin{bmatrix} 1,0 & -0,2093 & 0,0438 & -0,0091 & 0,0340 \\ 0 & 0,1993 & -0,06896 & 0,0181 & -0,0043 \\ 0 & 0 & 0,0249 & -0,0163 & 0,0073 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0030 & -0,0028 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0005 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

El determinante de S es $7,8047e^{-9}$

Para $u_i = C_2$ tenemos:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

la matriz de controlabilidad S es

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,1612 & -0,1009 \\ 1,0 & -0,1366 & 0,0186 & -0,00255 & 0,0324 \\ 0 & 0,12495 & -0,0557 & 0,0196 & -0,0063 \\ 0 & 0 & 0,0154 & -0,0108 & 0,0052 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0025 & -0,0020 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

El determinante de S es $1,3215e^{-7}$

Para $u_i = C_3$ tenemos:

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

la matriz de controlabilidad S es

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,2904 & -0,6318 & 0,2014 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2572 & -0,1610 \\ 1,0 & -0,3098 & 0,0960 & -0,0297 & 0,0413 \\ 0 & 0,1237 & -0,0699 & 0,0297 & -0,0112 \\ 0 & 0 & 0,0204 & -0,0134 & 0,0061 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

El determinante de S es $3,3252e^{-5}$

Para $u_i = C_4$ tenemos:

$$C_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

la matriz de controlabilidad S es

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 10,4294 & -1,8748 & 0,0460 & 0,1029 \\ 0 & 0 & 2,0788 & -0,6578 & 0,0990 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2597 & -0,1626 \\ 1,0 & -0,2555 & 0,0653 & -0,0166 & 0,0364 \\ 0 & 0,16554 & -0,0572 & 0,0159 & -0,0041 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

El determinante de S es 0,0024

Para $u_i = C_5$ tenemos:

$$C_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

la matriz de controlabilidad S es

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 17,9618 & -5,3764 & 1,2709 & -0,2791 \\ 0 & 0 & 3,5803 & -1,5609 & 0,4666 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4473 & -0,3336 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0553 \\ 1,0 & -0,0900 & 0,0081 & -0,0007 & 0,0000 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

El determinante de S es 1,5924

4.3.3. Forma canónica observable

Sea V la matriz de observabilidad y M definida de la misma forma que se definió para la forma canónica controlable, de esta forma:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Entonces, para cada matriz C_i obtenemos una matriz de observabilidad como sigue:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2093 & 0 & 0 & 10,4295 & 17,9619 \\ 0,0438 & 0 & 1,2904 & -1,8749 & -5,3765 \\ -0,0092 & 0,0865 & -0,6318 & 0,0461 & 1,2710 \\ 0,0192 & -0,0492 & -0,2015 & 0,1030 & -0,2791 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1933 & -0,0787 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0574 & 0,0062 & 0 & 2,0789 & 3,5803 \\ 0,0133 & -0,0005 & -0,2572 & -0,5374 & -1,3563 \\ -0,0029 & 0,0173 & -0,1462 & 0,0515 & 0,3599 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
V_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0670 & -0,3099 & 0 & 0 \\ 0,0134 & -0,0260 & 0,0960 & 0 & 0 \\ -0,0080 & 0,0085 & -0,0297 & 0,1394 & 0,2400 \\ 0,0034 & -0,0027 & 0,0265 & -0,0792 & -0,1651 \end{bmatrix} \\
V_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1237 & -0,2555 & 0 \\ 0 & 0,0083 & -0,0700 & 0,0653 & 0 \\ 0,0017 & -0,0053 & 0,0298 & -0,0167 & 0 \\ -0,0014 & -0,0024 & -0,0113 & 0,0215 & 0,0297 \end{bmatrix} \\
V_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1655 & -0,0900 \\ 0 & 0 & 0,0205 & -0,0572 & 0,0081 \\ 0 & 0,0014 & -0,0134 & 0,0160 & -0,0007 \\ 0,0003 & -0,0010 & -0,0061 & -0,0042 & 0,0001 \end{bmatrix} \\
V_T &= \begin{bmatrix} I_5 \\ A \\ A^2 \\ A^3 \\ A^4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Con éstas se determina $Q_i = (V_i M)^{-1}$ y luego para cada $i = 1..,5$ es posible transformar el sistema lineal de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= Q_i^{-1} A Q_i \\
\tilde{B} &= Q_i^{-1} B \\
\tilde{C} &= C_i Q_i
\end{aligned} \tag{4.41}$$

De la misma manera que en la forma canónica controlable, como la matriz V_i es invertible (para todo $i = 1..,5$) con determinantes diferentes de cero para todos los casos:

$$\begin{aligned}
\det(V1) &= 0,0484 \\
\det(V2) &= 0,0030 \\
\det(V3) &= 3,5820x10^{-6} \\
\det(V4) &= 5,0383x10^{-8} \\
\det(V5) &= 1,2743x10^{-9}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Así el sistema además de ser controlable es completamente observable. Entonces cada variable de estado del sistema afecta alguna de las salidas y se puede obtener información sobre las variables de estado de las mediciones de las salidas y las entradas, esto es, dada cualquier entrada existe un tiempo finito tal que del conocimiento de la entrada en un tiempo t , las matrices A ,

B y C además de la salida $Y(t)$ para t son suficientes para determinar las variables de estado en el tiempo inicial.

Por otra parte la observabilidad completa y simultanea del sistema no es posible, dado que la matriz V_T no es invertible (nisiquiera resulta ser cuadrada) es decir, la correspondencia entre las salidas y entradas con todos los estados simultaneamente no es suficiente para determinarlos en ningún tiempo finito.

4.4. Validación de los algoritmos

Para validar la eficacia de los algoritmos utilizados para calcular la solución analítica, se corrieron estos sobre ejemplos desarrollados en la literatura disponible para soluciones de sistemas que utilizan el método de Adomian

Para validar el algoritmo del sistema con termino cuadrático se halló la solución del sistema propuesto en "Solution of the system of ordinary differential equations by Adomian decomposition method" [37]. El sistema evaluado es el siguiente:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_2^2 \\ y_2' &= e^{-x}y_1 \\ y_3' &= y_2 + y_3 \end{aligned} \tag{4.43}$$

con las siguientes condiciones iniciales $y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$, en la tabla 4.7 se muestra los resultados obtenidos en el artículo y los obtenidos utilizando el algoritmo utilizado en esta tesis.

