Acerca de la mejor ubicación de reservas pasivas en un sistema serie de dos componentes

Christian Y. Gómez Cortés *

Departamento de Matemáticas, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia

José E. Valdés**

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba

Resumen

Se considera un sistema serie constituido por dos componentes. Se dispone además de dos reservas para ubicar de forma pasiva con los componentes. En uno de los casos considerados se colocan las dos reservas, una a cada componente, y es necesario determinar cuál reserva colocar a cada componente. En un segundo caso se coloca solo una de las reservas, y se necesita determinar cuál de las reservas, y a cuál de los componentes, ésta le será colocada. La investigación se realiza por medio de la comparación entre los tiempos de vida de los sistemas, usando órdenes estocásticos. En cada caso se hallan condiciones que permiten determinar la mejor estructura del sistema en el sentido de algún orden estocástico. También se estudian situaciones en las cuales no existe una estructura mejor que otra. Entre los resultados de mayor interés hallados, en el caso en que se coloca solo una reserva, están los referidos a las condiciones bajo las cuales es mejor colocar la reserva más débil con el componente también más débil. Estos resultados brindan recomendaciones para el diseño de las estructuras en la práctica.

Palabras claves: fiabilidad; sistema serie; reservas pasivas; comparaciones estocásticas.

1. Introducción

Una forma de aumentar la fiabilidad de los sistemas es la colocación de reservas, pasivas o activas. El problema general de cuáles reservas y dónde colocar éstas para obtener configuraciones óptimas en

* *e-mail:* crijoka@hotmail.com
** *e-mail:* vcastro@matcom.uh.cu

algún sentido, ha sido extensamente estudiado usando órdenes estocásticos. Entre los primeros trabajos dedicados a este tema se pueden citar, Boland et al. (1988, 1992), y Singh y Misra (1994). Otros estudios dedicados al tema son, Chen et al. (2017), Laniado y Lillo (2014), Romera et al. (2004), Valdés y Zequeira (2003, 2006), Valdés et al. (2010), Wuang y Laniado (2015a, 2015b). En este artículo se investigan las formas óptimas de colocar dos reservas pasivas en un sistema serie de dos unidades. En Chen et al. (2017), Zhao et al. (2012), y Zhao et al. (2013a, 2013b) se encuentran los resultados que tienen mayor vínculo con los hallados en este artículo.

La función de supervivencia correspondiente a una función de distribución $F(t)$ se denotará por $\bar{F}(t)$. Si X es una variable aleatoria no negativa y absolutamente continua, con densidad de probabilidad $f(t)$, entonces la tasa de riesgo $r(t)$ correspondiente a X se define (ver Barlow y Proschan (1975)),

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)},$$

para todo $t \geq 0$ tal que $\bar{F}(t) > 0$. Se tiene que $\bar{F}(t) = e^{-\Lambda(t)}$, donde $\Lambda(t) = \int_0^t r(x)dx$. Observe además que $\lim_{t\to\infty} \Lambda(t) = \infty$.

Dada una variable aleatoria no negativa X_i, denotemos por $F_i(t)$ y $f_i(t)$, $i = 1,2$, sus funciones de distribución y densidad de probabilidad, respectivamente. Consideremos las siguientes definiciones de órdenes estocásticos. Se dice que X_1 es menor que X_2 en el orden:

1. *Estocástico usual*, denotado por $X_1 \leq_{st} X_2$, si $\bar{F}_1(t) \leq \bar{F}_2(t)$ para todo $t \geq 0$.

2. *De la tasa de riesgo*, denotado por $X_1 \leq_{hr} X_2$, si $\bar{F}_1(t)/\bar{F}_2(t)$ es decreciente para todo t tal que $\bar{F}_2(t) > 0$.

3. *De la razón de verosimilitud*, denotado por $X_1 \leq_{lr} X_2$, si $f_1(t)/f_2(t)$ es decreciente para todo t tal que $f_2(t) > 0$.

Se utilizará la notación $X_1 =_{st} X_2$ para significar que X_1 y X_2 tienen igual distribución.

Como es conocido, el orden $X_1 \leq_{hr} X_2$ se expresa de forma equivalente con el cumplimiento de la desigualdad

$$\bar{F}_2(x)\bar{F}_1(y) \leq \bar{F}_2(y)\bar{F}_1(x),$$

para todos los valoes x y y tales que $0 \leq x \leq y$. Cuando X_1 y X_2 son absolutamente continuas, la relación $X_1 \leq_{hr} X_2$ es equivalentes a la desigualdad $r_1(t) \geq r_2(t)$, para todo $t \geq 0$, donde $r_i(t)$ es la tasa de riesgo de X_i, $i = 1,2$.

La relación entre los tres órdenes estocásticos definidos es bien conocida: $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. En Shaked y Shanthikumar (2007) y Belzunce et.al. (2015), se hacen estudios detallados de los órdenes estocásticos.

Recordemos la definición de algunas clases de envejecimiento. Dada una variable aleatoria no negativa X con función de distribución F, se dice que X pertenece a la clase NBU (New Better than Used), denotado $X \in$NBU, si para todos los valores $t, x \geq 0$, se tiene

$$\bar{F}(t+x) \leq \bar{F}(t)\bar{F}(x).$$

De forma similar, se dice que X pertenece a la clase NWU (New Worse than Used), denotado $X \in$NWU, si para todos $t, x \geq 0$, se cumple

$$\bar{F}(t+x) \geq \bar{F}(t)\bar{F}(x).$$

La clase NBU contiene a la clase IFR (Increasing Failure Rate). De manera análoga, la clase NWU contiene a la clase DFR (Decreasing Failure Rate). Una variable aleatoria X con tasa de riesgo $r(t)$ se dice que pertenece a la clase IFR (DFR) si $r(t)$ es creciente (decreciente) para todo $t \geq 0$. Para un estudio sobre las clases de envejecimiento puede verse Barlow y Proschan (1975).

En todo el artículo se denotarán por X_1 y X_2 los tiempos de vida de dos componentes, C_1 y C_2, y por Y_1 y Y_2 los tiempos de vida de dos reservas, R_1 y R_2. Las funciones de distribución de estas variables aleatorias se denotarán por $F_1(t), F_2(t), G_1(t)$ y $G_2(t)$, y sus densidades de probabilidad por $f_1(t), f_2(t), g_1(t)$ y $g_2(t)$, respectivamente. Supondremos que las cuatro variables aleatorias son independientes.

