

**Solución de la Ecuación de Poisson de Energía
para problemas de transferencia de calor en 2D
y determinación de los parámetros de mejor
desempeño utilizando el método de colocación
local directo con RBF (LDRBFCM)**

Por

Walter Antonio Ospina Muñoz

Trabajo de grado para optar al título de Magister en Ingeniería

Omar Augusto Estrada Ramírez

Asesor

Facultad de Ingeniería

Universidad EAFIT

2014

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a

- El profesor Omar Estrada, por haber confiado en mí y haberme permitido trabajar con él durante estos años.
- El profesor Iván Darío López, sin lugar a dudas mi bastión durante el desarrollo de este trabajo. Sin él habría sido difícil llegar al final.
- El Instituto de Capacitación e Investigación del Plástico y el Caucho (ICIPC), por el apoyo brindado durante mi estadía en él, y a la Universidad EAFIT en general.
- La Escuela de Ingeniería de Antioquia (EIA), por el apoyo brindado durante el desarrollo de este trabajo.
- Mi familia, que con su amor y comprensión siempre me estimularon para seguir adelante.
- Mis amigos Eugenio, Guillermo (Memov) y Ricardo, fueron un punto de apoyo importante para continuar adelante en momentos difíciles.

“Y si estudias Física
habrás de construir primero,
tras largo y penoso esfuerzo,
aparatos que ya fueron
realizados por otros,
o realizar reflexiones matemáticas
que ya fueron pensadas con anterioridad
de modo extremadamente agudo.
Cuando todo esto está hecho,
nos queda, en cuanto pertenecemos
a los carreteros,
el constante trato con música espléndida
y, de vez en cuando,
una interpretación bien lograda”.

W. Heisenberg

Índice

1. Resumen	5
2. Introducción	7
2.1. Objetivos	7
2.2. Algunas definiciones	7
2.3. Metodología	8
2.4. Estado del arte	12
2.4.1. Antecedentes de las técnicas sin malla	12
2.4.2. El método de colocación con funciones de base radial	13
3. Planteamiento del problema	21
3.1. Caso 1: Problema 2D con condiciones de frontera Dirichlet	21
3.2. Caso 2: Benchmark NAFEMS con condiciones de frontera Dirichlet, Neumann y Robin	23
4. Método Numérico	25
4.1. Aproximación numérica de funciones usando funciones de base radial, RBF	25
4.2. Derivadas de funciones usando RBFN: Método de colocación directo (DRBFN)	26
4.3. Método de colocación local directo (LDRBFCM)	27
5. Resultados numéricos	29
5.1. Caso 1: Problema 2D con condiciones de frontera Dirichlet	29
5.1.1. Estudio del comportamiento de la RBF MQ: Evaluación del parámetro libre c para la distribución rectangular	29
5.1.2. Estudio del comportamiento de la RBF MQ: Evaluación del parámetro libre c para la distribución aleatoria	31
5.1.3. Estudio del comportamiento de la RBF MQ: Evaluación del parámetro libre c para la distribución triangular	32

5.1.4.	Comparación entre las distribuciones de puntos rectangular, aleatoria y triangular	33
5.1.5.	Estudio del comportamiento de las RBFs TPS: distribución rectangular . .	35
5.1.6.	Estudio del comportamiento de las RBFs TPS: distribución aleatoria . . .	35
5.1.7.	Estudio del comportamiento de las RBFs TPS: distribución triangular . . .	36
5.1.8.	Estudio comparativo de los métodos de colocación con funciones de base radial Global Directo (GDRBFCM) y Local Directo (LDRBFCM)	37
5.2.	Caso 2: Benchmark NAFEMS con condiciones de frontera Dirichlet, Neumann y Robin	39
5.2.1.	Estudio de la implementación de puntos fantasmas: distribución rectangular	39
5.2.2.	Estudio de la implementación de puntos fantasmas: distribución aleatoria .	41
5.2.3.	Estudio de la implementación de puntos fantasmas: distribución triangular	42
5.2.4.	Estudio de la implementación de puntos fantasmas: comparación entre las distribuciones de puntos	43
5.2.5.	Estudio comparativo de los métodos de colocación con funciones de base radial Global Directo (GDRBFCM) y Local Directo (LDRBFCM)	44
6.	Conclusiones	47
7.	Perspectivas del presente trabajo	49

1. Resumen

En este trabajo se soluciona el problema de transferencia de calor en 2D y se determinan los parámetros de mejor desempeño utilizando el método de colocación local directo con funciones de base radial (LDRBFCM). Para ello se propone la evaluación del término difusivo de la ecuación de energía usando dos casos: (1) Problema con condiciones de frontera Dirichlet; (2) problema con condiciones de frontera Dirichlet, Neumann y Robin (benchmark NAFEMS). El estudio realizado busca determinar el mejor funcionamiento del método numérico para: (1) Diferentes funciones de base radial (RBFs); (2) diferentes distribuciones de puntos de colocación; (3) diferentes densidades de puntos de colocación (H) para cada distribución; (4) diferente número de puntos colocación por dominio (N) para cada distribución y densidad de puntos; (5) diferentes valores del parámetro libre c de la función de base radial Multicuadrática; (6) y en el caso de benchmark NAFEMS con condiciones de frontera Dirichlet, Neumann y Robin, la utilización de puntos fantasmas para la aproximación de derivadas en la frontera.

Para los dos casos tratados en este trabajo, en términos generales, la RBF Multicuadrática fue la que presentó mejor comportamiento y todo lo que se describe a continuación será con referencia a ella. Se encontró además que el parámetro libre con mejor desempeño fue $c = 100r_0$.

Para el primer caso se encontró: (1) La solución del problema utilizando la distribución rectangular es, lejos, más exacta que la reportada cuando se utilizan métodos globales; (2) en cuanto al costo computacional el método LDRBFCM es más eficiente en términos de menos requisitos de memoria y menos esfuerzos computacionales; (3) El tiempo de cálculo computacional empleado por el método local es menor que el empleado por métodos globales.

Para el segundo caso se encontró: (1) aunque la implementación del DOE (Diseño de Experimento) numérico es más sencillo sin la utilización de puntos fantasmas estos se hacen necesarios, con ellos se logra una convergencia más estable de la solución, un error más bajo y la posibilidad de trabajar con una distribución de puntos aleatoria para geometrías más complicadas que la utilizada en este trabajo; (2) en cuanto al costo computacional el método LDRBFCM también es más eficiente para aproximar derivadas cuando hay nodos en la frontera en términos de menos requisitos de memoria y menos esfuerzos computacionales que los métodos globales.

Palabras claves: Método meshless; Funciones de base radial (RBFs); Colocación local directo; Puntos fantasmas.

2. Introducción

Los métodos numéricos son de interés e importancia significativa en el estudio de las soluciones numéricas de muchos problemas en la ciencia y la ingeniería. Para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales (PDEs) se han utilizado, tradicionalmente, cuatro métodos ampliamente conocidos: Diferencias Finitas (FDM), Volúmenes Finitos (FVM), Elementos Finitos (FEM) y Elementos de Frontera (BEM). FDM y FVM se basan en retículas uniformes, lo que limita su aplicación a geometrías simples. FEM se basa en una discretización de malla, con varias limitaciones según lo informado por A. Emdadi [1]: (1) la generación de mallas adecuadas para los problemas y geometrías complejas puede tomar mucho tiempo y esfuerzo computacional, (2) la malla tiene que ser modificada dinámicamente o recalculada cuando se utiliza mallado adaptativo, (3) grandes deformaciones en los dominios dan lugar a una pérdida considerable en la precisión, (4) se obtiene convergencia muy lenta en regiones de alto gradiente. El Método de Elementos de Frontera se ha convertido en una alternativa viable a FEM y FDM debido a la reducción en una dimensión espacial del problema, sin embargo, esta ventaja desaparece cuando se consideran términos no homogéneos que requiere una discretización completa del dominio.

Como alternativa a los métodos tradicionales para solucionar numéricamente las PDEs se han utilizado técnicas libres de mallas (meshfree) las cuales usan nodos dispersos dentro del dominio y su frontera. Estos nodos no forman una malla, por lo tanto, la formulación del problema no requiere información sobre la relación entre los nodos.

2.1. Objetivos

Definir condiciones de mejor desempeño para la solución numérica de problemas de ecuaciones diferenciales parciales (PDEs) usando el método de colocación local directo (LDRBFCM), a través de un DOE (Diseño de Experimento) numérico.

2.2. Algunas definiciones

- Densidad de puntos: H , mientras más pequeña más nodos hay en el dominio.
- Función de base Radial (RBF): TPS2=Thin Plate Spline orden 2, TPS3=Thin Plate Spline

orden 3, MQ=Multicubic.

- Máxima distancia nodal en el dominio: r_0 .
- Parámetro libre de la MQ: $c=100r_0$, $c=500r_0$, $c=1000r_0$.
- Nodos por dominio: N .

2.3. Metodología

En este trabajo se determinan los parámetros de mejor desempeño utilizando el método de colocación local directo con RBFs (LDRBFCM). Para ello se propone la evaluación del término difusivo de la ecuación de energía usando dos casos: (1) Problema con condiciones de frontera Dirichlet; (2) problema con condiciones de frontera Dirichlet, Neumann y Robin (benchmark NAFEMS). El estudio realizado busca determinar el mejor funcionamiento del método numérico para: (1) Diferentes funciones de base radial: MQ, TPS2 y TPS3; (2) diferentes distribuciones de puntos de colocación: rectangular, aleatoria y triangular; (3) diferentes densidades de puntos de colocación (H) para cada distribución: rectangular y aleatoria 25, 121, 256, 441, 1225 y 2601; triangular 29, 109, 280, 488, 1376 y 2605; (4) diferente número de puntos colocación por dominio N para cada distribución y densidad: 5, 6, 7, 8, 9 y 10 para la MQ; 5, 10, 15, 20, 30 y 40 para las TPS2 y TPS3; (5) diferentes valores del parámetro libre c de la RBF MQ: $100r_0$, $500r_0$ y $1000r_0$; (6) y en el caso de benchmark NAFEMS con condiciones de frontera Dirichlet, Neumann y Robin, la utilización de puntos fantasmas para la aproximación de derivadas en la frontera.

El programa de ordenador ha sido codificado en doble precisión usando el compilador GNU Fortran. En las figuras 1, 2 y 3 se muestran las distribuciones utilizadas para el DOE así como el número de nodos estudiado.

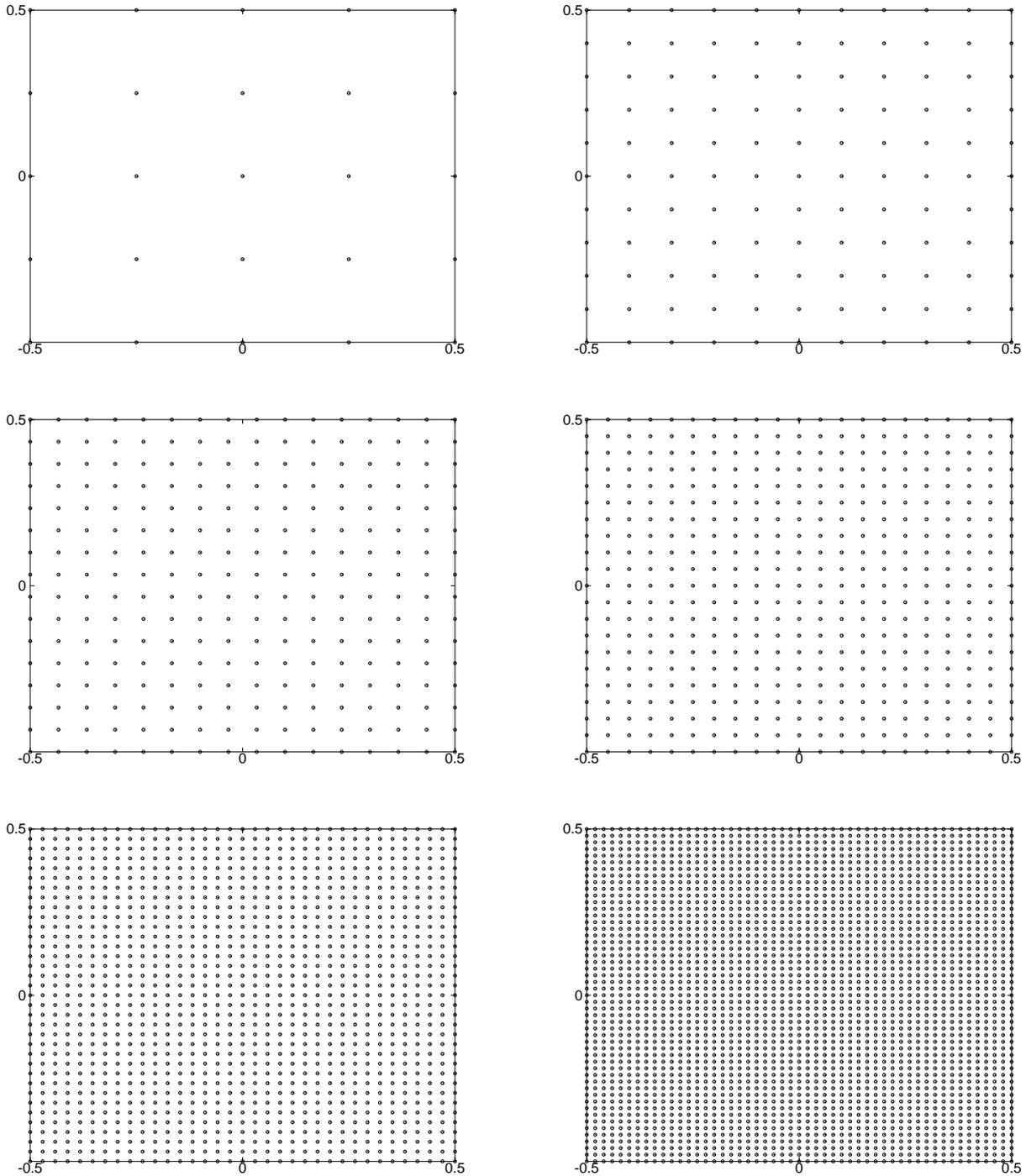


Figura 1: Nodos distribuidos uniformemente: 5x5 (25 nodos), 11x11 (121 nodos), 16x16 (256 nodos), 21x21 (441 nodos), 35x35 (1225 nodos) y 51x51 (2601 nodos) respectivamente.

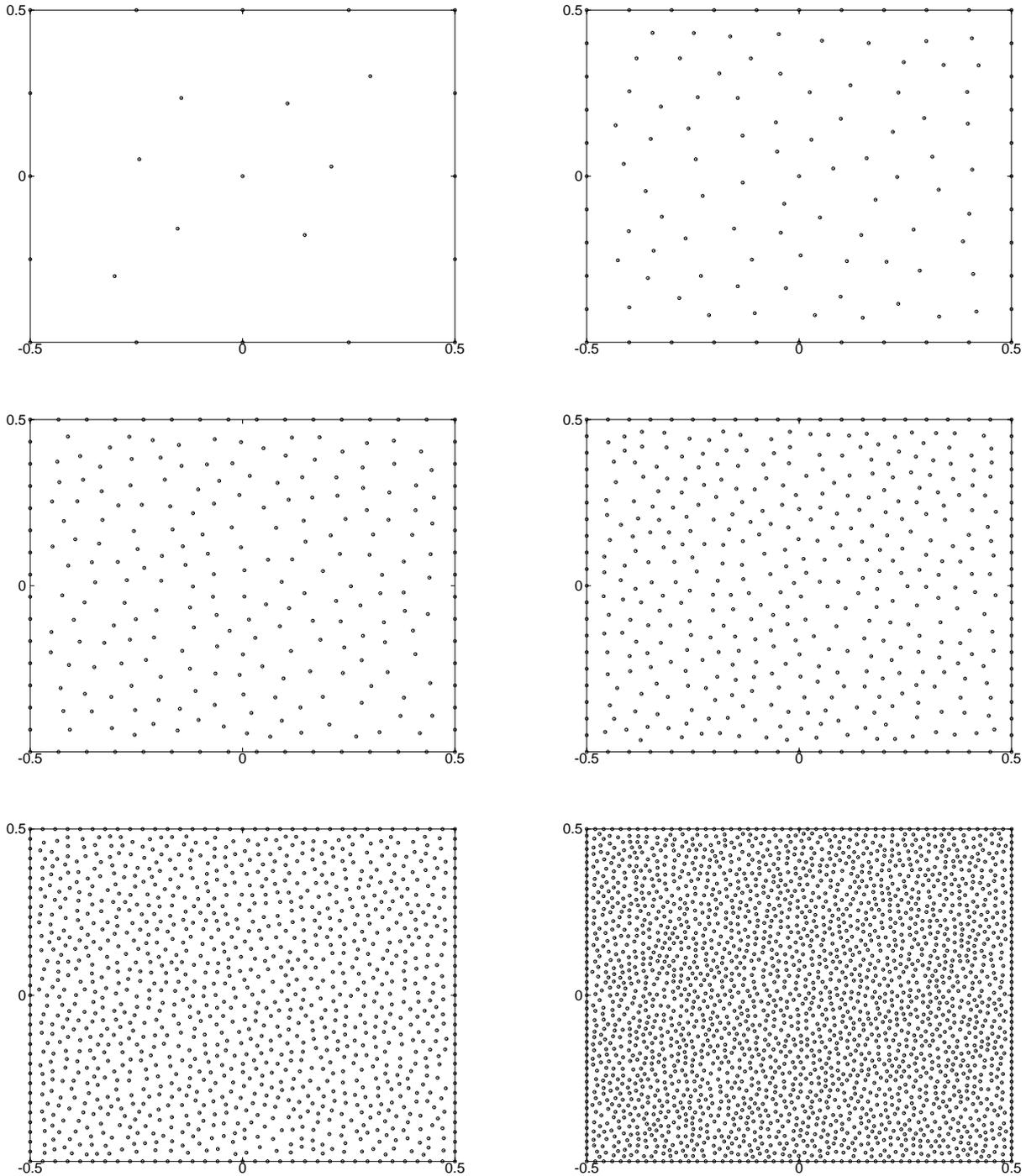


Figura 2: Nodos con distribución aleatoria: 5x5 (25 nodos), 11x11 (121 nodos), 16x16 (256 nodos), 21x21 (441 nodos), 35x35 (1225 nodos) y 51x51 (2601 nodos) respectivamente.