x_i	$y_1(T)$	$y_1(A)$	$y_2(T)$	$y_2(A)$	$y_3(T)$	$y_3(A)$
0	1,0	1,00008	1,0	1,0	0	0
0,1	1,2214	1,22132	1,10517	1,10516	0,110517	0,110517
0,2	1,49177	1,49186	1,22139	1,22139	0,244276	0,244275
0,3	1,82152	1,82161	1,34974	1,34974	0,404906	0,404906
0,4	2,22239	2,22249	1,49125	1,49125	0,596457	0,59456
0,5	2,70693	2,70702	1,64676	1,64676	0,823372	0,823372
0,6	3,28807	3,28813	1,81687	1,81686	1,09046	1,09046
0,7	3,97853	3,97860	2,00184	2,00184	1,40287	1,40286
0,8	4,79049	4,79050	2,20161	2,20161	1,76603	1,76603
0,9	5,7352	5,73528	2,41576	2,41576	2,18568	2,18568

Tabla 4.7: Valores para las y_i obtenidos utilizando el algoritmo desarrollado en la tesis (T) y los obtenidos en el artículo (A)

Como se observa en la tabla 4.7 la diferencia entre los valores obtenidos utilizando el algoritmo desarrollado en esta tesis y los dados en el artículo es mínima, lo que muestra la eficacia del algoritmo empleado.

Y para validar el algoritmo desarrollado para hallar la solución analítica de un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales de la forma mostrada en la ecuación 5.15 al cual pertenecen los modelos TCE, TCL, TSE y TSL analizados en el capítulo 4.

$$\begin{aligned}x' &= a + bxy \\ y' &= c + cxy\end{aligned}\tag{4.44}$$

En la tabla 4.8 se muestran los valores para x y y obtenidos con el algoritmo y los valores de x y y del artículo "Numerical Solution of Logistic Differential Equations by Using The Laplace Descomposition Method" [38].

t	$x(T)$	$x(A)$	$y(T)$	$y(A)$
0	1,3	1,3	0,6	0,6
0,05	1,32595	1,32598	0,609463	0,609463
0,1	1,35176	1,35187	0,619877	0,619878
0,15	1,37733	1,37757	0,631276	0,631281
0,2	1,40258	1,40297	0,643695	0,643711
0,25	1,42743	1,42797	0,65717	0,657209

Tabla 4.8: Valores para las x, y obtenidos utilizando el algoritmo desarrollado en la tesis (T) y los obtenidos en el artículo (A)

Como en el caso anterior las diferencias son mínimas.

4.5. Aportes

1. Se hizo una revisión del estado del arte en modelos poblacionales de *aedes* para ser aplicados en las condiciones del municipio de Bello y se seleccionaron dos modelos NO LINEALES que incluye la temperatura para la variación de los parametros.
2. Se seleccionó un modelo basado en dinámica poblacional para verificar la hipótesis de investigación (Yusoff).
3. Se usaron las condiciones de temperatura de laboratorio y el promedio de condiciones iniciales de experimentos de la SIU para evaluar los modelos seleccionados.

4. se usó la temperatura de Bello de 30 días para el cálculo de las tasas y parametros variantes de los modelos seleccionados.
5. Se usó un método analítico para la solución de modelos poblacionales del *aedes*, y su comparación con resultados experimentales permite hacer una evaluación cualitativa de los modelos
6. Se compararon los métodos analítico y numerico a un mismo tamaño de paso para dos modelos poblacionales no lineales.
7. Se demostró que las matrices de dinámicas de las matices de proyección tienen las mismas características del sistema lineal definido por la linealización de las ecuaciones poblacionales alrededor de un punto de operación.
8. Se evaluó la observabilidad del sistema con el fin de definir cuál o cuáles variables son más observables y con ello brindar alternativas de uso de estimadores (tradicionales o NO LINEALES NO GAUSSIANOS) para estimación de los estados.
9. Se evaluó la controlabilidad de los estados del sistema con el fin de determinar cualitativamente cual de los estadios del vector es más susceptible de controlar.

Capítulo 5

Conclusiones

Las conclusiones de este trabajo, pueden hacerse desde al menos cuatro perspectivas que fueron involucradas en esta tesis de maestría: La perspectiva de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones analíticas, numéricas, los sistemas de control y el punto de vista biológico. No obstante, serán los tres primeros el foco de atención que se pretende dar al lector.

Dado que el propósito de esta tesis es hacer un estudio de la dinámica poblacional del mosquito transmisor del dengue, en la cual se atiendan transversalmente a los objetivos del proyecto de investigación en el cual está inmersa; la revisión del estado del arte en esta temática fue fundamental.

Se encontró que pese a que la matemática y la biología no han sido popularmente relacionados, existían aproximaciones al modelado de la dinámica de la población del mosquito a través de sistemas de ecuaciones diferenciales para los cinco estadios biológicos del *Aedes*. En algunos casos, los modelos fueron reducidos a cuatro ecuaciones diferenciales de acuerdo al tipo de análisis que se deseaba hacer en las poblaciones de adultos.

Este tipo de ecuaciones diferenciales, obedece a los balances de materia y energía clásicos con los que se enfrentan estos problemas desde la teoría de sistemas dinámicos, ecuaciones diferenciales y sistemas de control.

Se encontró que los sistemas de ecuaciones están altamente acoplados gracias a las interacciones entre los estados que son naturalmente fruto de las transiciones de estadios de vida del mosquito.

Y adicionalmente se logró entender que al poseer transiciones que dependen fuertemente de las tasas dinámicas de los estadios del desarrollo del mosquito, y éstas a su vez de la temperatura, son transiciones que heredan características estocásticas, convirtiendo el sistema de ecuaciones en un sis-

tema de ecuaciones diferenciales estocásticas en transiciones.

Además, los balances de vida de las ecuaciones diferenciales incluyen términos no lineales que incluyen dinámicas complejas a las fases de desarrollo del mosquito.

Gracias a ello, es que el estudio de una solución analítica para estas ecuaciones y su correcta simulación requirió una aproximación usando polinomios de adomian.

El comportamiento dinámico de las soluciones de los modelos seleccionados tiene un comportamiento cualitativamente similar a la que se presenta en el laboratorio.

Las soluciones al modelo estocástico son la que menos se acercan cualitativa y cuantitativamente a los experimentos desarrollados en el laboratorio de la SIU.

Los modelos estacionales cuya temperatura varía en forma continua, son los que más se aproximan a los datos experimentales tanto en la solución analítica como en la numérica.

La solución obtenida para la población de adultos es la que más se acerca a los valores reales. Notar que en el laboratorio no se hace diferencia de las hembras que pusieron a las que no pusieron huevos.

La solución analítica presenta un comportamiento más acorde con el ciclo de vida del mosquito.