En la Sección 2 se considera que las dos reservas serán colocadas, una a cada componente. Se estudian las condiciones para determinar la estructura óptima en el sentido del orden estocástico usual, y se hallan condiciones suficientes para establecer la mejor estructura cuando las distribuciones de los tiempos de vida y de los componentes son generales. En el caso de distribuciones exponenciales, se obtienen condiciones necesarias y suficientes. Se comentan además experimentos computacionales, los cuales sugieren que, cuando las distribuciones de los tiempos de vida de las unidades son exponenciales, las estructuras se pueden comparar también por medio de los órdenes de la tasa de riesgo y de la razón de verosimilitud. La Sección 3 constituye la parte fundamental del artículo. En esta sección se considera que solo una reserva de las dos será colocada, y es necesario determinar cuál de ellas y a cuál componente se le colocará. En las Proposiciones 2 y 3 se examina este problema sin asumir distribuciones exponenciales para los tiempos de vida de las unidades; en el resto de la sección se asume que estas distribuciones son exponenciales. Se hallan condiciones suficientes para determinar la estructura óptima, y en algunos casos condiciones necesarias, y condiciones necesarias y suficientes. La estructura óptima del sistema se estudia desde el punto de vista de los tres órdenes estocásticos con los cuales se trabaja en este artículo. También se determinan casos en los cuales no existe una estructura mejor que otra en el sentido de alguno de los órdenes estocásticos. En las Proposiciones 3, 6 y 10, se consideran casos en los cuales lo mejor es colocar la reserva más débil con el componente también más débil. Estos casos son de gran interés porque pueden contradecir la intuición, y en esas situaciones los resultados hallados en este trabajo brindan recomendaciones prácticas para el diseño de las estructuras de los sistemas.

2. Dos reservas a colocar

En esta sección se considera que las dos reservas serán colocadas a los dos componentes y se necesita determinar cuál reserva se colocará a cada componente. Sean

$$V_1 = \text{mín}(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2), \qquad V_2 = \text{mín}(X_1 + Y_2, X_2 + Y_1).$$

La variable aleatoria V_1 representa el tiempo de vida de un sistema serie en el cual se coloca de forma pasiva la reserva R_i con el componente C_i, $i = 1, 2$. Por otro lado, la variable aleatoria V_2 representa el tiempo de vida de un sistema serie en el cual se coloca de forma pasiva la reserva R_2 con el componente C_1, y la reserva R_1 con el componente C_2.

Las partes i) y ii) de la siguiente proposición generalizan el Teorema 2.1 de Chen et.al. (2017), en el cual se considera el caso particular $Y_2 =_{st} X_2$.

Proposición 1.

i) Si $X_1 \leq_{hr} X_2$ y $Y_1 \geq_{lr} Y_2$, o $X_1 \geq_{hr} X_2$ y $Y_1 \leq_{lr} Y_2$, entonces $V_1 \geq_{st} V_2$.

ii) Si $X_1 \leq_{hr} X_2$ y $Y_1 \leq_{lr} Y_2$, o $X_1 \geq_{hr} X_2$ y $Y_1 \geq_{lr} Y_2$, entonces $V_1 \leq_{st} V_2$.

iii) Sea $Y_i =_{st} X_i$, $i = 1, 2$. Si $X_1 \leq_{lr} X_2$ o $X_1 \geq_{lr} X_2$, entonces $V_1 \leq_{st} V_2$.

Demostración. Denotemos por $F_{V_1}(t)$ y $F_{V_2}(t)$ las funciones de distribución de V_1 y V_2, respectivamente. Sea $\Delta(t) = \bar{F}_{V_1}(t) - \bar{F}_{V_2}(t)$.

i) Probemos que $\Delta(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{V_1}(t) &= \left(\int_0^{\infty} \bar{F}_1(t-u)dG_1(u)\right)\left(\int_0^{\infty} \bar{F}_2(t-u)dG_2(u)\right) \\
\bar{F}_{V_2}(t) &= \left(\int_0^{\infty} \bar{F}_1(t-u)dG_2(u)\right)\left(\int_0^{\infty} \bar{F}_2(t-u)dG_1(u)\right).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\Delta(t) &= \left(\int_0^\infty \bar{F}_1(t-u)dG_1(u)\right)\left(\int_0^\infty \bar{F}_2(t-u)dG_2(u)\right) \\
&\quad -\left(\int_0^\infty \bar{F}_1(t-u)dG_2(u)\right)\left(\int_0^\infty \bar{F}_2(t-u)dG_1(u)\right) \\
&= \left(\int_0^\infty \bar{F}_1(t-u_1)g_1(u_1)du_1\right)\left(\int_0^\infty \bar{F}_2(t-u_2)g_2(u_2)du_2\right) \\
&\quad -\left(\int_0^\infty \bar{F}_1(t-u_2)g_2(u_2)du_2\right)\left(\int_0^\infty \bar{F}_2(t-u_1)g_1(u_1)du_1\right) \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \left(\bar{F}_1(t-u_1)\bar{F}_2(t-u_2)-\bar{F}_1(t-u_2)\bar{F}_2(t-u_1)\right)g_1(u_1)g_2(u_2)du_1du_2.
\end{aligned}$$

La función $\Delta(t)$ también puede expresarse,

$$\begin{aligned}
\Delta(t) &= \iint\limits_{u_1\geq u_2} \left[\bar{F}_1(t-u_1)\bar{F}_2(t-u_2)-\bar{F}_1(t-u_2)\bar{F}_2(t-u_1)\right]g_1(u_1)g_2(u_2)du_1du_2 \\
&\quad +\iint\limits_{u_1\leq u_2} \left[\bar{F}_1(t-u_1)\bar{F}_2(t-u_2)-\bar{F}_1(t-u_2)\bar{F}_2(t-u_1)\right]g_1(u_1)g_2(u_2)du_1du_2 \\
&= \iint\limits_{u_1\geq u_2} \left[\bar{F}_1(t-u_1)\bar{F}_2(t-u_2)-\bar{F}_1(t-u_2)\bar{F}_2(t-u_1)\right]g_1(u_1)g_2(u_2)du_1du_2 \\
&\quad +\iint\limits_{u_1\geq u_2} \left[\bar{F}_1(t-u_2)\bar{F}_2(t-u_1)-\bar{F}_1(t-u_1)\bar{F}_2(t-u_2)\right]g_1(u_2)g_2(u_1)du_2du_1.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\Delta(t) = \iint\limits_{u_1\geq u_2} \left(\bar{F}_1(t-u_1)\bar{F}_2(t-u_2)-\bar{F}_1(t-u_2)\bar{F}_2(t-u_1)\right)\left(g_1(u_1)g_2(u_2)-g_1(u_2)g_2(u_1)\right)du_1du_2. \quad (1)$$

Ahora, de $X_1 \leq_{hr} X_2$ y $Y_1 \geq_{lr} Y_2$, para todos u_1 y u_2 tales que $u_1 \geq u_2$, se obtienen las desigualdades

$$g_1(u_1)g_2(u_2)-g_1(u_2)g_2(u_1)\geq 0,$$

$$\bar{F}_1(t-u_1)\bar{F}_2(t-u_2)-\bar{F}_1(t-u_2)\bar{F}_2(t-u_1)\geq 0,$$

respectivamente. Por lo tanto, de (1) se halla que $\Delta(t)\geq 0$ para todo $t\geq 0$. En el caso en que $X_1 \geq_{hr} X_2$ y $Y_1 \leq_{lr} Y_2$ se tiene

$$g_1(u_1)g_2(u_2)-g_1(u_2)g_2(u_1)\leq 0,$$

$$\bar{F}_1(t-u_1)\bar{F}_2(t-u_2)-\bar{F}_1(t-u_2)\bar{F}_2(t-u_1)\leq 0,$$

y de (1) también se obtiene $\Delta(t)\geq 0$ para todo $t\geq 0$.

