

**Identificación y Control Activo de Vibraciones Mecánicas:
Análisis de un Modelo Reducido de Máquina**

Fabio Antonio Pineda Botero

Universidad EAFIT

Escuela de Ingenierías

Maestría de Matemáticas Aplicadas

Medellín, Octubre de 2005

**Identificación y Control Activo de Vibraciones Mecánicas:
Análisis de un Modelo Reducido de Máquina**

Por:
Fabio Antonio Pineda Botero

Trabajo de grado presentado
como requisito parcial para optar al título de
Magister en Matemáticas Aplicadas

Director:
Dr. Carlos Mario Vélez Sánchez

Universidad EAFIT
Escuela de Ingenierías
Maestría de Matemáticas Aplicadas
Medellín, Octubre de 2005

Página de Aceptación

Presidente de Jurado

Jurado

Jurado

Agradecimientos

A la Universidad EAFIT por el apoyo brindado para la realización de este proyecto.

Resumen

En este proyecto se estudian algunos de los problemas que surgen del modelado matemático, identificación y control de sistemas vibratorios aleatorios.

En la primera parte se describe el modelo reducido de una máquina planteado como un sistema de dos masas móviles y dos grados de libertad. Con base en este modelo se elabora en *SimMechanics* (Matlab) un diagrama de simulación que permita estudiar el comportamiento del modelo reducido ante perturbaciones externas conocidas, como una alternativa a la construcción de un arreglo experimental real. Esto permite disponer de múltiples posibilidades de simulación sin incurrir en los costos y problemas asociados a un modelo físico de laboratorio.

Posteriormente, el modelo matemático construido en *SimMechanics* se utiliza con dos propósitos: cálculo de los parámetros internos del sistema a partir de “mediciones” de las posiciones de las masas del modelo e identificación de modelo de velocidad de la máquina. El primero de los propósitos cae dentro de lo que se considera campo de trabajo de la mecánica experimental.

Por último, con base en el modelo reducido montado en *SimMechanics* se proponen algoritmos de control de vibraciones para evaluar su posibilidad de aplicación a sistemas reales. En el proyecto se muestran las ventajas del empleo de modelos de simulación previos a la construcción de modelos experimentales de laboratorio.

Como resultados específicos del proyecto se lograron los siguientes: una muy buena identificación para propósitos de cálculo de parámetros del sistema y para la aplicación al control, buenos resultados en la aplicación del control, y excelentes resultados de la utilización de la herramienta matemática denominada *SimMechanics* de Matlab.

Índice general

Resumen	i
Índice de figuras	vii
Índice de tablas	xi
1. Introducción	1
1.1. Generalidades	1
1.2. Descripción y formulación del problema	3
1.3. Objetivos	5
1.3.1. Objetivo general	5
1.3.2. Objetivos específicos	5
1.4. Hipótesis o preguntas de investigación	5
1.5. Método de investigación	6
1.6. Contribuciones	6
1.7. Organización del trabajo	8
1.8. Convenciones	8
2. Modelado de sistemas vibratorios	9
2.1. Introducción	9
2.2. Modelado de sistemas de un grado de libertad	11
2.2.1. Vibración no forzada	11
2.2.2. Vibración forzada	15
2.3. Funciones de transferencia para sistemas de un grado de libertad	23
2.4. Respuesta en frecuencia para sistemas de un grado de libertad	24
2.5. Modelo en el espacio de estados para sistemas de un grado de libertad	26
2.6. Modelado de sistemas de dos grados de libertad	27
2.7. Funciones de transferencia para sistemas de dos grados de libertad	29
2.8. Modelado de sistemas de múltiples grados de libertad	29
2.9. Funciones de transferencia para sistemas de múltiples grados de libertad	30
2.10. Resumen	31

3. Identificación paramétrica	33
3.1. Introducción	33
3.2. Estructura de los modelos lineales discretos	34
3.2.1. Modelos en que $H(q^{-1}) = 1$	35
3.2.2. Modelos en que $H(q^{-1}) \neq 1$	35
3.3. Método de estimación por mínimos cuadrados (LS)	39
3.4. Método del Subespacio	42
3.4.1. Definición del espacio de estados para el problema de identificación	42
3.4.2. Definición de la ecuación de datos	43
3.4.3. Análisis de las medidas para la respuesta al escalón (step)	45
3.4.4. Deducción del orden n del sistema y sus respectivas matrices	45
3.5. Identificación paramétrica de sistemas vibratorios	47
3.6. Resumen	48
4. Modelado de máquinas sometidas a vibración	49
4.1. Introducción	49
4.2. Descripción del modelo básico de una máquina simplemente apoyada	50
4.3. Descripción de los módulos de control activo	53
4.4. Modelo reducido de una máquina. Justificación	56
4.5. Resumen	57
5. Modelo reducido de una máquina	59
5.1. Introducción	59
5.2. Aspectos a considerar en la construcción del modelo reducido en <i>SimMechanics</i> de Matlab	60
5.3. Aspectos a considerar en la validación del modelo	64
5.4. Construcción del modelo en Matlab	66
5.5. Resultados de la simulación	68
5.6. Resumen	71
6. Identificación de los parámetros del modelo reducido	77
6.1. Introducción	77
6.2. Función de transferencia correspondiente a la diferencia de posiciones de dos masas.	79
6.2.1. Función de transferencia para la posición de la máquina	80
6.2.2. Función de transferencia para la posición de la masa intermedia	81
6.2.3. Función de transferencia para la diferencia de posiciones de la máquina y de la masa intermedia	82
6.3. Algoritmo para el cálculo de parámetros equivalentes en un sistema de dos masas	82
6.4. Procedimiento de identificación utilizado en Matlab	84
6.4.1. Señales de excitación	88
6.4.2. Selección de modelos identificados	88
6.5. Análisis de modelos identificados	89
6.5.1. Análisis de modelos ARX441	89
6.5.2. Análisis de modelos N4S4	92
6.5.3. Comparación de los resultados obtenidos en los procedimientos de identificación	100
6.6. Resumen	102

7. Control activo de vibraciones con base en un modelo reducido	103
7.1. Introducción	103
7.2. Modelo reducido de una máquina, con acción de control	104
7.3. Identificación de los modelos de la velocidad	105
7.4. Control proporcional	105
7.4.1. Cálculo de la constante proporcional	105
7.4.2. Resultados obtenidos	109
7.5. Control por ubicación de polos	109
7.5.1. Cálculo de las constantes de ganancia de realimentación	113
7.5.2. Resultados obtenidos	113
7.6. Resumen	118
8. Conclusiones generales	119
Anexo A. Lista de símbolos utilizados	121
Bibliografía.	125

Índice de figuras

1.1. Direcciones principales de fuerzas (normales y cortantes) y momentos (flectores y torsores) en la sección transversal de la estructura de soporte de una máquina.	4
2.1. Diagrama esquemático general para sistemas de un grado de libertad.	12
2.2. Factor de amplificación β	18
2.3. Diagramas de cuerpo libre en el caso de vibración forzada para sistemas de un grado de libertad	19
2.4. Transmisibilidad	20
2.5. Diagrama esquemático general para sistemas de dos grados de libertad	27
3.1. Diagrama de bloques de planta con perturbaciones genéricas	43
4.1. Modelo de máquina con seis grados de libertad. Tres grados de libertad para los desplazamientos longitudinales de la máquina y tres grados de libertad para las rotaciones alrededor de los ejes de referencia.	51
4.2. Modos de vibración controlados pasivamente en una máquina simplemente apoyada	52
4.3. Modos de vibración controlados activamente en una máquina simplemente apoyada	53
4.4. Diagrama esquemático que muestra la utilización de diferentes configuraciones típicas para el sistema de control digital de una máquina simplemente apoyada.	54
4.5. Arquitectura básica de un módulo típico de control activo de vibraciones	55
4.6. Transmisibilidad vs frecuencia para etapas de control activo y pasivo	56
5.1. Esquema básico del modelo reducido de una máquina, sin acción de control	61
5.2. Modelo reducido de una máquina simplemente apoyada, de acuerdo con su representación en Matlab. En la parte inferior aparece el mismo modelo “enmascarado” para efectos de simulación.	63
5.3. Propiedades de masa correspondientes a la máquina (izquierda) y a la masa intermedia no amortiguada o disipadora de energía (derecha). Se observan los espacios correspondientes a las masas e inercias, además de los puertos habilitados para la ubicación de sensores y actuadores.	67
5.4. Propiedades de las zonas amortiguada (entre máquina y masa intermedia, izquierda) y no amortiguada (entre masa intermedia y tierra, derecha)	67

5.5. Propiedades de los pares de conexión prismáticos entre la máquina y tierra (izquierda), y entre la masa intermedia y tierra (derecha).	68
5.6. Propiedades de una de las señales de perturbación sobre la máquina. En este caso se trata de una señal del tipo PRBS (Pseudo Random Binary Signal) persistentemente excitada.	69
5.7. Propiedades del actuador de fuerza utilizado para aplicar la perturbación.	69
5.8. Propiedades de inicio de movimiento para las masas del sistema.	70
5.9. Propiedades de los sensores para medición de las variables (posición, velocidad, aceleración, fuerza, etc) del sistema.	70
5.10. Posición, velocidad y aceleración de la máquina y de la masa intermedia ante una señal de perturbación constante $K = 0$	72
5.11. Posición, velocidad y aceleración de la máquina y de la masa intermedia ante una señal de perturbación constante $K = 1000$	73
5.12. Posición, velocidad y aceleración de la máquina y de la masa intermedia ante una señal de perturbación del tipo <i>PRBS</i> persistentemente excitada y una constante de amplificación $K = 1000$	74
5.13. Posición de la máquina ante diferentes señales de perturbación. Se aplican las siguientes señales: a) Señal constante $K = 1000$; b) Señal tipo rampa, $K = 1000$; c) Señal escalón, $K = 1000$; d) Señal de tipo senoidal, $K = 1000$, frecuencia $f = 10\text{rad/s}$; e) Señal del tipo ruido blanco de banda limitada, $K = 1000$; f) Señal del tipo <i>PRBS</i> persistentemente excitada, $k = 1000$	75
6.1. Modelo reducido de una máquina vista como un arreglo simplificado de dos masas, sometido a la acción de una perturbación u	79
6.2. Modelo reducido utilizado en Matlab para la identificación paramétrica con perturbación simultánea de las dos masas del sistema.	85
6.3. Datos correspondientes a la simulación del sistema, almacenados como vectores de datos en el espacio de trabajo de Matlab.	86
6.4. Ventana inicial de la interfase gráfica de usuario (<i>GUI</i>)	87
6.5. Representación espectral de los datos	87
6.6. Ventana denominada “tablero de modelos”, desde la cual pueden seleccionarse los diferentes modelos identificados.	87
6.7. Resultados obtenidos para la identificación del modelo ARX441, para una fuerza perturbadora de 5500N. De Arriba a abajo e izquierda a derecha: a) Análisis de residuos, incluyendo el intervalo de confianza del 99%. En este caso, la autocorrelación de los residuos indica que el sistema no es afectado por señales de ruido externas al sistema. b) Superposición del modelo con los datos de validación. Se observa que las curvas de respuesta correspondientes a las salidas medida y simulada prácticamente se superponen, lo cual es un indicio del buen ajuste del modelo. c) Respuesta al escalón d) Gráfica de polos y ceros dentro del círculo unitario.	93
6.8. Resultados obtenidos para la identificación del modelo ARX441, para una fuerza perturbadora de 5500N. De Arriba a abajo e izquierda a derecha: a) Análisis de residuos, incluyendo el intervalo de confianza del 99%. b) Superposición del modelo con los datos de validación. Se observa que las curvas de respuesta correspondientes a las salidas medida y simulada prácticamente se superponen. c) Respuesta al escalón. d) Gráfica de polos y ceros dentro del círculo unitario.	101

7.1. Modelo reducido de una máquina vista como un arreglo simplificado de dos masas, con acción de control	104
7.2. Diagrama del modelo reducido utilizado en Matlab para efectos de identificación.	106
7.3. Resultados de la identificación de los modelos para la velocidad de la máquina.	107
7.4. Diagrama utilizado en Matlab para el diseño del controlador proporcional en el caso del modelo reducido de una máquina.	110
7.5. Resultados de la introducción del control proporcional en el modelo reducido	111
7.6. Resultados de la identificación simultánea de los modelos para la posición y velocidad de la máquina.	114
7.7. Diagrama utilizado en Matlab para el diseño del controlador por ubicación de polos en el caso del modelo reducido de un máquina.	116
7.8. Resultados de la introducción del control por ubicación de polos en el modelo reducido.	117

Índice de tablas

2.1. Símbolos utilizados en el modelado matemático de sistemas vibratorios	10
3.1. Diferentes tipos de modelos utilizados en la identificación paramétrica.	36
4.1. Símbolos utilizados en el modelado de máquinas sometidas a vibración	51
5.1. Descripción de las variables y los parámetros utilizados en la construcción del modelo reducido de una máquina, y su denominación en Matlab.	64
5.2. Definición de los nombres asignados a cada uno de los bloques del modelo reducido de una máquina en el diagrama de simulación de Matlab.	65
5.3. Parámetros utilizados en el modelo reducido de una máquina simplemente apoyada.	66
6.1. Descripción de las variables y los parámetros utilizados en la identificación paramétrica del modelo reducido de una máquina, y su denominación en Matlab.	78
6.2. Valores calculados de los parámetros internos del modelo reducido de una máquina con base en los modelos identificados ARX441.	90
6.3. Valores calculados de los parámetros internos del modelo reducido de una máquina con base en el modelo identificado N4S4.	94
6.4. Comparación de los datos identificados con los datos “reales” incluidos en el modelo reducido.	100
7.1. Funciones de transferencia para los modelos de velocidad de la máquina con base en los modelos identificados N4S5, N4S4 y ARX441.	107
7.2. Funciones de transferencia para los modelos de velocidad de la máquina con base en los modelos identificados N4S5, N4S4 y ARX441.	109

Capítulo 1

Introducción

1.1. Generalidades

En la gran mayoría de las máquinas, equipos y construcciones civiles, exceptuando las muy pequeñas, se pueden presentar serios problemas estructurales o de funcionamiento debido a las cargas dinámicas generadas por vibraciones. Por esta razón resulta importante evitar la propagación de las mismas mediante su absorción o eliminación. En algunos casos es necesario aislar una estructura de una fuente vibratoria¹, en otros casos se requiere aislar un equipo de una base vibratoria², mientras que en otros el aislamiento se requiere para obtener comodidad, estabilidad y seguridad³. Sin embargo, desde un punto de vista teórico los tres problemas se consideran equivalentes.

Cuando una estructura está bajo la acción de alguna forma de movimiento se pueden emplear muchos procedimientos para tratar de controlar y mantener la vibración dentro de ciertos límites. El método tradicional para intentar aislar la transmisión de vibración producida por una fuente vibratoria instalada sobre un soporte estructural flexible⁴ es separar la máquina de la estructura por medio de soportes elásticos disipadores. Este tipo de control de vibraciones, que no requiere de una fuente de energía externa para su funcionamiento, se denomina *control totalmente pasivo* [31] e involucra la reducción de las vibraciones por medio de resortes, materiales elásticos y amortiguadores que se adicionan a la estructura desde la etapa de diseño. La principal desventaja de este tipo de aislamiento está en la limitación de eliminar sólo las vibraciones en el rango de frecuencias para el cual fue calculado (en general altas frecuencias), por lo que puede resultar ineficiente o inestable si el rango de operación del sistema cambia. Adicionalmente, los aisladores pasivos tienen dos restricciones negativas. La primera de ellas es que el aislante seleccionado debe soportar la carga estática de la máquina. La segunda es que el soporte debe tener una rigidez lo suficientemente baja para que la frecuencia de resonancia de la máquina montada sobre los soportes aislantes sea considerablemente menor que la frecuencia de operación de la máquina [31].