Anexos

Solución numérica y analítica de los modelos TCL, TSE Y TSL

En el capítulo 4 se halló la solución analítica y numérica del modelo estocástico de y los modelos TCE, TCL, TSE y TSL.

Las ecuaciones 4.5 y 4.8 representan las soluciones analíticas del modelo estocástico y el modelo TCE respectivamente., igualmente las tablas 4.2 y 4.3 son los datos numéricos de estas soluciones.

Igualmente las ecuaciones 4.9-4.11 y 4.12-4-14 representan las soluciones halladas aplicando el método numérico Runge Kutta para estos mismos modelos y los tablas 4.4 y 4.5 son los datos numéricos de estas soluciones.

Las ecuaciones y datos numéricos de los modelos TCL, TSE y TSL se presentan a continuación.

Solución analítica para TCL

$$E_0 = E_0$$

$$L_0 = L_0$$

$$P_0 = P_0$$

$$A_0 = A_0$$

$$E_1 = (ovimax * A_0 - (erl + ml)E_0)t$$

$$L_1 = (erl * E_0 - \frac{erl}{k}E_0 * L_0 - (ml + lpr) * L_0)t$$

$$P_1 = (lpr * L_0 - (mp + par) * P_0)t$$

$$A_1 = (par * P_0 - ma * A_0)t$$

$$E_2 = ((erl + me)^2 * E_0 - ovimax(erl + me)A_0 + ovimax * par * P_0 - ovimax * ma * A_0)\frac{t^2}{2}$$

$$L_2 = ((ml + lprl)^2 * L_0 - erl(ml + lpr) * E_0 + \frac{erl}{k} * erl * E_0 + 2 * \frac{erl}{k} * (mp + lpr) * E_0 * L_0$$

$$\begin{aligned}
& - (erl + me) * erl * E_0 + erl * ovimax * A_0 + \left(\frac{erl}{k}\right)^2 * E_0^2 * L_0 - erl * \frac{erl}{k} * E_0 \\
& + +(erl + me) * \frac{erl}{k} * E_0 * L_0 - ovimax * \frac{erl}{k} * L_0 * A_0 \frac{t^2}{2} \\
P_2 & = ((mp + par)^2 * P_0 - lpr(mp + par) * L_0 + lpr * (erl + ml) * E_0 - (ml + lpr)lpr * L_0 \\
& - lpr * \frac{erl}{k} * E_0 * L_0) \frac{t^2}{2} \\
A_2 & = (ma^2 * A_0 - par * ma * P_0 + lpr * mar * L_0 - (mp + par)lpr * P_0) \frac{t^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

La solución para el sistema es:

$$\begin{aligned}
E & = E_0 + (ovimax * A_0 - (erl + ml)E_0)t + ((erl + me)^2 * E_0 - ovimax(erl + me)A_0 \\
& + ovimax * par * P_0 - ovimax * ma * A_0) \frac{t^2}{2} \\
L & = L_0 + (erl * E_0 - \frac{erl}{k}E_0 * L_0 - (ml + lpr) * L_0)t \\
& + ((ml + lpr)^2 * L_0 - erl(ml + lpr) * E_0 + \frac{erl}{k} * erl * E_0 + 2 * \frac{erl}{k} * (mp + lpr) * E_0 * L_0 \\
& - (erl + me) * erl * E_0 + erl * ovimax * A_0 + \left(\frac{erl}{k}\right)^2 * E_0^2 * L_0 - erl * \frac{erl}{k} * E_0 \\
& + +(erl + me) * \frac{erl}{k} * E_0 * L_0 - ovimax * \frac{erl}{k} * L_0 * A_0) \frac{t^2}{2} \\
P & = P_0 + (lpr * L_0 - (mp + par) * P_0)t + ((mp + par)^2 * P_0 - lpr(mp + par) * L_0 \\
& + lpr * (erl + ml) * E_0 - (ml + lpr)lpr * L_0 - lpr * \frac{erl}{k} * E_0 * L_0) \frac{t^2}{2} \\
A & = A_0 + (par * P_0 - ma * A_0)t + (ma^2 * A_0 - par * ma * P_0 + lpr * mar * L_0 \\
& - (mp + par)lpr * P_0) \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

<i>Tiempo</i>	<i>Huevos</i>	<i>Larva</i>	<i>Pupas</i>	<i>Adultos1</i>
0	166,0	75,0	54,0	22,0
1,0	141,0	58,7	44,5	31,3
2,0	122,0	139,0	29,9	37,3
3,0	111,0	328,0	4,4	40,3
4,0	111,0	615,0	-25,2	37,6
5,0	117,0	987,0	-55,0	31,3
6,0	137,0	1499,0	-102,0	18,8
7,0	174,0	2122,0	-167,0	-2,28
8,0	217,0	2844,0	-230,0	-26,4
9,0	288,0	3722,0	-322,0	-64,1
10,0	298,0	4444,0	-330,0	-72,3
11,0	325,0	5299,0	-358,0	-89,0
12,0	466,0	6644,0	-523,0	-161,0
13,0	460,0	7522,0	-504,0	-161,0
14,0	566,0	8877,0	-615,0	-216,0
15,0	712,0	10440,0	-768,0	-292,0
16,0	784,0	11880,0	-831,0	-330,0
17,0	791,0	13000,0	-819,0	-336,0
18,0	1055,0	15220,0	-1088,0	-468,0
19,0	1244,0	17110,0	-1277,0	-566,0
20,0	1277,0	18660,0	-1277,0	-580,0
21,0	1533,0	21000,0	-1522,0	-713,0
22,0	1644,0	22990,0	-1611,0	-772,0
23,0	1655,0	24660,0	-1599,0	-778,0
24,0	2022,0	27550,0	-1944,0	-966,0
25,0	2222,0	29990,0	-2111,0	-1066,0
26,0	2900,0	33990,0	-2766,0	-1422,0
27,0	3155,0	36660,0	-2977,0	-1555,0
28,0	3311,0	39110,0	-3099,0	-1633,0
29,0	2899,0	40000,0	-2633,0	-1411,0
30,0	3577,0	44220,0	-3277,0	-1755,0

Tabla 5.1: Valores de las variables en función del tiempo para la solución analítica del modelo TCL