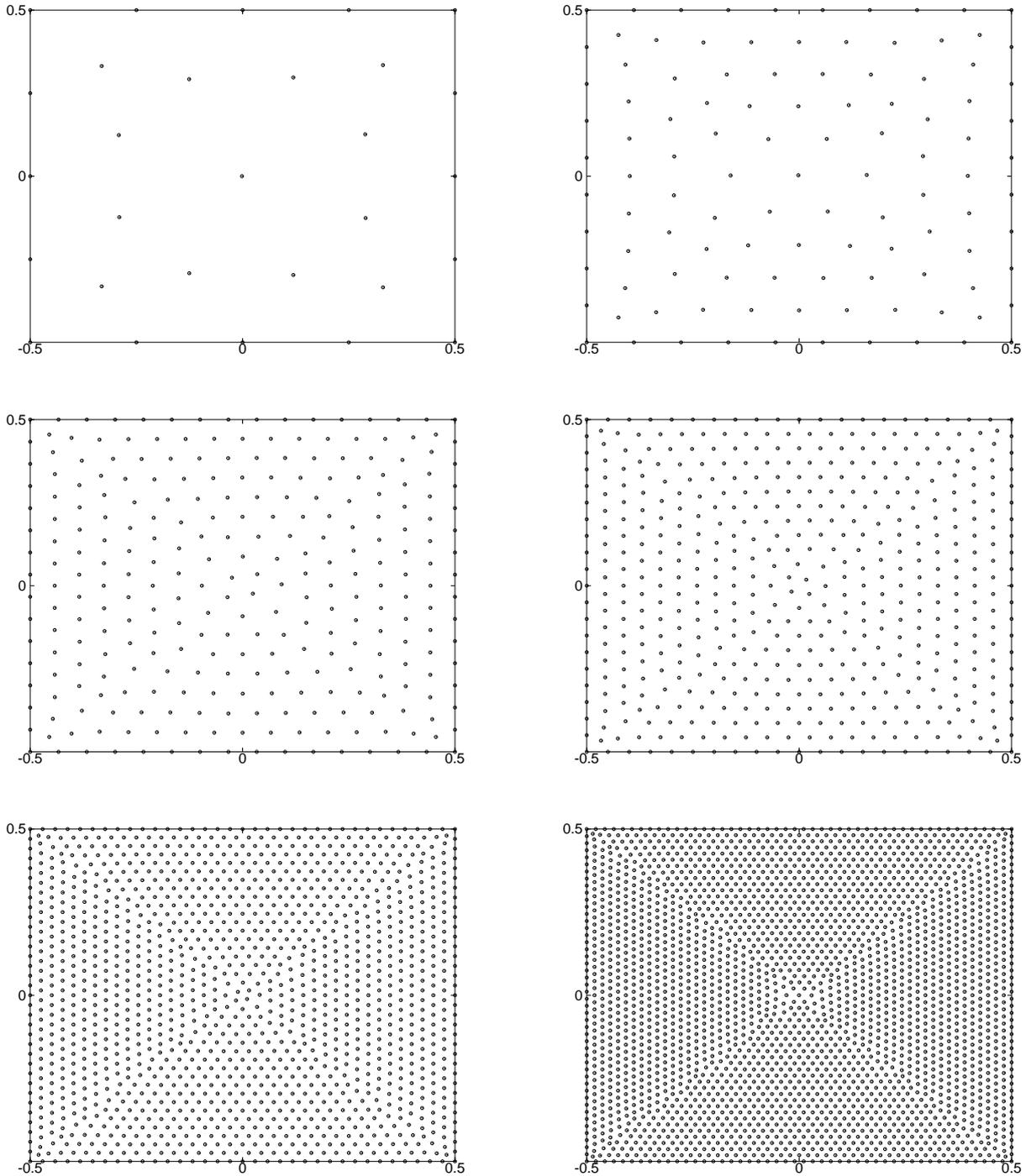


Figura 3: Nodos con distribución Triangular: 5x5 (29 nodos), 10x10 (109 nodos), 16x16 (280 nodos), 21x21 (488 nodos), 35x35 (1376 nodos) y 48x48 (2605 nodos) respectivamente.

El informe del trabajo realizado se organiza de la siguiente manera. En la Sección 3, se define el problema. Una breve revisión de RBFNs y una discusión de la aproximación de una función y sus

derivadas con el método de colocación directo con RBFs (LDRBFCM) se da en la sección 4. El método DRBFN se incluye para proporcionar la base para la evaluación del enfoque LDRBFCM propuesto en este trabajo. En la sección 5 se discuten los resultados; y por último, el trabajo se concluye en la sección 6.

2.4. Estado del arte

2.4.1. Antecedentes de las técnicas sin malla

El origen de estos métodos libres de malla se remonta a 1973 cuando A. J. Chorin [2] desarrolló el método de vórtice para analizar los flujos a altos números de Reynolds. En 1977 L. B. Lucy [3] y R. A. Gingold and J. J. Monaghan [4] propusieron el método Hidrodinámica de Partículas suavizadas (SPH) para modelar fenómenos astrofísicos; una revisión completa de la teoría y aplicaciones de SPH fue realizada por J. J. Monaghan en 2005 [5]. De otro lado G. R. Liu and G. U. Gu [6] clasifican los métodos sin malla de acuerdo con la formulación en: (1) Métodos de forma débil (weak-form methods) los cuales transforman las PDEs y las condiciones de frontera que describen el fenómeno en ecuaciones integrales, requiriendo mallas auxiliares para integrar y perdiendo así su atractivo; sin embargo estos métodos han sido populares en la investigación numérica porque su formulación es similar a la utilizada en los FEM desarrollándose una amplia variedades de ellos entre los que se encuentran el Método de Elementos Difusos (DEM) [7], el Método de Elemento Libre de Galerkin (EFGM) [8], el método radial de interpolación de puntos [9], el Método de la Reproducción de Partículas del Núcleo (RKPM) [10], el Método Local libre de malla de Petrov-Galerkin (MLPG) [11], el método de nodo en la frontera [12], el método de interpolación de puntos en la frontera [13], el método hp-cloud [14], the partition of unity finite element method [15], entre otros. (2) Métodos de forma fuerte (strong-form methods) que usan técnicas de colocación para acercarse directamente de forma fuerte a las PDEs y sus condiciones de contorno. Estos métodos son verdaderos libres de malla por no usar malla para la aproximación de las variables y la integración numérica. Además tienen una formulación más simple que los de forma débil. Ahora bien, para superar la falta de precisión al aproximar las derivadas en la frontera se han desarrollado muchas estrategias incluyendo el uso de puntos fantasmas (phantom points) fuera del dominio [16] y la

discretización, con diferencias finitas, de las derivadas en la frontera [6]. En métodos de forma fuerte se incluyen también el método de vórtice[2], el método de punto finito [17] y los métodos de colocación que usan funciones de base radial y sus variaciones [18, 19, 20, 21, 16, 22]. (3) Métodos que combinan formas fuerte y débil usando la formulación débil para los nodos en y cerca de la frontera, y formulación fuerte para los otros nodos. Este método, desarrollado por G. R. Liu y Y. T. Gu [23], aún requiere una malla auxiliar para integrar la solución en los nodos y por lo tanto no es verdaderamente libre de malla.

2.4.2. El método de colocación con funciones de base radial

El Método de Colocación con Funciones de Base Radial (RBFCM), en el cual se centra este trabajo, fue usado originalmente por R. L. Hardy en 1971 [24, 25] para interpolar la topografía en mapas utilizando datos de puntos dispersos con la función de base radial multiquadrics (MQ); en 1976 la thin plate spline (TPS) fue introducida por J. Duchon [26]. Desde su origen, las funciones de base radial (RBFs) se han utilizado como una herramienta poderosa de interpolación con aplicaciones que incluye la reconstrucción de superficies [27, 28], de imágenes [29], etc.

En 1982 R. Franke [30] comparó 29 métodos bidimensionales de interpolación por medio de experimentos numéricos, incluyendo el RBFCM. Las RBFs entregaron una excelente precisión de la interpolación de datos dispersos, fomentando, en el futuro, el estudio teórico y numérico de esta técnica. En su obra, Franke muestra que la MQ entregan los mejores resultados, seguida de la TPS y multicuadrado inversa (IMQ). La existencia, unicidad y convergencia de RBFs en aplicaciones de interpolación de datos dispersos se probaron por C. A. Micchelli [31], M. J. D. Powell [32] y W. R. Madych and S. A. Nelson. [33]. Otros estudios teóricos del comportamiento matemático de las RBFs han sido reportados por los matemáticos y científicos de la computación, tales como R. Schaback [34, 35, 36, 37, 38], M. D. Buhmann [39] y B. Fornberg and N. Flyer [40].

El uso de RBFs en la solución de PDEs fue iniciado, en 1990, por E. J. Kansa [18, 19] cuando propuso la MQ para aproximar las ecuaciones parabólicas, hiperbólica y elípticas de Poisson's con el método de colocación con funciones de base radial directo (DRBFN). Es de anotar que la matriz de coeficientes obtenida por Kansa es asimétrica y llena. La existencia y unicidad de la solución de PDEs usando RBFs fue demostrado por C. Franke and R. Schaback [41] y H.

Wendland [42] 10 años después de que Kansa propuso su método; es de anotar que la M.Q fue clasificada por R. Franke [30] como la RBF más exacta para interpolar los campos, razón por la cual muchos investigadores la han utilizado ampliamente. Sin embargo, este tipo de RBF y la Gaussiana tienen un inconveniente importante: la determinación de un parámetro libre, c . Cuanto mayor es el parámetro libre, más precisa es la solución, pero, la matriz resultante suele ser mal condicionada para grandes parámetros c y termina por convertirse en singular. Ese tipo de comportamiento se corresponde con el principio de equilibrio de Schaback [43, 44], que afirma que un buen condicionamiento se asocia con una mala precisión y buena precisión con mal condicionado. La determinación del valor ideal del parámetro libre es un problema abierto, porque depende de variables, tales como el número de nodos, la distancia entre los nodos y la ecuación que se va a resolver. Se han reportado muchos esfuerzos para determinar el parámetro libre ideal. J.G. Wang and G.R. Liu [45] proponen una modificación de la M.Q introduciendo un segundo parámetro q . Cuando el valor de q está cerca de 1, la sensibilidad de la solución con respecto a c disminuye. G.E. Fasshauer and J. G. Zhang [46] diseñaron un algoritmo de validación cruzada para determinar el valor ideal c . A. Embadi et al. [1] discuten que el parámetro c se debe aumentar progresivamente, obteniendo el valor ideal cuando el sistema alcanza su límite de estabilidad. La TPS, que es la función de base radial que sigue a la M.Q en el ranking o escalafón de Franke, no tiene este parámetro, y es la razón por la que se tiene en cuenta en el presente trabajo. Otro grupo importante de funciones de base radial, las funciones de base radial de soporte compacto, fue propuesta inicialmente por H. Wendland en 1995 [47, 48, 49]. Este tipo de funciones tienen un soporte local o compacto mientras que las RBFs tradicionales como MQ y TPS tienen un soporte global que implica el uso de todos los nodos en el dominio para aproximar una variable en un solo punto, lo que lleva a matrices totalmente densas. Las RBF con soporte compacto (CSRBFs) sólo utilizan la información de nodos vecinos que se encuentran dentro de un radio r_c . Este tipo de formulación produce matrices dispersas, lo que reduce el requerimiento de almacenamiento y tiempo de cálculo aunque la precisión puede ser sacrificada. X. Zhang et al [50] comparó la tasa de convergencia de las diferentes formulaciones con RBF y determinó que la convergencia de CSRBFs es pobre en comparación con la convergencia de RBFs tradicionales, incluso cuando se formulan de una manera global.

Fasshauer, en 1997 [51, 20], desarrolló una técnica de colocación utilizando RBFs que conduce, contrario a la de Kansa, a matrices simétricas mediante el uso de un enfoque de Hermite. Fasshauer informó que la precisión de la colocación de Hermite fue ligeramente mejor que la exactitud del método de Kansa. A. La Rocca and H. Power [52] compararon ambos métodos y concluyeron que las mejoras de la solución son marginales. El método de Kansa es más popular que el enfoque simétrico, porque la formulación de Hermite requiere dos aplicaciones del operador diferencial, mientras que la colocación no simétrica no lo requiere. Además, la aplicación de la formulación de Fasshauer en problemas no lineales genera matrices que no son simétricas. Mai-Duy and Tran-Cong in 2003 [53, 21] propusieron la Red Indirecta de Funciones de Base radial (IRBFN). En la colocación simétrica tradicional la variable que regula es determinada mediante el uso de una RBF y las derivadas se calculan directamente mediante la diferenciación de la RBF original. En el caso de IRBFN, la derivada de orden más alto se evalúa mediante el uso de una RBF, y las derivadas de orden menor y la variable de regulación se calculan mediante la integración de la RBF original. Mai-Duy afirma que el proceso de integración ayuda a reducir el ruido después de la interpolación, mejora la precisión y la velocidad de convergencia, mientras que el proceso de diferenciación tiende a magnificar el error de interpolación. Mai-Duy argumenta, en 2005 [54], que IRBFN rinde mucho mejor que el método tradicional de Kansa en aplicaciones que involucran ecuaciones diferenciales de orden superior. La implementación de IRBFN es más complicada que la implementación del método tradicional de Kansa, porque aparece un conjunto de constantes de integración. La existencia de las constantes de integración implica un sistema lineal indeterminado, que debe ser resuelto mediante el uso de un método de mínimos cuadrados en lugar de un programa de solución tradicional que invierte sistemas determinados. Además, la aplicación es dependiente de la dimensión espacial. IRBFN complica la formulación sin resolver el problema principal de la colocación con funciones de base radial: matrices totalmente densas y mal condicionadas.

Ahora, El método tradicional de Kansa representa mal a las derivadas en la frontera. Con el fin de mejorar el cálculo de los derivada en la frontera, Liu y Gu proponen en 2005 [6] la representación en diferencias finitas de las derivadas. En su trabajo ellos aplican una rejilla uniforme con el fin de utilizar los mismos puntos para la colocación y para la aproximación en diferencias finitas. Sin embargo, no se requiere una rejilla uniforme, los puntos para la colocación pueden estar situadas al

azar y los puntos “uniformes” para las diferencias finitas pueden ser interpolados usando el enfoque de colocación. La mayor desventaja de este enfoque es que el método de diferencias finitas por lo general tiene tasa de convergencia más lenta que el método con RBFs. Fedoséev, Fridman y Kansa [16] propusieron un método modificado de Kansa, que es una solución más pura sin mezclar el método de colocación con otros enfoques numéricos. El método del Kansa modificado aplica una doble colocación en la frontera, evaluando la ecuación de balance y la condición de frontera en estos puntos. Con el fin de evitar más ecuaciones que incógnitas, los puntos fantasmas se colocan fuera de la frontera. El número de puntos fantasma debe ser igual al número de puntos en la frontera para cerrar el sistema. En 2008, La Rocca y power [55] extendieron el mismo concepto para el enfoque simétrico hermitiano.