¹ Como es en general el caso de las máquinas utilizadas en la industria.

² Como es el caso de las mesas utilizadas para la calibración de instrumentos o para la fabricación de equipos electrónicos de alta precisión.

³ Como es el caso de las suspensiones de los vehículos automotores.

⁴ Como es el caso de una máquina rotativa.

Una de las formas de abordar el problema de aislamiento de las vibraciones sin el problema de las restricciones mencionadas, es reemplazar el sistema de control pasivo por un sistema denominado de *control totalmente activo*. En este tipo de control las vibraciones se atenúan por la aplicación de una fuerza externa (acción de control) que se calcula a partir de la determinación de algún tipo de variable, sin disipar energía por medio de soportes elásticos.

Una opción intermedia (preferida) es la de utilizar un sistema de *control activo* en serie o en paralelo a los soportes convencionales de control de vibración pasivos [10]. Las ventajas de esto último son obvias ya que el sistema resultante es mucho más confiable: si el sistema de control de vibración activo falla, el sistema de soporte pasivo continúa en funcionamiento. Una desventaja, sin embargo, es que el sistema de control activo puede inducir vibraciones no deseadas o generar fuerzas o momentos que se traducen en incremento de vibraciones en la estructura de soporte.

En general, el *control activo* ([1], [2], [10], [17], [26]) involucra el uso de una fuente de energía externa, sensores, actuadores y algún tipo de sistema de control electrónico digital con el objeto específico de reducir o mantener los niveles de vibración dentro de unos márgenes establecidos previamente.

En muchos aspectos el control activo de vibraciones es similar al control activo de ruido, problema que ha sido investigado desde mediados de los años 1930 ([24], [25]). Los sistemas de control activo presentan muchas ventajas si se comparan con los sistemas de control pasivo, entre las que pueden destacarse:

1. Se adaptan fácilmente a diferentes condiciones de trabajo, sin necesidad de modificar la estructura del sistema.
2. Suministran o disipan energía cuando se requiere.
3. Atenúan vibraciones en un amplio rango de frecuencias.
4. Toleran diferentes tipos de perturbaciones.

En principio se asume que una máquina debe aislarse de su estructura de soporte si las vibraciones que transmite pueden causar molestia sobre las personas o fatiga de los componentes. Son muchísimos los campos de aplicación para el control activo. Pueden mencionarse principalmente los sistemas diseñados para el control de movimiento en edificaciones o puentes sometidos a temblores de tierra y grandes cargas eólicas, el control de vibraciones en estructuras que soportan maquinaria rotativa y el control de vibraciones de instrumentos delicados montados sobre estructuras en movimiento.

Para concretar el aislamiento activo se debe diseñar un controlador que genere una señal que permita al actuador eliminar o reducir al mínimo las vibraciones, las cuales se consideran perturbaciones. El controlador deberá trabajar en lazo cerrado para adecuar su señal a las necesidades del sistema. Esto es equivalente a regular un sistema que está sometido a perturbaciones que no se pueden medir directamente. De esta manera, el sistema de aislamiento activo puede ser visto como un sistema que continuamente está recalculando su capacidad de disipación según la perturbación dominante.

De acuerdo con la literatura [10], el aislamiento de maquinaria sobre estructuras de soporte por medio de control activo es más efectivo en el rango de bajas frecuencias, es decir, inferiores a los 200 Hz. A estas frecuencias el control activo puede mejorar sustancialmente la atenuación de vibraciones que se puede lograr con la utilización de un sistema completamente pasivo. Para problemas de vibración caracterizados por

frecuencias superiores a los 200 Hz los sistemas de aislamiento pasivo convencionales son aceptables, por lo cual se evita la inclusión de sistemas de control activo en estos casos.

Por lo general la vibración producida por maquinaria ocurre a lo largo de más de un eje [31]. Así por ejemplo, una máquina rotativa puede generar fuerzas lineales y momentos (flectores y torsores) que se transmiten a los soportes aislantes de vibración. Sin embargo, en la mayoría de los casos los aislantes de vibración se diseñan para atenuar vibraciones a lo largo de una dirección dominante.

Los *amortiguadores dinámicos de vibración* [10], son en principio masas secundarias que se sujetan a una estructura por medio de resortes y amortiguadores. En estos sistemas de control activo, la frecuencia natural del sistema amortiguador se ajusta de tal manera que coincida con la frecuencia de las vibraciones no deseadas en la estructura original. Esto resulta en una subcomponente de la estructura que adiciona una gran impedancia de entrada en la estructura primaria, absorbiendo o amortiguando la energía inercial del sistema.

Los sistemas de amortiguación de vibraciones dinámicos activos se caracterizan por una masa secundaria sujeta a un sistema vibratorio y conectada directamente a un actuador y a un sistema de control electrónico. Se dice que el sistema de control es *adaptativo* ([2], [17], [26]) para hacer referencia a la posibilidad del sistema amortiguador de cambiar sus propiedades internas para ajustarse a los cambios en el ambiente vibratorio.

Las principales ventajas del uso de sistemas de control activo son la movilidad, la adaptabilidad y la posibilidad de incluirse en la estructura después de la etapa de diseño y construcción. Esto permite que el sistema amortiguador sea montado en forma independiente sin afectar el montaje entre la estructura y la fundación de soporte. Otras ventajas involucran estabilidad, bajo costo, mínimo consumo de energía y relativa facilidad de instalación.

1.2. Descripción y formulación del problema

El problema planteado en este trabajo es el del control de vibraciones inducidas en máquinas o mesas para soportar equipos, colocadas sobre estructuras afectadas por fuentes de baja frecuencia (inferiores a los 200Hz).

En su forma más general [31], la vibración se genera por la acción simultánea de seis (6) cargas⁵: tres (3) fuerzas en las direcciones de los ejes x , y , z , dos (2) momentos flectores⁶ en las direcciones de los ejes y , z y un (1) momento torsor⁷ en la dirección del eje x . Esto quiere decir que si se requiere controlar completamente el problema de vibraciones, se necesitan seis (6) actuadores independientes, uno (1) para cada grado de libertad.

En la práctica el problema se simplifica controlando pasivamente algunos de los grados de libertad del sistema y controlando activamente los demás. Así por ejemplo, si se restringe mecánicamente el movimiento de la máquina en dirección horizontal (adelante – atrás, izquierda – derecha), automáticamente se controlan en forma pasiva tres (3) de los grados de libertad, puesto que además de los anteriores, también queda con-

⁵Véase la Figura 1.1.

⁶Los cuales tienden a doblar la estructura en planos perpendiculares a los ejes.

⁷El cual tiende a rotar la estructura en dirección longitudinal o axial.

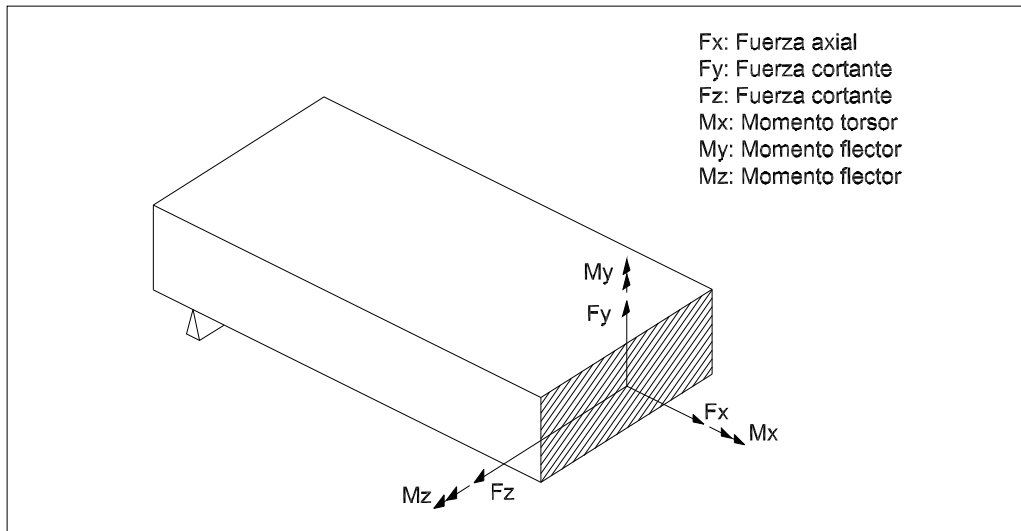


Figura 1.1: Direcciones principales de fuerzas (normales y cortantes) y momentos (flectores y torsores) en la sección transversal de la estructura de soporte de una máquina.

trolado el movimiento de rotación alrededor del eje vertical. En estas condiciones el problema se reduce al control activo del movimiento de la máquina en dirección vertical (tres grados de libertad que representan la superposición de un desplazamiento vertical arriba – abajo y dos movimientos de rotación alrededor de los ejes perpendiculares al eje vertical).

Este último problema (3 grados de libertad), el cual es una simplificación del problema general, puede ser resuelto mediante la ubicación adecuada de módulos de control [1] en las esquinas de soporte de la máquina (cuatro en este caso). Cada uno de estos módulos para el control de un sólo grado de libertad se diseña en forma independiente y al instalarse en la máquina se calibra para sincronizarlo (acoplarlo) con los demás. El objetivo de este trabajo es el de evaluar el comportamiento simulado de uno de estos módulos de control.

El énfasis principal es el de indagar en los *aspectos matemáticos más relevantes* para el modelado, identificación, diseño del control, y la simulación de los resultados en un sistema vibratorio⁸.

⁸En este punto es necesario aclarar que aunque en este trabajo se requiere simplificar el modelo físico real de un sistema de seis grados de libertad a uno de menor número de grados, esto no significa una trivialización del problema de vibraciones mecánicas. La razón es simple: un sistema mecánico multicuerpo [8] (que puede ser considerado como un arreglo o interconexión elástica de múltiples masas) puede tener infinitos grados de libertad. Su control requeriría por lo tanto infinitos actuadores. Sin embargo muchas de las aplicaciones de ingeniería se pueden modelar como sistemas de un solo grado de libertad, es decir, como un cuerpo rígido controlado por un único elemento actuador.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Aplicar la teoría de modelado matemático a la solución del problema de control activo de vibraciones que se generan en máquinas o equipos afectados por la acción de fuentes vibratorias de baja frecuencia y evaluar los resultados mediante la simulación en un sistema de hasta dos grados de libertad (en este caso, una máquina sobre una estructura simplemente apoyada sometida a la acción de una fuente vibratoria externa).

1.3.2. Objetivos específicos

1. Analizar matemáticamente el concepto de vibraciones generadas por cuerpos rígidos vibratorios sobre estructuras de soporte flexibles para su aplicación al control activo (adaptativo).
2. Desarrollar un *modelo matemático* que pueda utilizarse para efectos de simulación e identificación paramétrica del modelo reducido de una máquina simplemente apoyada, con base en los conceptos de modelado de sistemas vibratorios.
3. Construir y validar en Matlab el *modelo matemático* del paso anterior de tal forma que permita utilizar señales⁹ con el fin de diseñar una cierta acción de control para su empleo como fuerza en un sistema de control activo.
4. Desarrollar el procedimiento de identificación del modelo reducido de una máquina con base en las variables involucradas con el fin de evaluar el mejor modelo.
5. Desarrollar un procedimiento adaptativo para aplicación en el control de vibraciones de una máquina soportada por una estructura sometida a vibraciones.
6. Evaluar los resultados obtenidos con el algoritmo de control adaptativo mediante la realización de simulaciones en Matlab.
7. Plantear los retos y dificultades que se pueden presentar con el manejo de sistemas con más grados de libertad.

1.4. Hipótesis o preguntas de investigación

Algunas de las preguntas que surgen son las siguientes:

1. ¿Cuales son los problemas asociados con la identificación de sistemas no lineales como el planteado por un sistema vibratorio variable?
2. ¿Cuales son los métodos de identificación más adecuados en estos casos?
3. ¿Cuales son los problemas asociados al diseño del control adaptativo? ¿Cual será el mejor método de control adaptativo para el caso planteado?
4. ¿Se podrá alcanzar el control en todas las frecuencias de operación del sistema? De ser esto posible, ¿bajo que condiciones se puede lograr?

⁹Posición, velocidad, aceleración, ...

1.5. Método de investigación

En el proyecto se estudian los problemas que surgen del modelado matemático, identificación y control de sistemas vibratorios aleatorios. Para efectos del trabajo se utiliza una de las múltiples herramientas¹⁰ disponibles en Matlab ([20], [21]), denominada *SimMechanics* [29]. En esta herramienta se construye un modelo matemático no lineal de un sistema de masas, resortes y amortiguador de dos grados de libertad.

A cada una de las variables del modelo construido en *SimMechanics* se le asignan valores iniciales para configurar lo que se denomina el “modelo reducido” de una máquina simplemente apoyada. Esta máquina virtual se enmascara para ofrecer un modelo matemático de una máquina en su configuración de “caja negra”.

Una vez hecha la validación del modelo reducido, se puede proceder a realizar la identificación de parámetros: el modelo reducido se somete a perturbaciones conocidas, se registran las respuestas del sistema ante las perturbaciones, se procede a la estimación de los parámetros y por último se comparan los resultados de la identificación con los datos introducidos originalmente. Este procedimiento es de utilidad en el momento de decidir cuales son los mejores modelos de identificación paramétrica.

Por último, con los datos de la identificación paramétrica se puede abordar el problema del diseño del sistema de control de vibraciones inducidas en el modelo reducido original. Aquí se pueden evaluar diferentes estrategias de control y analizar los efectos de trasladar al modelo reducido original los resultados del diseño con base en la identificación.

1.6. Contribuciones

Son muchas las áreas de la ingeniería que se han beneficiado de las investigaciones en técnicas de control activo. Algunos ejemplos en lo relacionado con el control activo de vibraciones son los siguientes:

- Control activo de vibraciones en vehículos automotores: en este campo se han hecho grandes esfuerzos para mejorar las condiciones de manejo, seguridad y comodidad de los usuarios. Muchos vehículos de producción masiva ya involucran en forma estándar este tipo de sistemas de control. Algunos fabricantes realizan investigaciones para incorporar sistemas más complejos que incluso pueden “tomar el control” del vehículo en curvas pronunciadas y de esta manera mejorar las condiciones de manejo a altas velocidades.
- Control activo de vibraciones en puentes y estructuras: a medida que las construcciones civiles se hacen cada vez más grandes, se requiere la inclusión de sistemas de control activo que permitan garantizar la resistencia estructural y la rigidez necesaria para soportar cargas eólicas y movimientos telúricos. En particular es de interés el control de movimiento en edificios de gran altura y en puentes con grandes luces de soporte, en los cuales se requiere mantener una comodidad mínima de los usuarios.
- Control activo de sistemas de movimiento de cargas en la industria aeroespacial: el diseño de grúas y brazos para el movimiento de cargas en ambientes de micro-gravedad plantea dificultades enormes desde el punto de vista de control adecuado de posición, velocidad, aceleración y vibraciones. Se han

¹⁰*Toolbox*

propuesto diferentes tipos de plataformas de múltiples grados de libertad con el objeto de ubicar o reparar satélites en el espacio, así como para ensamblar componentes de las estaciones espaciales.