Solución numérica para el modelo TCL

$$E_{n+1} = E_n + \frac{1}{6}(k1e + 2k2e + 2k3e + k4e)$$

$$L_{n+1} = L_n + \frac{1}{6}(k1l + 2k2l + 2k3l + k4l)$$

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= P_n + \frac{1}{6}(k1p + 2k2p + 2k3p + k4p) \\
A_{n+1} &= A1_n + \frac{1}{6}(k1a1 + 2k2a1 + 2k3a1 + k4a1)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Los k_i

$$\begin{aligned}
k1e &= h * feggtcl(E_{n-1}, A_{n-1}, ovimax, erl + ml) \\
k1l &= h * flartcl(E_{n-1}, L_{n-1}, erl, \frac{erl}{k}, ml + lpr) \\
k1p &= h * fpupl(L_{n-1}, P_{n-1}, lpr, mp + par) \\
k1a &= h * fadul(P_{n-1}, A_{n-1}, par, ma) \\
k2e &= h * feggtcl(E_{n-1} + \frac{1}{2} * k1e, A_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a, ovimax, erl + ml) \\
k2l &= h * flartcl(E_{n-1} + \frac{1}{2} * k1e, L_{n-1} + \frac{1}{2} * k1l, erl, \frac{erl}{k}, ml + lpr) \\
k2p &= h * fpupl(L_{n-1} + \frac{1}{2} * k1l, P_{n-1} + \frac{1}{2} * k1p, lpr, mp + par) \\
k2a &= h * fadul(P_{n-1} + \frac{1}{2} * k1p, A_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a, par, ma) \\
k3e &= h * feggtcl(E_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2e, A_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2a, ovimax, erl + ml) \\
k3l &= h * flartcl(E_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2e, L_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2l, erl, \frac{erl}{k}, ml + lpr) \\
k3p &= h * fpupl(L_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2l, P_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2p, lpr, mp + par) \\
k3a &= h * fadul(P_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2p, A_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2a, par, ma) \\
k4e &= h * feggtcl(E_{n-1} + k3e, A_{n-1} + k3a, ovimax, \frac{ovimax}{k}, erl + ml) \\
k4l &= h * flartcl(E_{n-1} + k3e, L_{n-1} + k3l, , erl, \frac{erl}{k}, ml + lpr) \\
k4p &= h * fpupl(L_{n-1} + k3l, P_{n-1} + k3p, lpr, mp + par) \\
k4a &= h * fadul(P_{n-1} + k3p, A_{n-1} + k3a, par, ma)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

y las funciones fe, fl, fp y fa

$$\begin{aligned}
feggtcl &= ovimax * A_{n-1} - (erl + ml) * E_{n-1} \\
flartcl &= erl * E_{n-1} - erl + \frac{erl}{k} * E_{n-1} * L_{n-1} - (ml + lpr) * L_{n-1} \\
fpupl &= lpr * L_{n-1} - (mp + par) * P_{n-1} \\
fadul &= par * P_{n-1} - ma * A_{n-1}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

<i>Tiempo</i>	<i>Huevos</i>	<i>Larva</i>	<i>Pupas</i>	<i>Adultos1</i>
0	166,0	75,0	54,0	22,0
1,0	167,0	100,0	52,2	26,4
2,0	169,0	133,0	51,9	30,4
3,0	170,0	177,0	53,5	34,2
4,0	172,0	235,0	57,2	38,1
5,0	174,0	311,0	63,6	42,3
6,0	177,0	413,0	73,5	47,1
7,0	179,0	547,0	87,8	52,9
8,0	183,0	725,0	108,0	60,2
9,0	186,0	961,0	135,0	69,6
10,0	190,0	1277,0	172,0	81,9
11,0	196,0	1688,0	222,0	98,1
12,0	202,0	2233,0	289,0	120,0
13,0	210,0	2955,0	377,0	148,0
14,0	220,0	3911,0	495,0	186,0
15,0	232,0	5188,0	652,0	236,0
16,0	248,0	6855,0	860,0	303,0
17,0	269,0	9077,0	1144,0	392,0
18,0	296,0	12000,0	1500,0	510,0
19,0	332,0	15990,0	1988,0	666,0
20,0	379,0	21000,0	2622,0	873,0
21,0	440,0	27990,0	3477,0	1155,0
22,0	521,0	36990,0	4599,0	1511,0
23,0	628,0	48880,0	6088,0	1999,0
24,0	769,0	64660,0	8055,0	2633,0
25,0	955,0	85550,0	10770,0	3477,0
26,0	1200,0	113300,0	14110,0	4599,0
27,0	1533,0	150000,0	18770,0	6077,0
28,0	1966,0	198800,0	24770,0	8033,0
29,0	2533,0	262200,0	32770,0	10660,0
30,0	3288,0	347700,0	43330,0	14110,0

Tabla 5.2: Valores de las variables en función del tiempo para la solución numérica del modelo TCL

Solución analítica para TSE.

$$\begin{aligned}
E_0 &= E_0 \\
L_0 &= L_0 \\
P_0 &= P_0 \\
A_0 &= A_0 \\
E_1 &= (ovimax * A_0 - (erl + ml)E_0 - \frac{ovimax}{k}E_0 * A_0)t \\
L_1 &= (erl * E_0 - (ml + lpr) * L_0)t \\
P_1 &= (lpr * L_0 - (mp + par) * P_0)t \\
A_1 &= (par * P_0 - ma * A_0)t \\
E_2 &= ((\frac{ovimax}{k})^2 E_0 * A_0^2) - 2(erl + ml)\frac{ovimax}{k}E_0 * A_0 - ovimax * \frac{ovimax}{k}A_0 \\
&+ ma\frac{ovimax}{k}E_0 * A_0 - \frac{ovimax}{k}par * E_0 * P_0 + (erl + ml)^2 E_0 - ovimax(erl + ml)A_0 \\
&- ovimax * ma * A_0 + ovimax * par * P_0 \frac{t^2}{2} \\
L_2 &= ((ml + lpr)^2 * L_0 - erl(ml + lpr) * E_0 - (erl + ml)lpr * E_0 + \frac{ovimax}{k}erl * E_0 * A_0) \frac{t^2}{2} \\
P_2 &= ((mp + par)^2 * P_0 - lpr(mp + par) * L_0 + erl * lpr * E_0 - (ml + lpr)lpr * L_0) \frac{t^2}{2} \\
A_2 &= (ma^2 * A_0 - par * ma * P_0 + lpr * par * L_0 - (mp + par)par * P_0) \frac{t^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