ii) La demostración es análoga a la demostración de la parte i).

iii) Como $X_1 \leq_{lr} X_2$ ($X_1 \geq_{lr} X_2$) implica $X_1 \leq_{hr} X_2$ ($X_1 \geq_{hr} X_2$), entonces el resultado se obtiene de (1), puesto que en este caso $\Delta(t) \leq 0$ para todo $t \geq 0$. $\square$

Es evidente que las partes i) y ii) de la Proposición 1 también tienen lugar, si en las suposiciones se sustituyen, el orden de la razón de riesgo entre X_1 y X_2 por el orden de la razón de verosimilitud correspondiente, y el orden de la razón de verosimilitud entre Y_1 y Y_2 por el orden de la razón de riesgo correspondiente.

Es interesante señalar, que en Zhao et.al. (2013a), Teorema 1, en el caso especial $Y_i =_{st} X_i$, cuando X_i $i = 1,2$, tiene distribución exponencial, se demuestra que $V_1 \leq_{lr} V_2$.

Corolario 1. Supongamos que X_1 y X_2, y Y_1 y Y_2, están ordenadas según el orden de la razón de verosimilitud. Entonces $V_1 \geq_{st} V_2$ si y solo si $X_1 \leq_{lr} X_2$ y $Y_1 \geq_{lr} Y_2$, o $X_1 \geq_{lr} X_2$ y $Y_1 \leq_{lr} Y_2$.

Demostración. La suficiencia y la necesidad de las condiciones para que $V_1 \geq_{st} V_2$ se cumpla, se deducen de forma directa de las partes i) y ii) de la Proposición 1, respectivamente. $\square$

Consideremos ahora que X_i y Y_i tienen distribuciones exponenciales con tasas de riesgo respectivas λ_i y μ_i, $i = 1,2$.

Observación 1. Como dos distribuciones exponenciales arbitrarias satisfacen el orden de la razón de verosimilitud, entonces por el Corolario 1 se cumple que $V_1 \geq_{st} V_2$ si y solo si $\lambda_1 \geq \lambda_2$ y $\mu_1 \leq \mu_2$, o $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\mu_1 \geq \mu_2$. Las relaciones $\lambda_1 \geq \lambda_2$ y $\mu_1 \leq \mu_2$, o $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\mu_1 \geq \mu_2$ constituyen también condiciones necesarias para que se cumplan los órdenes $V_1 \geq_{hr} V_2$ y $V_1 \geq_{lr} V_2$.

$\square$

En el caso particular en que $\mu_2 = \lambda_2$, en Chen et.al. (2017), Teorema 2.2. y Teorema 2.3, se demuestra que en los casos $\mu_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ y $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_1$, se tiene $V_1 \geq_{hr} V_2$, y en los casos $\lambda_2 \leq \mu_1 \leq \lambda_1$, $\lambda_2 \leq \lambda_1 \leq \mu_1$, $\lambda_2 \geq \lambda_1 \geq \mu_1$ y $\lambda_2 \geq \lambda_1 \geq \mu_1$, se cumple $V_1 \leq_{hr} V_2$.

Cuando las distribuciones son exponenciales, permanece abierto el estudio del caso general en el cual $\mu_2 \neq \lambda_2$. Experimentos computacionales realizados, en los cuales se generaron numerosos gráficos correspondientes al cociente de las funciones de supervivencia y de las densidades de probabilidad de V_1 y V_2, para diferentes valores de los parámetros, sugieren que las condiciones necesarias señaladas, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\mu_1 \geq \mu_2$, o $\lambda_1 \geq \lambda_2$ y $\mu_1 \leq \mu_2$, son además suficientes para que se cumplan el órden $V_1 \geq_{lr} V_2$. Esto se ilustra gráficamente en la Figura 1 para el orden de razón de verosimilitud, con los valores

a) $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 6, \mu_1 = 8, \mu_2 = 2$ y b) $\lambda_1 = 13, \lambda_2 = 11, \mu_1 = 4, \mu_2 = 8$.

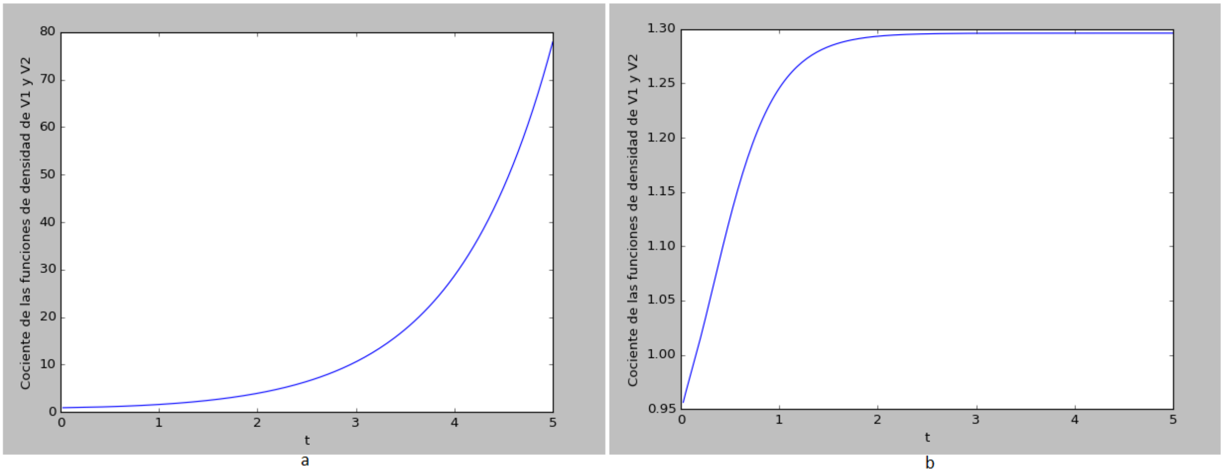

Figura 1: *Cociente de las funciones de densidad* $f_{V_1}(t)/f_{V_2}(t)$

3. Una reserva a colocar

En esta sección se considera que de las dos reservas disponibles, solo una se podrá colocar, y por ello es necesario determinar cuál reserva se colocará, y a cuál componente. Sean

$$U_1 = \text{mín}(X_1 + Y_1, X_2), \qquad U_2 = \text{mín}(X_1, X_2 + Y_2).$$

La variable aleatoria U_i representa el tiempo de vida del sistema cuando la reserva R_i se coloca de forma pasiva con el componente C_i, $i = 1, 2$.