La generación de matrices densas y mal condicionadas a medida que aumenta el número de centros limita la aplicación del método a unos pocos miles de ecuaciones, lo cual es inaceptable para sistemas más complejos en 3D. La introducción de RBFs con soporte compacto fue un paso importante en la dirección correcta, en busca de matrices dispersas y bien condicionadas. Sin embargo, como se ha discutido antes, sus propiedades de convergencia son pobres. Muchos desarrollos incluyen la discretización del dominio en subdominios y el método RBFs apoyado localmente. En 1992 Kansa [56] discutió, por primera vez, la discretización del dominio en el método de colocación RBFs. Los subdominios permiten la división del problema en partes más pequeñas, la obtención de matrices que son más fáciles de manejar, más rápidas para resolver y tienen menos tendencia a ser mal acondicionadas que una sola matriz para todo el sistema. En cada subdominio se resuelve un sistema independiente de ecuaciones, y la información que comparte un subdominio con los otros se itera hasta que todo el sistema converge. Los subdominios se pueden clasificar en superpuestos y no superpuestos. En 1994 M. R. Dubal [57] implementó satisfactoriamente subdominios para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden de una sola dimensión. En 1999, Wong et al. [58] evaluaron la técnica de subdominio no superpuesto en modelos hidrodinámicos, obteniendo un ahorro de más del 50% en el tiempo de cálculo cuando se utilizaron 7 subdominios. Sus resultados no mostraron ninguna degradación en la exactitud en comparación con la solución con un único dominio. En 2000, Kansa y Y. C. Hon [59] presentaron los subdominios no superpuestos como una solución viable para evitar mal condicionamiento. En 2003, Zhou et al. [60], discutieron el

excelente rendimiento y la precisión del método de subdominios superpuestos utilizando técnicas iterativas multiplicativas y aditivas de Schwarz.

El método de colocación local con RBFs es una técnica de descomposición, donde cada nodo y sus vecinos forman un subdominio independiente; dependiendo de la posición, la ecuación de balance o de la condición de frontera, se evalúa en el centro, y el valor de los nodos circundantes se toma de la iteración anterior. Si hay M puntos en el dominio y la frontera, y cada subdominio se compone de N nodos ($M \gg N$), el sistema resuelve iterativamente M pequeños sistemas de tamaño $N \times N$, en lugar de un solo sistema enorme de tamaño de $M \times M$. W. Chen y M. Tanaka sugirieron esta técnica en 2000 [61] con el nombre de finite RBF method (FRM), haciendo referencia a la similitud entre esta formulación y el FDM. En 2005 Šarler et al. [22] desarrollaron por completo el método. Esta técnica se ha utilizado satisfactoriamente por Šarler et al. [62] and Šarler, R. Vertrik [63] y E. Divo and A. J. Kassab [64, 65, 66] para simular problemas de fenómenos de transporte. El método puede manejar geometrías con muchos nodos, resolviendo el sistema de ecuaciones en un tiempo razonable, y evitando el mal condicionamiento que es característica de la colocación con RBFs. Sin embargo, la experiencia del autor es que esta técnica sólo funciona con distribución de nodos muy uniforme para garantizar que cada nodo tiene nodos vecinos bien situados. Además, la técnica sólo funciona bien con la MQ o la IMQ, lo que requiere la determinación del un parámetro c óptimo para cada uno de los sistemas. En 2011 Y. Guangming, B. Šarler, and C. S Chen [67] compararon tres tipos de métodos sin malla locales, que son a la vez presentados por primera vez en su trabajo: (1) el Método Local de Soluciones Particulares Aproximadas (LMAPS), (2) el Método Directo de Colocación Local con Funciones de Base Radial (LDRBFCM) y (3) Método Indirecto de Colocación Local con Funciones de Base Radial (LIRBFCM); en los tres métodos, la discretización de tiempo se realiza en forma explícita y la RBFs que se utilizan para interpolar es la MQ cambiando el parámetro libre c por $100r_0$, siendo r_0 la máxima distancia nodal en el subdominio. Y. Guangming et al utilizaron cinco nodos por subdominio y observaron que la exactitud aumenta con la densidad de puntos y con pasos de tiempo más pequeños para lo tres métodos; todos los métodos proporcionan una precisión similar en el caso de disposición de nodo uniforme, para disposición de nodo no uniforme, el PSMs y la LDRBFCM muestran mejor desempeño que el LIRBFCM. En 2012 Y. Guangming, Siraj-ul-Islam and B. Šarler [68] realizaron una comparación

de los resultados al utilizar los Métodos libres de malla de Colocación Global y Local usando RBFs (GDRBFCM, LDRBFCM) para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas en tres dimensiones utilizando la RBF MQ y distribución de nodos uniforme y no uniforme. Los métodos locales fueron, en este trabajo, sobre la base de siete nodos por dominio. El rendimiento de los métodos se evaluó en términos de precisión y eficiencia. El resultado de la comparación fue la siguiente: (1) Los métodos locales mostraron una eficiencia y precisión superior, sobre todo para los problemas con las condiciones de frontera de Dirichlet. (2) Los métodos globales fueron eficientes y exactos sólo en casos con pequeña cantidad de nodos; para gran cantidad de nodos se convierten en eficientes pero con problemas de mal condicionamiento. (3) El método local explícito es muy preciso, sin embargo, sensible a la posición del nodo en la distribución, y se vuelve sensible al parámetro de forma c de la MQ cuando se usan las condiciones de frontera mixtas Dirichlet-Neumann. (4) El rendimiento del método local implícito es comparativamente mejor que los demás cuando se utiliza un mayor número de nodos y las condiciones de frontera mixtas. En 2013 Siraj-ul-Islam, R. Vertnik and B. Šarler [69] abordaron la solución de ecuaciones diferenciales hiperbólicas con el LFBFCM mejorado utilizando la RBF multiquadrics. Para ello los autores: (1) Eligieron un arreglo nodal uniforme debido a la conveniencia y mayor precisión; (2) Utilizaron diferentes tamaños de dominio, $m = 5, 13$; (3) el parámetro de sensibilidad de la MQ lo manejaron a través de una técnica de escalonamiento; (4) la derivada temporal de primer orden la aproximaron por diferencias progresivas y (5) estabilizaron el método utilizando la técnica upwind. En el desarrollo de su trabajo los autores: (1) Probaron las capacidades del LRBFCM por su aplicación a problemas con discontinuidad en una y dos dimensiones, con patrón de choque y condiciones iniciales periódicas; (2) compararon el rendimiento de la LRBFCM con soluciones analítica, otros métodos numéricos y los resultados reportados anteriormente en la literatura; (3) realizaron la comparación de la discretización temporal implícita de primer orden y la discretización espacial de primer orden, usando la técnica upwind (FVM1) con la discretización temporal implícita de segundo orden y la discretización espacial de primer orden, también usando la técnica upwind (FVM2); (4) evaluaron la exactitud del método como una función del tiempo y el espacio y (5) mostraron la convergencia numérica para ambos problemas de prueba en uno y dos dimensiones. Los resultados reportados fueron los siguientes: (1) El método propuesto es más

eficiente en términos de menos requisitos de memoria y menos esfuerzos computacionales debido a la inversión, por una vez, de la matriz 5×5 (tamaño del dominio de influencia local) y (2) los resultados obtenidos a través de LBRFCM son estables y comparables con los métodos existentes para una variedad de problemas con aplicaciones prácticas. D. Stevens et al, también en 2013 [70], proponen una descomposición alternativa escalable para el método de colocación local. En el: (1) A diferencia de otras formulaciones RBF locales sin malla que se basan en un principio generalizado de diferencias finitas (RBF-FD), en el método “finite collocation” la solución de la PDE está dada en su totalidad por la colocación de los operadores y las condiciones de frontera de la PDE dentro de los sistemas locales; (2) la colocación local del operador que gobierna la PDE permite que el método funcione con mallas centradas, aún en la presencia de campos convectivos fuertes; (3) la construcción de los pesos asignados a los nodos de las mallas se ajustan automáticamente para representar el flujo de información según lo dictado por la física del problema, este efecto “upwinding implícito” mitiga la necesidad de mallas upwinding ad-hoc en problemas de convección dominante. Los autores evaluaron el rendimiento del método a través de un gran número de ejemplos numéricos con dos PDE constantes, la ecuación de convección-difusión y las ecuaciones de Navier-Lamé para la elasticidad lineal. Los resultados reportados fueron los siguientes: (1) El método exhibe convergencia de alto orden en cada caso probado (mayor de sexto orden); (2) en el caso de elasticidad lineal, los campos de tensión se reproducen en el mismo grado de precisión que el campo de desplazamiento y exhiben el mismo orden de convergencia; (3) el método también es muy estable frente a las variaciones en funciones base planas, lo que demuestra una estabilidad significativamente mejorada en comparación con métodos de colocación RBF del tipo de diferencias finitas (RBF-FD). Continuando con los trabajos de 2013 presentamos el realizado por C.-M. Fan et al. [71] quienes proponen el LRBFCM combinado con el algoritmo de homotopía escalar exponencialmente convergente (ECSHA) para analizar la convección natural doble difusiva en medios porosos y en recintos con forma de paralelogramo llenos de líquido saturado. El ECSHA se adopta para resolver de manera eficiente el sistema de ecuaciones algebraicas no lineales (NAEs) que resulta al utilizar el LRBFCM. La eficiencia del proceso evolutivo en la solución de las NAEs se mejora en gran medida ya que se puede evitar el cálculo de la inversa de la matriz jacobiana. Para demostrar la capacidad y la precisión del esquema propuesto los autores proporcionan dos

ejemplos numéricos. En 2014 G. Kosec et al. [72] exploraron la ejecución en paralelo usando paralelización basada en OpenMP para calcular numéricamente sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas mediante el LRBFCM. Para ello realizaron experimentos numéricos en el caso de la convección natural de De Vahl Davis. Los autores demostraron que la acumulación de las memorias caché L3 gobierna el aumento de velocidad superlineal y sugirieron las reglas básicas para la estrategia de computación efectiva con respecto a los cálculos de varios núcleos.

3. Planteamiento del problema

Se considera la ecuación de la variación de la energía definida en el dominio Ω con frontera Γ

$$\rho \hat{C} \frac{DT}{Dt} = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) - (\vec{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v}) - \left(\frac{\partial L n \rho}{\partial L n T} \right)_P \frac{DP}{Dt}. \quad (1)$$

En la ecuación (1) el operador $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$ se denomina derivada sustancial, y da la velocidad de variación respecto al tiempo a medida que el observador se mueve con la “sustancia” que es objeto de estudio; el término $(\vec{\nabla} \cdot \vec{q})$ da cuenta de la adición de energía interna por conducción de calor; $(\vec{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v})$ es la medida de aumento de energía interna por disipación viscosa; $\left(\frac{\partial L n \rho}{\partial L n T} \right)_P$, es cero si se trabaja con un fluido con densidad constante, o es -1 si se trabaja con gases ideales; y $\left(\frac{DP}{Dt} \right)$ es cero cuando el fluido que circula en un sistema lo hace con presión constante.

Se trabajará con coordenadas cartesianas y números adimensionales. Para la transformación de las coordenadas en términos adimensionales se siguen las siguientes reglas:

$$\hat{x} = \frac{x}{L_x}, \hat{y} = \frac{y}{L_y}, \beta = \frac{L_x}{L_y}. \quad (2)$$

Aquí L_x y L_y son las longitudes en las direcciones x y y respectivamente, \hat{x} y \hat{y} son las nuevas coordenadas adimensionales y β es una relación geométrica, también adimensional. Las demás variables se transformarán en números adimensionales de acuerdo a los problemas que se abordan en este trabajo.

3.1. Caso 1: Problema 2D con condiciones de frontera Dirichlet

El primer problema que se aborda en este trabajo es el de una placa rectangular que está sometida a una temperatura $T = T_0$ en uno de sus bordes mientras los otros tres están a $T = 0^\circ\text{C}$. Se representa la temperatura en el borde superior, inferior, derecho e izquierdo de la placa como $T_{up-b} = T_0$, $T_{low-b} = 0^\circ\text{C}$, $T_{rig-b} = 0^\circ\text{C}$ y $T_{lef-b} = 0^\circ\text{C}$ respectivamente.

Para este caso la ecuación (1) se simplifica como sigue:

- Como la placa es sólida y estacionaria, esto es $\vec{v} = 0$, los términos $(\vec{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v})$ y $\left(\frac{\partial L n \rho}{\partial L n T} \right)_P \frac{DP}{Dt}$ son cero.

- Como trabajamos en el estado estacionario, el término $(\rho\hat{C}\frac{D}{Dt}T)$ también es cero.

Por tanto la ecuación (1) queda:

$$0 = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) \quad (3)$$

Como $\vec{q} = -k\vec{\nabla}T$ y $T(x, y)$, placa bidimensional, la ecuación (3) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Para la temperatura adimensional, Θ , se establece la siguiente regla de transformación:

$$\Theta = \frac{T - T_{low-b}}{\Delta T}, \quad (5)$$

con $\Delta T = T_{up-b} - T_{low-b}$.

Siguiendo las reglas de transformación establecidas en las ecuaciones (2) y (5) y realizando las operaciones matemáticas respectivas se obtiene la siguiente expresión adimensional para la ecuación de la energía:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \hat{x}^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \hat{y}^2} = 0. \quad (6)$$

La geometría, las condiciones de frontera y la ubicación del sistema de coordenadas del problema que se plantea, son adimensionales y se presentan en la figura 4.

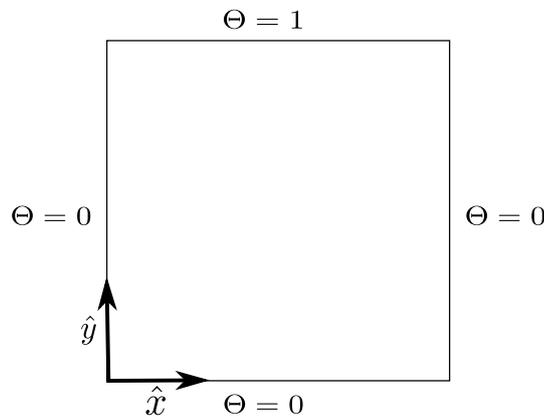


Figura 4: En esta figura se presentan la geometría, las condiciones de frontera y la ubicación del sistema de coordenadas para el problema que evalúa el término difusivo de la ecuación de la energía usando condiciones de frontera de Dirichlet.

3.2. Caso 2: Benchmark NAFEMS con condiciones de frontera Dirichlet, Neumann y Robin

The International Association for the Engineering Analysis Community (NAFEMS) define un test para la evaluación del término difusivo de la ecuación de la energía usando condiciones de frontera de Dirichlet, Neumann y Robin. Para este test $L_x = 0,6$ m, $L_y = 1$ m, $T_{low-b} = 100^\circ\text{C}$, $T_\infty = 0^\circ\text{C}$, $h = 750$ W/m² K, $k = 52$ W/m K. h y k son el coeficiente convectivo de transferencia de calor y la conductividad térmica respectivamente. De acuerdo con la prueba de referencia, la temperatura exacta para el punto E(0.6, 0.2) es 18,25375654°C.

Las condiciones de frontera son:

- Borde inferior, Dirichlet:

$$T_{low-b} = 100^\circ\text{C}. \quad (7)$$

- Borde dedecheo, Robin:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_\infty). \quad (8)$$

- Borde superior, Robin:

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = h(T - T_\infty). \quad (9)$$

- Borde izquierdo, Neumann:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

En este problema se establece, para la temperatura adimensional, la regla de transformación siguiente:

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \quad (11)$$

con $\Delta T = T_{low-b} - T_\infty$.

Siguiendo las reglas de transformación establecidas en las ecuaciones (2) y (11) y realizando las operaciones matemáticas respectivas se obtienen las expresiones adimensionales para la ecuación de la energía dada por la ecuación (6) y para las condiciones de frontera dadas por:

- Borde inferior, Dirichlet:

$$\Theta = 1. \quad (12)$$

- Borde dedecho, Robin:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \hat{x}} = -Nu\Theta. \quad (13)$$

- Borde superior, Robin:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \hat{y}} = -\frac{Nu}{\beta}\Theta. \quad (14)$$

- Borde izquierdo, Neumann:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \hat{x}} = 0. \quad (15)$$

$Nu = h L_x/k$ es llamado número adimensional de Nusselt y mide el aumento de la transmisión de calor desde una superficie por la que un fluido discurre (transferencia de calor por convección) comparada con la transferencia de calor si ésta ocurriera solamente por conducción.

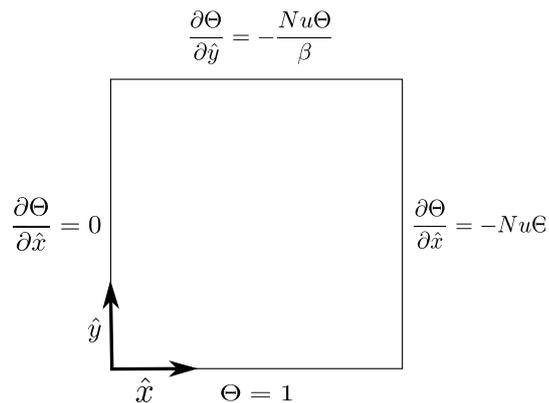


Figura 5: En esta figura se presentan la geometría, las condiciones de frontera y la ubicación del sistema de coordenadas para el benchmark NAFEMS que evalúa el término difusivo de la ecuación de la energía usando condiciones de frontera de Dirichlet, Neumann y Robin.