La solución para el sistema es:

$$\begin{aligned}
E &= E_0 + (ovimax * A_0 - (erl + ml)E_0 - \frac{ovimax}{k}E_0 * A_0)t + ((\frac{ovimax}{k})^2 E_0 * A_0^2) \\
&- 2(erl + ml)\frac{ovimax}{k}E_0 * A_0 - ovimax * \frac{ovimax}{k}A_0 + ma\frac{ovimax}{k}E_0 * A_0 \\
&- \frac{ovimax}{k}par * E_0 * P_0 + (erl + ml)^2 E_0 - ovimax(erl + ml)A_0 - ovimax * ma * A_0 \\
&+ ovimax * par * P_0 \frac{t^2}{2} \\
L &= L_0 + (erl * E_0 - (ml + lpr) * L_0)t + ((ml + lpr)^2 * L_0 - erl(ml + lpr) * E_0 \\
&- (erl + ml)lpr * E_0 + \frac{ovimax}{k}erl * E_0 * A_0) \frac{t^2}{2} \\
P &= P_0 + (lpr * L_0 - (mp + par) * P_0)t + ((mp + par)^2 * P_0 - lpr(mp + par) * L_0 \\
&+ erl * lpr * E_0 - (ml + lpr)lpr * L_0) \frac{t^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$A = A_0 + (par * P_0 - ma * A_0)t + (ma^2 * A_0 - par * ma * P_0 + lpr * par * L_0 - (mp + par)par * P_0) \frac{t^2}{2}$$

<i>Tiempo</i>	<i>Huevos</i>	<i>Larva</i>	<i>Pupas</i>	<i>Adultos1</i>
0	166,0	75,0	22,9	22,0
1,0	60,0	74,1	23,6	10,7
2,0	-274,0	101,0	21,7	-0,474
3,0	-1277,0	216,0	14,2	-28,9
4,0	-3388,0	480,0	-1,61	-91,6
5,0	-7033,0	953,0	-28,7	-206,0
6,0	-12770,0	1700,0	-70,0	-389,0
7,0	-20770,0	2777,0	-128,0	-658,0
8,0	-31660,0	4244,0	-207,0	-1033,0
9,0	-45880,0	6166,0	-307,0	-1522,0
10,0	-63880,0	8599,0	-434,0	-2155,0
11,0	-85990,0	11660,0	-589,0	-2944,0
12,0	-113300,0	15220,0	-776,0	-3900,0
13,0	-144400,0	19660,0	-996,0	-5044,0
14,0	-182200,0	24770,0	-1255,0	-6400,0
15,0	-225500,0	30660,0	-1555,0	-7988,0
16,0	-274400,0	37330,0	-1899,0	-9799,0
17,0	-331100,0	45110,0	-2288,0	-11990,0
18,0	-395500,0	53880,0	-2711,0	-14220,0
19,0	-466600,0	63660,0	-3200,0	-16990,0
20,0	-545500,0	74440,0	-3744,0	-19880,0
21,0	-633300,0	86550,0	-4344,0	-23110,0
22,0	-730000,0	99880,0	-5000,0	-26770,0
23,0	-837700,0	114400,0	-5722,0	-30770,0
24,0	-953300,0	130000,0	-6511,0	-35110,0
25,0	-1088000,0	148800,0	-7366,0	-39880,0
26,0	-1222000,0	167700,0	-8299,0	-45000,0
27,0	-1377000,0	187700,0	-9299,0	-50660,0
28,0	-1533000,0	209900,0	-10440,0	-56770,0
29,0	-1700000,0	233300,0	-11550,0	-63220,0
30,0	-1888000,0	258800,0	-12880,0	-70220,0

Tabla 5.3: Valores de las variables en función del tiempo para la solución analítica del modelo TSE

Solución numérica para el modelo TSE

$$\begin{aligned}
E_{n+1} &= E_n + \frac{1}{6}(k1e + 2k2e + 2k3e + k4e) \\
L_{n+1} &= L_n + \frac{1}{6}(k1l + 2k2l + 2k3l + k4l) \\
P_{n+1} &= P_n + \frac{1}{6}(k1p + 2k2p + 2k3p + k4p) \\
A_{n+1} &= A_n + \frac{1}{6}(k1a + 2k2a + 2k3a + k4a)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Los k_i

$$\begin{aligned}
k1e &= h * feggtse(E_{n-1}, A_{n-1}, ovimax, erl + ml) \\
k1l &= h * flartse(E_{n-1}, L_{n-1}, erl, \frac{erl}{k}, ml + lpr) \\
k1p &= h * fpupl(L_{n-1}, P_{n-1}, lpr, mp + par) \\
k1a &= h * fadul(P_{n-1}, A_{n-1}, par, ma) \\
k2e &= h * feggtse(E_{n-1} + \frac{1}{2} * k1e, A_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a, ovimax, erl + ml) \\
k2l &= h * flartse(E_{n-1} + \frac{1}{2} * k1e, L_{n-1} + \frac{1}{2} * k1l, erl, \frac{erl}{k}, ml + lpr) \\
k2p &= h * fpupl(L_{n-1} + \frac{1}{2} * k1l, P_{n-1} + \frac{1}{2} * k1p, lpr, mp + par) \\
k2a &= h * fadul(P_{n-1} + \frac{1}{2} * k1p, A_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a, par, ma) \\
k3e &= h * feggtse(E_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2e, A_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2a, ovimax, erl + ml) \\
k3l &= h * flartse(E_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2e, L_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2l, erl, \frac{erl}{k}, ml + lpr) \\
k3p &= h * fpupl(L_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2l, P_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2p, lpr, mp + par) \\
k3a &= h * fadul(P_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2p, A_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2a, par, ma) \\
k4e &= h * feggtse(E_{n-1} + k3e, A_{n-1} + k3a, ovimax, \frac{ovimax}{k}, erl + ml) \\
k4l &= h * flartse(E_{n-1} + k3e, L_{n-1} + k3l, erl, \frac{erl}{k}, ml + lpr) \\
k4p &= h * fpupl(L_{n-1} + k3l, P_{n-1} + k3p, lpr, mp + par) \\
k4a &= h * fadul(P_{n-1} + k3p, A_{n-1} + k3a, par, ma)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

y las funciones fe, fl, fp y fa

$$\begin{aligned}
feggtse &= ovimax * A_{n-1} - (erl + ml) * E_{n-1} \\
flartse &= erl * E_{n-1} - erl + \frac{erl}{k} * E_{n-1} * L_{n-1} - (ml + lpr) * L_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 fpupl &= lpr * L_{n-1} - (mp + par) * P_{n-1} \\
 fadul &= par * P_{n-1} - ma * A_{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