La parte (a) del Lema 2.4 en Boland et al. (1992), establece el resultado inicial a partir del cual se han llevado a cabo diversas generalizaciones, incluyendo las que se realizan en esta sección. En ese lema, en el caso especial en que $Y_2 =_{st} Y_1$, se demuestra que si $X_1 \leq_{hr} X_2$, entonces $U_1 \geq_{st} U_2$.

Denotemos por $F_{U_1}(t)$ y $F_{U_2}(t)$ las funciones de distribución de U_1 y U_2, respectivamente.

Proposición 2. Si $X_1 \leq_{hr} X_2$ y $Y_1 \geq_{st} Y_2$, entonces $U_1 \geq_{st} U_2$.

Demostración. Sea $\Delta(t) = \bar{F}_{U_1}(t) - \bar{F}_{U_2}(t)$. Probemos que $\Delta(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Se tiene que

$$\Delta(t) = \left(\int_0^{\infty} \bar{F}_1(t-u) dG_1(u) \right) \bar{F}_2(t) - \left(\int_0^{\infty} \bar{F}_2(t-u) dG_2(u) \right) \bar{F}_1(t),$$

y como $X_1 \leq_{hr} X_2$, entonces $\bar{F}_1(t-u)\bar{F}_2(t) \geq \bar{F}_2(t-u)\bar{F}_1(t)$ para todos u y t tales que $u \leq t$, luego

$$\begin{aligned}
\Delta_1(t) &\geq \left(\int_0^{\infty} \bar{F}_2(t-u) dG_1(u) \right) \bar{F}_1(t) - \left(\int_0^{\infty} \bar{F}_2(t-u) dG_2(u) \right) \bar{F}_1(t) \\
&= \bar{F}_1(t)[E(\bar{F}_2(t-Y_1)) - E(\bar{F}_2(t-Y_2))].
\end{aligned}$$

Pero $\bar{F}_2(t-u)$ es una función creciente de u, y por lo tanto $E(\bar{F}_2(t-Y_1))-E(\bar{F}_2(t-Y_2))\geq 0$, puesto que $Y_1 \geq_{st} Y_2$ (Shaked and Shanthikumar (2007)). Por lo tanto $U_1 \geq_{st} U_2$. □

Proposición 3. La relación $U_1 \geq_{st} U_2$ se cumple si se satisface una de las siguientes condiciones i) o ii):

i) $X_1 \leq_{st} Y_1 \leq_{st} Y_2 \leq_{st} X_2$, $X_1 \in NBU$ y $X_2 \in NWU$.

ii) $X_1 \leq_{st} X_2$, $Y_2 =_{st} Y_1$ y $X_1 \in NBU$ y $X_2 \in NWU$.

Demostración. Denotemos como anteriormente, $\Delta(t) = \bar{F}_{U_1}(t) - \bar{F}_{U_2}(t)$. Probemos que $\Delta(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Note que

$$\bar{F}_{U_1}(t) = \left[\left(\int_0^t \bar{F}_1(t-u)dG_1(u)\right) + \bar{G}_1(t)\right]\bar{F}_2(t)$$

$$\bar{F}_{U_2}(t) = \left[\left(\int_0^t \bar{F}_2(t-u)dG_2(u)\right) + \bar{G}_2(t)\right]\bar{F}_1(t).$$

Luego, $\Delta(t) = \Delta_1(t) + \Delta_2(t)$, donde

$$\begin{aligned}\Delta_1(t) &= \bar{F}_2(t)\int_0^t \bar{F}_1(t-u)dG_1(u) - \bar{F}_1(t)\int_0^t \bar{F}_2(t-u)dG_2(u),\\ \Delta_2(t) &= \bar{G}_1(t)\bar{F}_2(t) - \bar{G}_2(t)\bar{F}_1(t).\end{aligned}$$

i) Por las suposiciones, es inmediato que $\Delta_2(t) \geq 0$. Además, como $X_1 \in NBU$ y $X_2 \in NWU$, entonces $\bar{F}_1(t) \leq \bar{F}_1(t-u)\bar{F}_1(u)$ y $\bar{F}_2(t) \geq \bar{F}_2(t-u)\bar{F}_2(u)$, y por lo tanto

$$\Delta_1(t) \geq \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)\int_0^t \left(\frac{g_1(u)}{\bar{F}_1(u)} - \frac{g_2(u)}{\bar{F}_2(u)}\right)du.$$

Pero de $\bar{F}_1(u) \leq \bar{G}_1(u)$ y $\bar{F}_2(u) \geq \bar{G}_2(u)$ se tiene que

$$\frac{g_1(u)}{\bar{F}_1(u)} - \frac{g_2(u)}{\bar{F}_2(u)} \geq \frac{g_1(u)}{\bar{G}_1(u)} - \frac{g_2(u)}{\bar{G}_2(u)} \geq 0,$$

de donde $\Delta_1(t) \geq 0$, puesto que $Y_1 \leq_{st} Y_2$. Luego, finalmente, $\Delta(t) \geq 0$.

ii) Por las suposiciones, naturalmente que $\Delta_2(t) \geq 0$, y además,

$$\Delta_1(t) \geq \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)\int_0^t \left(\frac{g_1(u)}{\bar{F}_1(u)} - \frac{g_1(u)}{\bar{F}_2(u)}\right)du \geq 0,$$

para todo $t \geq 0$. □

Nótese que en las condiciones de la parte i) de la Proposición 3, lo óptimo es colocar la reserva más débil con el componente también más débil.

De la parte i) de la Proposición 3 se obtiene en particular, que si $Y_i =_{st} X_i$, $i = 1,2$, y $X_1 \in NBU$ y $X_2 \in NWU$, entonces $U_1 \geq_{st} U_2$. El siguiente ejemplo ilustra la parte i) de esta proposición.

Ejemplo 1. Denotemos por $\lambda_i(t)$ la tasa de riesgo de X_i, $i = 1,2$. Sean $X_1 \in IFR$, $X_2 \in DFR$, y $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t)$, para todo $t \geq 0$. Si además, $Y_i =_{st} X_i$, $i = 1,2$ o $X_1 \leq_{st} Y_1 \leq_{st} Y_2 \leq_{st} X_2$, entonces $U_1 \geq_{st} U_2$. En particular, si X_i y Y_i tienen distribución exponencial con tasas de riesgo λ_i y μ_i, respectivamente, $i = 1,2$, y $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \lambda_2$, entonces $U_1 \geq_{st} U_2$. Más adelante, en la Proposición 10, se demuestra que en este caso de distribuciones exponenciales, se cumple la relación más fuerte $U_1 \geq_{hr} U_2$.