En la figura 5 se presentan la geometría, la ubicación del sistema de coordenadas y las condiciones de frontera adimensionales del benchmark NAFEMS.

4. Método Numérico

4.1. Aproximación numérica de funciones usando funciones de base radial, RBF

Una RBFN representa un mapa del espacio p -dimensional de entrada al espacio de salida unidimensional $f : R^p \rightarrow R^1$, que consiste en un conjunto de pesos $\{\alpha^{(i)}\}_{i=1}^m$, y un conjunto de funciones de base radial $\{g^{(i)}\}_{i=1}^m$, con $m \leq n$, siendo n el número de entradas. Hay una gran cantidad de funciones de base radial que se puede escribir en una forma general $g^{(i)}(\mathbf{x}) = \phi^{(i)}(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}^{(i)}\|)$, donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana y $\{\mathbf{c}^{(i)}\}_{i=1}^m$ es un conjunto de los centros que pueden ser elegidos entre los puntos de datos. Las funciones de base radial que se utilizan en este estudio son:

- **Multiquadrics (MQ)**

$$\phi^{(i)}(r) = \phi^{(i)}(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}^{(i)}\|) = \sqrt{r^2 + a^{(i)2}}, \quad (16)$$

- **Thin Plate Splines (TPS)**

$$\phi^{(i)}(r) = \phi^{(i)}(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}^{(i)}\|) = r^{2q} \ln(r). \quad (17)$$

Aquí $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}^{(i)}\| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{c}^{(i)}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}^{(i)})}$, $a^{(i)} > 0$ es llamado parámetro libre de la MQ y es usualmente referido como el ancho de la función de base i -ésima. La determinación del valor ideal del parámetro libre depende de variables, tales como el número de nodos, la distancia entre los nodos y la ecuación que se va a resolver. q es el orden de la TPS.

Una propiedad importante de las RBF es que es una red lineal ponderada, es decir, que la salida es una combinación lineal de m funciones de base radial escrita como

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \alpha^{(i)} g^{(i)}(\mathbf{x}). \quad (18)$$

El problema es encontrar los pesos desconocidos $\alpha^{(i)}\}_{i=1}^m$. Con este fin se utiliza el principio de Suma de los Errores Cuadrados (SSE) para minimizar el error, esto es

$$SSE = \sum_{i=1}^n [y^{(i)} - f(\mathbf{x}^{(i)})]^2, \quad (19)$$

con respecto a los pesos de f , resultando un conjunto de n ecuaciones algebraicas (ecuaciones normales) para resolver simultaneamente y determinar los m pesos desconocidos

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{G})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{G}^T \mathbf{y}, \quad (20)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) & g^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)}) & \dots & g^{(m)}(\mathbf{x}^{(1)}) \\ g^{(1)}(\mathbf{x}^{(2)}) & g^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}) & \dots & g^{(m)}(\mathbf{x}^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g^{(1)}(\mathbf{x}^{(n)}) & g^{(2)}(\mathbf{x}^{(n)}) & \dots & g^{(m)}(\mathbf{x}^{(n)}) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(m)}]^T, \quad (22)$$

$$\mathbf{y} = [y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}]^T. \quad (23)$$

4.2. Derivadas de funciones usando RBFN: Método de colocación directo (DRBFN)

La derivada de una función calculada en la red es una combinación lineal de funciones fijas (las derivadas de las funciones de base radial). Las derivadas parciales de la función aproximada según la ecuación (18) se puede calcular de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_j \dots \partial x_l} = f_{j\dots l}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \alpha^{(i)} \frac{\partial^k g^{(i)}}{\partial x_j \dots \partial x_l}, \quad (24)$$

donde $(\partial^k g^{(i)} / \partial x_j \dots \partial x_l)$ es la correspondiente función base para la derivada que se obtiene derivando la función de base original $g^{(i)}(\mathbf{x})$. Teniendo en cuenta la derivada de primer orden de la

función $f(\mathbf{x})$ con respecto a x_j , denotado por f_j , las funciones de base correspondientes al presente estudio se encuentran analíticamente como sigue:

- **Multiquadrics (MQ)**

$$f_j = \frac{\partial g^{(i)}}{\partial x_j} = \frac{x_j - c_j^{(i)}}{(r^2 + a^{(i)2})^{0,5}}. \quad (25)$$

- **Thin Plate Splines (TPS)**

$$f_j = \frac{\partial g^{(i)}}{\partial x_j} = r^{2(q-1)}(2q \ln(r) + 1)(x_j - c_j^{(i)}). \quad (26)$$

La segunda derivada de $f(\mathbf{x})$ con respecto a x_j , denotado por f_{jj} , las funciones de base correspondiente al presente estudio se encuentran analíticamente como sigue:

- **Multiquadrics (MQ)**

$$f_{jj} = \frac{\partial^2 g^{(i)}}{\partial x_j^2} = \frac{r^2 + a^{(i)2} - (x_j - c_j^{(i)})^2}{(r^2 + a^{(i)2})^{1,5}}. \quad (27)$$

- **Thin Plate Splines (TPS)**

$$f_{jj} = \frac{\partial^2 g^{(i)}}{\partial x_j^2} = r^{2q-3}(4q^2 \ln(r) + 4q - 2q \ln(r) - 1)(x_j - c_j^{(i)}). \quad (28)$$

4.3. Método de colocación local directo (LDRBFCM)

La formulación del problema con el método de colocación con RBFs comienza con la representación de las condiciones iniciales con RBFs. Las derivadas de cada una de las variables son calculadas mediante la derivación de su representación en términos de las RBF.

Suponga que la temperatura se representa en cada uno de los subdominios ${}_l N$ por RBFs :

$$T_0(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{{}_l N} \phi(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k(l,n)}\|) {}_l \alpha_n, \quad \mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{r} \in {}_l \Omega. \quad (29)$$

Los coeficientes desconocidos ${}_l \alpha_n$, $n = 1, 2, \dots, {}_l N$ son determinados por colocación, así:

$$T_0(\mathbf{r}_{k(l,m)}) = \sum_{n=1}^{lN} \phi(\|\mathbf{r}_{k(l,m)} - \mathbf{r}_{k(l,n)}\|) {}_l\alpha_n, \quad (30)$$

con $\mathbf{r}_{k(l,m)} \in {}_l\Omega$ y $m = 1, 2, \dots, lN$.

El sistema de ecuaciones puede escribirse, con notación de matriz vectorial, como sigue

$${}_l\mathbf{T} = {}_l\Phi {}_l\boldsymbol{\alpha}, \quad (31)$$

con los elementos matriciales ${}_l\Phi_{mn}$ de la matriz ${}_l\Phi$ denotados como

$${}_l\Phi_{mn} = \Phi(\|\mathbf{r}_{k(l,m)} - \mathbf{r}_{k(l,n)}\|). \quad (32)$$

Los coeficientes ${}_l\boldsymbol{\alpha}$ se determinan invirtiendo la matriz ${}_l\Phi$, por ejemplo ${}_l\Phi^{-1} {}_l\Phi = \mathbf{I}$, luego

$${}_l\boldsymbol{\alpha} = {}_l\Phi^{-1} {}_l\mathbf{T}. \quad (33)$$

Ahora, si a los elementos matriciales $({}_l\Phi^{-1})_{mn}$ de la matriz ${}_l\Phi^{-1}$ los denotamos por ${}_l\Phi_{mn}^{-1}$ entonces

$$T_0(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{lN} \sum_{m=1}^{lN} \phi(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k(l,m)}\|) {}_l\Phi_{mn}^{-1} T_0(\mathbf{r}_{k(l,m)}), \quad (34)$$

y

$$\nabla^2 T_0(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{lN} \sum_{m=1}^{lN} \nabla^2 \phi(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k(l,m)}\|) {}_l\Phi_{mn}^{-1} T_0(\mathbf{r}_{k(l,m)}). \quad (35)$$

5. Resultados numéricos

5.1. Caso 1: Problema 2D con condiciones de frontera Dirichlet

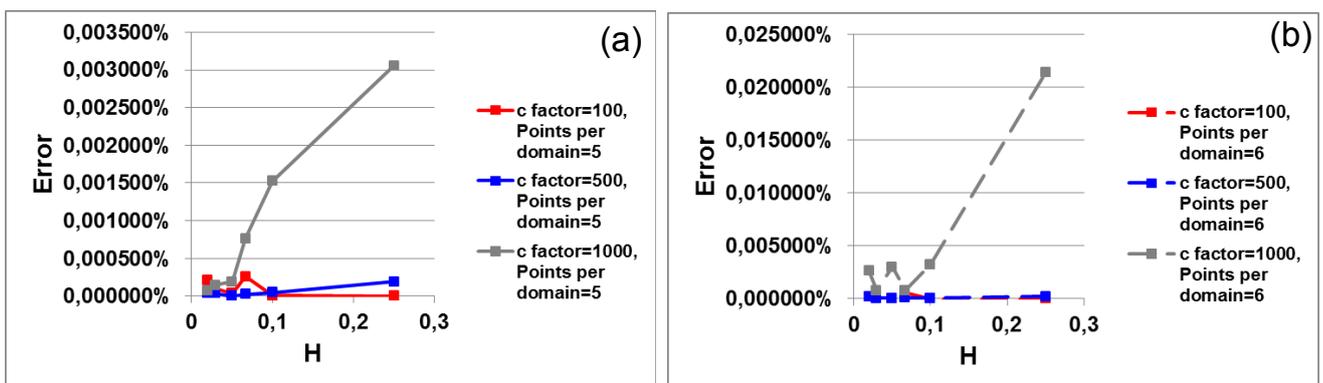
Los resultados presentados son comparados con la solución teórica. Para la comparación, y presentación de los errores, se tomó el punto ubicado en el centro de la placa. En las gráficas presentadas solo se reportan los casos en los que ha habido convergencia de los resultados.

5.1.1. Estudio del comportamiento de la RBF MQ: Evaluación del parámetro libre c para la distribución rectangular

En las figuras 6(a) y 6(b) se presenta el comportamiento del parámetro libre c de la MQ para $N = 5$ y $N = 6$ puntos por dominio y las 6 densidades de puntos. En ellas se observa que para $c = 100r_0$ y $c = 500r_0$ es más estable el comportamiento del error.

En la figura 6(c) se comparan los comportamientos del error para $c = 100r_0$ y $c = 500r_0$, con $N = 5$ y $N = 6$ puntos por dominio; se presentan los resultados para las 5 densidades de puntos más altas. En ella se observa un mejor comportamiento del error cuando $c = 500r_0$.

En la figura 6(d) se comparan los comportamientos del error para $c = 100r_0$ y $c = 500r_0$, con $N = 7$ puntos por dominio; se presentan los resultados para las 5 densidades de puntos más altas. Se observa un mejor comportamiento del error para $c = 100r_0$.



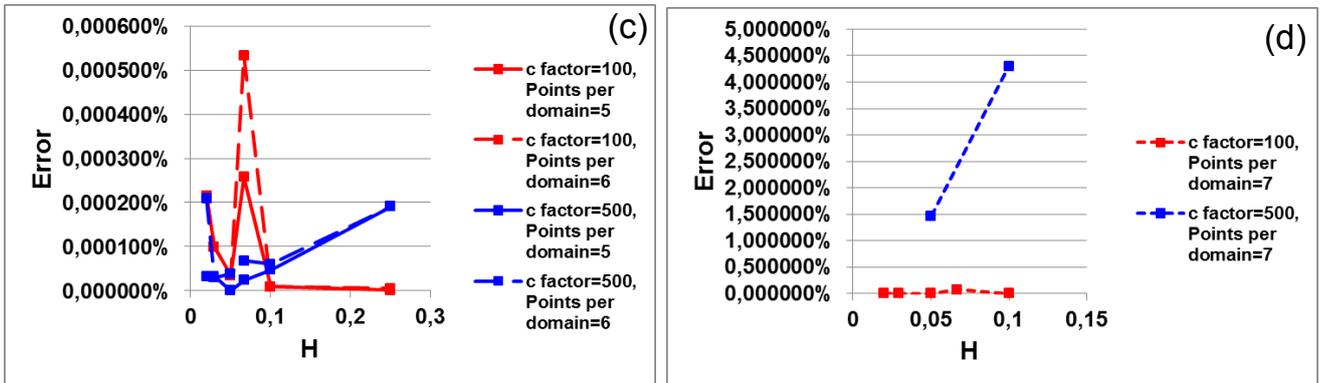


Figura 6: En esta figura se presenta el error como función del parámetro c , de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución rectangular. Las figuras (a) y (b) muestran la influencia del parámetro c para el mismo N y las figuras (c) y (d) la influencia de N para un parámetro c constante.

En las figuras 7(a) y 7(b) se presenta el comportamiento del error para $c = 100r_0$, $5 \leq N \leq 10$ y las tres densidades de puntos más altas. Se observa muy buen comportamiento del errores para $5 \leq N \leq 8$; para los demás valores de N el comportamiento no es tan bueno pero los errores son aceptables.

El siguiente es el comportamiento general: (1) Con el aumento de la densidad de puntos el error disminuye; (2) para $N > 6$ el único valor del parámetro libre que se mantiene es $c = 100r_0$; (3) lo mejor es trabajar con $c = 100r_0$, $5 \leq N \leq 8$ y las tres densidades de puntos más altas; para los demás N el error es aceptable.

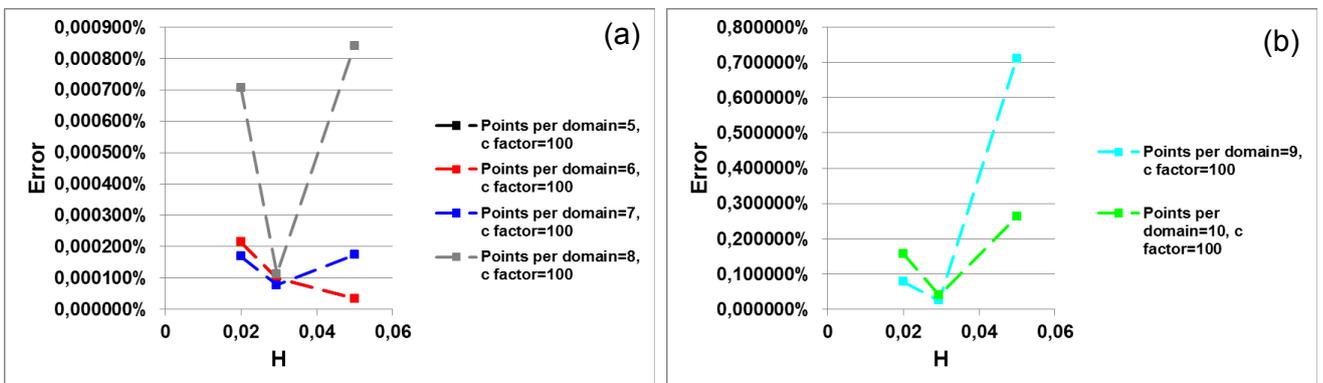


Figura 7: En esta figura se presenta el error como función de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución rectangular. Los resultados mostrados son para el parámetro c constante y las tres densidades de puntos más altas. En (a) $N = 5$, $N = 6$, $N = 7$ y $N = 8$; en (b) $N = 9$ y $N = 10$.

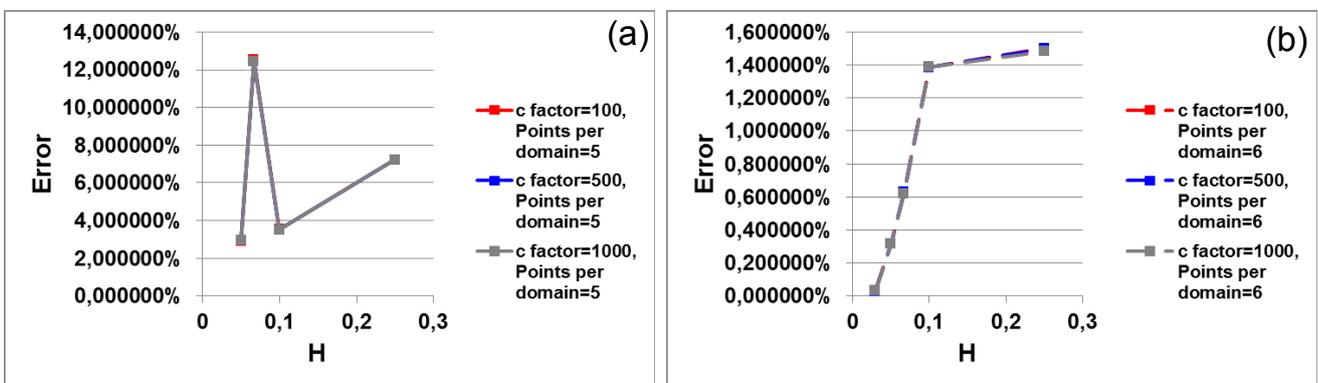
5.1.2. Estudio del comportamiento de la RBF MQ: Evaluación del parámetro libre c para la distribución aleatoria

En la figura 8(a) se presenta el error como función del parámetro c y de las 4 densidades de puntos más altas para $N = 5$. Se observa que el error presenta el mismo comportamiento independiente del parámetro c .