<i>Tiempo</i>	<i>Huevos</i>	<i>Larva</i>	<i>Pupas</i>	<i>Adultos</i> ¹
0	166,0	75,0	54,0	22,0
1,0	139,0	80,4	55,3	20,0
2,0	118,0	83,4	56,7	18,4
3,0	101,0	84,6	58,2	17,0
4,0	86,8	84,4	59,6	15,9
5,0	75,6	83,4	61,0	15,0
6,0	66,2	81,5	62,2	14,3
7,0	58,4	79,2	63,4	13,7
8,0	51,9	76,5	64,4	13,2
9,0	46,3	73,6	65,3	12,9
10,0	41,6	70,5	66,0	12,6
11,0	37,6	67,4	66,7	12,3
12,0	34,1	64,2	67,1	12,2
13,0	31,2	61,1	67,5	12,0
14,0	28,7	58,0	67,7	11,9
15,0	26,5	55,0	67,8	11,8
16,0	24,6	52,1	67,8	11,7
17,0	23,0	49,4	67,6	11,7
18,0	21,6	46,7	67,4	11,6
19,0	20,4	44,2	67,1	11,5
20,0	19,4	41,9	66,7	11,5
21,0	18,5	39,6	66,3	11,4
22,0	17,7	37,5	65,7	11,4
23,0	17,0	35,6	65,2	11,3
24,0	16,4	33,7	64,5	11,2
25,0	15,9	32,0	63,8	11,1
26,0	15,4	30,4	63,1	11,0
27,0	15,1	28,9	62,3	11,0
28,0	14,7	27,5	61,5	10,9
29,0	14,4	26,2	60,7	10,8
30,0	14,1	25,0	59,8	10,6

Tabla 5.4: Valores de las variables en función del tiempo para la solución numérica del modelo TSE

Solución analítica para TSL

$$\begin{aligned}
E_0 &= E_0 \\
L_0 &= L_0 \\
P_0 &= P_0 \\
A_0 &= A_{10} \\
E_1 &= (ovimax * A_0 - (erl + ml)E_0)t \\
L_1 &= (erl * E_0 - \frac{erl}{k}E_0 * L_0 - (ml + lpr) * L_0)t \\
P_1 &= (lpr * L_0 - (mp + par) * P_0)t \\
A_1 &= (par * P_0 - ma * A_0)t \\
E_2 &= ((erl + me)^2 * E_0 - ovimax(erl + me)A_0 + ovimax * par * P_0 - ovimax * ma * A_0)\frac{t^2}{2} \\
L_2 &= ((ml + lprl)^2 * L_0 - erl(ml + lpr) * E_0 + \frac{erl}{k} * erl * E_0 + 2 * \frac{erl}{k} * (mp + lpr) * E_0 * L_0 \\
&\quad - (erl + me) * erl * E_0 + erl * ovimax * A_0 + (\frac{erl}{k})^2 * E_0^2 * L_0 - erl * \frac{erl}{k} * E_0 \\
&\quad + (erl + me) * \frac{erl}{k} * E_0 * L_0 - ovimax * \frac{erl}{k} * L_0 * A_0)\frac{t^2}{2} \\
P_2 &= ((mp + par)^2 * P_0 - lpr(mp + par) * L_0 + lpr * (erl + ml) * E_0 - (ml + lpr)lpr * L_0 \\
&\quad - lpr * \frac{erl}{k} * E_0 * L_0)\frac{t^2}{2} \\
A_2 &= (ma^2 * A_0 - par * ma * P_0 + lpr * mar * L_0 - (mp + par)lpr * P_0)\frac{t^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

La solución para el sistema es:

$$\begin{aligned}
E &= E_0 + (ovimax * A_0 - (erl + ml)E_0)t + ((erl + me)^2 * E_0 - ovimax(erl + me)A_0 \\
&\quad + ovimax * par * P_0 - ovimax * ma * A_0)\frac{t^2}{2} \\
L &= L_0 + (erl * E_0 - \frac{erl}{k}E_0 * L_0 - (ml + lpr) * L_0)t \\
&\quad + ((ml + lprl)^2 * L_0 - erl(ml + lpr) * E_0 + \frac{erl}{k} * erl * E_0 + 2 * \frac{erl}{k} * (mp + lpr) * E_0 * L_0 \\
&\quad - (erl + me) * erl * E_0 + erl * ovimax * A_0 + (\frac{erl}{k})^2 * E_0^2 * L_0 - erl * \frac{erl}{k} * E_0 \\
&\quad + (erl + me) * \frac{erl}{k} * E_0 * L_0 - ovimax * \frac{erl}{k} * L_0 * A_0)\frac{t^2}{2} \\
P &= P_0 + (lpr * L_0 - (mp + par) * P_0)t + ((mp + par)^2 * P_0 - lpr(mp + par) * L_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + lpr * (erl + ml) * E_0 - (ml + lpr)lpr * L_0 - lpr * \frac{erl}{k} * E_0 * L_0 \frac{t^2}{2} \\
A = & A_0 + (par * P_0 - ma * A_0)t + (ma^2 * A_0 - par * ma * P_0 + lpr * mar * L_0 \\
& - (mp + par)lpr * P_0) \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

<i>Tiempo</i>	<i>Huevos</i>	<i>Larva</i>	<i>Pupas</i>	<i>Adultos1</i>
0	166,0	75,0	54,0	22,0
1,0	146,0	62,5	44,9	16,2
2,0	120,0	199,0	29,8	19,3
3,0	63,3	2288,0	-100,0	47,0
4,0	67,0	4222,0	-230,0	83,7
5,0	3,03	1500,0	-51,5	82,4
6,0	131,0	9900,0	-607,0	200,0
7,0	192,0	13660,0	-855,0	279,0
8,0	271,0	18000,0	-1144,0	373,0
9,0	370,0	22990,0	-1477,0	481,0
10,0	487,0	28550,0	-1833,0	603,0
11,0	-404,0	8111,0	-376,0	450,0
12,0	779,0	41440,0	-2688,0	889,0
13,0	-591,0	11550,0	-532,0	644,0
14,0	-695,0	13440,0	-619,0	754,0
15,0	1366,0	65220,0	-4244,0	1433,0
16,0	1599,0	74440,0	-4844,0	1633,0
17,0	-1044,0	20110,0	-917,0	1144,0
18,0	2111,0	94550,0	-6166,0	2099,0
19,0	2400,0	105500,0	-6888,0	2344,0
20,0	2700,0	117700,0	-7633,0	2600,0
21,0	3033,0	129900,0	-8433,0	2888,0
22,0	3377,0	142200,0	-9266,0	3188,0
23,0	-1911,0	37440,0	-1677,0	2155,0
24,0	4122,0	169900,0	-11110,0	3800,0
25,0	4522,0	184400,0	-12000,0	4144,0
26,0	4944,0	199900,0	-13000,0	4499,0
27,0	5388,0	215500,0	-14000,0	4855,0
28,0	5844,0	231100,0	-15110,0	5233,0
29,0	6322,0	248800,0	-16220,0	5622,0
30,0	6822,0	266600,0	-17440,0	6033,0