$\square$

En lo adelante asumiremos que X_i y Y_i tienen distribución exponencial con tasas de riesgo λ_i y μ_i, $i = 1,2$, respectivamente. Recordemos que con estas suposiciones, la función de supervivencia $\bar{F}_{X_i+Y_i}(t)$ de $X_i + Y_i$, se expresa

$$\bar{F}_{X_i+Y_i}(t) = \frac{\lambda_1 e^{-\mu_i t} - \mu_1 e^{-\lambda_i t}}{\lambda_i - \mu_i},$$

cuando $\mu_i \neq \lambda_i$, y

$$\bar{F}_{X_i+Y_i}(t) = e^{-\lambda_i t}(\lambda_i t + 1),$$

si $\mu_i = \lambda_i$, para $i = 1,2$. Las funciones de supervivencia y de densidad de probabilidad de U_1, $\bar{F}_{U_1}(t)$ y $f_{U_1}(t)$, tienen las formas

$$\bar{F}_{U_1}(t) = \frac{\lambda_1 e^{-(\mu_1+\lambda_2)t} - \mu_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{\lambda_1 - \mu_1}$$

$$f_{U_1}(t) = \frac{\lambda_1(\mu_1+\lambda_2)e^{-(\mu_1+\lambda_2)t} - \mu_1(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{\lambda_1 - \mu_1},$$

si $\mu_1 \neq \lambda_1$, y las formas

$$\bar{F}_{U_1}(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}(\lambda_i t + 1)$$

$$f_{U_1}(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}(\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)t + \lambda_2),$$

cuando $\mu_1 = \lambda_1$. De manera análoga se hallan las funciones de supervivencia y de densidad de probabilidad de U_2.

Proposición 4. Sea $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Entonces la desigualdad $\lambda_1 \geq \lambda_2$ es una condición necesaria para el orden $U_1 \geq_{st} U_2$.

Demostración. Consideremos el cociente

$$\phi(t) = \frac{\bar{F}_{U_1}(t)}{\bar{F}_{U_2}(t)} = \frac{\mu - \lambda_2}{\lambda_1 - \mu} \cdot \frac{\lambda_1 e^{-(\mu-\lambda_1)t} - \mu}{\mu - \lambda_2 e^{-(\mu-\lambda_2)t}}.$$

Si $U_1 \geq_{st} U_2$, necesariamente debe cumplirse que $\phi(t) \geq 1$, $t \geq 0$. Son posibles cuatro casos: a) $\mu < \lambda_1$ y $\mu < \lambda_2$; b) $\mu > \lambda_1$ y $\mu > \lambda_2$; c) $\mu < \lambda_1$ y $\mu > \lambda_2$ y d) $\mu > \lambda_1$ y $\mu < \lambda_2$.

Analicemos primero el caso a). En este caso la desigualdad $\phi(t) \geq 1$ es equivalente a la desigualdad

$$g(t) = (\mu - \lambda_2)[\lambda_1 e^{-(\mu-\lambda_1)t} - \mu] - (\lambda_1 - \mu)[\mu - \lambda_2 e^{-(\mu-\lambda_2)t}] \geq 0.$$

Note que $g(0) = 0$. Probemos ahora que $g(t)$ es decreciente si y solo si $\lambda_1 \geq \lambda_2$. La derivada de $g(t)$ se expresa

$$g'(t) = (\lambda_1 - \mu)(\mu - \lambda_2)[\lambda_1 e^{-(\mu-\lambda_1)t} - \lambda_2 e^{-(\mu-\lambda_2)t}].$$

Bajo las condiciones de a), se tiene que $(\lambda_1 - \mu)(\mu - \lambda_2) < 0$. Por otro lado, no es difícil verificar que la expresión entre corchetes en la fórmula para $g'(t)$, es no negativa si y solo si $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Luego si $g(t) \geq 0$ ($\phi(t) \geq 1$), $t \geq 0$, entonces necesariamente $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Las demostraciones de los casos b) y c) son análogas a la del caso a). En las condiciones de d), note que

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = 0,$$

y por lo tanto no tiene lugar el orden $U_1 \geq_{st} U_2$. □

Corolario 2. Sea $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Entonces la desigualdad $\lambda_1 \geq \lambda_2$ es una condición necesaria y suficiente para el orden $U_1 \geq_{lr} U_2$.

Demostración. La suficiencia de la condición fue probada en Zhao et al. (2012), Teorema 2. Su necesidad se deduce de la Proposición 4, puesto que como $\lambda_1 \geq \lambda_2$ es condición necesaria para que se cumpla $U_1 \geq_{st} U_2$, entonces también lo es para que se satisfaga $U_1 \geq_{lr} U_2$. □

Proposición 5. Sea $\mu_i = \lambda_i$, $i = 1, 2$. Entonces $U_1 \geq_{lr} U_2$ si y solo si $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Demostración. Es suficiente notar que el cociente

$$\frac{f_{U_2}(t)}{f_{U_1}(t)} = \frac{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)t + \lambda_2}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)t + \lambda_1}$$

es decreciente si y solo si $\lambda_1 \geq \lambda_2$. □

Observación 2. En realidad, si $\mu_i = \lambda_i$, $i = 1, 2$, la desigualdad $\lambda_1 \geq \lambda_2$ es también una condición necesaria para que se cumpla $U_1 \geq_{st} U_2$, y por lo tanto para $U_1 \geq_{hr} U_2$. Efectivamente, si $\bar{F}_{U_1}(t)/\bar{F}_{U_2}(t) \geq 1$, para todo $t \geq 0$, entonces

$$1 \leq \lim_{t \to \infty} \frac{\bar{F}_{U_1}(t)}{\bar{F}_{U_2}(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{\lambda_1 t + 1}{\lambda_2 t + 1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

de donde, $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

$\square$

Denotemos por $r_{X_i+Y_i}(t)$ y $r_{U_i}(t)$ las tasas de riesgo de X_i+Y_i y U_i, $i=1,2$. Se tiene que

$$r_{U_1}(t) = r_{X_1+Y_1}(t) + \lambda_2 \qquad r_{U_1}(t) = r_{X_1+Y_1}(t) + \lambda_1,$$

y por lo tanto, $r_{U_i}(0) = \lambda_i$, $i=1,2$. Entonces una condición necesaria para el orden $U_1 \geq_{hr} U_2$ es que se cumpla la desigualdad $\lambda_1 \geq \lambda_2$, puesto que esta relación equivale a $r_{U_1}(0) \leq r_{U_2}(0)$.

Diremos que dos funciones con valores reales, $h_1(x)$ y $h_2(x)$, tienen igual signo, lo cual será denotado por $h_1(x) \stackrel{sgn}{=} h_2(x)$, si existe una función positiva $h(x)$ tal que $h_1(x) = h(x)h_2(x)$.

Proposición 6. Cuando $\mu_1 = \lambda_1$ se cumple:

i) Si $\lambda_1 \geq \lambda_2$ y $\mu_2 > \lambda_2$, entonces $U_1 \geq_{hr} U_2$.

ii) Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\mu_2 < \lambda_2$, entonces $U_1 \leq_{hr} U_2$.

iii) Si $\lambda_1 < \lambda_2$ y $\mu_2 > \lambda_2$ o $\lambda_1 > \lambda_2$ y $\mu_2 < \lambda_2$, entonces no existe orden de la tasa de riesgo entre U_1 y U_2.