En la figura 8(b) se presenta el error como función del parámetro c y de las 5 densidades de puntos más altas para $N = 6$. Al igual que en la figura 8(a) se observa que el error presenta el mismo comportamiento independiente del parámetro c .

En la figura 8(c) se muestra la influencia del número de puntos por dominio para un parámetro c constante. Se observa que el error es más grande y su comportamiento menos estable para $N = 5$; para los demás N el comportamiento del error es mejor en exactitud y estabilidad.

El siguiente es el comportamiento general: (1) Con el aumento de la densidad de puntos el error disminuye; (2) para $N > 6$ el único valor del parámetro libre que se mantiene es $c = 100r_0$; (3) lo mejor es trabajar con $c = 100r_0$, $N > 5$ y las tres densidades de puntos más altas.



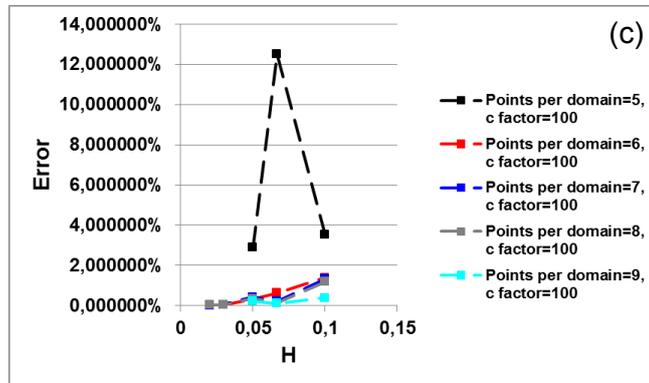


Figura 8: En esta figura se presenta el error como función del parámetro c , de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución aleatoria. Las figuras (a) y (b) muestra la influencia del parámetro c para el mismo N y la figura (c) la influencia de N para un parámetro c constante.

5.1.3. Estudio del comportamiento de la RBF MQ: Evaluación del parámetro libre c para la distribución triangular

En la figura 9(a) se presenta el error como función del parámetro c y de las 4 densidades de puntos más altas para $N = 5$. Se observa que el error presenta el mismo comportamiento independiente del parámetro c .

En la figura 9(b) se presenta el error como función del parámetro c y de las 5 densidades de puntos más altas para $N = 6$. Al igual que en la figura 9(a) se observa que el error presenta el mismo comportamiento independiente del parámetro c .

En la figura 9(c) se muestra la influencia del número de puntos por dominio para un parámetro c constante. Se observa un buen comportamiento del error en exactitud y estabilidad.

El siguiente es el comportamiento general: (1) Con el aumento de la densidad de puntos el error disminuye; (2) para $N > 6$ el único valor del parámetro libre que se mantiene es $c = 100r_0$; (3) lo mejor es trabajar con $c = 100r_0$, $N > 5$ y las tres densidades de puntos más altas.

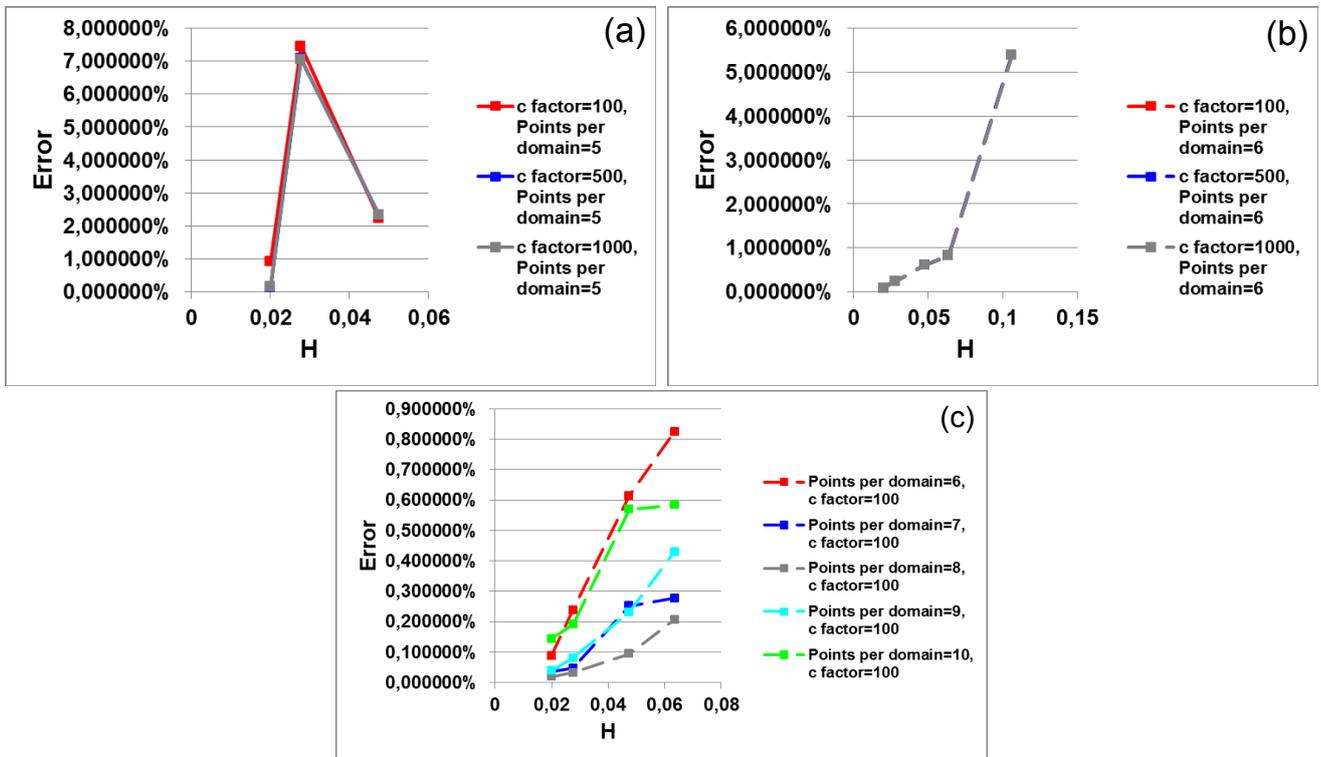


Figura 9: En esta figura se presenta el error como función del parámetro c , de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución aleatoria. Las figuras (a) y (b) muestra la influencia del parámetro c para el mismo N y la figura (c) la influencia de N para un parámetro c constante.

5.1.4. Comparación entre las distribuciones de puntos rectangular, aleatoria y triangular

En la figura 10 se presenta el error como función de la distribución de puntos (Rectangular, aleatoria y triangular) y de las 5 densidades de puntos más altas para $5 \leq N \leq 10$. En las figuras (a), (b), (c) y (d) se observa un mejor comportamiento del error cuando se utiliza la distribución rectangular.

En la figura figura (e) se observa que el comportamiento del error es mejor para la distribución aleatoria.

En la figura figura (f) se observa un comportamiento del error semejante para las distribuciones rectangular y aleatoria, la triangular no arrojo resultados.

El siguiente es el comportamiento general: (1) Para $5 \leq N \leq 8$ el mejor comportamiento del error

en exactitud y estabilidad se da para la distribución de puntos rectangular; (2) Para altas densidades de puntos y $6 \leq N \leq 9$ el comportamiento del error es similar para las tres distribuciones de puntos.

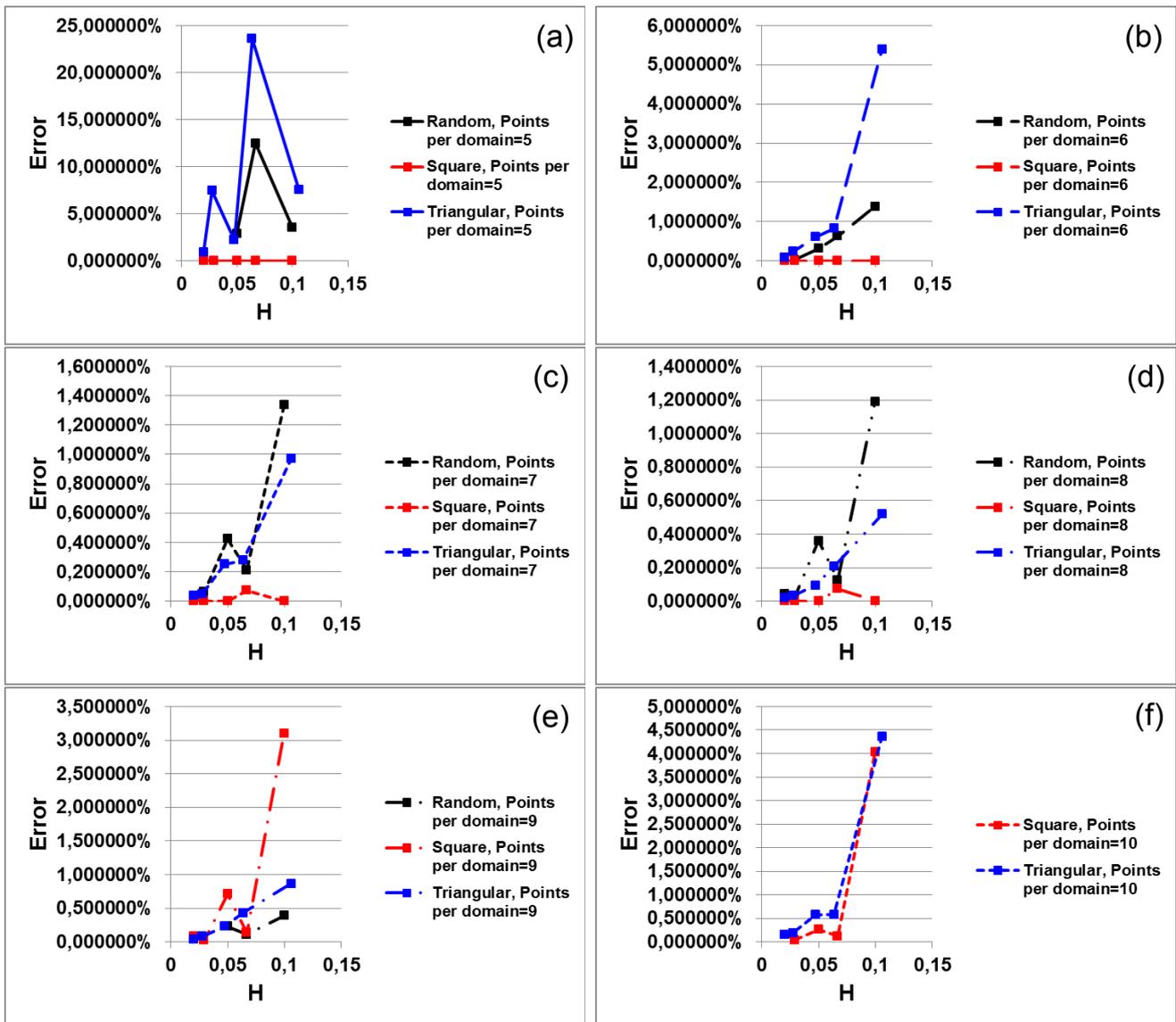


Figura 10: En esta figura se presenta el error como función de la distribución de puntos (Rectangular, aleatoria y triangular), de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H).

5.1.5. Estudio del comportamiento de las RBFs TPS: distribución rectangular

En la figura 11 se presenta el error como función de las RBFs TPS, de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución rectangular. La figura (a) muestra la influencia de la TPS2 para $N = 10$, $N = 15$, $N = 20$ y $N = 40$; y la figura (b) la influencia de la TPS3 para $N = 20$, $N = 30$ y $N = 40$. Se observa, en general, que las RBFs TPS2 y TPS3 presentan convergencia: (1) lenta, comparada con la MQ es mayor el tiempo de cálculo numérico; (2) inversa, se espera que el error disminuya con el aumento de la densidad de puntos pero sucede lo contrario; (3) inestable, no se presenta una tendencia lineal en el error con el aumento de la densidad de puntos; además los errores obtenidos son muy grandes. No se recomienda trabajar con ninguna de ellas.

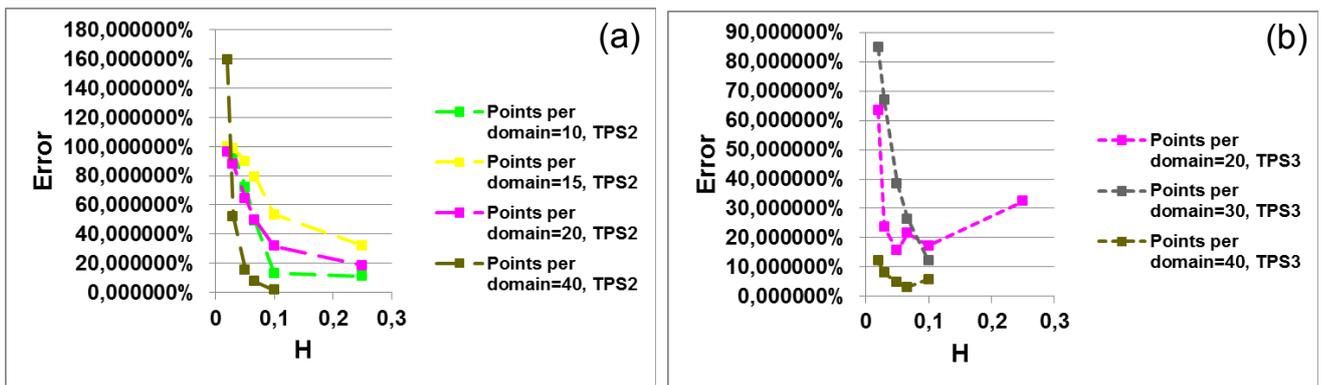


Figura 11: En esta figura se presenta el error como función de las RBFs TPS, de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución rectangular. La figura (a) muestra la influencia de la TPS2 y la figura (b) la influencia de la TPS3.

5.1.6. Estudio del comportamiento de las RBFs TPS: distribución aleatoria

En la figura 12 se presenta el error como función de las RBFs TPS, de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución aleatoria. La figura (a) muestra la influencia de la TPS2 para $N = 15$, $N = 20$, y $N = 40$; y la figura (b) la influencia de la TPS3 para $N = 30$ y $N = 40$. Se observa, al igual que en caso de la distribución rectangular, que las RBFs TPS2 y TPS3 presentan convergencia lenta, inversa e inestable; además los errores obtenidos son muy grandes. Sólo son aceptables los resultados para el error de la TPS3 con $N = 40$. No se recomienda trabajar con ninguna de ellas.

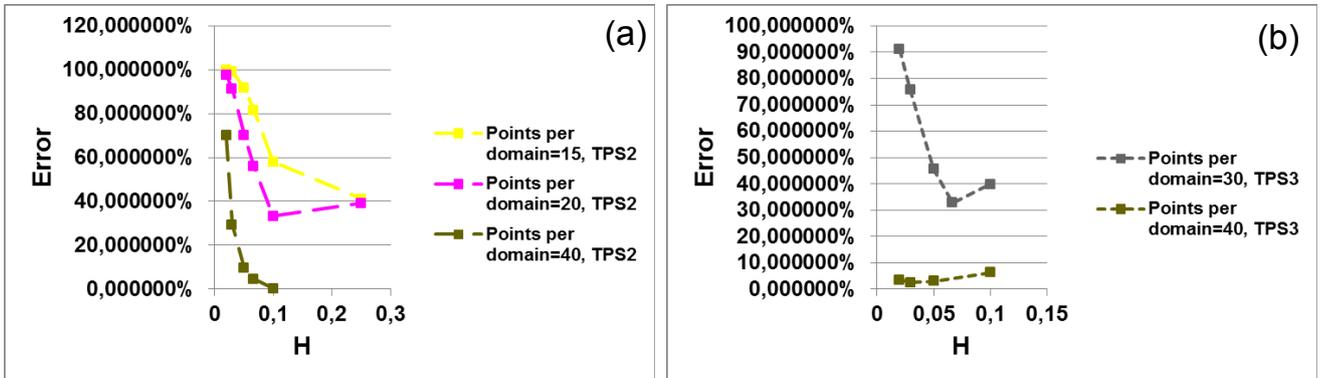


Figura 12: En esta figura se presenta el error como función de las RBFs TPS, de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución aleatoria. La figura (a) muestra la influencia de la TPS2 y la figura (b) la influencia de la TPS3.

5.1.7. Estudio del comportamiento de las RBFs TPS: distribución triangular

En la figura 13 se presenta el error como función de las RBFs TPS, de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución triangular. La figura (a) muestra la influencia de la TPS2 para $N = 15$, $N = 20$ y $N = 40$; y la figura (b) la influencia de la TPS3 para $N = 20$, $N = 30$ y $N = 40$. Se observa, como en el caso de las distribuciones rectangular y aleatoria, que las RBFs TPS2 y TPS3 presentan convergencia lenta, inversa e inestable; además los errores obtenidos son muy grandes. No se recomienda trabajar con ninguna de ellas.