- Control activo de balanceo de plataformas marinas de extracción de petróleo: los sistemas de perforación petrolera instalados sobre plataformas marinas requieren la garantía de una cierta estabilidad para evitar rotura de los taladros de perforación. Aquí, el control activo se utiliza para evitar movimientos que desplacen las plataformas de sus sitios de trabajo y para evitar oscilaciones causadas por la agitación del agua.
- Control activo de ruido y vibraciones en aeronaves: los aviones y helicópteros modernos utilizan estructuras muy livianas y turbinas cada vez más potentes, con lo cual se incrementa el problema del ruido y las vibraciones sobre los tripulantes y los instrumentos. Las técnicas de control activo buscan disminuir estos problemas en función de las condiciones climáticas y de operación.
- Control activo de ruido: en este campo los esfuerzos se han orientado hacia el desarrollo de algoritmos adaptativos que permitan alcanzar la distribución óptima de fuentes de cancelación (supresión) de ruido, con base en el uso de múltiples sensores localizados en los alrededores de los sitios que se desean controlar. En particular se ha hecho énfasis en el uso de la densidad de energía y de la intensidad sonora para efectos de control. Igualmente se han hecho esfuerzos para reducir el flujo de potencia vibratoria proveniente de vigas, láminas y estructuras complejas en movimiento.

Como puede verse, son innumerables los campos de aplicación de la ingeniería donde es indispensable la utilización de técnicas de control activo de vibraciones y ruido. Son muchísimas las contribuciones que se han hecho al respecto. Para ampliar la literatura sobre estos aspectos se recomienda la lectura de las referencias [1], [5], [10], [13], [14], [15], [24], [25].

En este trabajo en particular se destacan los siguientes logros:

- **Modelado:** montaje en SimMechanics (Matlab) de un diagrama para simular el comportamiento del modelo reducido de una máquina. Este modelo matemático de un sistema de dos grados de libertad permite la simulación de la respuesta del sistema ante perturbaciones externas conocidas. Es una alternativa a la construcción de un arreglo experimental real que permite disponer de múltiples posibilidades de simulación sin incurrir en los costos y problemas asociados a un modelo físico de laboratorio.
- **Identificación:** el modelo matemático construido en SimMechanics fue utilizado con dos propósitos: cálculo de los parámetros internos del sistema a partir de “mediciones” de las posiciones de las masas del modelo e identificación de modelo de velocidad de la máquina. El primero de los propósitos cae dentro de lo que se considera campo de trabajo de la mecánica experimental. Hasta donde se ha indagado en la literatura, en Colombia no se han construido y evaluado modelos experimentales como el que se plantean en el modelo.
- **Control:** con base en el modelo reducido montado en SimMechanics se proponen algoritmos de control de vibraciones para evaluar su posibilidad de aplicación a sistemas reales. De nuevo, se muestran las ventajas del empleo de modelos de simulación con respecto a la construcción de arreglos experimentales reales.

1.7. Organización del trabajo

A partir del Capítulo 2 el trabajo está organizado de la siguiente forma: al iniciar cada capítulo, se plantea una breve introducción al tema correspondiente, seguida del desarrollo teórico asociado. Al finalizar el capítulo se presenta un breve resumen en el que se hace mención al logro de los objetivos planteados en la introducción.

Una rápida descripción del contenido del trabajo es la siguiente:

- En el Capítulo 2 se hace una introducción a la literatura básica para el modelado matemático de sistemas vibratorios desde la perspectiva de las *funciones de transferencia* para sistemas de diferentes grados de libertad. Aquí se resalta el concepto de la función de transferencia por su importancia para comprender la respuesta de un sistema ante los efectos de una perturbación externa al mismo.
- En el Capítulo 3 se hace una introducción al concepto de *identificación paramétrica* y se muestra la estructura de algunos de los modelos lineales discretos más utilizados.
- En el Capítulo 4 se presentan los conceptos básicos asociados al *modelado de máquinas* afectadas por fuentes vibratorias y los conceptos básicos del control activo de vibraciones.
- En el Capítulo 5 se presenta el *modelo reducido de una máquina simplemente apoyada* planteado como un sistema de dos masas conectadas por medio de resortes y amortiguadores, además de la construcción y validación de este modelo en Matlab.
- En el Capítulo 6 se presenta el procedimiento de *identificación paramétrica del modelo reducido de una máquina*, para lo cual se utiliza el modelo matemático desarrollado en el Capítulo 5. El objetivo se orienta hacia el cálculo de los parámetros internos del modelo reducido a partir de la identificación de la diferencia de posiciones de las masas.
- En el Capítulo 7 se plantean y evalúan estrategias de control activo para la velocidad de la maquina en el modelo reducido con base en la identificación de modelos de velocidad.
- Finalmente, en el Capítulo 8 se presentan las conclusiones generales.

1.8. Convenciones

Al principio de cada capítulo se presentan los nombres de los símbolos utilizados en los diferentes temas. Adicionalmente, en el Anexo A aparece un listado completo de los símbolos utilizados para las variables y parámetros del trabajo, incluyendo la página de primera aparición del símbolo en el documento.

Modelado de sistemas vibratorios

2.1. Introducción

En el estudio de sistemas de control es indispensable representar en forma aproximada el comportamiento de la dinámica del sistema para comprender sus características. Un *modelo matemático* se puede definir como un conjunto de ecuaciones que describen con cierto grado de precisión la dinámica del sistema. Dado que el enfoque de un problema puede ser variable, pueden encontrarse muchas representaciones matemáticas (o modelos matemáticos) del mismo.

En la mayoría de los problemas dinámicos el modelado del sistema adopta la forma de un conjunto de ecuaciones diferenciales que se obtienen a partir de las leyes físicas que lo gobiernan. Ya que los modelos matemáticos pueden tomar diferentes formas, la selección del modelo es un asunto de conveniencia que tiene en cuenta las características específicas del problema.

En las aplicaciones de control moderno se utilizan con frecuencia las *funciones de transferencia* [23] con el fin de caracterizar las relaciones entre las variables de entrada y salida de sistemas que se pueden describir con el empleo de *ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo*. Este es el caso de muchos problemas asociados con vibraciones mecánicas, por lo que en esta primera parte se mostrará la forma de obtener la función de transferencia para sistemas vibratorios de hasta n grados de libertad.

En control la *función de transferencia* de un sistema es un modelo matemático que se define como la relación entre la transformada de Laplace de las variables de salida (respuesta del sistema) y la transformada de Laplace de las variables de entrada (excitación o perturbación del sistema), bajo el supuesto de que todas las condiciones iniciales son cero. Matemáticamente esto se representa por medio de la relación $G(s)$ para la función de transferencia¹:

$$G(s) = \left(\frac{\mathcal{L}[\text{salida}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} \right)_{\text{condiciones iniciales cero}}$$

¹Un listado de los nombres asignados a los símbolos utilizados en el capítulo aparece en la Tabla 2.1. Un listado completo de los nombres asignados a los símbolos utilizados en todo el trabajo aparece en el Anexo A.

Tabla 2.1: Símbolos utilizados en el modelado matemático de sistemas vibratorios

Símbolo	Descripción
A	Matriz de coeficientes constantes
A, A_i	Constantes
B	Matriz o vector de coeficientes
β	Factor de amplificación
β_r	Transmisibilidad
c, c_i	Constantes o coeficientes de amortiguación viscosa
C	Matriz de amortiguamiento de un sistema de múltiples grados de libertad
C	Matriz o vector de coeficientes
C_c	Coefficiente de amortiguamiento crítico
D	Matriz o vector de coeficientes constantes
$F(t), F_i(t)$	Fuerza perturbadora dependiente del tiempo
F_t	Fuerza resultante dependiente del tiempo
F_0	Fuerza no dependiente del tiempo (constante)
$F(s), G(s)$	Funciones de transferencia para la variable compleja s
ϕ	Angulo constante
$H(t)$	Función de respuesta al impulso
I	Impulso lineal
j	Operador imaginario
k, k_i	Constantes elásticas de resortes
K	Matriz de rigidez de un sistema de múltiples grados de libertad
$\mathcal{L}[F(t)]$	Transformada de Laplace de F(t)
m, m_i	Masas de cuerpos rígidos en general
M	Matriz de masa de un sistema de múltiples grados de libertad
p, p_i	Constantes derivadas de cálculos
ψ, ψ_t	Ángulos de fase
$\bar{\psi}$	Diferencia entre ángulos de fase
r	Relación entre velocidades angulares
s	Nombre asignado a una variable compleja en general
t	Tiempo
U	Vector de entradas (fuerzas) del sistema
ω	Frecuencia natural de un sistema
ω_d	Frecuencia natural de amortiguamiento de un sistema
ω_f	Frecuencia una fuerza perturbadora
W_e	Trabajo realizado por una fuerza sobre un sistema
W_d	Energía disipada por un sistema
W_s	Trabajo realizado por un resorte sobre un sistema
X(s)	Vector de variables de estado
$x_i(t)$	Variables de estado
$\dot{x}_i(t)$	Derivadas de las variables de estado
Y	Vector de salidas del sistema

Símbolos utilizados en el modelado matemático de sistemas vibratorios (Continuación).

Símbolo	Descripción
ζ	Factor de amortiguamiento
z, z_i, Z	Posición de un cuerpo rígido en un sistema coordenado de referencia
$\dot{z}, \dot{z}_i, \dot{Z}$	Velocidad de un cuerpo rígido en un sistema coordenado de referencia
$\ddot{z}, \ddot{z}_i, \ddot{Z}$	Aceleración de un cuerpo rígido en un sistema coordenado de referencia
Z_0	Posición inicial
z_h	Solución complementaria o transitoria de una ecuación diferencial homogénea
z_p	Solución particular o estacionaria de una ecuación diferencial homogénea
\dot{z}_h	Velocidad en estado transitorio
\dot{z}_p	Velocidad en estado estacionario
\ddot{z}_h	Aceleración en estado transitorio
\ddot{z}_p	Aceleración en estado estacionario

Con base en el concepto de función de transferencia es posible representar la dinámica de sistemas por medio de polinomios en la variable compleja s . El sistema se denomina de *n-ésimo orden* si la potencia más alta del polinomio del denominador de la función de transferencia es igual a n .

La función de transferencia *es una propiedad del sistema bajo análisis* que aunque no suministra información acerca de las características físicas del sistema, permite una descripción completa de las características dinámicas del mismo con base en la respuesta a diferentes señales de entrada.

En las siguientes secciones se presenta una recopilación de la literatura sobre la obtención de las funciones de transferencia para sistemas con diferentes grados de libertad. Véanse las referencias [9], [23], [27], [28], [16], [32] para una descripción más completa de cada uno de los aspectos que aquí se mencionan. Esta información es útil para plantear las relaciones entre el concepto de función de transferencia de un sistema y los conceptos de *identificación paramétrica* y *control* que se describen en los Capítulos 6 y 7.

2.2. Modelado de sistemas de un grado de libertad

2.2.1. Vibración no forzada

En la Figura 2.1 se muestra un diagrama simplificado de un sistema dinámico de un grado de libertad. Consiste de una masa m sujeta a un soporte estructural por medio de un resorte y un amortiguador. La constante elástica del resorte (o rigidez) es k y el coeficiente de amortiguación viscosa del amortiguador es c . Si por alguna razón el sistema es puesto en movimiento a causa de la aplicación de alguna perturbación externa (una fuerza F , una velocidad inicial o el desplazamiento de la masa m desde su posición de equilibrio), entonces se producirá una vibración libre de la masa alrededor de su punto de equilibrio. En una posición arbitraria z de la masa desde el punto de equilibrio, el resorte ejercerá una fuerza de restitución de magnitud kz . En esta misma posición, la fuerza de amortiguamiento viscosa es proporcional a la velocidad de la masa, y es equivalente a $c\dot{z}$. El desplazamiento se considera positivo hacia la derecha desde la posición de equilibrio.

Con base en las fuerzas soportadas por la masa m se puede escribir la ecuación diferencial del movi-

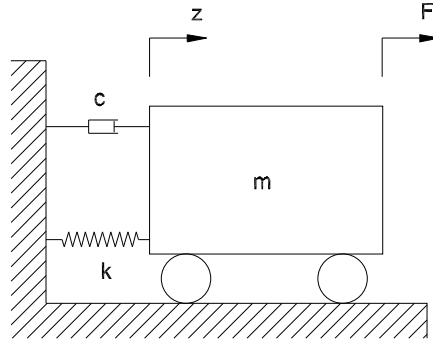


Figura 2.1: Diagrama esquemático general para sistemas de un grado de libertad.

miento en la siguiente forma:

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = F(t) \quad (2.1)$$

donde \ddot{z} es la aceleración de la masa m .

La ecuación 2.1 es la forma estándar de la ecuación diferencial de segundo orden que describe la vibración de sistemas amortiguados de un grado de libertad.

Si en la ecuación anterior la magnitud de la fuerza $F(t)$ es cero, se obtiene:

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = 0 \quad (2.2)$$

La ecuación 2.2 es la forma estándar de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden que describe la vibración *no forzada* de sistemas amortiguados de un grado de libertad. Una solución de esta ecuación es de la forma:

$$z = A e^{pt} \quad (2.3)$$

donde A y p son constantes. Para calcular el valor de las expresiones para A y p en 2.3, se sustituye esta solución y sus derivadas en la ecuación diferencial 2.2, con lo que se obtiene:

$$(m p^2 + c p + k) A e^{pt} = 0 \quad (2.4)$$

Ya que la expresión $A e^{pt} \neq 0$, entonces en 2.4 la ecuación característica está definida por:

$$m p^2 + c p + k = 0 \quad (2.5)$$

Las raíces de 2.5 están dadas por:

$$p_1 = -\frac{c}{2m} + \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4 m k} \quad (2.6)$$

$$p_2 = -\frac{c}{2m} - \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4 m k} \quad (2.7)$$

En ausencia de amortiguación², la ecuación 2.2 se convierte en:

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0. \quad (2.8)$$

Si se denomina $\omega_n = k/m$, la masa oscilaría libremente con una frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{k/m}$. En este caso la solución de la ecuación 2.8 está dada por:

$$z = A \sin \omega_n t, \quad (2.9)$$

donde A es la amplitud de oscilación y ω_n es la frecuencia natural de las oscilaciones no amortiguadas.

Esto puede comprobarse si se considera que:

$$\dot{z} = \omega_n A \cos \omega_n t \quad (2.10)$$

$$\ddot{z} = -\omega_n^2 A \sin \omega_n t = -\omega_n^2 z, \quad (2.11)$$

con lo cual la ecuación 2.8 se convierte en:

$$-\omega_n^2 z + \omega_n^2 z = 0$$

Sin embargo, como el sistema es generalmente amortiguado³, se emplea un *factor de amortiguamiento* relativo ζ para definir el grado de mortiguamiento. Este se obtiene a partir de la condición:

$$\sqrt{c^2 - 4mk} = 0, \quad (2.12)$$

lo cual implica que

$$c^2 - 4mk = 0. \quad (2.13)$$

Para simplificar el manejo de las ecuaciones se introducen las siguientes relaciones:

$$C_c = 2 m \omega_n = 2\sqrt{m k} \quad (2.14)$$

y

$$\zeta = \frac{c}{C_c} \quad (2.15)$$

donde se define C_c como el *coeficiente de amortiguamiento crítico*. Con lo anterior las raíces p_1 y p_2 de la ecuación característica pueden expresarse en términos del factor de amortiguamiento ζ como:

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.16)$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.17)$$

Si $\zeta > 1$ las raíces p_1 y p_2 son reales y diferentes. El factor de amortiguamiento es $\zeta > 1$ si el coeficiente de amortiguamiento es mayor que el coeficiente de amortiguamiento crítico (esto es $c > C_c$). En este caso la solución general para 2.1 es de la forma:

$$z = A e^{p_1 t} + B e^{p_2 t}.$$

²Es decir, cuando $c = 0$.

³Es decir, cuando $c \neq 0$.

Este es el caso denominado como sistema *sobreamortiguado*.

Si $\zeta = 1$ las raíces p_1 y p_2 son reales e iguales. Esto es:

$$p_1 = p_2 = -\omega_n$$

En este caso la solución general para 2.1 es de la forma:

$$z = (A + B) e^{-\omega_n t}$$

En esta condición, se dice que el sistema está *críticamente amortiguado*.

El factor de amortiguamiento es $\zeta = 1$ si el coeficiente de amortiguamiento es igual al coeficiente de amortiguamiento crítico (esto es, $c = C_c$). En este caso, el sistema se denomina *críticamente amortiguado*.