Demostración. Sea $\varphi(t) = \bar{F}_{U_2}(t)/\bar{F}_{U_1}(t)$. Entonces

$$\varphi(t) = \frac{\lambda_2 e^{(\lambda_2-\mu_2)t} - \mu_2}{(\lambda_2-\mu_2)(\lambda_1 t+1)}.$$

i) y ii) Analicemos la monotonía de la función $\varphi(t)$. Tomando la derivada de $\varphi(t)$, tenemos

$$\varphi'(t) \stackrel{sgn}{=} \psi(t) = \lambda_2 e^{(\lambda_2-\mu_2)t}(\lambda_2-\mu_2)[\lambda_1 t(\lambda_2-\mu_2)+\lambda_2-\lambda_1-\mu_2] + \lambda_1\mu_2(\lambda_2-\mu_2).$$

Como $\psi(0) = \lambda_2(\lambda_2-\mu_2)^2(\lambda_2-\lambda_1)$, entonces $\varphi'(0) \leq 0$ si y solo si $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Por otra parte,

$$\psi'(t) = \lambda_2(\lambda_2-\mu_2)^3(\lambda_1 t+1)e^{(\lambda_2-\mu_2)t} \leq 0$$

si y solo si $\mu_2 \geq \lambda_2$. Luego en las condiciones de i), $\varphi(t)$ decrece, puesto que $\varphi'(t) \leq 0$, y en las condiciones de ii), $\varphi(t)$ crece.

iii) Sea $\lambda_1 \geq \lambda_2 > \mu_2$. De $\lambda_2 > \mu_2$ se deduce que $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$, y como $\varphi'(0) \leq 0$, entonces $\varphi(t)$ es no monótona. El otro caso de la parte iii) es análogo. $\square$

De la Proposición 6 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3. Sea $\mu_1 = \lambda_1$. Entonces:

i) $U_1 \geq_{hr} U_2$ si y solo si $\lambda_1 \geq \lambda_2$ y $\mu_2 > \lambda_2$.

ii) $U_1 \leq_{hr} U_2$ si y solo si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\mu_2 < \lambda_2$.

Demostración. La suficiencia de las condiciones en la parte i) queda establecida por la parte i) de la Proposición 6. Las partes ii) y iii) de esta proposición demuestran la necesidad de estas condiciones. La demostración de ii) es análoga. □

La siguiente proposición muestra, que en las condiciones de la parte iii) de la Proposición 6, no existe incluso orden estocástico usual entre U_1 y U_2, y además, que las condiciones necesarias y suficientes formuladas en del Corolario 3 para el orden de la tasa de riesgo, lo son también para el orden estocástico usual.

Proposición 7. Sea $\mu_1 = \lambda_1$. Entonces:

i) $U_1 \geq_{st} U_2$ si y solo si $\lambda_1 \geq \lambda_2$ y $\mu_2 > \lambda_2$.

ii) $U_1 \leq_{st} U_2$ si y solo si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\mu_2 < \lambda_2$.

iii) Si $\mu_2 > \lambda_2$ y $\lambda_1 < \lambda_2$ o $\mu_2 < \lambda_2$ y $\lambda_1 > \lambda_2$, entonces no existe orden estocástico usual entre U_1 y U_2.

Demostración. i) La suficiencia de las condiciones queda establecida por la parte i) del Corolario 3, debido a que el orden de la tasa de riesgo implica el orden estocástico usual. Demostremos la necesidad . Consideremos el cociente

$$\varphi(t) = \frac{\bar{F}_{U_2}(t)}{\bar{F}_{U_1}(t)} = \frac{\lambda_2 e^{(\lambda_2-\mu_2)t} - \mu_2}{(\lambda_2-\mu_2)(\lambda_1 t + 1)}.$$

Si $U_1 \geq_{st} U_2$, necesariamente $\varphi(t) \leq 1$, $t \geq 0$. Pero cuando $\mu_2 < \lambda_2$, se tiene

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty,$$

luego $\mu_2 > \lambda_2$. Asumiendo ahora $\mu_2 > \lambda_2$, la desigualdad $\varphi(t) \leq 1$ puede escribirse

$$g(t) = \lambda_2 e^{-(\lambda_2-\mu_2)t} - \mu_2 - (\lambda_2-\mu_2)(\lambda_1 t + 1) \geq 0.$$

Nótese ahora que $g(0) = 0$ y que $g'(t) = (\lambda_2-\mu_2)(\lambda_2 e^{-(\lambda_2-\mu_2)t} - \lambda_1)$ si y solo si $\lambda_1 \geq \lambda_2$, de donde se obtiene el resultado.

ii) La demostración es análoga a la demostración de i) .

iii) Si $\mu_2 > \lambda_2$ y $\lambda_1 < \lambda_2$, entonces no se cumple el orden $U_1 \geq_{st} U_2$, puesto que para ello, por la parte i) ya demostrada, es necesaria la desigualdad $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Tampoco se cumple orden $U_1 \leq_{st} U_2$, debido a que por la parte ii) es necesario que $\mu_2 < \lambda_2$. □

En la Proposición 6 se consideran las seis relaciones de orden posibles entre los tres parámetros λ_1, λ_2 y μ_2. Obsérvese que en los casos $\lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_1$ y $\lambda_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_2$ es mejor colocar la reserva más débil con el componente también más débil.

En la parte i) de la Proposición 6, se probó que bajo las condiciones $\mu_1 = \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_1 \leq \mu_2$, se cumple $U_1 \geq_{hr} U_2$. Tiene interés analizar si, bajo esas mismas condiciones, se cumple o no el orden de la razón de verosimilitud. La siguiente proposición aclara esta situación. Mencionemos primero que en Zhao et. al. (2013b), Theorem 3.1, se demuestra que si $\lambda_1 \geq \lambda_2$, $\mu_1 \leq \mu_2$, y

$$\mu_2 \leq \mu_0 = \frac{\lambda_1^2(\mu_1+\lambda_2)-\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda_2^2},$$

entonces $U_1 \geq_{lr} U_2$.

Proposición 8. Sean $\mu_1 = \lambda_1$, $\lambda_1 \geq \lambda_2$ y $\mu_0 = \dfrac{\lambda_1^2(\lambda_1+\lambda_2)-\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda_2^2}$. Se cumple que:

i) Si $\lambda_1 \leq \mu_2 \leq \mu_0$, entonces $U_1 \geq_{lr} U_2$.

ii) Si $\mu_2 \geq \mu_0$, entonces no existe orden de la razón de verosimilitud entre U_1 y U_2.