Tabla 5.5: Valores de las variables en función del tiempo para la solución analítica del modelo TSL

Solución numérica para el modelo TSL

$$\begin{aligned}
E_{n+1} &= E_n + \frac{1}{6}(k1e + 2k2e + 2k3e + k4e) \\
L_{n+1} &= L_n + \frac{1}{6}(k1l + 2k2l + 2k3l + k4l) \\
P_{n+1} &= P_n + \frac{1}{6}(k1p + 2k2p + 2k3p + k4p) \\
A_{n+1} &= A_n + \frac{1}{6}(k1a + 2k2a + 2k3a + k4a)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Los k_i

$$\begin{aligned}
k1e &= h * feggtsl(E_{n-1}, A_{n-1}, ovimax, erl + ml) \\
k1l &= h * flartsl(E_{n-1}, L_{n-1}, erl, \frac{erl}{k}, ml + lpr) \\
k1p &= h * fpupl(L_{n-1}, P_{n-1}, lpr, mp + par) \\
k1a &= h * fadul(P_{n-1}, A_{n-1}, par, ma) \\
k2e &= h * feggtsl(E_{n-1} + \frac{1}{2} * k1e, A_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a, ovimax, erl + ml) \\
k2l &= h * flartsl(E_{n-1} + \frac{1}{2} * k1e, L_{n-1} + \frac{1}{2} * k1l, erl, \frac{erl}{k}, ml + lpr) \\
k2p &= h * fpupl(L_{n-1} + \frac{1}{2} * k1l, P_{n-1} + \frac{1}{2} * k1p, lpr, mp + par) \\
k2a &= h * fadul(P_{n-1} + \frac{1}{2} * k1p, A_{n-1} + \frac{1}{2} * k1a, par, ma) \\
k3e &= h * feggtsl(E_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2e, A_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2a, ovimax, erl + ml) \\
k3l &= h * flartsl(E_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2e, L_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2l, erl, \frac{erl}{k}, ml + lpr) \\
k3p &= h * fpupl(L_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2l, P_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2p, lpr, mp + par) \\
k3a &= h * fadul(P_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2p, A_{n-1} + (\frac{1}{2}) * k2a, par, ma) \\
k4e &= h * feggtsl(E_{n-1} + k3e, A_{n-1} + k3a, ovimax, \frac{ovimax}{k}, erl + ml) \\
k4l &= h * flartsl(E_{n-1} + k3e, L_{n-1} + k3l, erl, \frac{erl}{k}, ml + lpr) \\
k4p &= h * fpupl(L_{n-1} + k3l, P_{n-1} + k3p, lpr, mp + par) \\
k4a &= h * fadul(P_{n-1} + k3p, A_{n-1} + k3a, par, ma)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

y las funciones fe, fl, fp y fa

$$\begin{aligned}
feggtsl &= ovimax * A_{n-1} - (erl + ml) * E_{n-1} \\
flartsl &= erl * E_{n-1} - erl + \frac{erl}{k} * E_{n-1} * L_{n-1} - (ml + lpr) * L_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 fpupl &= lpr * L_{n-1} - (mp + par) * P_{n-1} \\
 fadul &= par * P_{n-1} - ma * A_{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

<i>Tiempo</i>	<i>Huevos</i>	<i>Larva</i>	<i>Pupas</i>	<i>Adultos</i> ¹
0	166,0	75,0	54,0	22,0
1,0	162,0	110,0	53,0	20,0
2,0	158,0	141,0	52,7	18,3
3,0	148,0	165,0	56,9	16,9
4,0	139,0	185,0	61,7	15,8
5,0	135,0	203,0	62,2	15,4
6,0	127,0	216,0	68,2	14,7
7,0	119,0	226,0	74,4	14,2
8,0	111,0	233,0	80,8	14,1
9,0	104,0	238,0	87,2	14,0
10,0	98,1	241,0	93,5	14,2
11,0	96,4	244,0	93,3	15,4
12,0	91,0	245,0	99,7	15,5
13,0	90,0	246,0	99,3	16,7
14,0	89,2	248,0	98,9	17,6
15,0	84,7	246,0	105,0	17,5
16,0	80,6	244,0	111,0	17,6
17,0	80,5	243,0	110,0	18,9
18,0	77,0	240,0	116,0	18,9
19,0	73,8	236,0	121,0	19,0
20,0	70,8	233,0	126,0	19,3
21,0	68,1	228,0	131,0	19,6
22,0	65,7	224,0	136,0	20,0
23,0	67,0	221,0	133,0	21,8
24,0	65,0	217,0	137,0	21,9
25,0	63,2	213,0	141,0	22,1
26,0	61,6	209,0	145,0	22,4
27,0	60,2	204,0	148,0	22,7
28,0	59,0	200,0	152,0	23,1
29,0	57,9	196,0	154,0	23,4
30,0	56,9	192,0	157,0	23,8

Tabla 5.6: Valores de las variables en función del tiempo para la solución numérica del modelo TSL

Bibliografía

- [1] Organización Panamericana de la salud. Estrategia de Gestión Integrada para la prevención y control de dengue para la Subregión Andina EGI-Dengue Subregión Andina Lima, Perú julio de 2008
- [2] Zambrano Pilar Protocolo de Vigilancia en Salud Pública Instituto Nacional de Salud
- [3] Sandro Jeronimo de Almeida , Ricardo Poley Martins Ferreirab, Álvaro E. Eiras , Robin P. Obermayr , Martin Geier , Multi-agent modeling and simulation of and Aedes Aegytip mosquito population. Environmental Modelling & Software, 2010.
- [4] Yusoff Nuraini, Budin Harun, Ismail Salemah, Stage-Structured Population Dynamics of Aedes Aegypti, International Conference Mathematical and Computational Biology 2011.
- [5]] Yusoff Nuraini, Budin Harun, Ismail Salemah, Stage-Structured Population Dynamics of Aedes Aegypti, International Conference Mathematical and Computational Biology 2011.
- [6] Nuraini Yusoff, Harun Budin, and Salemah Ismail, Simulation of Population Dynamics of Aedes aegypti using Climate Dependent Model, World Academy of Science, Engineering and Technology 62 2012.
- [7] Raquel M. Lanaa, Tiago G.S. Carneiroa, Nildimar. Honório, Cláudia T. Codeco, Seasonal and nonseasonal dynamics of Aedes aegypti in Rio de Janeiro,Brazil: Fitting mathematical models to trap data, Acta Tropica 2013.
- [8] Raquel M. Lanaa, Tiago G.S. Carneiroa, Nildimar. Honório, Cláudia T. Codeco, Seasonal and nonseasonal dynamics of Aedes aegypti in Rio de Janeiro,Brazil: Fitting mathematical models to trap data, Acta Tropica 2013.
- [9] Yang Hyun Mo, Da Grraca Macoris Maria de Lourdes,Galvani Karen Cristinai, Marcoris Andrighetti Maria Teresa, Follow up estimation of

Aedes aegypti entomological parameters and mathematical modellings, *BioSystems* 103 (2011).