Por último, si $\zeta < 1$ las raíces p_1 y p_2 son complejas conjugadas puesto que ambas involucran el término $\sqrt{-1}$. Por lo tanto,

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n i\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Si se hace

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

entonces

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega i$$

El término ω es la frecuencia de movimiento cuando está en la condición amortiguada especificada por ζ . La solución para 2.1 es:

$$z = Ae^{(-\zeta\omega_n + i\omega)t} + Be^{(-\zeta\omega_n - i\omega)t}$$

$$z = e^{-\zeta\omega_n t} [Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}]$$

Pero

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

Por lo tanto

$$z = e^{-\zeta\omega_n t} [(A + B) \cos \omega_n t + i(A - B) \sin \omega_n t]$$

El factor de amortiguamiento es $\zeta < 1$ si el coeficiente de amortiguamiento es menor que el coeficiente de amortiguamiento crítico (esto es, $c < C_c$). En estas condiciones se dice que el sistema está *subamortiguado*.

2.2.2. Vibración forzada

Tómese de nuevo como referencia la Figura 2.1, la cual representa un sistema simple de un grado de libertad amortiguado. Se quiere obtener la respuesta del sistema a la acción de una perturbación externa $F(t)$. La constante elástica del resorte es k y el coeficiente de amortiguación viscosa del amortiguador es c . El sistema se somete a un desplazamiento z de la masa m desde la posición de equilibrio por acción de la fuerza externa $F(t)$. Mediante la aplicación de la segunda ley de Newton se obtiene la ecuación diferencial del movimiento del sistema:

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = F(t) \quad (2.18)$$

La ecuación 2.18, es una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden, cuya solución puede expresarse en dos partes:

$$z = z_h + z_p \quad (2.19)$$

La primera parte (z_h) de la ecuación 2.19, denominada *solución complementaria*, representa la solución de la ecuación homogénea:

$$m \ddot{z}_h + c \dot{z}_h + k z_h = 0 \quad (2.20)$$

Esta función complementaria, también se denomina *solución transitoria* debido a que en la presencia de amortiguamiento su valor tiende a cero.

La segunda parte (z_p) de la ecuación 2.19 denominada *solución particular*, representa la respuesta del sistema a la fuerza perturbadora $F(t)$. También se le denomina *solución en estado estacionario*, debido a que permanece en el tiempo después de que la vibración transitoria desaparece.

La solución transitoria contiene dos constantes arbitrarias mientras que la solución en estado estacionario no contiene ninguna. Por lo tanto la solución de la ecuación 2.19 contiene dos constantes arbitrarias que deben ser calculadas a partir de las condiciones iniciales del problema.

Supóngase ahora que el sistema es excitado por una fuerza armónica $F(t)$ expresada en la forma

$$F(t) = F_0 \sin \omega_f t \quad (2.21)$$

donde ω_f es la frecuencia de la fuerza perturbadora. La sustitución de esta ecuación en la 2.18 queda:

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = F_0 \sin \omega_f t \quad (2.22)$$

La solución en estado estacionario z_p puede ser asumida en la forma:

$$z_p = A_1 \sin \omega_f t + A_2 \cos \omega_f t \quad (2.23)$$

con lo cual se obtienen las siguientes expresiones para la velocidad y aceleración:

$$\dot{z}_p = \omega_f A_1 \cos \omega_f t - \omega_f A_2 \sin \omega_f t \quad (2.24)$$

$$\ddot{z}_p = -\omega_f^2 A_1 \sin \omega_f t - \omega_f^2 A_2 \cos \omega_f t = -\omega_f^2 z_p \quad (2.25)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.23, 2.24 y 2.25 en la 2.22 y reordenando los términos, se obtiene:

$$(k - \omega_f^2 m)(A_1 \sin \omega_f t + A_2 \cos \omega_f t) + c \omega_f (A_1 \cos \omega_f t - A_2 \sin \omega_f t) = F_0 \sin \omega_f t$$

o lo que es lo mismo,

$$[(k - \omega_f^2 m)A_1 - c \omega_f A_2] \sin \omega_f t + [c \omega_f A_1 + (k - \omega_f^2 m)A_2] \cos \omega_f t = F_0 \sin \omega_f t \quad (2.26)$$

Esta ecuación permite obtener las siguientes expresiones en términos de A_1 y A_2 :

$$(k - \omega_f^2 m)A_1 - c \omega_f A_2 = F_0 \quad (2.27)$$

$$c \omega_f A_1 + (k - \omega_f^2 m)A_2 = 0 \quad (2.28)$$

Si se dividen las ecuaciones 2.27 y 2.28 por la constante elástica k se obtiene:

$$\left(1 - \frac{\omega_f^2 m}{k}\right)A_1 - \left(\frac{c}{k}\omega_f\right)A_2 = \frac{F_0}{k} \quad (2.29)$$

$$\left(\frac{c}{k}\omega_f\right)A_1 + \left(1 - \frac{\omega_f^2 m}{k}\right)A_2 = 0 \quad (2.30)$$

Como $\omega_n^2 = k/m$ y $c = \zeta C_c = \zeta 2m\omega_n$, entonces

$$\left(1 - \frac{\omega_f^2}{\omega_n^2}\right)A_1 - \left(\frac{\zeta 2m\omega_n}{k}\omega_f\right)A_2 = \frac{F_0}{k} \quad (2.31)$$

$$\left(\frac{\zeta 2m\omega_n}{k}\omega_f\right)A_1 + \left(1 - \frac{\omega_f^2}{\omega_n^2}\right)A_2 = 0 \quad (2.32)$$

Si

$$r = \frac{\omega_f}{\omega} \quad (2.33)$$

y

$$Z_0 = \frac{F_0}{k} \quad (2.34)$$

las ecuaciones 2.31 y 2.32 se convierten en

$$(1 - r^2)A_1 - 2 r \zeta A_2 = Z_0 \quad (2.35)$$

$$2 r \zeta A_1 + (1 - r^2)A_2 = 0 \quad (2.36)$$

El término $r = \omega_f/\omega$ se conoce como relación entre la frecuencia de la fuerza aplicada y la frecuencia del sistema cuando está en la condición amortiguada impuesta por ζ .

Las ecuaciones 2.35 y 2.36 se resuelven para calcular las magnitudes de las constantes A_1 y A_2 :

$$A_1 = \frac{(1 - r^2)Z_0}{(1 - r^2)^2 + (2 r \zeta)^2} \quad (2.37)$$

$$A_2 = \frac{-(2 r \zeta)Z_0}{(1 - r^2)^2 + (2 r \zeta)^2} \quad (2.38)$$

Con base en lo anterior la solución en estado estacionario de la ecuación 2.23 puede escribirse de la siguiente forma:

$$z_p = \frac{Z_0}{(1-r^2)^2 + (2r\zeta)^2} [(1-r^2) \sin \omega_f t - (2r\zeta) \cos \omega_f t] \quad (2.39)$$

la que también puede ser escrita como:

$$z_p = \frac{Z_0}{(1-r^2)^2 + (2r\zeta)^2} \sin(\omega_f t - \psi) \quad (2.40)$$

donde ψ representa el ángulo de fase definido por:

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{2r\zeta}{1-r^2} \right) \quad (2.41)$$

La ecuación 2.40 puede escribirse en una forma más compacta así:

$$z_p = Z_0 \beta \sin(\omega_f t - \psi) \quad (2.42)$$

donde el término β se denomina el *factor de amplificación*, definido en el caso de sistemas amortiguados como:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\zeta)^2}} \quad (2.43)$$

Si el factor de amortiguamiento ζ es igual a cero, el factor de amplificación β se convierte en

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (2.44)$$

Cuando $r = 1$, es decir, cuando $\omega_f = \omega$, el factor de amplificación en el caso de sistemas no amortiguados tiende a infinito. Este es el caso conocido como *resonancia*. El factor de amplificación β se muestra en la Figura 2.2 para diferentes valores de ζ .

El concepto de transmisión de fuerza en vibración forzada

Del análisis de la ecuación 2.40 y de la Figura 2.2 se deduce que incrementando la rigidez del resorte k y el coeficiente de amortiguamiento c , la amplitud de la vibración disminuye. Sin embargo, el incremento de las constante de rigidez y amortiguamiento tiene efecto sobre la fuerza transmitida al soporte del sistema (estructura de soporte). Esto indica que se debe tener cuidado al seleccionar estos coeficientes para disminuir esta fuerza. Tomando como referencia la Figura 2.3, en la cual se muestran los diagramas de cuerpo libre de la masa y del sistema de soporte, se puede calcular la fuerza que fluye a la estructura de la siguiente forma:

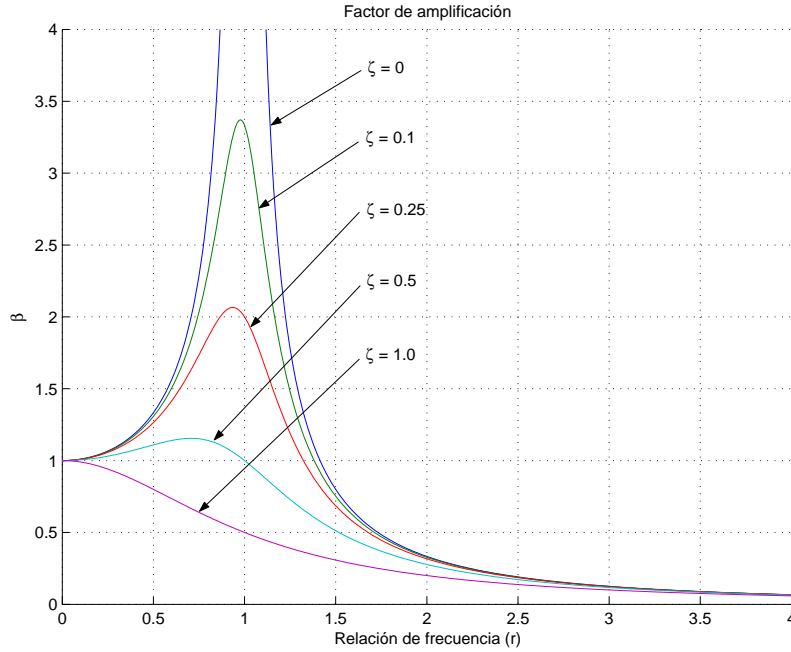
$$F_t = k z_p + c \dot{z}_p \quad (2.45)$$

De la ecuación 2.42, se tiene que \dot{z}_p :

$$\dot{z}_p = \omega_f Z_0 \beta \cos(\omega_f t - \psi)$$

Por lo tanto, la ecuación 2.45 puede reescribirse como:

$$F_t = k Z_0 \beta \sin(\omega_f t - \psi) + c \omega_f Z_0 \beta \cos(\omega_f t - \psi)$$

Figura 2.2: Factor de amplificación β

$$F_t = Z_0 \beta \sqrt{k^2 + (c \omega_f)^2} \sin(\omega_f t - \bar{\Psi}), \quad (2.46)$$

donde

$$\bar{\Psi} = \Psi - \psi_t \quad (2.47)$$

y ψ_t es un ángulo de fase definido como

$$\psi_t = \tan^{-1} \left(\frac{c \omega_f}{k} \right) = \tan^{-1} (2 r \zeta) \quad (2.48)$$

La ecuación 2.46 también puede reescribirse como:

$$F_t = Z_0 k \beta \sqrt{1 + (2 r \zeta)^2} \sin(\omega_f t - \bar{\Psi}) \quad (2.49)$$

Como $Z_0 = F_0/k$, la ecuación 2.49 también se puede presentar como

$$\begin{aligned} F_t &= F_0 \beta \sqrt{1 + (2 r \zeta)^2} \sin(\omega_f t - \bar{\Psi}) \\ F_t &= F_0 \beta_t \sin(\omega_f t - \bar{\Psi}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_t &= \beta \sqrt{1 + (2 r \zeta)^2} \\ \beta_t &= \frac{\sqrt{1 + (2 r \zeta)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 r \zeta)^2}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

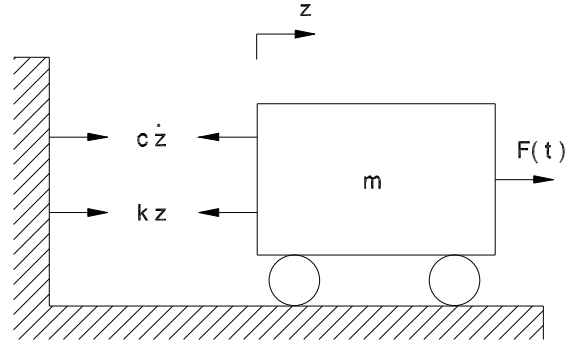


Figura 2.3: Diagramas de cuerpo libre en el caso de vibración forzada para sistemas de un grado de libertad

Obsérvese que β_r representa la relación entre la amplitud de la fuerza transmitida y la amplitud de la fuerza aplicada. El término β_r se denomina *transmisibilidad*. En la Figura 2.4 aparece β_r como una función de la relación de frecuencia r para diferentes valores del factor de amortiguamiento ζ . Se observa que $\beta_r > 1$ para $r < \sqrt{2}$. Esto indica que en esta región la amplitud de la fuerza transmitida es mayor que la amplitud de la fuerza aplicada. Adicionalmente, para $r < \sqrt{2}$, la fuerza transmitida a la estructura puede reducirse incrementando el factor de amortiguamiento ζ . Para $r > \sqrt{2}$, $\beta_r < 1$ y en esta región la amplitud de la fuerza transmitida es menor que la amplitud de la fuerza aplicada. En esta región, la amplitud de la fuerza transmitida se incrementa con el incremento del factor de amortiguamiento ζ .