Demostración. Mostremos primero que tiene lugar la desigualdad $\mu_0 \geq \lambda_1$. Note que esta desigualdad puede escribirse,

$$h(\lambda_1) = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2 \geq 0,$$

desigualdad que es válida para $\lambda_1 \geq \lambda_2$, puesto que $h(\lambda_2) = 0$ y $h'(\lambda_1) = 2\lambda_1 + \lambda_2 > 0$.

i) Se deduce del Teorema 3.1, en Zhao et. al. (2013b), tomando $\mu_1 = \lambda_1$

ii) El cociente de las densidades de probabilidad de U_1 y U_2 se puede expresar en la forma,

$$\kappa(t) = \frac{f_{U_1}(t)}{f_{U_2}(t)} = \frac{(\lambda_2-\mu_2)[\lambda_1 t(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_2]}{\lambda_2(\lambda_1+\mu_2)e^{-(\mu_2-\lambda_2)t}-\mu_2(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Notemos que $\kappa(0) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} \kappa(t) = +\infty$. Comprobemos que existe un valor de t para el cual $\kappa(t) < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ y, por lo tanto, la función $\kappa(t)$ no es monótona. No es difícil verificar que el denominador en la expresión de $\kappa(t)$ es positivo. Entonces la desigualdad $\kappa(t) < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ puede escribirse en la forma

$$g(t) = \lambda_2^2(\lambda_1+\mu_2) + \lambda_1^2 t(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2-\mu_2) - \lambda_2^2 e^{t(\lambda_2-\mu_2)}(\lambda_1+\mu_2) > 0.$$

Como $g(0) = 0$, ahora es suficiente probar que $g'(0) > 0$. Pero

$$g'(t) = \lambda_2^2 e^{t(\lambda_2-\mu_2)}(\mu_2-\lambda_2)(\lambda_1+\mu_2) + \lambda_1^2(\lambda_2-\mu_2)(\lambda_1+\lambda_2).$$

Entonces

$$g'(0) = (\mu_2 - \lambda_2)[\lambda_2^2(\lambda_1 + \mu_2) - \lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2)] > 0,$$

puesto que $(\mu_2 - \lambda_2) > 0$, y la expresión entre corchetes es no negativa si y solo si $\mu_2 > \mu_0$. $\square$

Consideremos ahora los cuatro parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ y μ_2 en general diferentes. Anteriormente se mostró que $\lambda_1 \geq \lambda_2$ es una condición necesaria para el orden $U_1 \geq_{hr} U_2$. La siguiente proposición establece otras condiciones necesaria para este orden.

Proposición 9. Las siguientes condiciones son necesarias para que se cumpla la relación $U_1 \geq_{hr} U_2$:

i) $\lambda_1 - \lambda_2 \geq \mu_1 - \mu_2$ y $\mu_1 \leq \lambda_1$, si $\mu_2 \leq \lambda_2$.

ii) $\lambda_2 \leq \mu_2$, si $\mu_1 \geq \lambda_1$.

Demostración. No es difícil hallar que $\lim\limits_{t\to\infty} r_{X_1+Y_1}(t) = \min(\lambda_1, \mu_1)$, luego

$$\lim_{t\to\infty} r_{U_1}(t) = \min(\lambda_1, \mu_1) + \lambda_2.$$

De forma análoga se obtiene,

$$\lim_{t\to\infty} r_{U_2}(t) = \min(\lambda_2, \mu_2) + \lambda_1.$$

Pero para que se cumpla la relación $U_1 \geq_{hr} U_2$ es necesario que se cumpla la desigualdad

$$\lim_{t\to\infty} r_{U_1}(t) \leq \lim_{t\to\infty} r_{U_2}(t),$$

es decir, la desigualdad

$$\min(\lambda_1, \mu_1) + \lambda_2 \leq \min(\lambda_2, \mu_2) + \lambda_1,$$

de donde se deducen i) y ii). $\square$

La afirmación del siguiente corolario es una consecuencia de la parte ii) de la Proposición 9.

Corolario 4. Si $\mu_2 < \lambda_2 \leq \lambda_1 < \mu_1$, entonces no existe orden de la tasa de riesgo entre U_1 y U_2.

En Zhao et. al. (2013b), se da un ejemplo de no existencia del orden de la razón de verosimilitud entre U_1 y U_2, en el cual los valores numéricos seleccionados para los parámetros de las distribuciones exponenciales satisfacen $\mu_2 < \lambda_2 \leq \lambda_1 < \mu_1$. El Corolario 4 establece que siempre que se cumplan estas desigualdades no existe orden estocástico de la razón de verosimilitud entre U_1 y U_2.

Proposición 10. Si $\lambda_1 \geq \lambda_2$ y $\lambda_1 - \lambda_2 \geq \mu_1 - \mu_2$, entonces $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Demostración. El cociente de las funciones de supervivencia de U_1 y U_2 se puede expresar,

$$\phi(t) = \frac{\bar{F}_{U_1}(t)}{\bar{F}_{U_2}(t)} = \frac{e^{(\mu_2-\mu_1)t}(\lambda_2-\mu_2)(\lambda_1 e^{\lambda_1 t}-\mu_1 e^{\mu_1 t})}{(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2 e^{\lambda_2 t}-\mu_2 e^{\mu_2 t})}.$$

Probemos el crecimiento de la función $\phi(t)$ para todo $t \geq 0$. Se tiene:

$$\phi'(t) \stackrel{sgn}{=} \phi_1(t) = \mu_2\lambda_1 e^{(2\mu_2+\lambda_1-\mu_1)t}(\mu_2-\lambda_2)(\lambda_1-\mu_1)^2 -$$
$$e^{(\lambda_2+\mu_2)t}\left[\lambda_1\lambda_2 e^{(\lambda_1-\mu_1)t}(\lambda_2-\mu_2)(\lambda_2-\mu_2-\lambda_1+\mu_1)(\lambda_1-\mu_1)+\lambda_2\mu_1(\lambda_2-\mu_2)^2(\mu_1-\lambda_1)\right]$$

$$\phi_1(0) = (\mu_2-\lambda_2)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\mu_1)^2 \geq 0.$$

Luego para probar que $\phi'(t) \geq 0$, $t \geq 0$, es suficiente probar que $\phi_1'(t) \geq 0$, $t \geq 0$. Multiplicando ahora la función $\phi_1(t)$ por $e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}$ y hallando la derivada de esta nueva función, se obtiene que

$$\begin{aligned}\phi_1'(t) \quad &\stackrel{sgn}{=} \phi_2(t) = \quad \mu_2\lambda_1 e^{-(\lambda_2-\mu_2-\lambda_1+\mu_1)t}(\lambda_2-\mu_2)(\lambda_2-\mu_2-\lambda_1+\mu_1)(\lambda_1-\mu_1)^2 \\ &\qquad +\lambda_1\lambda_2 e^{(\lambda_1-\mu_1)t}(\lambda_2-\mu_2-\lambda_1+\mu_1)(\mu_2-\lambda_2)(\lambda_1-\mu_1)^2\end{aligned}$$

$$\phi_2(0) = \lambda_1(\lambda_2-\mu_2)^2(\mu_2+\lambda_1-\lambda_2-\mu_1)(\mu_1-\lambda_1)^2 \geq 0.$$