- [10] Otero, M., Solari, H.G., Schweigmann, N., 2006. A stochastic population dynamics model for *Aedes aegypti*: formulation and application to a city with temperate climate. *Bull. Math. Biol.* 68.
- [11] Chico Aldama Patricia, Hidalgo García Felipe De Jesús, Ochoa Esquivel Rosa Del Carmen, Ciclo De Vida De *Aedesaegypti* Y Manifestaciones Clínicas Deldengue Acta Pediátricas de México Volumen 22, Núm. .2, marzo - abril, 2001
- [12] Cano Cancela Alfredo. Sistemas de Lotka–Volterra en dinámica poblacional. Trabajo Fin de Máster de la UNED
- [13] Wolfgang Walter. Ordinary Differential Equations, Springer, Mathematisches Institut I Universitdt Karlsruhe D–76128 Karlsruhe Germany
- [14] BougoffaLazhar , Bougoffa Smail, Adomian method for solving some coupled systems of two equations, *Applied Mathematics and Computation* 177 (2006).
- [15] Oviedo Jorge Mauricio, Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Resolucion por medio de Maple, Matematica, Gauss, Matlab y Macros de Excel. Universidad Nacional de Cordoba, Argentina
- [16] Ogata Katsuhiko, Ingeniería de control moderna 3 Edición ,Prentice-Hall HispanoAmerica, S.A., Universidad de Minnesota, 1998.
- [17] Ogata Katsuhiko, Sistemas de Control en Tiempo Discreto. 2 Edición, Prentice-Hall HispanoAmerica, S.A., Universidad de Minnesota, 1996.
- [18] Yusoff Nuraini, Budin Harun, Ismail Salemah, Stage-Structured Population Dynamics of *Aedes Aegypti*, International Conference Mathematical and Computational Biology 2011.
- [19] Codeco Claudia, Population dynamics of *Aedes aegypti*, vector of Dengue Fever, IFT, Sao Paulo.
- [20] Ethier, S.N., Kurtz, T.G., 1986. Markov Processes. John Wiley and Sons, New York.
- [21] Sharpe, P.J.H., DeMichele, D.W., 1977. Reaction kinetics of poikilotherm development. *J. Theor.*
- [22] Schoofield, R.M., Sharpe, P.J.H., Magnuson, C.E., 1981. Non-linear regression of biological temperature-dependent rate models based on absolute reaction-rate theory. *J. Theor. Biol.* 88

- [23] Andersson, H., Britton, T., 2000. Stochastic epidemic models and their statistical analysis. Volume 151 of Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag, Berlin
- [24] Király, A., János, I. M., 2002. Stochastic modelling of daily temperature fluctuations. *Phys. Rev.E* 65, 051102.
- [25] Solari, H., Natiello, M., 2003a. Poisson approximation to density dependent stochastic processes: A numerical implementation and test. In: Khrennikov, A. (Ed.), *Mathematical Modelling in Physics, Engineering and Cognitive Sciences. Proceedings of the Workshop Dynamical Systems from Number Theory to Probability-2*, vol. 6. Växjö University Press, Växjö, pp,79 – 94.
- [26] Yang, H.M., Della Negra, M., Lian, Y.C., Queiroz, W., Hotta, L.K., 2003. The seroreversion and the survival related to HIV infection among children: statistical modeling applied to retrospective data collection. *Math. Comput. Modell.* 38, 251 – 267.
- [27] Yang, H.M., Macoris, M.L.G., Galvani, K.C., Andrighetti, M.T.M., Wanderley, D.M.V., 2009a. Assessing the effects of temperature on the population of *Aedes aegypti*, the vector of dengue. *Epidemiol. Infect.* 137 (8), 1188 – 1202.
- [28] Vector Topics, 1980. *Biologia y Control del Aedes aegypti*. U.S. Department of Health and Human Services, 80 pp.
- [29] Honório, N.A., Codeco, C.T., Alves, F.C., Magalhaes, M.A.F.M., Lourenco-de-Oliveira, R., 2009a. Temporal distribution of *Aedes aegypti* in different neighborhoods of Rio de Janeiro, Brazil, measured by two types of traps. *Journal of Medical Entomology* 46, 000-000.
- [30] Ferreira, C.P., Yang, H.M., 2003a. Estudo Dinamico da Populacao de Mosquito *Aedes aegypti*. *Tendencias em Matemática Aplicada e Computacional* 4, 187 – 196.
- [31] Yang, H.M., Macoris, M.L.G., Galvani, K.C., Andrighetti, M.T.M., Wanderley, D.M.V., 2009. Assessing the effects of temperature on the population of *Aedes aegypti*, the vector of dengue. *Epidemiology and Infection* 137, 1188 – 1202.
- [32] D.A. Focks, et al., "Dynamic Life Table Model for *Aedes aegypti* (Diptera: Culicidae): Analysis of the Literature and Model Development," *Journal of Medical Entomology*, vol. 30, no. 6, pp. 1003 – 1017, 1993.

- [33] Luz, P.M., Codeco, C.T., Medlock, J., Struchiner, C.J., Valle, D., Galvani, A.P., 2009. Impact of insecticide interventions on the abundance and resistance profile of *Aedes aegypti*. *Epidemiology and Infection* 137, 1203 – 1215,
- [34] Calvo Sendín José Francisco. *Ecología de Poblaciones, Dinámica de poblaciones y demografía*, Departamento de Ecología e Hidrología, Universidad de Murcia
- [35] J. Boardman, D. Hrozencik, M. Kwon, I. Ul-Haq and A. Zeleke, *Using Population Models in the Teaching of Eigenvalues* Center for Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science, Rutgers University, Piscataway, 2007.
- [36] K.H. Tan, et al., "Modelling Mosquito Population with Temperature Effects," *Proc. of International Conference on Environmental Research and Technology*, Penang, Malaysia, 2008, pp. 536 – 540.
- [37] J. Biazar, E. Babolian, R. Islam. Solution of the system of ordinary differential equations by Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation* 147 (2004) 713–719
- [38] S. Islam, Khan Yasir, Faraz Naeem and Austin Francis, Numerical Solution of Logistic Differential Equations by Using The Laplace Decomposition Method, *World Applied Sciences Journal* 8(9) 1100–1105, 2010