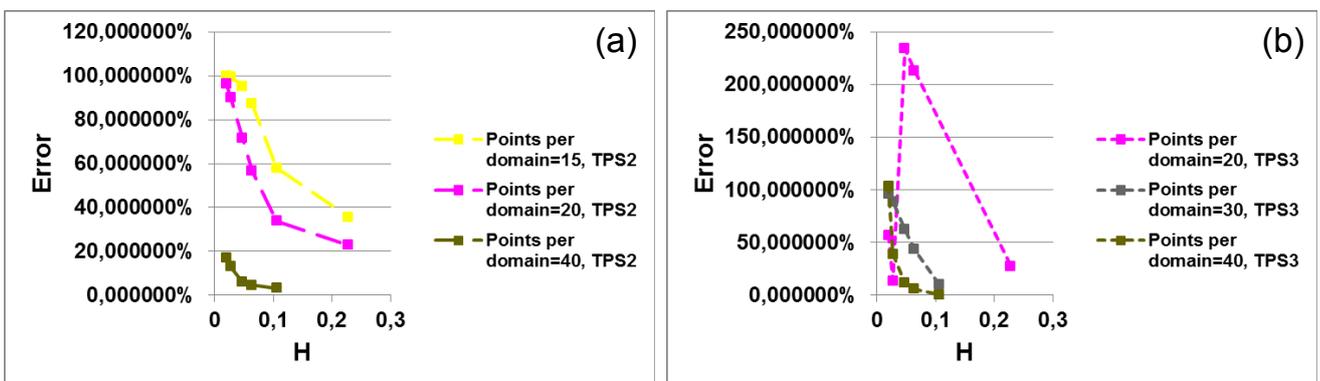


Figura 13: En esta figura se presenta el error como función de las RBFs TPS, de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución triangular. La figura (a) muestra la influencia de la TPS2 y la figura (b) la influencia de la TPS3.

5.1.8. Estudio comparativo de los métodos de colocación con funciones de base radial Global Directo (GDRBFCM) y Local Directo (LDRBFCM)

Durante el desarrollo del presente trabajo fue necesario implementar el método propuesto por E. J. Kansa [18, 19] para la solución de PDEs, método de colocación con funciones de base radial directo (DRBFN). Es de anotar que el método propuesto por Kansa es de soporte global, razón por la cual se le llama “método de colocación con funciones de base radial global directo (GDRBFCM)”. La implementación del método de colocación global se realizó con el objetivo de comparar su rendimiento con el método de colocación local; los resultados obtenidos y la comparación de los dos métodos se presentan en las figuras 14, 15 y 16.

En la figura 14 se presenta el error como función de las RBFs TPS2, TPS3 y MQ, de los puntos por dominio (N) y las cinco densidades de puntos más altas para la distribución rectangular. La figura (a) muestra los resultados obtenidos utilizando el método global y las figuras (b) y (c) los resultados obtenidos utilizando el método local. En ellas se observa que el método local es, lejos, más exacto que el método global.

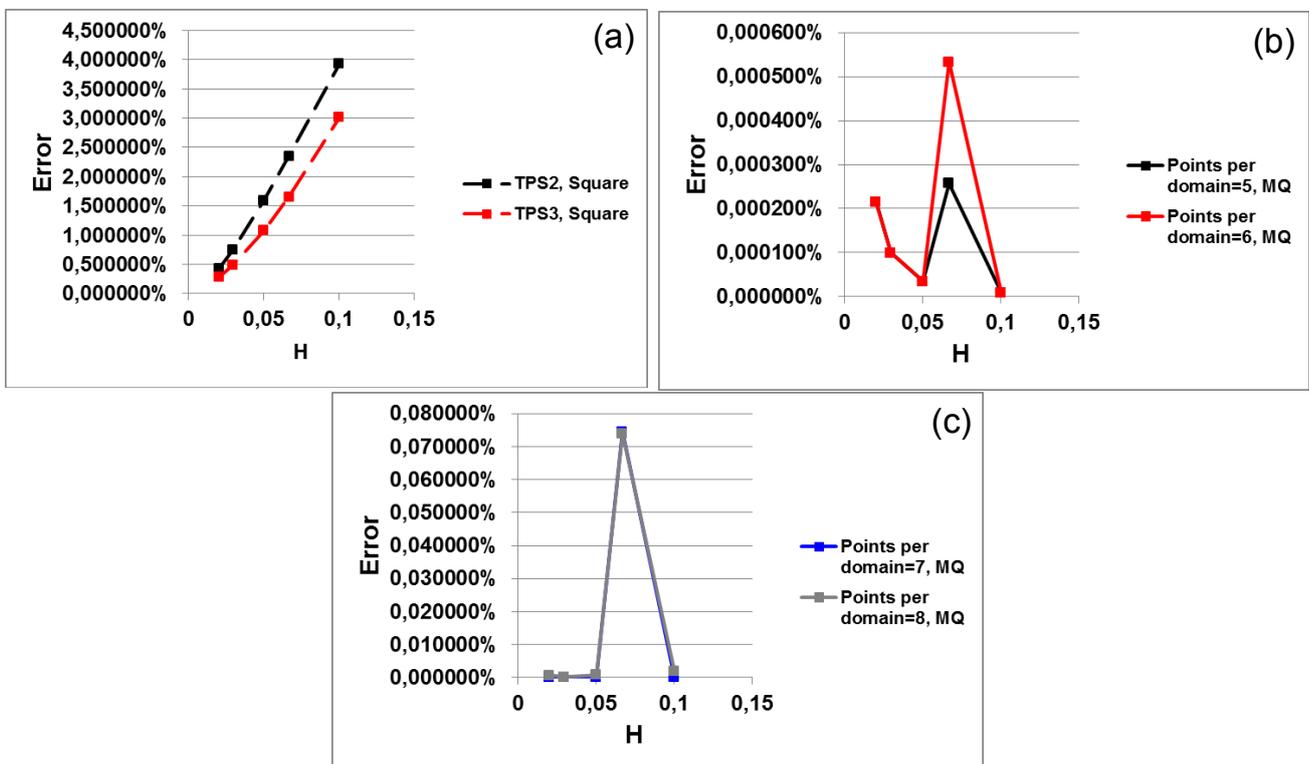


Figura 14: En esta figura se presenta el error como función de las RBFs TPS2, TPS3 y MQ, de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución rectangular. La figura (a) muestra el error de la solución al utilizar el método de colocación global y las figuras (b) y (c) al utilizar el método de colocación local.

En la figura 15 se presenta el error como función de las RBFs TPS2, TPS3 y MQ, de los puntos por dominio (N) y las cinco densidades de puntos más altas para la distribución aleatoria. La figura (a) muestra los resultados obtenidos utilizando el método global y la figura (b) los resultados obtenidos utilizando el método local. En ellas se observa que el método local es semejante, sino mejor, en exactitud que el método global.

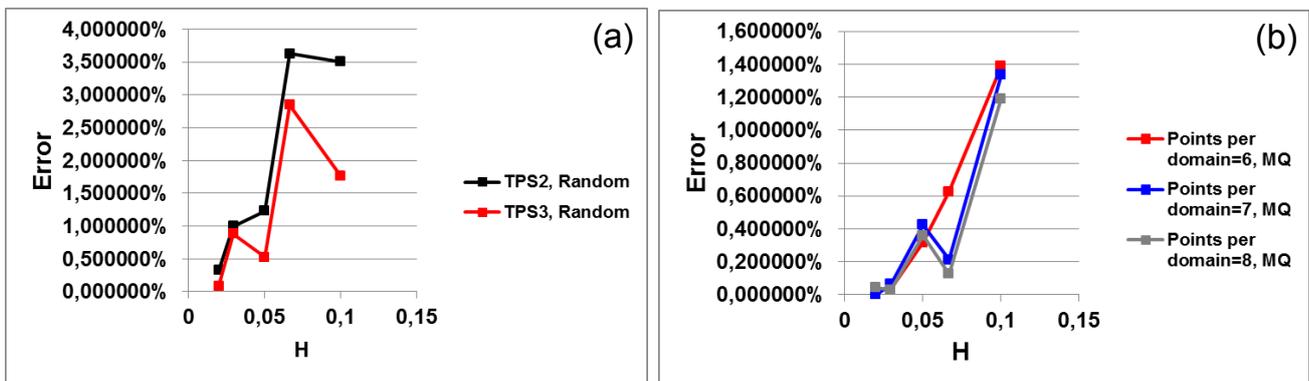


Figura 15: En esta figura se presenta el error como función de las RBFs TPS2, TPS3 y MQ, de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución aleatoria. La figura (a) muestra el error de la solución al utilizar el método de colocación global y la figura (b) al utilizar el método de colocación local.

En la figura 16 se presenta el error como función de las RBFs TPS2, TPS3 y MQ, de los puntos por dominio (N) y las cuatro densidades de puntos más altas para la distribución triangular. La figura (a) muestra los resultados obtenidos utilizando el método global y la figura (b) los resultados obtenidos utilizando el método local. En ellas se observa que el método local es semejante, o mejor para valores de $N > 6$, en exactitud que el método global.

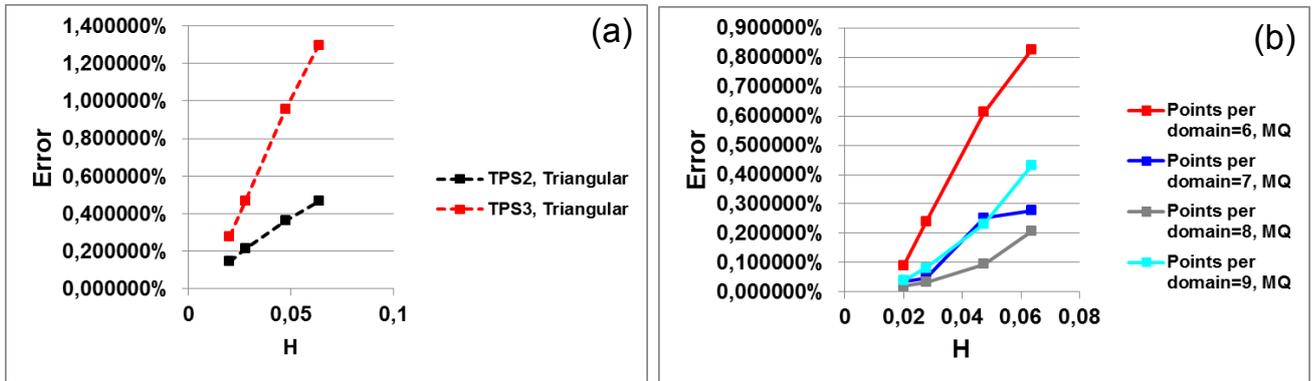


Figura 16: En esta figura se presenta el error como función de las RBFs TPS2, TPS3 y MQ, de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución triangular. La figura (a) muestra el error de la solución al utilizar el método de colocación global y la figura (b) al utilizar el método de colocación local.

5.2. Caso 2: Benchmark NAFEMS con condiciones de frontera Dirichlet, Neumann y Robin

En este caso se estudia la implementación del uso de puntos fantasmas para evaluar el comportamiento del método de colocación local cuando se debe aproximar derivadas para nodos en la frontera. Es de anotar que la RBF utilizada es la MQ, ya que la TPS2 y TPS3 han sido descartadas en el caso anterior (Problema 2D con condiciones de frontera Dirichlet). En las gráficas presentadas sólo se reportan los casos en los que ha habido convergencia de los resultados.

5.2.1. Estudio de la implementación de puntos fantasmas: distribución rectangular

En la figura 17(a) se presenta el error como función del parámetro c , de los puntos por dominio (N) y las 5 densidades de puntos más altas. Los resultados presentados son sin la implementación de puntos fantasmas. En ella se observa sólo resultados para $c = 100r_0$ con $N = 7$, $N = 9$ y $N = 10$, siendo las de mejor comportamiento $N = 9$ y $N = 10$; para los demás valores de c y N no se obtuvo convergencia de la solución.

En la figura 17(b) se presenta el error como función del parámetro c , de los puntos por dominio (N) y las 5 densidades de puntos más altas. Los resultados presentados son con la implementación de puntos fantasmas. En ella se observa que los errores para $c = 100r_0$, $c = 500r_0$, $c = 1000r_0$ con

$N = 5$ y $N = 6$ se superponen; cuando $N = 6$ no hay convergencia para la densidad de puntos más alta. Para los demás valores de N sólo se obtiene convergencia de la solución para $c = 100r_0$. En la figura 17(c) se presenta el error como función de la implementación o no de puntos fantasmas, de los puntos por dominio (N) y las 5 densidades de puntos más altas. Los resultados presentados son para $c = 100r_0$. En ella se observa que los errores mejoran en exactitud y estabilidad con la implementación de puntos fantasmas para $N = 5$, $N = 6$, y $N = 7$; para $N = 9$ se observa una convergencia inversa, conforme aumenta la densidad de puntos desmejora el error.

El siguiente es el comportamiento general: (1) Sin la implementación de puntos fantasmas los errores son aceptable para las dos densidades de puntos más altas cuando $N = 9$ y $N = 10$; (2) cuando se usan puntos fantasmas y los puntos por dominio $N = 5$ y $N = 6$ los resultados son los mismos independiente del valor del parámetro c . Si $N > 6$ sólo hay convergencia de la solución cuando $c = 100r_0$; (3) se recomienda la implementación de puntos fantasmas, el uso de las 3 densidades de puntos más altas y la utilización de $c = 100r_0$ con $N = 5$, $N = 6$ o $N = 7$.

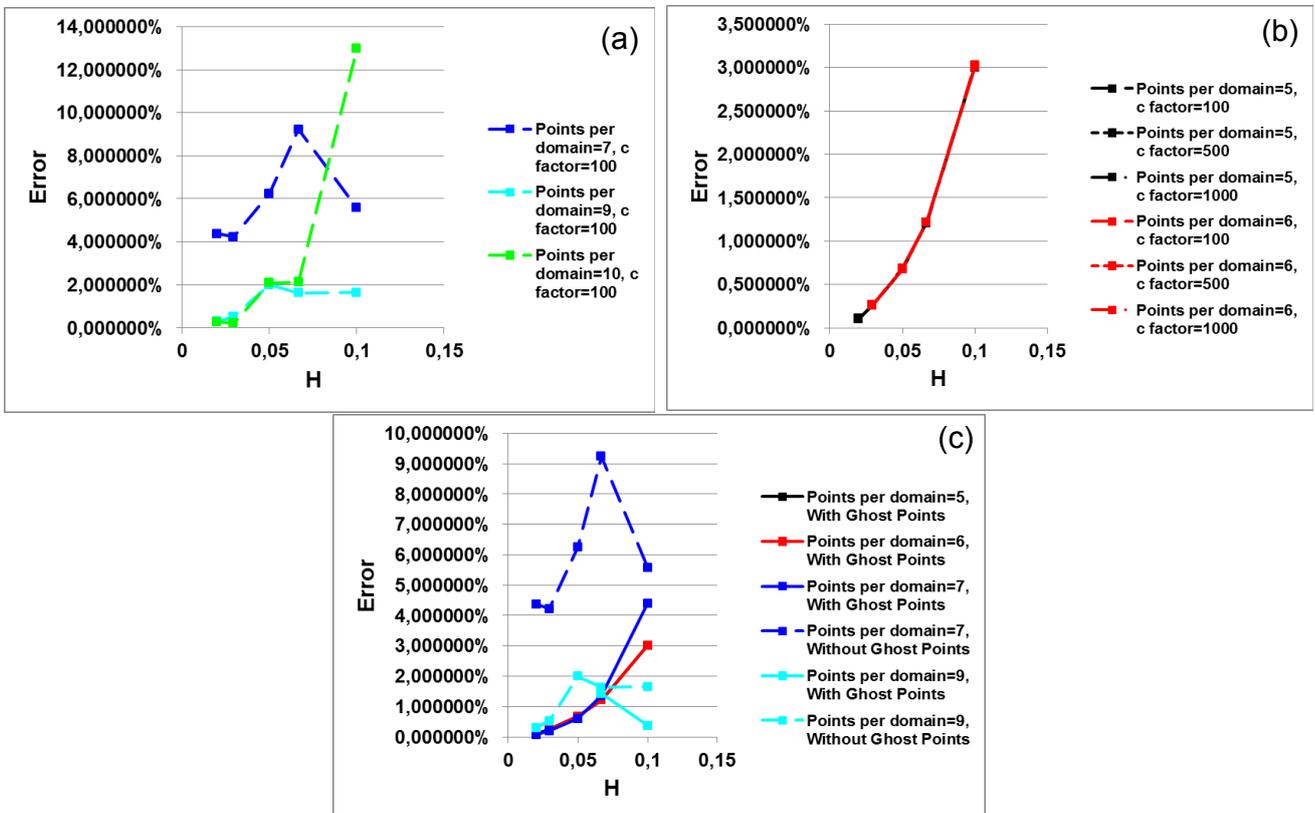


Figura 17: En esta figura se presenta el error como función del parámetro c , de los puntos por dominio (N), de la implementación o no de puntos fantasmas y la densidad de puntos (H) para la distribución rectangular. La figura (a) muestra la influencia del número de puntos para un parámetro c constante sin la implementación de puntos fantasmas; la figura (b) muestra la influencia de la implementación de puntos fantasmas y del parámetro c para $N = 5$ y $N = 6$; en la figura (c) se comparan los resultados de la implementación o no de puntos fantasmas para el parámetro $c = 100r_0$ y distintos valores de N .