Para que se cumpla la desigualdad $\phi_2(t) \geq 0$, $t \geq 0$, es suficiente que $\phi_2'(t) \geq 0$. Multiplicando la función $\phi_2(t)$ por $e^{-(\lambda_1-\mu_1)t}$, y tomando la derivada de la nueva función, se halla que

$$\phi_2'(t) \stackrel{sgn}{=} \lambda_1\mu_2 e^{(\mu_2-\lambda_2)t}(\mu_2+\lambda_1-\lambda_2-\mu_1)(\lambda_2-\mu_2)^2(\lambda_1-\mu_1)^2 \geq 0.$$

De esta forma, finalmente se obtiene que $\phi(t)$ es creciente para todo $t \geq 0$. □

Siendo $\lambda_1 \geq \lambda_2$, existen doce casos de relaciones de orden posibles entre los cuatro parámetros λ_1, λ_2, μ_1 y μ_2. De las condiciones de la Proposición 10 se deduce que si $\lambda_1 \geq \lambda_2$ y $\mu_1 \leq \mu_2$ (estas desigualdades equivalen a seis de los doce casos mencionados), entonces $U_1 \geq_{hr} U_2$, y que también se cumple este orden si $\lambda_2 \leq \mu_2 \leq \mu_1 \leq \lambda_1$. Note que en este último caso es mejor colocar la reserva más débil con el componente más débil.

De la Proposición 10 y de la parte i) de la Proposición 9 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 5. Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2$, $\mu_1 \leq \lambda_1$ y $\mu_1 \geq \mu_2$. Entonces $U_1 \geq_{hr} U_2$ si y solo si $\lambda_1 - \lambda_2 \geq \mu_1 - \mu_2$.

Las suposiciones del Corolario 5 equivalen a dos casos de relaciones de orden entre los parámetros, en los cuales es mejor colocar la reserva más débil con el componente más débil.

De los doce casos mencionados de relaciones entre los parámetros, quedan entonces dos casos por analizar: $\lambda_2 < \mu_2 < \lambda_1 < \mu_1$ y $\lambda_2 < \lambda_1 < \mu_2 < \mu_1$. La siguiente proposición brinda una solución parcial para estos casos.

Proposición 11. Si $\mu_1 \geq \lambda_1$, $\mu_2 \geq \lambda_2$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{\mu_1}{\mu_2}$, entonces no se cumple el orden $U_1 \geq_{st} U_2$, y por lo tanto tampoco el orden $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Demostración. Escribamos el cociente de las funciones de supervivencia $\bar{F}_{U_2}(t)$ y $\bar{F}_{U_1}(t)$ en la forma

$$\varphi(t) = \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_2 - \lambda_2} \cdot \frac{\mu_2 - \lambda_2 e^{-(\mu_2 - \lambda_2)t}}{\mu_1 - \lambda_1 e^{-(\mu_1 - \lambda_1)t}}.$$

El orden $U_1 \geq_{st} U_2$ se cumple si $\varphi(t) \leq 1$, $t \geq 0$. Pero note que en las condiciones asumidas,

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_2 - \lambda_2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} > 1,$$

luego no se cumple el orden $U_1 \geq_{st} U_2$. $\square$

4. Conclusiones

Se ha estudiado un sistema serie de dos componentes, para el cual se dispone de dos reservas. Los tiempos de vida de los componentes y de las reservas se asumen independientes. En el modelo de la Sección 2 se considera que las dos reservas serán colocadas, una a cada componente. Las suposiciones de la Proposición 1 generalizan un trabajo anterior de otros autores, pero exigen el orden de la razón de verosimilitud que es un orden fuerte. Estudios que hemos realizado sugieren la posibilidad de asumir en su lugar el orden de la razón de riesgo. Los experimentos computacionales mencionados en esta sección, en el caso donde las distribuciones de los tiempos de vida de las cuatro unidades son exponenciales y diferentes, apuntan al cumplimiento de los órdenes de la razón de riesgo y de la razón de verosimilitud, y su demostración queda abierta e invita a seguir explorando este caso.

Entre los resultados de mayor interés hallados están los de las las Proposiciones 3, 6 y 10 en la Sección 3, referidos a las condiciones bajo las cuales es mejor colocar la reserva más débil con el componente también más débil. Estas situaciones son de gran interés porque pueden contradecir la intuición, y entonces los resultados hallados en este trabajo brindan recomendaciones prácticas para el diseño de las estructuras de los sistemas.

Referencias

[1] Barlow, R.E., Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

[2] Belzunce, F., Riquelme, C. M., Mulero, J. (2015). *An introduction to stochastic orders*. Academic Press.

[3] Boland, P.J., El-Neweihi, E., Proschan, F. (1988). Active Redundancy Allocation in Coherent Systems, *Probab. Eng. Inform. Sci.* **2**, 343-353.

[4] Boland, P.J., El-Neweihi, E., Proschan, F. (1992) Stochastic Order for Redundancy Allocations in Series and Parallel Systems, *Adv. Appl. Prob.* **24**, 161-171.

[5] Chen, J., Zhang, Y., Zhao, P., Zhou, S. (2017). Allocation Strategies of Standby Redundancies in Series/Parallel System, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **47**:3, 708-724.

[6] Laniado, H., Lillo, R. (2014). Allocation Policies of Redundancies in Two-Parallel-Series and Two-Series-Parallel Systems, *IEEE Tansactions on Reliability* **63**, 1, 223-229.

[7] Romera, R., Valdés, J.E., Zequeira, R.I. (2004). Active-redundancy allocation in systems, *IEEE Transactions on Reliability* **53**, 3, 313-318.

[8] Shaked, M., Shanthikumar, J.G. (2007). *Stochastic Orders*. Springer, New York.

[9] Singh, H. and Misra, N. (1994). On redundancy allocation in systems, *Journal of Applied Probability* **31**,1004-1014.

[10] Valdés, J.E., Arango, G., Zequeira, R.I., Brito, G. (2010). Some stochastic comparisons in series systems with active redundancy, *Statistics and Probability Letters* **80**, 945-949.

[11] Valdés, J.E., Zequeira, R.I. (2006). On the optimal allocation of two active redundancies in a two-component series system, *Operations Reseach Letters* **34**, 49-52.

[12] Valdés, J.E., Zequeira, R.I. (2003). On the optimal allocation of an active redundancy in a two-component series system, *Statistics and Probability Letters* **63**, 325-332.

[13] Wang, J., Laniado, H. (2015). On likelihood ratio ordering of parallel system with two exponential components, *Operations Research Letters* **43**, 195-198.

[14] Wang, J., Laniado, H. (2015). A note on allocation policy in two-parallel-series and two-series parallel systems with respect to likelihood ratio order, *Statistics and Probability Letters* **102**, 17-21.

[15] Zhao, P., Chan, P., Li, l., Ng, H.K.T. (2013a). Allocation of two redundancies in two-component series systems, *Operations Research Letters* **41**, 690-693.

[16] Zhao, P., Chan, P., Ng, H.K.T. (2012). Optimal allocation of redundancies in series systems, *European Journal of Operational Research* **220**, 673-683.

[17] Zhao, P., Chan, P., Ng, H.K.T. (2013b). On allocation of redundancies in two-component series systems, *Naval Research Logistics* **60**, 588-598.