El concepto de trabajo por ciclo en vibración forzada

La ecuación 2.42 que define la respuesta en estado estacionario a una excitación armónica en la presencia de amortiguamiento, implica que para una cierta relación de frecuencia r y un factor de amortiguamiento ζ , la amplitud de vibración permanece constante. Esto sólo puede lograrse si la energía de entrada al sistema, como resultado del trabajo realizado por la fuerza armónica externa es igual a la energía disipada como resultado de la presencia de amortiguamiento. Con el fin de observar esto, se evalúa el trabajo realizado por la fuerza armónica como:

$$dW_e = F(t) dz = F(t) \dot{z} dt \quad (2.52)$$

donde W_e es el trabajo realizado por la fuerza externa por cada ciclo, y está dado por:

$$W_e = \int_0^{2\pi/\omega_f} F(t) \dot{z} dt \quad (2.53)$$

$$W_e = \int_0^{2\pi/\omega_f} F_0 \sin(\omega_f t) z_0 \beta \omega_f \cos(\omega_f t - \psi) dt \quad (2.54)$$

$$W_e = F_0 z_0 \beta \int_0^{2\pi} \sin(\omega_f t) \cos(\omega_f t - \psi) d(\omega_f t) \quad (2.55)$$

Efectuadas las operaciones se obtiene:

$$W_e = \pi F_0 z_0 \beta \sin(\psi) \quad (2.56)$$

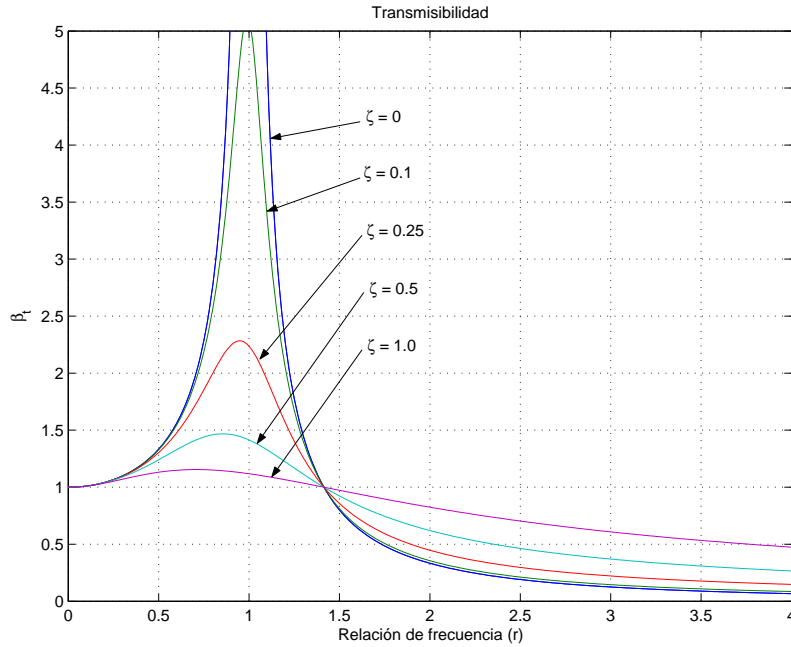


Figura 2.4: Transmisibilidad

De forma similar se puede evaluar la fuerza disipada por ciclo como consecuencia de la fuerza amortiguadora como:

$$W_e = \int_0^{2\pi/\omega_f} c \dot{z} \dot{z} dt$$

$$W_e = c z_0^2 \beta^2 \omega_f \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega_f t - \psi) d(\omega_f t)$$

Realizada la integral, se obtiene:

$$W_d = \pi c z_0^2 \beta^2 \omega_f$$

Obsérvese que la energía de entrada al sistema es una función lineal de la amplitud de vibración en estado estacionario $z_0\beta$, mientras que la energía disipada como resultado de la fuerza amortiguadora es una función cuadrada de la amplitud. Como en régimen estacionario ambas deben ser iguales, entonces

$$W_e = W_d$$

o lo que es lo mismo

$$\pi F_0 z_0 \beta \sin \psi = \pi c z_0^2 \beta^2 \omega_f$$

Con lo anterior el factor de amplificación se convierte en:

$$\beta = \frac{F_0/z_0}{c \omega_f} \sin \psi$$

Con base en la definición de z_0 y del ángulo de fase ψ , dados respectivamente por las ecuaciones 2.34 y 2.41, el factor de amplificación puede ser escrito como:

$$\beta = \frac{F_0/z_0}{c \omega_f} \sin \psi = \frac{k}{\omega_f}$$

También, como $c \omega_f/k = 2 r \zeta$, la ecuación anterior se reduce a

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\zeta)^2}}$$

Esta última expresión es la misma obtenida para el factor de amplificación calculado por medio de la solución de la ecuación diferencial. Aquí se obtuvo a partir de la ecuación de energía de entrada resultante del trabajo realizado por la fuerza armónica, a la energía disipada como resultado de la fuerza amortiguadora. En efecto, este debe ser el caso ya que el cambio en la energía de deformación en un ciclo completo debe ser igual a cero, debido a que el resorte tiene la misma elongación después de completado un ciclo. Esto también puede ser demostrado matemáticamente a partir de la definición de trabajo realizado por la fuerza del resorte como

$$W_s = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_f}} k z \dot{z} dt$$

$$W_s = k z_0^2 \beta^2 \int_0^{2\pi} \sin(\omega_f t - \psi) \cos(\omega_f t - \psi) d(\omega_f t)$$

con lo cual, después de efectuadas las operaciones se obtiene:

$$W_s = 0$$

Respuesta al impulso

Una fuerza de impulso se define como una fuerza que tiene una gran magnitud pero que actúa durante un intervalo de tiempo muy corto, de tal forma que la integral de tiempo de esta fuerza es una magnitud finita. Si la fuerza de impulso $F(t)$ actúa sobre un sistema de un grado de libertad como el mostrado en la Figura 2.1, para el cual la ecuación diferencial de movimiento está expresada en la forma

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = F(t)$$

entonces la integración de esta ecuación sobre el corto intervalo de tiempo (t_1, t_2) queda:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \ddot{z} dt + \int_{t_1}^{t_2} c \dot{z} dt + \int_{t_1}^{t_2} k z dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt \quad (2.57)$$

Ya que el intervalo de tiempo (t_1, t_2) es muy pequeño, puede asumirse que z no ha cambiado significativamente y que el cambio de velocidad es finito. Por lo tanto,

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \int_{t_1}^{t_2} c \dot{z} dt = 0$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \int_{t_1}^{t_2} k z dt = 0$$

Si t_1 tiende a t_2 , la ecuación 2.57 se puede simplificar a:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \ddot{z} dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt \quad (2.58)$$

Como $\dot{z} = dz/dt$, la ecuación anterior puede ser reescrita en la forma

$$\int_{\dot{z}_1}^{\dot{z}_2} m d\dot{z} = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt \quad (2.59)$$

donde \dot{z}_1 y \dot{z}_2 representan las velocidades en los instantes t_1 y t_2 . La ecuación 2.59 se convierte en:

$$m (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$$

o

$$\Delta\dot{z} = \dot{z}_2 - \dot{z}_1 = \frac{1}{m} \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt \quad (2.60)$$

donde $\Delta\dot{z}$ es el cambio repentino en la magnitud de la velocidad de la masa debido a la fuerza de impulso. La integral de tiempo en esta última ecuación se denomina el *impulso lineal*, y se define por:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt \quad (2.61)$$

En el caso particular en el cual el impulso lineal es igual a uno (1), I se denomina *impulso unitario*.

La ecuación 2.61 también puede escribirse como

$$\Delta\dot{z} = \dot{z}_2 - \dot{z}_1 = \frac{I}{m} \quad (2.62)$$

Este resultado indica que el efecto de la fuerza de impulso, el cual actúa sobre un intervalo de tiempo de muy corta duración sobre un sistema que inicialmente estaba en reposo, puede ser calculado considerando el movimiento del sistema con velocidad inicial I/m y desplazamiento inicial cero. Este, en el caso de movimiento impulsivo, puede considerarse como el sistema vibrando libremente como resultado de la aplicación de una velocidad inicial definida por la ecuación 2.62.

La vibración libre del sistema de un grado de libertad sub-amortiguado está gobernada por las ecuaciones

$$z(t) = Z e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (2.63)$$

$$\dot{z}(t) = \zeta \omega Z e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t + \phi) + \omega_d Z e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega_d t + \phi) \quad (2.64)$$

donde Z y ϕ son constantes que deben ser calculadas con base en las condiciones iniciales, ω es la frecuencia natural, ζ es el factor de amortiguamiento y ω_d es la frecuencia natural de amortiguamiento

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Como resultado de la aplicación de una fuerza impulsiva con un impulso lineal I en $t = 0$, las condiciones iniciales son:

$$z(t=0) = 0, \quad \dot{z}(t=0) = \frac{I}{m}$$

Al considerar las condiciones iniciales en la ecuación (2.63) se obtiene:

$$\phi = 0$$

Empleando la ecuación 2.64 y la velocidad inicial, se verifica que:

$$z(t) = \frac{I}{m \omega_d} e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega_d t) \quad (2.65)$$

la cual puede ser reescrita como:

$$z(t) = I H(t) \quad (2.66)$$

donde $H(t)$ se denomina la *función de respuesta al impulso*, la cual es definida como

$$H(t) = \frac{1}{m \omega_d} e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega_d t) \quad (2.67)$$

2.3. Funciones de transferencia para sistemas de un grado de libertad

Considérese de nuevo el diagrama mostrado en la Figura 2.1. Ya que la masa solo puede desplazarse en una sola dirección (un sólo grado de libertad), la ecuación de movimiento del sistema queda representada por la ecuación 2.1:

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = F(t)$$

Supóngase que la fuerza $F(t)$ es variable, de tipo senoidal. Al aplicar la transformada de Laplace a cada uno de los términos de la ecuación, se obtiene:

$$\mathcal{L}[m\ddot{z}(t)] = m [s^2 z(s) - s z(0) - \dot{z}(0)], \quad (2.68)$$

$$\mathcal{L}[c\dot{z}(t)] = c [s z(s) - z(0)], \quad (2.69)$$

$$\mathcal{L}[kz(t)] = k [z(s) - s z(0) - \dot{z}(0)], \quad (2.70)$$

$$\mathcal{L}[F(t)] = F(s), \quad (2.71)$$

donde $z(0)$ y $\dot{z}(0)$ representan las condiciones de posición y velocidad iniciales respectivamente y $z(s)$ es la transformada de Laplace de $z(t)$.

Ya que se desea obtener la función de transferencia del sistema que represente la respuesta en estado estacionario del sistema a una entrada senoidal, puede suponerse que las condiciones iniciales están ajustadas a cero.

La transformada de Laplace de la ecuación de movimiento del sistema representado por la ecuación 2.1, donde $F(s)$ representa la transformada de Laplace de $F(t)$ es:

$$m s^2 z(s) + c s z(s) + k z(s) = F(s) \quad (2.72)$$

Con base en la anterior ecuación, se obtiene la función de transferencia:

$$\frac{z(s)}{F(s)} = \frac{1}{m s^2 + c s + k} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{c}{m} s + \frac{k}{m}} \quad (2.73)$$

La ecuación 2.73 puede simplificarse si se tienen en cuenta las siguientes condiciones:

1. $\omega_n^2 = k/m$, donde ω_n es la frecuencia natural no amortiguada del sistema en rad/s
2. $C_c = 2\sqrt{k m}$, donde C_c es el amortiguamiento crítico
3. ζ es el amortiguamiento proporcional, calculado como un porcentaje del amortiguamiento crítico
4. $c/m = 2 \zeta \omega_n$

Con las anteriores sustituciones, la ecuación 2.73 queda:

$$\frac{z(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.74)$$

La ecuación 2.74 representa la relación entre $z(s)$ y $F(s)$, o lo que es lo mismo, la relación entre la respuesta del sistema de un grado de libertad $z(s)$ y la perturbación definida por $F(s)$, que se define como la función de transferencia del sistema.

2.4. Respuesta en frecuencia para sistemas de un grado de libertad

Para calcular la respuesta en frecuencia, basta reemplazar los términos “ $j\omega$ ” por “ s ” en la ecuación 2.74, donde “ j ” es el operador imaginario:

$$\begin{aligned} \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m}}{j\omega^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2 + 2\zeta\omega\omega_n j + \omega_n^2} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m\omega^2}}{-1 + \frac{2\zeta\omega_n j}{\omega} + \frac{\omega_n^2}{\omega^2}} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m\omega^2}}{\left[\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 - 1\right] + j2\zeta\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)} \end{aligned} \quad (2.75)$$

La ecuación 2.75 muestra que la relación (z/F) depende de la frecuencia ω . Esta relación es un número complejo que tiene propiedades diferentes para valores diferentes de la relación (ω_n/ω).

A bajas frecuencias, relativas a la frecuencia de resonancia, $\omega_n^2 \gg \omega \omega_n \gg \omega^2$, con lo cual la función de transferencia se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2 + 2\zeta\omega\omega_n j + \omega_n^2} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &\cong \frac{\frac{1}{m}}{\omega_n^2} = \frac{1}{m\omega_n^2} = \frac{1}{m\frac{k}{m}} = \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Ya que la respuesta en frecuencia es un número complejo, puede calcularse la magnitud y la fase de la siguiente forma:

$$\left| \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} \right| = \frac{1}{k} \quad (2.77)$$

$$\angle \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} = 0^\circ \quad (2.78)$$

Por lo tanto, la ganancia a bajas frecuencias es un número constante ($1/k$), es decir, la inversa de la constante elástica del resorte. El ángulo de fase es 0° debido a que el signo es positivo.

A altas frecuencias, $\omega^2 \gg \omega\omega_n \gg \omega_n^2$, con lo cual la función de transferencia se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2 + 2\zeta\omega\omega_n j + \omega_n^2} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &\cong \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2} = \frac{-1}{m\omega^2} \end{aligned} \quad (2.79)$$

En este caso la magnitud y la fase se convierten en:

$$\left| \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} \right| = \left| \frac{-1}{m\omega^2} \right| = \frac{1}{m\omega^2} \quad (2.80)$$

$$\angle \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} = -180^\circ \quad (2.81)$$

A altas frecuencias la ganancia está dada por $1/(m\omega^2)$ y la fase es -180° debido a que el signo es negativo.

Cuando la frecuencia coincide con la resonancia, esto es $\omega = \omega_n$, la función de transferencia está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2 + 2\zeta\omega\omega_n j + \omega_n^2} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m}}{2\zeta\omega\omega_n j} = \frac{\frac{1}{m}}{2\zeta\omega_n^2 j} = \frac{1}{2\zeta\omega_n^2 m j} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{1}{\frac{2\zeta k m j}{m}} = \frac{1}{2\zeta k m j} = \frac{\frac{1}{k}}{2\zeta j} = \frac{-j}{2\zeta} \end{aligned} \quad (2.82)$$

La magnitud y la fase en condiciones de resonancia se convierten en:

$$\left| \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} \right| = \left| \frac{-j}{2\zeta} \right| = \frac{1}{2\zeta} \frac{1}{m\omega^2} \quad (2.83)$$

$$\angle \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} = -90^\circ \quad (2.84)$$

En este caso, la magnitud es la ganancia a bajas frecuencia $1/k$ dividida por 2ζ . Ya que ζ normalmente es un número pequeño, se observa que la magnitud de resonancia se amplifica. El ángulo de fase en condiciones de resonancia es de 90° .

2.5. Modelo en el espacio de estados para sistemas de un grado de libertad

Considérese de nuevo la Figura 2.1. La ecuación diferencial del sistema está dada por 2.1:

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = F(t)$$

Como el sistema es de segundo orden, contiene por lo tanto dos integradores. Las variables de estado pueden definirse como:

$$x_1(t) = z(t)$$

$$x_2(t) = \dot{z}(t)$$

Con base en lo anterior se obtiene:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) = x_2(t) \quad (2.85)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}F(t) \quad (2.86)$$

La ecuación de salida es:

$$z = x_1 \quad (2.87)$$

En forma matricial, las ecuaciones 2.85 y 2.86 se escriben:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t) \quad (2.88)$$

Por lo tanto, la ecuación de salida se puede escribir como:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

La ecuación 2.88 es una ecuación de estado y la ecuación 2.89 es una ecuación de salida para el sistema. Estas ecuaciones están en la forma estándar

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2.90)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du \quad (2.91)$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

Las transformadas de Laplace de las ecuaciones (2.90) y (2.91) se obtienen de la siguiente forma:

$$s\dot{\mathbf{X}}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (2.92)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s) \quad (2.93)$$

Como la función de transferencia se define como la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada cuando las condiciones iniciales son cero, se tiene que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Por lo tanto,

$$s\dot{\mathbf{X}}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

o lo que es lo mismo,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

Multiplicando ambos lados de la última ecuación por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ se obtiene:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \quad (2.94)$$

Reemplazando la ecuación 2.94 en la 2.93 se encuentra que

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s) \quad (2.95)$$

La función de transferencia para el sistema en términos de \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} , denominada $G(s)$, es entonces

$$G(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D] \quad (2.96)$$

En este punto, puede verificarse fácilmente que para el sistema de un grado de libertad, la función de transferencia dada por la ecuación 2.96 es

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

la cual equivale a la misma expresión que se obtuvo para la función de transferencia en la ecuación 2.73.

2.6. Modelado de sistemas de dos grados de libertad

Considérese ahora el sistema mostrado en la Figura 2.5, el cual consiste de dos masas m_1 y m_2 , conectadas por resortes de rigideces k_1 y k_2 , y por amortiguadores con coeficientes de amortiguación viscosa c_1 y c_2 . Las masas solo pueden moverse en la dirección z , así que considerando el movimiento relativo de las masas, se configura un sistema de dos grados de libertad.