5.2.2. Estudio de la implementación de puntos fantasmas: distribución aleatoria

En la figura 18(a) se presenta el error como función del parámetro c , de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H). Los resultados presentados son con la implementación de puntos fantasmas. En ella se observa que sólo hay convergencia de la solución para las 4 primeras densidades de puntos cuando $N = 5$ y para las 2 primeras densidades de puntos cuando $N = 6$. Se observa además que los resultados, tanto para $N = 5$ como para $N = 6$, son los mismos sin importar el valor del parámetro c ya que estos se superponen.

En la figura 18(b) se presenta el error como función de los puntos por dominio (N) y las 5 densidades de puntos más altas para el parámetro $c = 100r_0$. Los resultados presentados son con la implementación de puntos fantasmas. En ella se observa que el mejor comportamiento se da para los nodos por dominio $N = 7$ y $N = 8$, siendo la última menos estable. Se observa además, que cuando $N = 7$ no hay convergencia para la densidad de puntos más alta.

El siguiente es el comportamiento general: (1) Para la distribución de puntos aleatoria no hay convergencia de la solución sin la implementación de puntos fantasmas; (2) Cuando se usan los puntos por dominio $N = 5$ los resultados son los mismos independiente del valor del parámetro c , igual sucede para $N = 6$. Si $N > 6$ sólo hay convergencia de la solución cuando $c = 100r_0$; (3) se recomienda la implementación de puntos fantasmas, el uso de las tres densidades de puntos más altas y la utilización de $c = 100r_0$ con $N = 7$ o $N = 8$.

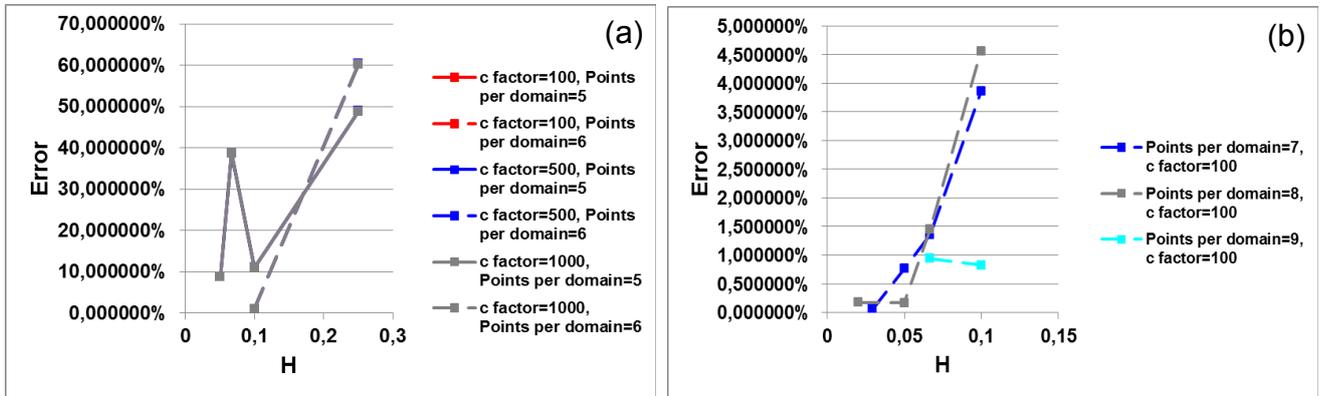


Figura 18: En esta figura se presenta el error como función del parámetro c , de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución aleatoria. Los resultados presentados son con la implementación de puntos fantasmas. La figura (a) muestra la influencia del parámetro c para $N = 5$ y $N = 6$, la figura (b) muestra la influencia del número de puntos por dominio para un parámetro c constante.

5.2.3. Estudio de la implementación de puntos fantasmas: distribución triangular

En la figura 19(a) se presenta el error como función del parámetro c , de los puntos por dominio (N) y las 5 densidades de puntos más altas. Los resultados presentados son sin la implementación de puntos fantasmas. En ella se observa sólo resultados para $c = 100r_0$ con $N = 6$ y $N = 8$, siendo la de mejor comportamiento $N = 8$; para los demás valores de c y N no se obtuvo convergencia de la solución.

En la figura 19(b) se presenta el error como función del parámetro c , de los puntos por dominio (N) y las 5 densidades de puntos más altas. Los resultados presentados son con la implementación de puntos fantasmas. En ella se observa que los errores para $c = 100r_0$, $c = 500r_0$, $c = 1000r_0$ con $N = 5$ y $N = 6$ se superponen. Se observa además que para $N = 7$, $N = 8$ y $N = 9$ se obtiene el mejor comportamiento del error habiendo convergencia de la solución sólo cuando el valor del parámetro es $c = 100r_0$.

El siguiente es el comportamiento general: (1) Sin la implementación de puntos fantasmas sólo hay convergencia de la solución para $N = 6$ y $N = 8$, siendo los resultados buenos para $N = 8$; (2) Con la implementación de puntos fantasmas los errores mejoran en exactitud y estabilidad para $c = 100r_0$ cuando $N = 7$, $N = 8$ y $N = 9$, siendo los de mejor comportamiento $N = 7$ y $N = 9$;

(3) se recomienda la implementación de puntos fantasmas, el uso de las 3 densidades de puntos más altas y la utilización de $c = 100r_0$ con $N = 7$ o $N = 9$.

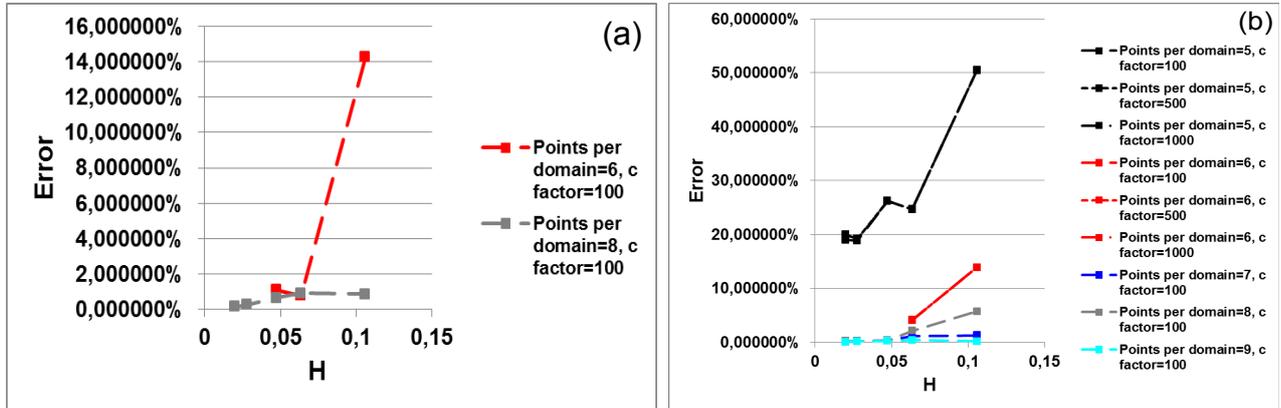


Figura 19: En esta figura se presenta el error como función del parámetro c , de los puntos por dominio (N), de la implementación o no de puntos fantasmas y la densidad de puntos (H) para la distribución triangular. La figura (a) muestra la influencia del número de puntos para un parámetro c constante sin la implementación de puntos fantasmas, la figura (b) muestra la influencia del número de puntos y del parámetro c con implementación de puntos fantasmas.

5.2.4. Estudio de la implementación de puntos fantasmas: comparación entre las distribuciones de puntos

En la figura 20(a) se presenta la comparación de la exactitud y estabilidad del error para las distribuciones rectangular ($N = 7$, $N = 9$ y $N = 10$) y triangular ($N = 8$) sin la implementación de puntos fantasmas y para las cuatro densidades de puntos más altas. En ella se observa que la distribución triangular es más estable en la solución. Para altas densidades de puntos las dos distribuciones presentan un comportamiento similar en cuanto a la exactitud de la solución para los N presentados, excepto $N = 7$.

En la figura 20(b) se muestra la comparación del error para las distribuciones rectangular ($N = 5$, $N = 6$ y $N = 7$), aleatoria ($N = 7$ y $N = 8$) y triangular ($N = 7$, $N = 8$ y $N = 9$) con la implementación de puntos fantasmas y para las cuatro densidades de puntos más altas. En ella se observa que el mejor comportamiento en estabilidad de la solución se da para la distribución rectangular. Para altas densidades de puntos las distribuciones rectangular y triangular presentan

un comportamiento similar en cuanto a la exactitud de la solución, la distribución aleatoria no presenta convergencia para la más alta densidad de puntos.

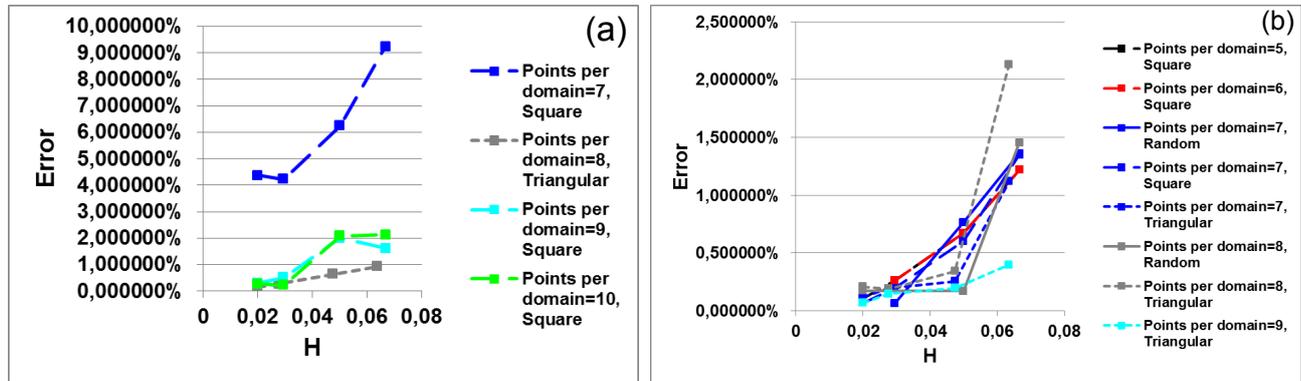


Figura 20: En esta figura se presenta el error como función de la distribución de puntos (Rectangular, aleatoria y triangular), de los puntos por dominio (N), de la densidad de puntos (H) y la implementación o no de puntos fantasmas.

5.2.5. Estudio comparativo de los métodos de colocación con funciones de base radial Global Directo (GDRBFCM) y Local Directo (LDRBFCM)

Para este problema fue necesario implementar el método propuesto por E. J. Kansa con el uso de puntos fantasmas. La implementación del método de colocación global con puntos fantasmas se realizó con el objetivo de comparar su rendimiento con el método de colocación local el cual solo presentó buenos resultados cuando se trabajó con puntos fantasmas; los resultados obtenidos y la comparación de los dos métodos se presentan en las figuras 21, 22 y 23.

En la figura 21 se presenta el error como función de las RBFs TPS2, TPS3 y MQ, de los puntos por dominio (N) y las cinco densidades de puntos más altas para la distribución rectangular. La figura (a) muestra los resultados obtenidos utilizando el método global y la figura (b) los resultados obtenidos utilizando el método local. En ellas se observa que el método local es más exacto que el método global.

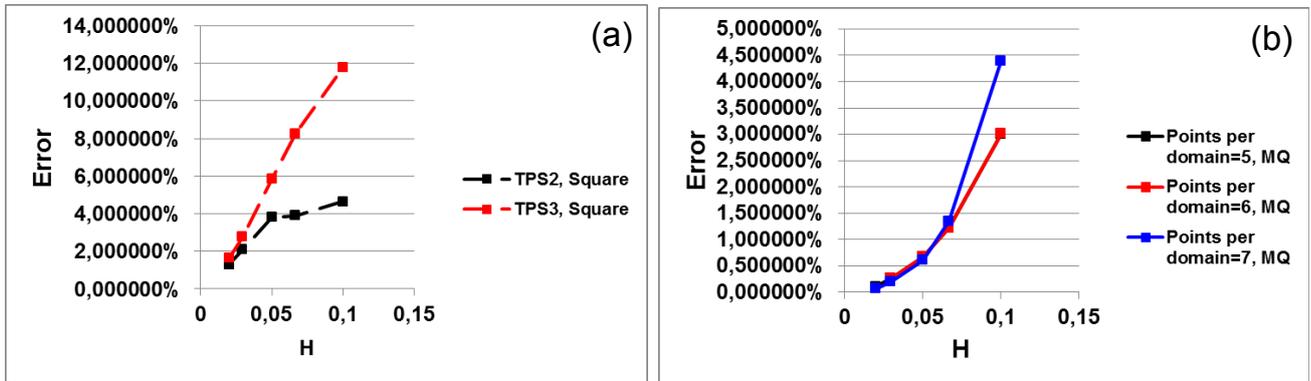


Figura 21: En esta figura se presenta el error como función de las RBFs TPS2, TPS3 y MQ, de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución rectangular. La figura (a) muestra el error de la solución al utilizar el método de colocación global y la figura (b) al utilizar el método de colocación local.

En la figura 22 se presenta el error como función de las RBFs TPS2, TPS3 y MQ, de los puntos por dominio (N) y las cinco densidades de puntos más altas para la distribución aleatoria. La figura (a) muestra los resultados obtenidos utilizando el método global y la figura (b) los resultados obtenidos utilizando el método local. En ellas se observa que el método local es más exacto que el método global.



Figura 22: En esta figura se presenta el error como función de las RBFs TPS2, TPS3 y MQ, de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución aleatoria. La figura (a) muestra el error de la solución al utilizar el método de colocación global y la figura (b) al utilizar el método de colocación local.

En la figura 23 se presenta el error como función de las RBFs TPS2, TPS3 y MQ, de los puntos por dominio (N) y las cinco densidades de puntos más altas para la distribución triangular. La

figura (a) muestra los resultados obtenidos utilizando el método global y la figura (b) los resultados obtenidos utilizando el método local. En ellas se observa que el método local es más exacto que el método global.

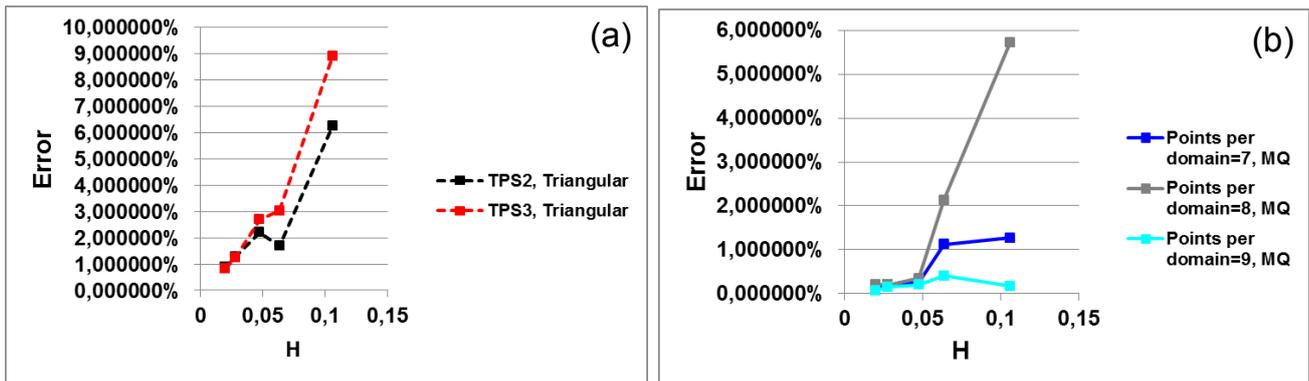


Figura 23: En esta figura se presenta el error como función de las RBFs TPS2, TPS3 y MQ, de los puntos por dominio (N) y la densidad de puntos (H) para la distribución triangular. La figura (a) muestra el error de la solución al utilizar el método de colocación global y la figura (b) al utilizar el método de colocación local.

6. Conclusiones

En este trabajo se reporta el estudio de parámetros de mejor desempeño del método de colocación local directo con funciones de base radial (LDRBFCM) evaluando el término difusivo de la ecuación de energía para dos casos: (1) Problema con condiciones de frontera Dirichlet; (2) benchmark NAFEMS con condiciones de frontera Dirichlet, Neumann y Robin. Para los dos casos planteados el rendimiento del método se evaluó en términos de exactitud, facilidad de implementación y costo computacional.