Las ecuaciones de movimiento para cada una de las masas del sistema, donde F_1 y F_2 representan las entradas del sistema o fuerzas perturbadoras, se expresan de la siguiente forma:

$$m_1 \ddot{z}_1 + (c_1 + c_2) \dot{z}_1 - c_2 \dot{z}_2 + (k_1 + k_2) z_1 - k_2 z_2 = F_1 \quad (2.97)$$

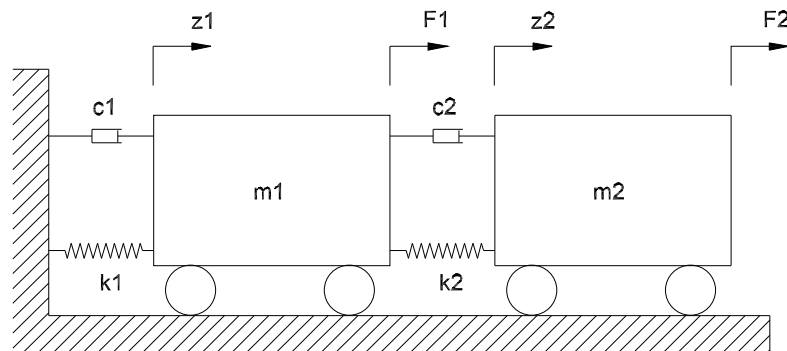


Figura 2.5: Diagrama esquemático general para sistemas de dos grados de libertad

$$m_2 \ddot{z}_2 - c_2 \dot{z}_1 + c_2 \dot{z}_2 - k_2 z_1 + k_2 z_2 = F_2 \quad (2.98)$$

Expresadas en forma matricial las ecuaciones de movimiento para este sistema (2.97 y 2.98) están dadas por:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Las matrices que acompañan a los vectores \ddot{z} , \dot{z} y z en la ecuación 2.99 se denominan *matriz de masa*, *matriz de amortiguamiento* y *matriz de rigidez* del sistema respectivamente. El orden de estas matrices cuadradas es igual al número de grados de libertad del sistema, y se construyen tomando como referencia el efecto de incidencia de las masas contiguas.

Si ahora se dividen las ecuaciones 2.97 y 2.98 por los coeficientes asociados a las masas, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\ddot{z}_1 + \frac{(c_1 + c_2)}{m_1} \dot{z}_1 - \frac{c_2}{m_1} \dot{z}_2 + \frac{(k_1 + k_2)}{m_1} z_1 - \frac{k_2}{m_1} z_2 = \frac{F_1}{m_1} \quad (2.100)$$

$$\ddot{z}_2 - \frac{c_2}{m_2} \dot{z}_1 + \frac{c_2}{m_2} \dot{z}_2 - \frac{k_2}{m_2} z_1 + \frac{k_2}{m_2} z_2 = \frac{F_2}{m_2} \quad (2.101)$$

Para el caso, se definen las variables de estado de la siguiente forma:

$$x_1(t) = z_1, \quad x_2(t) = z_2, \quad x_3(t) = \dot{z}_1, \quad x_4(t) = \dot{z}_2$$

Las ecuaciones de entrada y salida son respectivamente

$$U = [F_1 \quad F_2]^T \quad (2.102)$$

$$y = [z_1 \quad z_2 \quad \dot{z}_1 \quad \dot{z}_2]^T \quad (2.103)$$

En forma matricial el sistema de ecuaciones que define el movimiento en términos de las variables de estado y de la salida es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{(c_1 + c_2)}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

La ecuación 2.104 es una ecuación de estado y la ecuación 2.103 es una ecuación de salida para el sistema. Estas ecuaciones están en la forma estándar 2.90 y 2.91

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$y = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{(c_1 + c_2)}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

2.7. Funciones de transferencia para sistemas de dos grados de libertad

Como el sistema planteado por las ecuaciones 2.97 y 2.98 es de dos grados de libertad (2 entradas, 2 salidas), se obtienen 4 funciones de transferencia asociadas con las diferentes combinaciones de entradas-salidas del sistema, las cuales son:

$$\frac{z_1}{F_1}, \quad \frac{z_1}{F_2}, \quad \frac{z_2}{F_1}, \quad \frac{z_2}{F_2}$$

Con base en lo anterior, la ecuación 2.96 puede utilizarse para calcular la matriz de transferencia del sistema (matriz que contiene las cuatro funciones de transferencia ya mencionadas) en términos de **A**, **B**, **C** y **D**, denominada $G(s)$:

$$G(s) = [C(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D] \quad (2.107)$$

Si se utilizan los datos indicados en las ecuaciones 2.105 y 2.106, se obtienen los siguientes resultados para las funciones de transferencia:

$$\frac{z_1}{F_1} = \frac{m_2 s^2 + c_2 s + k_2}{m_1 m_2 s^4 + (c_1 m_2 + c_2(m_1 + m_2))s^3 + (k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2) + c_1 c_2)s^2 + (c_2 k_1 + k_2 c_1)s + k_1 k_2} \quad (2.108)$$

$$\frac{z_1}{F_2} = \frac{c_2 s + k_2}{m_1 m_2 s^4 + (c_1 m_2 + c_2(m_1 + m_2))s^3 + (k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2) + c_1 c_2)s^2 + (c_2 k_1 + k_2 c_1)s + k_1 k_2} \quad (2.109)$$

$$\frac{z_2}{F_1} = \frac{c_2 s + k_2}{m_1 m_2 s^4 + (c_1 m_2 + c_2(m_1 + m_2))s^3 + (k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2) + c_1 c_2)s^2 + (c_2 k_1 + k_2 c_1)s + k_1 k_2} \quad (2.110)$$

$$\frac{z_2}{F_2} = \frac{m_1 s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)}{m_1 m_2 s^4 + (c_1 m_2 + c_2(m_1 + m_2))s^3 + (k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2) + c_1 c_2)s^2 + (c_2 k_1 + k_2 c_1)s + k_1 k_2} \quad (2.111)$$

2.8. Modelado de sistemas de múltiples grados de libertad

Empleando notación matricial, la forma general de la ecuación de movimiento de un sistema de múltiples grados de libertad esta representada por

$$M \ddot{z} + C \dot{z} + K z = F \quad (2.112)$$

donde M , C y K son las *matrices de masa, amortiguamiento y rigidez* del sistema respectivamente, z es el vector de coordenadas de posición y F es el vector de las fuerzas que actúan sobre el sistema.

En el caso de sistemas con n grados de libertad, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez se expresan en la forma:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

y el vector de fuerza en la forma

$$F = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad \cdots \quad F_n]^T \quad (2.116)$$

donde cada uno de los términos m_{ij} , c_{ij} y k_{ij} , con $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, son los coeficientes de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente, considerando los efectos de las incidencias de cada una de las masas del sistema.

La ecuación 2.112 es la forma general de la ecuación matricial de movimiento que gobierna la *vibración forzada amortiguada* de sistemas de múltiples grados de libertad.

Cada una de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez debe cumplir con las siguientes características:

1. Todos los términos en las diagonales deben ser positivos.
2. Los coeficientes en M , C y K deben ser simétricos. A manera de ejemplo, esto quiere decir que los coeficientes en la matriz de amortiguamiento son tales que $c_{ij} = c_{ji}$.

2.9. Funciones de transferencia para sistemas de múltiples grados de libertad

Tomando como referencia el sistema de ecuaciones planteado en 2.112, deben resolverse las $(n \times n)$ posibles funciones de transferencia que resultan de todas las combinaciones de grados de libertad que se derivan de las posibles fuerzas aplicadas (*salidas* \times *entradas*). La solución de estas $(n \times n)$ funciones de transferencia no es fácil de obtener cuando el sistema de n grados de libertad es $n > 2$, por lo que en estos casos es de gran ayuda la utilización de programas de matemática simbólica como Maple o Matlab.

Sin embargo, el procedimiento es similar que en los casos anteriores:

1. Con base en el sistema de ecuaciones, se definen los vectores de salida y entrada del sistema, es decir los vectores

$$U = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad \dots \quad F_n]^T$$

$$Y = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_n \quad \dot{z}_1 \quad \dot{z}_2 \quad \dots \quad \dot{z}_n]^T$$

2. Se escriben las ecuaciones del sistema en la forma de ecuaciones de estado
3. A partir de las ecuaciones de estado, se determinan los valores de las matrices **A**, **B**, **C** y **D**, trabajando con las ecuaciones en la forma estándar indicada en 2.90 y 2.91. Esto es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$y = \mathbf{Cx} + Du$$

4. La matriz de transferencia del sistema, que contiene las $(n \times n)$ funciones de transferencia del sistema, se obtiene con la utilización de la ecuación 2.96

$$G(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]$$

2.10. Resumen

En este capítulo se presentó una muy breve introducción a la literatura básica para el modelado matemático de sistemas vibratorios desde la perspectiva de las funciones de transferencia para sistemas de varios grados de libertad.

Para el caso, inicialmente se presentó por separado el procedimiento para obtener las funciones de transferencia para sistemas de uno y dos grados de libertad. Por último, se generalizó el procedimiento para el caso de sistemas de múltiples grados de libertad.

Aunque la información presentada en este capítulo es común a la mayoría de los textos de modelado de sistemas dinámicos, aquí se presenta de nuevo puesto que es el punto de partida para la identificación paramétrica de sistemas dinámicos, dos de cuyos casos⁴ se plantean en los Capítulos 6 y 7 respectivamente.

⁴Identificación de los parámetros internos del modelo reducido y estimación del modelo de la velocidad de una máquina para efectos de control.

Identificación paramétrica

3.1. Introducción

Se entiende por *identificación paramétrica* el proceso de encontrar los parámetros de las ecuaciones matemáticas que rigen el comportamiento de un sistema dinámico, es decir, el proceso de crear un modelo matemático de un sistema físico real a partir de datos experimentales que incluyan las entradas y salidas del sistema. Una descripción formal del tema de identificación puede ser consultada en las referencias [11], [18], [19], [33].

Un sistema dinámico queda determinado por su *función de transferencia* [23]. La tarea de la identificación es por lo tanto la obtención experimental de dicha función de transferencia a partir de mediciones de la respuesta del sistema a la acción de señales de entrada conocidas. La idea general es la de ajustar los parámetros de un modelo determinado hasta que sus salidas coincidan (tanto como se pueda) con los datos observados en el sistema bajo análisis.

El procedimiento de identificación involucra varias etapas estrechamente relacionadas entre sí [19], las cuales pueden ser expresadas brevemente en la siguiente forma:

1. Selección de una señal de excitación adecuada (excitación persistente).
2. Selección de un cierto tiempo de muestreo.
3. Recolección de los datos.
4. Análisis del contenido espectral de los datos.
5. Pre-procesamiento de los datos para remover los valores medios y selección de una parte de los datos originales (pre-filtrado) para estimación y otra para validación.
6. Selección de la *estructura del modelo matemático* a utilizar.
7. Definición del criterio de identificación a partir de una cierta función de coste.
8. Cálculo del modelo.

9. Validación experimental del modelo identificado.

La selección de la estructura del modelo [18] tiene incidencia directa sobre la *calidad del modelo* obtenido y sobre la *exigencia de cálculo* requerida para la estimación de los parámetros. Para esto es conveniente el conocimiento previo del sistema (orden, polos, ceros, retardo).

La calidad del modelo puede evaluarse a partir del análisis de algún criterio de error (por ejemplo el error cuadrático medio). La estructura del modelo se escoge de tal forma que tenga la flexibilidad para adaptarse a diferentes sistemas. La selección de un modelo específico dentro de un conjunto de posibilidades requiere analizar las condiciones de linealidad o no linealidad del sistema. Sin embargo, para obtener resultados adecuados con pocos parámetros se requiere un conocimiento previo del proceso y algo de intuición. El *orden* del modelo está asociado a la selección del número de parámetros a estimar. Por lo general el análisis de los datos y el conocimiento preliminar que se tenga del proceso, permite deducir un rango de órdenes del modelo a considerar.

La selección del método de identificación está directamente relacionado con el modelo seleccionado. Una vez que se ha definido una estructura apropiada para el modelo, los métodos de identificación proporcionan una representación específica de la estructura del sistema.

Identificado el modelo es necesario verificar si es adecuado, es decir, comprobar si el modelo identificado representa o describe el comportamiento real del sistema, teniendo obviamente en cuenta las limitaciones del método de identificación. Para esto se recurre a las *técnicas de validación*, en las cuales se confronta el modelo obtenido con el sistema físico real.

Las cuatro tareas descritas (selección de una señal de excitación, definición de la estructura del modelo, identificación de los valores de los parámetros y validación del modelo) están directamente relacionadas entre sí, por lo que no siempre será posible realizarlas en forma completamente independiente.

A continuación se presentan algunas de las diferentes estructuras de los modelos utilizados en la identificación paramétrica. Esto se hace con el objeto de dar claridad acerca de los nombres utilizados en los modelos con base en el tipo de polinomios de aproximación utilizados. Esta presentación es importante puesto que es el fundamento para comprender los conceptos asociados a las funciones de transferencia para las posiciones y las velocidades en el modelo reducido de una máquina planteado en el Capítulo 6.

3.2. Estructura de los modelos lineales discretos

Los métodos de estimación paramétricos dependen del modelo a utilizar. La forma general de la estructura de un modelo discreto es:

$$y(t) = G(q^{-1})u(t) + H(q^{-1})e(t), \quad (3.1)$$

donde $u(t)$ representa las entradas al sistema, $y(t)$ las salidas y $e(t)$ las perturbaciones. Los términos $G(q^{-1})$ y $H(q^{-1})$ son filtros de orden finito que modelan las partes determinista y estocástica respectivamente. Los errores de modelado se incluyen a diferencia de otros métodos de estimación, en el término $e(t)$. A este término se le asocia una serie de variables aleatorias independientes uniformemente distribuida de media nula (denominadas *ruido blanco*).

Una característica particular de las distintas estructuras que se derivan de la ecuación general 3.1 es la forma de modelar la parte estocástica o ruido. Por este motivo los modelos se agrupan en dos grandes bloques¹:

3.2.1. Modelos en que $H(q^{-1}) = 1$

■ Modelos de media ajustada, MA o FIR

Se representan en la forma:

$$y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + e(t) \quad (3.2)$$

donde $G(q^{-1}) = B(q^{-1})$, nk representa el retardo puro del proceso, y $B(q^{-1})$ es un polinomio de grado nb que tiene la forma:

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_nq^{-nb} \quad (3.3)$$

Se les denomina también modelos de respuesta impulso finito (FIR). Tienen como inconveniente que para representar el comportamiento de un proceso, es necesario un gran número de coeficientes.

■ Modelos del error de salida (OE)

Se representan en la forma:

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t - nk) + e(t) \quad (3.4)$$

En este caso, $G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}q^{-nk}$, nk representa el retardo puro del proceso, y $F(q^{-1})$ es un polinomio autoregresivo de orden nf :

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_nq^{-nf} \quad (3.5)$$

Para simplificar se toma el término $u(t - nk)$ igual a $q^{-nk}u(t)$, es decir $q^{-nk}u(t) = u(t - nk)$.

3.2.2. Modelos en que $H(q^{-1}) \neq 1$

En general, la estructura de los diferentes modelos tiene la siguiente forma:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-nk} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t) \quad (3.6)$$

Se presentan los siguientes casos:

¹Véase la Tabla 3.1, donde se resumen los diferentes tipos de modelos utilizados en la identificación paramétrica con base en el orden y tipo de polinomios utilizados.

Tabla 3.1: Diferentes tipos de modelos utilizados en la identificación paramétrica.