Para los dos casos tratados en este trabajo se descartó el uso de las RBFs TPS2 y TPS3 debido a que presentaron convergencia lenta, inversa e inestable; además los errores, en general, fueron muy grandes. La RBF MQ presentó, en términos generales, un buen comportamiento por cuanto todo lo que se describe a continuación será con referencia a ella.

Para el primer caso se encontró: (1) para las tres distribuciones de puntos el parámetro con mejor desempeño fue $c = 100r_0$. La solución del problema utilizando la distribución rectangular es, lejos, más exacta que la reportada cuando se utilizan métodos globales. Las distribuciones triangular y aleatoria arrojan errores comparables, o más bajos, que los logrados con métodos globales en especial para alta densidad de puntos. El mejor comportamiento en el error de la distribución rectangular se debe a la uniformidad de los puntos, y por ende a la uniformidad de r_0 , y la acomodación de esta distribución con la geometría del problema. Los puntos por dominio que presentaron mejores resultados fueron para la distribución rectangular $N = 5$, $N = 6$, $N = 7$ y $N = 8$, para la distribución triangular $N = 6$, $N = 7$, $N = 8$ y $N = 9$, y para la distribución aleatoria $N = 6$, $N = 7$ y $N = 8$; (2) por ser la geometría de este problema sencilla fue fácil la implementación con cualquiera de las tres distribuciones, para casos con geometrías más complicadas la implementación del DoE con una distribución aleatoria es lo más recomendable, y aunque los resultados del error son más altos que los que arroja la distribución rectangular, siguen siendo buenos comparados con los reportados al utilizar métodos globales; (3) en cuanto al costo computacional el método LDRBFCM es más eficiente en términos de menos requisitos de memoria y menos esfuerzos computacionales debido a la inversión, por una vez, de la matriz $N \times N$ (tamaño del dominio de influencia local, con $5 \leq N \leq 8$). El tiempo de cálculo computacional empleado por el método local es menor que el empleado por métodos globales debido a que estos

últimos son eficientes y exactos sólo en casos con pequeña cantidad de nodos, para gran cantidad de nodos se convierten en eficientes pero con problemas de mal condicionamiento.

Para el segundo caso se encontró: (1) la exactitud disminuye en comparación con el primer caso debido a la complejidad del problema, se debe aproximar derivadas para nodos en la frontera. Sin la implementación de puntos fantasmas hay convergencia de la solución, con el parámetro $c = 100r_0$, para las distribuciones rectangular con los puntos por dominio $N = 7$, $N = 9$ y $N = 10$ y la triangular con los puntos por dominio $N = 8$, para la distribución aleatoria no hay convergencia para ningún número de puntos por dominio. Con la implementación de puntos fantasmas se presentó convergencia de la solución para las tres distribuciones de puntos y el parámetro con mejor desempeño fue $c = 100r_0$. Aunque la distribución rectangular es la más estable no hay mayor diferencia del error entre las tres distribuciones siendo posible trabajar con cualquiera de ellas. Para las tres distribuciones de puntos los errores son comparables, o más bajos, que los reportados utilizando métodos globales en especial para alta densidad de puntos. Los puntos por dominio que presentaron mejores resultados fueron para la distribución rectangular $N = 5$, $N = 6$ y $N = 7$, para la distribución triangular $N = 7$, $N = 8$ y $N = 9$ y para la distribución aleatoria $N = 7$ y $N = 8$; (2) aunque la implementación del DoE es más sencilla sin la utilización de puntos fantasmas estos se hacen necesarios, con ellos se logra una convergencia más estable de la solución, un error más bajo y la posibilidad de trabajar con una distribución aleatoria para geometrías más complicadas que la utilizada en este trabajo; (3) en cuanto al costo computacional el método LDRBFCM también es más eficiente para aproximar derivadas cuando hay nodos en la frontera en términos de menos requisitos de memoria y menos esfuerzos computacionales que los métodos globales, razones ya expuestas en el caso 1.

7. Perspectivas del presente trabajo

Una extensión natural del presente trabajo es el estudio de parámetros de mejor desempeño para problemas de flujos que involucran una mayor dificultad de la ecuación diferencial parcial a resolver. Tales son el caso de: (1) La ecuación de difusión con disipación viscosa. En ella es importante ver el comportamiento del número adimensional de Brinkman (Br), el cual da cuenta de la transferencia de calor por conducción entre una superficie y un líquido viscoso; (2) la ecuación de difusión con convección. En ella es importante ver el comportamiento del número adimensional de Péclet (Pe), este da cuenta de la difusión térmica; (3) la ecuación de difusión con disipación viscosa y convección. En ella es importante ver el comportamiento de los números adimensionales de Brinkman y de Graetz (Gz).

También se puede extender el estudio realizado en este trabajo, por el tipo de ecuaciones diferenciales parciales que aparecen, a campos de la física como son: (1) La hidrodinámica, por su semejanza con los fluidos; (2) la mecánica cuántica no relativista debido a que en ella se debe resolver la ecuación de Schrödinger que describe la evolución temporal de una partícula masiva no relativista; (3) la mecánica cuántica relativista porque en ella se debe resolver la ecuación de Dirac que describe la interacción de spin de las partícula. En los dos últimos casos se encuentra en la literatura la solución de las ecuaciones diferenciales parciales utilizando diferencias finitas y métodos libres de malla.

Referencias

- [1] A. Emdadi, E. J. Kansa, N. A. Libre, M. Rahimian, and M. Shekarchi. Stable PDE solution methods for large multiquadric shape parameters. *CMES-Computer Modeling In Engineering & Sciences*, **25**(1):23–41, 2008.
- [2] Alexandre Joel Chorin. Numerical study of slightly viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **57**(4):785–796, 3 1973.
- [3] L. B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, **82**:1013–1024, December 1977.
- [4] R. A. Gingold and J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars. *Royal Astronomical Society, Monthly Notice*, **181**:375–389, November 1977.
- [5] J J Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, **68**(8):1703, 2005.
- [6] G. R Liu and G. U Gu. *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer, 2005.
- [7] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, **10**(5):307–318, 1992.
- [8] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**(2):229–256, 1994.
- [9] J. G. Wang and G. R. Liu. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **54**(N 0029-5981):1623–1648, 2002.
- [10] Wing Kam Liu and Sukky Jun. Multiple-scale reproducing kernel particle methods for large deformation problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**(7):1339–1362, 1998.

- [11] S. N. Atluri and T. Zhu. A new meshless local petrov-galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, **22**(2):117–127, 1998.
- [12] Mandar K. Chati, Subrata Mukherjee, and Yu X. Mukherjee. The boundary node method for three-dimensional linear elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**(8):1163–1184, 1999.
- [13] Y. T. Gu and G. R. Liu. A boundary point interpolation method for stress analysis of solids. *Computational Mechanics*, **28**(1):47–54, 2002.
- [14] T.J. Liszka, C.A.M. Duarte, and W.W. Tworzydło. hp-meshless cloud method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**(1â4):263–288, 1996.
- [15] I. Babuška and J. M. Melenk. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**(4):727–758, 1997.
- [16] A.I. Fedoseyev, M.J. Friedman, and E.J. Kansa. Improved multiquadric method for elliptic partial differential equations via PDE collocation on the boundary. *Computers & Mathematics with Applications*, **43**(3-5):439–455, 2002.
- [17] E. Oñate, S. Idelsohn, O. C. Zienkiewicz, and R. L. Taylor. A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**(22):3839–3866, 1996.
- [18] E.J. Kansa. Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics - I surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & Mathematics with Applications*, **19**(8â9):127–145, 1990.
- [19] E.J. Kansa. Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics - II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **19**(8â9):147–161, 1990.
- [20] G. E Fasshauer. Solving partial differential equation by collocation with radial basis functions. *In Proceeding of Chamonix*, 1997.

- [21] Nam Mai-Duy and Thanh Tran-Cong. Indirect RBFN Method with Thin Plate Splines for Numerical Solution of Differential Equations. *CMES-Computer Modeling In Engineering & Sciences*, **4**:85–102, 2003.
- [22] B. Šarler, T. Tran-Cong, and C. S. Chen. Meshfree direct and indirect local radial basis function collocation formulations for transport phenomena. *In Proceeding of Twenty-Seventh International Conference on Boundary Elements: Boundary Elements XXVII*, 2005.
- [23] G. R. Liu and Y. T. Gu. A meshfree method: meshfree weak-strong (MWS) form method, for 2-d solids. *Computational Mechanics*, **33**(1):2–14, 2003.
- [24] Rolland L. Hardy. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophysical Research*, **76**(8):1905–1915, 1971.
- [25] R.L. Hardy. Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968–1988. *Computers & Mathematics with Applications*, **19**(8–9):163–208, 1990.
- [26] J. Duchon. Interpolation of 2-variable functions following principle of thin plate flexion. *Revue Francaise D Automatique Informatique Recherche Operationnelle*, **10**(12):5–12, 1976.
- [27] G. Casciola, D. Lazzaro, L.B. Montefusco, and S. Morigi. Fast surface reconstruction and hole filling using positive definite radial basis functions. *Numerical Algorithms*, **39**(1-3):289–305, 2005.
- [28] G. Casciola, D. Lazzaro, L.B. Montefusco, and S. Morigi. Shape preserving surface reconstruction using locally anisotropic radial basis function interpolants. *Computers & Mathematics with Applications*, **51**(8):1185–1198, 2006.
- [29] Jens D. Andersen. Image decomposition by radial basis functions. In Josef Bigun and Tomas Gustavsson, editors, *Image Analysis*, volume **2749** of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 749–754. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [30] R. Franke. Scattered data interpolation - tests of some methods. *Mathematics of Computation*, **38**(157):181–200, 1982.

- [31] Charles A. Micchelli. Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constructive Approximation*, **2**(1):11–22, 1986.
- [32] M.J. D. Powell. Advances in numerical analysis, volume II, chapter the theory of radial basis function approximation in 1990. *Oxford Science Publications*, 1992.
- [33] W. R. Madych and S. A. Nelson. Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions. *Mathematics of Computation*, **55**:211–230, 1990.
- [34] Robert Schaback and Z. Wu. Operators on radial functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **73**(1â2):257–270, 1996.
- [35] Robert Schaback. Improved error bounds for scattered data interpolation by radial basis functions. *Mathematics of Computation*, **68**(225):201–216, 1999.
- [36] Robert Schaback. A unified theory of radial basis functions: Native hilbert spaces for radial basis functions {II}. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **121**(1â2):165–177, 2000.
- [37] Robert Schaback and H. Wendland. Inverse and saturation theorems for radial basis function interpolation. *Mathematics of Computation*, **71**(N 0025-5718):669–681, 2002.
- [38] Robert Schaback. Multivariate interpolation by polynomials and radial basis functions. *Constructive Approximation*, **21**(3):293–317, 2005.
- [39] M. D. Buhmann. Radial basis functions. *Acta Numerica*, **9**:1–38, 2000.
- [40] Bengt Fornberg and Natasha Flyer. Accuracy of radial basis function interpolation and derivative approximations on 1-d infinite grids. *Advances in Computational Mathematics*, **23**(1-2):5–20, 2005.
- [41] C. Franke and R. Schaback. Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions. *Applied Mathematics and Computation*, **93**(1):73–82, 1998.
- [42] H. Wendland. Meshless Galerkin methods using radial basis functions. *Mathematics of Computation*, **68**(228):1521–1531, 1999.

- [43] Robert Schaback. Approximation theory VIII, chapter Multivariate interpolation and approximation by translates of a basis function. *College Station, TX.*, 1995.
- [44] Robert Schaback. Surface fitting and multiresolution methods, chapter On the efficiency of interpolation by radial basis functions. *Vanderbilt University Press*, pages 309–318, 1997.
- [45] J.G. Wang and G.R. Liu. On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-d meshless methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**(23â24):2611 – 2630, 2002.
- [46] Gregory E. Fasshauer and Jack G. Zhang. On choosing optimal shape parameters for rbf approximation. *Numerical Algorithms*, **45**(1-4):345–368, 2007.
- [47] H. Wendland. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, **4**(1):389–396, 1995.
- [48] H. Wendland. Error estimates for interpolation by compactly supported radial basis functions of minimal degree. *Journal of Approximation Theory*, **93**(2):258–272, 1998.
- [49] H. Wendland. On the smoothness of positive definite and radial functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **101**(1-2):177–188, 1999.
- [50] X. Zhang, K. Z. Song, M. W. Lu, and X. Liu. Meshless methods based on collocation with radial basis functions. *Computational Mechanics*, **26**(4):333–343, 2000.
- [51] G. E. Fasshauer. Solving differential equations with radial basis functions: multilevel methods and smoothing. *Advances In Computational Mathematics*, **11**(2-3):139–159, 1999.
- [52] H. Power and V. Barraco. A comparison analysis between unsymmetric and symmetric radial basis function collocation methods for the numerical solution of partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **43**(3-5):551–583, 2002.
- [53] Nam Mai-Duy and Thanh Tran-Cong. Approximation of function and its derivatives using radial basis function networks. *Applied Mathematical Modelling*, **27**:197–220, 2003.

- [54] N. Mai-Duy. Solving high order ordinary differential equations with radial basis function networks. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, **62**(N 0029-5981):824–852, 2005.
- [55] A. La Rocca and H. Power. A double boundary collocation hermitian approach for the solution of steady state convection–diffusion problems. *Computers & Mathematics with Applications*, **55**(9):1950–1960, 2008.
- [56] E.J. Kansa. A strictly conservative spatial approximation scheme for the governing engineering and physics equations over irregular regions and inhomogeneously scattered nodes. *Computers & Mathematics with Applications*, **24**(5&6):169–190, 1992.
- [57] M. R. Dubal. Domain decomposition and local refinement for multiquadric approximations. i: Second-order equations in one-dimension. *Journal of Applied Science & computation 1*, **1**:146–171, 1994.
- [58] A.S.M. Wong, Y.C. Hon, T.S. Li, S.L. Chung, and E.J. Kansa. Multizone decomposition for simulation of time-dependent problems using the multiquadric scheme. *Computers & Mathematics with Applications*, **37**(8):23–43, 1999.
- [59] E. J. Kansa and Y. C. Hon. Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions: Applications to elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **39**(7-8):123–137, 2000.
- [60] X. Zhou, Y.C. Hon, and Jichun Li. Overlapping domain decomposition method by radial basis functions. *Applied Numerical Mathematics*, **44**(1&2):241–255, 2003.
- [61] W. Chen and M. Tanaka. New insights in boundary-only and domain-type rbf methods. *International Journal Of Nonlinear Sciences And Numerical Simulation*, **1**(3):145–51, 2000.
- [62] B. Šarler and R. Vertnik. Mesh-free simulation of transport phenomena in continuous castings of aluminium alloys. *Solidification And Gravity IV*, **508**:497–502, 2006.

- [63] B. Šarler and R. Vertnik. Meshfree explicit local radial basis function collocation method for diffusion problems. *Computers & Mathematics with Applications*, **51**(N 0898-1221):1269–1282, 2006.
- [64] E. Divo and A. J. Kassab. A meshless method for conjugate heat transfer problems. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, **29**(N 0955-7997):136–149, 2005.
- [65] E. Divo and A. J. Kassab. Iterative domain decomposition meshless method modeling of incompressible viscous flows and conjugate heat transfer. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, **30**(N 0955-7997):465–478, 2006.
- [66] E. Divo and A. J. Kassab. An efficient localized radial basis function meshless method for fluid flow and conjugate heat transfer. *Journal Of Heat Transfer-Transactions Of The Asme*, **129**(N 0022-1481):124–136, 2007.
- [67] C. S Chen Guangming Yao, Bozidar Šarler. A comparison of three explicit local meshless methods using radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **35**:600–609, 2011.
- [68] G. Yao, Siraj-Ul-Islam, and B. Šarler. Assessment of global and local meshless methods based on collocation with radial basis functions for parabolic partial differential equations in three dimensions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **36**(11):1640–1648, 2012.
- [69] Siraj ul Islam, R. Vertnik, and B. Šarler. Local radial basis function collocation method along with explicit time stepping for hyperbolic partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, **67**(0):136–151, 2013.
- [70] D. Stevens, H. Power, C.Y. Meng, D. Howard, and K.A. Cliffe. An alternative local collocation strategy for high-convergence meshless pde solutions, using radial basis functions. *Journal of Computational Physics*, **254**:52–75, 2013.
- [71] C.-M. Fan, C.-S. Chien, H.-F. Chan, and C.-L. Chiu. The local RBF collocation method for solving the double-diffusive natural convection in fluid-saturated porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **57**(2):500–503, 2013.

- [72] G. Kosec, M. Depolli, A. Rashkovska, and R. Trobec. Super linear speedup in a local parallel meshless solution of thermo-fluid problems. *Computers and Structures*, **133**:30–38, 2014.