Polinomios utilizados	Nombre de la estructura del modelo
B	FIR
AB	ARX
ABC	ARMAX
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE
BFGD	BJ

■ Modelos autoregresivos con variables exógenas, ARX

Se representan en la forma:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})q^{-nk}u(t) + e(t) \quad (3.7)$$

En este modelo se considera que la parte determinista y la parte estocástica tienen el mismo denominador:

$$G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}q^{-nk} \quad (3.8)$$

$$H(q^{-1}) = \frac{1}{A(q^{-1})} \quad (3.9)$$

Los polinomios $A(q^{-1})$ y $B(q^{-1})$ son polinomios autoregresivos de orden na y nb respectivamente:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_naq^{-na} \quad (3.10)$$

$$B(q^{-1}) = b_1 + b_2q^{-1} + \dots + b_n bq^{-nb+1} \quad (3.11)$$

■ Modelos autoregresivos de media móvil y variables exógenas, ARMAX

Se representan en la forma:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})q^{-nk}u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad (3.12)$$

Al igual que en las ecuaciones 3.8 y 3.9, $G(q^{-1})$ y $H(q^{-1})$ tienen el mismo denominador:

$$G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}q^{-nk} \quad (3.13)$$

$$H(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (3.14)$$

donde $A(q^{-1})$ y $B(q^{-1})$ son polinomios autoregresivos de orden na y nb respectivamente y $C(q^{-1})$ es un polinomio de estructura similar al polinomio $A(q^{-1})$ de orden nc :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na} \quad (3.15)$$

$$B(q^{-1}) = b_1 + b_2q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb+1} \quad (3.16)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc} \quad (3.17)$$

■ **Modelos de estructura ARARX o modelos de mínimos cuadrados generalizados**

Se representan en la forma:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})q^{-nk}u(t) + \frac{1}{D(q^{-1})}e(t) \quad (3.18)$$

donde $A(q^{-1})$ y $B(q^{-1})$ son polinomios autoregresivos de orden na y nb respectivamente y $D(q^{-1})$ un polinomio autoregresivo de orden nd :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na} \quad (3.19)$$

$$B(q^{-1}) = b_1 + b_2q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb+1} \quad (3.20)$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd} \quad (3.21)$$

■ **Modelos de estructura ARARMAX o modelos de matriz extendida**

Se representan en la forma:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})q^{-nk}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t) \quad (3.22)$$

donde los polinomios autoregresivos $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$, $C(q^{-1})$ y $D(q^{-1})$ son:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na} \quad (3.23)$$

$$B(q^{-1}) = b_1 + b_2q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb+1} \quad (3.24)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc} \quad (3.25)$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd} \quad (3.26)$$

■ **Modelo Box–Jenkins, BJ**

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} q^{-nk} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t) \quad (3.27)$$

donde los polinomios autoregresivos $B(q^{-1})$, $F(q^{-1})$, $C(q^{-1})$ y $D(q^{-1})$ son:

$$B(q^{-1}) = b_1 + b_2 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb+1} \quad (3.28)$$

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{nf} q^{-nf} \quad (3.29)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc} \quad (3.30)$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{nd} q^{-nd} \quad (3.31)$$

Una propiedad particular de esta estructura es que $G(q^{-1})$ y $H(q^{-1})$ no tienen parámetros comunes.

$$A(q^{-1})y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} q^{-nk} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t) \quad (3.32)$$

Objetivos de los métodos de estimación paramétricos

Los métodos de estimación paramétricos tienen por objetivo estimar los parámetros de los polinomios: A , B , C , D y F según el modelo considerado, de forma que el error de predicción sea mínimo.

En el caso de la ecuación general el error de modelización o residuos se determina a partir de la ecuación. El error de predicción es:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = \frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left(A(q^{-1})y(t) - \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} q^{-nk} u(t) \right) \quad (3.33)$$

La ecuación de los residuos anterior se puede evaluar considerando dos términos:

- **Modelado de la parte determinista.** Se observa que hay una relación lineal entre el error de predicción y los coeficientes de los polinomios A y B , mientras que respecto a los coeficientes del polinomio F la relación es no lineal. Este hecho implica que para estimar los parámetros del polinomio F , se debe utilizar un método de cálculo iterativo, mientras que si solo es necesario estimar los parámetros de los polinomios A y B , los métodos de cálculo a utilizar son analíticos, y por tanto más sencillos.
- **Modelado de la parte estocástica.** Los errores de modelización $\varepsilon(t)$ no son conocidos y la relación que hay entre los coeficientes y los residuos no es lineal. Consecuentemente, se deben estimar los valores de $\varepsilon(t)$ al mismo tiempo que los valores de los parámetros de los polinomios. En este caso, por lo tanto, los métodos de cálculo serán iterativos.

3.3. Método de estimación por mínimos cuadrados (LS)

El método LS estima modelos de estructura ARX. Estos modelos se pueden representar por la ecuación:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + v(t) \quad (3.34)$$

donde $y(t)$ es el valor de la salida en el instante t , $\varphi(t)$ y θ vectores de dimensión $d = na + nb$ de la forma:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= [-y(t-1) \dots -y(t-na)u(t-nk-1) \dots u(t-nb-nk)]^T \\ \theta(t) &= [a_1 \dots a_{na} b_1 \dots b_{nb}] \end{aligned} \quad (3.35)$$

El problema a resolver consiste en estimar el vector de los parámetros $\hat{\theta}$, partiendo de las N observaciones realizadas: $y(1), \varphi(1), \dots, y(N), \varphi(N)$.

De la ecuación (3.34) se deducen un conjunto de ecuaciones lineales:

$$y(1) = \varphi^T(1)\hat{\theta} \quad (3.36)$$

$$y(2) = \varphi^T(2)\hat{\theta} \quad (3.37)$$

$$\vdots$$

$$y(N) = \varphi^T(N)\hat{\theta} \quad (3.39)$$

que puede ser escrita en forma matricial según:

$$Y = \Phi\hat{\theta} \quad (3.40)$$

donde es Y un vector de dimensión N , $Y = [y(1) y(2) \dots y(N)]^T$ y Φ una matriz de dimensión d , $\Phi = [\varphi(1) \varphi(2) \dots \varphi(N)]$.

El error de modelado o residuo se define como:

$$\varepsilon = Y - \Phi\hat{\theta} \quad (3.41)$$

con $\varepsilon = [\varepsilon(1) \dots \varepsilon(N)]^T$.

La estimación por mínimos cuadrados (LS), consiste en minimizar la función residuo $V(\hat{\theta})$ definida por la ecuación:

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon = \frac{1}{2} \|\varepsilon\|^2 \quad (3.42)$$

Sustituyendo en forma adecuada, se obtiene que la función a minimizar es:

$$\min_{\hat{\theta}} V(\theta) = V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} [Y^T Y - Y^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y] \quad (3.43)$$

El gradiente de la función respecto a los parámetros debe ser nula. Se deduce que el valor de los parámetros que minimizan la función $V(\hat{\theta})$ es:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (3.44)$$

La ecuación anterior se puede escribir como un producto de sumas finitas:

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right] \quad (3.45)$$

de la cual, una vez conocido el orden del modelo (na , nb y nk) es fácilmente calculable el valor de sus parámetros.

Se debe tener en cuenta que la ecuación planteada tiene solución si la matriz $\Phi^T \Phi$ es definida positiva, o equivalentemente si el rango $(\Phi) \geq n$.

En caso contrario la ecuación tiene infinitas soluciones. El requisito necesario para garantizar una solución única de la ecuación $\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$ es que la señal de excitación sea *persistentemente excitada* de orden mayor que d .

Propiedades del método LS

Las propiedades estadísticas de este método demuestran que dados unos datos que satisfacen la ecuación:

$$y(t) = \varphi^T(t) \theta_0 + e(t) \quad (3.46)$$

donde θ_0 es el vector de parámetros verdadero y asumiendo que $e(t)$ es un ruido blanco de media cero y varianza λ^2 :

1. $\hat{\theta}$ converge a θ_0 cuando N tiende a infinito.
2. La variable aleatoria $\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta_0)$ se comporta como una distribución normal de media cero y covarianza P_{LS} , donde $P_{LS} = \tilde{\lambda}^2 (\Phi^T \Phi)^{-1}$.
3. Un estimador de λ^2 es:

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{2V(\hat{\theta})}{N - d} \quad (3.47)$$

Se resalta como principal ventaja de este método que la conversión a un mínimo global está garantizada y no existen mínimos locales. Como inconveniente se resalta que si la perturbación $v(t)$ no es un ruido blanco y la relación señal útil a señal ruido es importante, la conversión al valor real de θ_0 no está garantizada. Este hecho limita su utilización como método general de estimación.

Solución de LS utilizando la ecuación normal

La estimación de los parámetros por el método LS se realiza a partir de la ecuación

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right] \quad (3.48)$$

la cual es conocida con el nombre de ecuación normal.

Se resalta como ventaja que la resolución directa de esta ecuación es sencilla, al igual que los cálculos algebraicos a realizar. Sin embargo, presenta el inconveniente que la matriz $\Phi^T \Phi$ puede estar mal condicionada, particularmente si es de gran dimensión, lo cual comporta errores numéricos importantes en la resolución de la ecuación $\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$. Es por este motivo que diferentes investigadores han presentado alternativas para resolver esta ecuación, una de ellas por triangulación ortonormal.

Solución de LS por triangulación ortonormal

La triangulación ortonormal o transformación QR es una de las alternativas numéricas desarrolladas para resolver la ecuación lineal $Y = \Phi \hat{\theta}$ y evitar los errores generados por el mal acondicionamiento de la matriz $\Phi^T \Phi$.

El procedimiento consiste en multiplicar el sistema de ecuaciones original $Y = \Phi \hat{\theta}$ por una matriz ortonormal Q :

$$Q\Phi\theta = QY \quad (3.49)$$

En estas condiciones, la norma de la función error no se ve afectada por la transformación aplicada, ya que si Q es ortonormal: $QQ^T = I$, por tanto:

$$\|QY - Q\Phi\theta\|^2 = \|Q(Y - \Phi\theta)\|^2 \quad (3.50)$$

$$= (Y - \Phi\theta)^T Q^T Q (Y - \Phi\theta) \quad (3.51)$$

$$= (Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) \quad (3.52)$$

$$= \|(Y - \Phi\theta)\|^2 \quad (3.53)$$

El objetivo es buscar una matriz ortonormal Q tal que:

$$Q\theta = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

donde R es una matriz cuadrada de dimensión $(d \times d)$ triangular superior. La ecuación anterior se puede escribir como:

$$\Phi = Q^T \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

A la ecuación anterior se la denomina factorización QR de Φ . Una posible forma de construir la matriz Q es utilizando la transformación de Householder.

En estas condiciones, el término QY , se puede descomponer en dos matrices:

$$QY = \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

y calcular la función de pérdida así:

$$V(\hat{\theta}) = \|\mathcal{Q}\Phi\hat{\theta} - \mathcal{Q}Y\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \hat{\theta} - \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix} \right\|^2 = \|\mathcal{R}\hat{\theta} - L\|^2 + \|M\|^2 \quad (3.57)$$

Es fácil ver que $V(\hat{\theta})$ es minimizada por θ cuando:

$$\mathcal{R}\hat{\theta} = L \quad (3.58)$$

y se obtiene que el mínimo de la función de pérdida vale:

$$\min_{\hat{\theta}} V(\theta) = \|M\|^2 = M^T M \quad (3.59)$$

Como ventajas de esta metodología de cálculo se pueden mencionar:

1. El sistema lineal $\mathcal{R}\hat{\theta} = L$ está mejor condicionado que la ecuación $\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$ y por tanto es numéricamente superior.
2. La función de pérdida se calcula sin la necesidad de estimar el valor de sus parámetros.

Como inconveniente, se debe destacar que se requiere el doble de cálculo que el método directo.

3.4. Método del Subespacio

3.4.1. Definición del espacio de estados para el problema de identificación

Considérese la planta P mostrada en la Figura 3.1 que representa un sistema desconocido que se desea identificar. La relación matemática entre la entrada medida $u(k)$ y la salida observada $y(k)$ está descrita por el siguiente modelo en el espacio de estados:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\tilde{u}(k) + f(k) \quad \text{para } k > 0; \quad x(0) = x_0; \quad x(k) \in \mathbb{R}^n \\ y(k) &= Cx(k) + D\tilde{u}(k) + v(k) \quad \tilde{u}(k) \in \mathbb{R}^m; \quad y(k) \in \mathbb{R}^l \\ u(k) &= \tilde{u}(k) + w(k) \end{aligned}$$

Se asume que $f(k)$, $w(k)$ y $v(k)$ son ergódicamente correlacionados con media cero, y los ruidos blancos satisfacen

$$E \left[\begin{bmatrix} f(t) \\ w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(s)^T & w(s)^T & v(s)^T \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21}^T & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31}^T & \Sigma_{23}^T & \Sigma_{33} \end{bmatrix} \delta_{s,t},$$

donde $E[\cdot]$ denota la esperanza matemática y $\delta_{s,t}$ es la función Delta de Dirac que satisface:

$$\delta_{s,t} = \begin{cases} 1 & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$$

Se asume que (A, B, C, D) es un sistema de matrices minimal que define completamente las propiedades de la planta bajo estudio. Con base en la anterior descripción de la planta P , el problema de la identificación a considerar está definido como sigue: dada la secuencia de entradas y salidas

$$\{u(k), y(k)\}_{k=0}^N = [u(0), y(0) \quad \cdots \quad u(N), y(N)],$$

el problema se establece en la forma estadísticamente consistente de hallar:

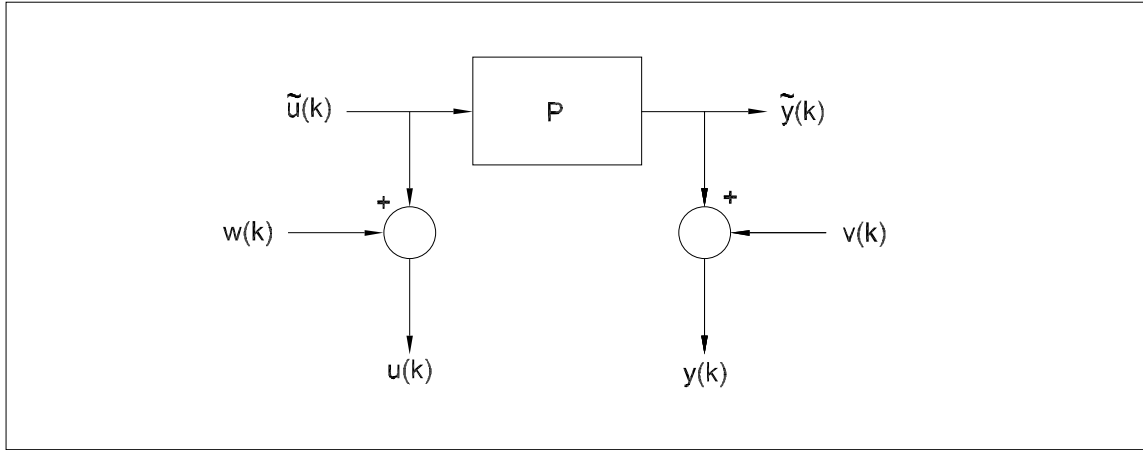


Figura 3.1: Diagrama de bloques de planta con perturbaciones genéricas

1. El orden n del sistema, y
2. El sistema matricial (A, B, C, D) , y el estado inicial $x(0)$.

3.4.2. Definición de la ecuación de datos

El primer paso consiste en el diseño y aplicación del algoritmo de identificación del subespacio. Este consiste en hallar una apropiada relación entre la medida de la secuencia de datos y las matrices (o parámetros) que definen el modelo. Un caso donde la entrada y la salida describen la planta P está dado por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (3.60)$$

No obstante, este modelo solo relaciona el caso local de las cantidades $\{x(k+1), x(k), y(k), u(k)\}$. Para relacionar segmentos largos de las entradas y las salidas se utiliza la respuesta de los sistemas multivariables descrito en la ecuación anterior para los primeros k instantes de tiempo:

$$\begin{cases} x(1) = Ax(0) + Bu(0) \\ x(2) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\ x(3) = A^3x(0) + A^2Bu(0) + \dots \\ \vdots \\ x(k) = A^kx(0) + A^{k-1}Bu(0) + \dots + ABu(k-2) + Bu(k-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(1) = Cx(0) + Du(0) \\ y(2) = CAx(0) + CBu(0) + \dots \\ y(3) = CA^2x(0) + CABu(0) + \dots \\ \vdots \\ y(k-1) = CA^{k-1}x(0) + CA^{k-2}Bu(0) + \dots + CBu(k-2) + Du(k-1) \end{cases}$$

Esta secuencia de expresiones se obtiene de la relación entre las entradas y las salidas $\{u(k)\}_{k=0}^{s-1}$, $\{y(k)\}_{k=0}^{s-1}$,

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(s-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ DA \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ CA^{s-2}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(s-2) \\ u(s-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C \\ DA \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix} = \Gamma_s; \quad \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ CA^{s-2}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix} = H_s$$

En la secuencia, la matriz Γ_s puede ser referida como la matriz de observabilidad extendida, las matrices Γ_s, H_s , se deducen de el sistema de matrices (A, B, C, D) . El cambio sobre $k+1$ muestras, se obtienen por:

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+s-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ DA \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ CA^{s-2}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+s-2) \\ u(k+s-1) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la combinación resultante para diferentes cambios de k se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(N-s+1) \\ y(1) & y(2) & & y(N-s+2) \\ \vdots & & & \vdots \\ y(s-1) & y(s) & \cdots & y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ DA \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix} [x(0) \quad x(1) \quad \cdots \quad x(N-s+1)] +$$

$$\begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ CA^{s-2}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(N-s+1) \\ u(1) & u(2) & & u(N-s+2) \\ \vdots & & & \vdots \\ u(s-1) & u(s) & \cdots & u(N) \end{bmatrix}$$

La ecuación de datos descrita puede simplificarse a una presentación mas compacta como

$$Y_{0,s,N} = \Gamma_s X_{0,1,N-s+1} + H_s U_{0,s,N} \quad (3.61)$$

donde las primeras entradas del par de subíndices de la matriz de Hankel $Y_{0,s,N}$ y $U_{0,s,N}$ solo se refieren al índice de tiempo de su entrada superior izquierda, la segunda se refiere para el número de bloques fila en las matrices de Hankel y la tercera, se refiere a la entrada con índice de tiempo de la parte inferior derecha. Lo mismo se cumple para la matriz de Hankel $X_{0,1,N-s+1}$.

La ecuación de datos (3.61) es por lo tanto una relación entre las matrices construidas de los datos y las matrices de el sistema (A, B, C, D) .

3.4.3. Análisis de las medidas para la respuesta al escalón (step)

La respuesta del sistema a una entrada escalón para el caso de una entrada y múltiples salidas (o sistemas SIMO), es la respuesta para el caso especial de la entrada definida como:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

Para este caso sea $E_{N'} \in R^{N'}$ para $N' = N - s + 2$, el cual denota el vector con todas las entradas iguales a uno. Entonces se puede escribir la ecuación de datos (3.61) como:

$$Y_{0,s,N} = \Gamma_s X_{0,1,N-s+1} + (H_s E_s) E_{N'}^T \quad (3.63)$$

La pregunta es si dada la información solo de $Y_{0,s,N}$ y E_N , se puede descomponer $Y_{0,s,N}$ otra vez dentro de una suma de dos componentes que llevan información en cualquiera de las dos componentes originales de la suma (3.63). Una descomposición ortogonal es:

$$\begin{aligned} Y_{0,s,N} &= Y_{0,s,N} \left(I - \frac{E_{N'} E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \right) + \left(Y_{0,s,N} \frac{E_{N'}}{\sqrt{N'}} \right) \frac{E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \\ &= \Gamma_s X_{0,s,N} \left(I - \frac{E_{N'} E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \right) + \left(Y_{0,s,N} \frac{E_{N'}}{\sqrt{N'}} \right) \frac{E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Esto se sigue del hecho de que $E_{N'}^T E_{N'} = N'$. La última expresión muestra que la columna de la matriz de transformación de datos $Y_{0,s,N} \left(I - \frac{E_{N'} E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \right)$ está formada interiormente por una combinación de las que conforman la matriz de observabilidad extendida. En términos matemáticos, este resultado muestra que el espacio columna de la matriz $Y_{0,s,N} \left(I - \frac{E_{N'} E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \right)$ está contenido en el de la matriz Γ_s .

3.4.4. Deducción del orden n del sistema y sus respectivas matrices

Sea el sistema minimal SIMO dado por (3.60). Si A es asintóticamente estable (es decir, todos los autovalores de A tienen norma menor o igual que uno), la entrada es un escalón (step) como se definió en la ecuación (3.62) y $x(0) = 0$, entonces:

(i)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} x(k) = (I - A)^{-1} B \quad (3.65)$$

(ii)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Y_{0,s,N} \left(I - \frac{E_{N'} E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \right) = \Gamma_s (I - A)^{-1} [B \quad AB \quad A^2 B \quad \dots] \quad (3.66)$$

Ya que el sistema es asintóticamente estable, el estado converge para un valor estacionario \bar{x} , el cual satisface:

$$\bar{x} = A\bar{x} + B \quad \text{lo cual implica} \quad \bar{x} = (I - A)^{-1} B$$

Ya que la secuencia de estados es determinista, esto significa que los valores son iguales, es decir:

$$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} x(k)$$

lo cual concluye la prueba para el ítem (i). Para la parte (ii) obsérvase que $E_N^T E_N = N$,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} Y_{0,s,N} \left(I - \frac{E_{N'}}{\sqrt{N'}} \frac{E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \Gamma_s X_{0,s,N} \left(I - \frac{E_{N'}}{\sqrt{N'}} \frac{E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \Gamma_s \left(X_{0,s,N} - \frac{1}{N'} X_{0,s,N} E_{N'} E_{N'}^T \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \Gamma_s \left(X_{0,s,N} - \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} x(k) E_{N'}^T \right) \end{aligned}$$

y mediante el resultado (i) y la expansión de la expresión $X_{0,s,N}$ en términos del sistema $(A;B)$, el lado derecho de la última ecuación es igual a:

$$\begin{aligned} &= \Gamma_s \left(\begin{bmatrix} 0 & B & AB+B & A^2B+AB+B & \dots \end{bmatrix} - (I-A)^{-1} B E_{N'}^T \right) \\ &= \Gamma_s \left[\begin{array}{c|c|c|c} -(I-A)^{-1} B & B - (I-A)^{-1} B & AB+B - (I-A)^{-1} B & \dots \end{array} \right] \\ &= \Gamma_s \left[\begin{array}{c|c|c|c} -(I-A)^{-1} B & B - B - AB - A^2B - \dots & AB+B - B - AB - A^2B - \dots & \dots \end{array} \right] \\ &= -\Gamma_s (I-A)^{-1} \left[\begin{array}{c|c|c|c} B & AB & A^2B & \dots \end{array} \right] \end{aligned}$$

de donde se tiene que hacer uso de la expansión en serie de la expresión,

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots$$

la cual converge para A .

El teorema planteado en (i) y (ii) resalta para el caso especial de la entrada $u(k)$, la cual es una función escalón, el sistema (3.60) es minimal, la matriz A es asintóticamente estable y el número de bloques fila de la matriz Hankel $Y_{0,s,N}$ es el entero s , el cual satisface $s > n$. Si se denota el rango de la matriz M por $\text{rank}(M)$, se cumplen las siguientes condiciones:

1. $(I-A)^{-1}$ es invertible,
2. $\text{rank}(\Gamma_s (I-A)^{-1}) = n$, y
3. $\text{rank} \left[\begin{array}{c|c|c|c} B & AB & \dots & A^n B & \dots \end{array} \right] = n$

Con base en las anteriores conclusiones, el teorema que es una aplicación de la desigualdad de Sylvester muestra que:

$$\text{rank} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} Y_{0,s,N} \left(I - \frac{E_{N'}}{\sqrt{N'}} \frac{E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \right) \right) = n \quad (3.67)$$

Además a partir de lo expuesto anteriormente se tiene el siguiente resultado:

$$\text{rank} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} Y_{0,s,N} \left(I - \frac{E_{N'}}{\sqrt{N'}} \frac{E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \right) \right) = \text{rank}(\Gamma_s) \quad (3.68)$$

La combinación de los resultados planteados por las ecuaciones (3.65) y (3.67) muestran que el espacio columna de la matriz $Y_{0,s,N} \left(I - \frac{E_{N'}}{\sqrt{N'}} \frac{E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \right)$ no solo está contenida en el espacio de la matriz Γ_s sino que también es igual. Pero si es un subespacio columna propio del espacio columna de Γ_s , su rango tiene que ser menor que n .

Como consecuencia de lo anterior, se obtiene:

1. El número de autovalores diferentes de cero es igual al rango de Γ_s y de este modo el orden n fundamental del sistema puede ser identificado
2. Si la SVD (Descomposición en Valores singulares) se denota como

$$Y_{0,s,N} \left(I - \frac{E_{N'}}{\sqrt{N'}} \frac{E_{N'}^T}{\sqrt{N'}} \right) = U_n S_n V_n^T \quad (3.69)$$

tal que $\text{rank}(S_n) = n$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_n = \Gamma_s T = \begin{bmatrix} CT \\ CTT^{-1}AT \\ \vdots \\ CT(T^{-1}AT)^{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_T \\ C_T A_T \\ \vdots \\ C_T A_T^{s-1} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

para una transformación T en $R^{n \times n}$ no singular arbitraria

3. De la SVD (3.69) y (3.65) se sigue que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_n V_n^T = -(I - A_T)^{-1} \begin{bmatrix} B_T & A_T B_T & \cdots & A_T^n B_T & \cdots \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

El sistema de ecuaciones (A, B, C) puede ser calculado a partir de las ecuaciones (3.70) y (3.71).

$$\begin{aligned} C_T &= \lim_{N \rightarrow \infty} U_n(1:l, :) \\ A_T &= \left(\lim_{N \rightarrow \infty} U_n(1:(s-1)l, :) \right)^{-1} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} U_n(l+1:sl, :) \right) \\ B_T &= \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{V}_n^T(:, 1); \quad \bar{V}_n^T = (I - A_T) S_n V_n^T \end{aligned} \quad (3.72)$$

Pueden encontrarse algoritmos para la identificación con base en el método de subespacio, los cuales se encuentran incluidos como parte de las herramientas (*Toolbox*) del Matlab.

3.5. Identificación paramétrica de sistemas vibratorios

En el estudio de sistemas de control de vibraciones se pueden utilizar, dependiendo del tipo de problema, procedimientos *frecuenciales* o *paramétricos*. Los métodos *frecuenciales*² asumen que se tiene un conocimiento muy preciso de cada uno de los componentes del sistema bajo estudio. En teoría, esta información se puede obtener de los datos suministrados en forma independiente por los fabricantes de los equipos, o

²Clásicos o tradicionales

directamente de pruebas realizadas en máquinas de ensayo instaladas en laboratorios dedicados a este tema. Sin embargo, la utilización de esta información requiere el análisis por separado de cada uno de los componentes involucrados en el sistema. Aún si los datos individuales pueden obtenerse con buena precisión, siguen existiendo algunas incertidumbres cuando los elementos se integran en una unidad³, lo cual implica un esfuerzo considerable para modelar con precisión el sistema.

Una alternativa a lo anteriormente expuesto es la utilización de métodos *paramétricos*, a partir de los cuales es posible obtener directamente información real del sistema como un todo, incluyendo la forma particular de ensamble estructural de los componentes, lo cual supone la obtención de modelos matemáticos más eficientes que los modelos basados en datos de los componentes. Más aún, los procedimientos de identificación pueden realizarse sin necesidad de desmantelar el sistema, lo cual significa en la práctica un proceso de modelado más simple. Esto se traduce en la posibilidad de diseñar sistemas de control más complejos con herramientas de modelado más versátiles y eficientes.

3.6. Resumen

En el presente capítulo se describieron en forma muy general algunos de los procedimientos que se utilizan para obtener un modelo matemático de un sistema físico real a partir de datos experimentales. Este trabajo, denominado *identificación paramétrica*, involucra varias acciones estrechamente relacionadas como son la selección de la señal de excitación, la selección de la estructura del modelo matemático, la identificación de los parámetros del modelo y la validación de los resultados.

Ya que no existe una única representación matemática de un fenómeno físico, el proceso de identificación es ante todo un arte que requiere de sensibilidad para definir cuales son los parámetros que deben ser determinados, además de habilidad técnica e instrumentación adecuada para obtener datos con la suficiente precisión para garantizar que la estimación sea la representación más adecuada del fenómeno físico que se quiere describir.

Como resultado directo de la identificación, se pueden lograr dos objetivos básicos:

1. Calcular los parámetros internos de un sistema.
2. Modelar el sistema como un todo

En este punto es importante resaltar que la combinación de modelos teóricos y experimentales permite validar ambos modelos, aprovechando las ventajas relativas de cada uno ellos: profundidad del modelo teórico y exactitud del modelo experimental.

En los siguientes capítulos se mostrarán los resultados de la identificación paramétrica y del modelado de un sistema vibratorio, y su aplicación al diseño de estrategias de control sobre un modelo reducido (simplificado) de máquina.

³Por ejemplo cuando cambian las localizaciones de los componentes para dar paso a nuevas estructuras de soporte.

Modelado de máquinas sometidas a vibración

4.1. Introducción

Una máquina real instalada sobre soportes elásticos se puede modelar como un sistema dinámico complejo no holonómico¹. En la práctica se utilizan procedimientos analíticos o experimentales para el estudio de sus características dinámicas.

El procedimiento *analítico* asume la máquina como un conjunto de masas discretas conectadas por medio de resortes y amortiguadores cuya dinámica puede ser descrita mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, o alternativamente por un sistema de cuerpos elásticos representados por ecuaciones diferenciales parciales o por elementos finitos. Con la ayuda de software comercial es posible modelar y simular en forma realista el comportamiento de este sistema mecánico complejo. Sin embargo, a pesar de su precisión, este modelo multicuerpo no se utiliza con frecuencia para la síntesis de controladores debido a su complejidad y naturaleza no lineal.

El procedimiento *experimental* involucra la utilización de instrumentación especializada que se instala directamente sobre la máquina de interés. Este procedimiento a pesar de ser muy preciso presenta dos desventajas: el costo del equipo instrumental y experimental, y el hecho de que los resultados obtenidos son específicos para la máquina bajo estudio. Por estas razones para efectos del diseño de sistemas de control, en aplicaciones prácticas se prefiere utilizar un modelo lineal simplificado (equivalente) que permita simular lo más aproximadamente posible al modelo real.

Un problema asociado al procedimiento *experimental* que se encuentra frecuentemente en la práctica, es el de disponer de modelos físicos (o máquinas reales) cuyas características dinámicas (fuerzas, posiciones, velocidades, aceleraciones, ...) pueden determinarse experimentalmente, pero sus parámetros físicos

¹Un sistema dinámico se dice holonómico, o bien, sometido a conexiones holonómicas, si las condiciones de enlace son expresables mediante ecuaciones matemáticas entre sus coordenadas o mediante ecuaciones diferenciales integrables. En caso contrario se dice que el sistema mecánico es no holonómico.

internos (masas, constantes elásticas, coeficientes de amortiguación, ...) son desconocidos. La tarea de determinar los parámetros del sistema se conoce como *identificación paramétrica*.

El diseño de un sistema de control de vibraciones que minimice la fuerza transmitida (transmisibilidad), debe considerar los rangos de frecuencia de operación de la máquina. Los sistemas de aislamiento de vibración pasivos son eficaces por su bajo costo y por su buen desempeño para atenuar movimientos de los equipos o los sistemas de soporte a altas frecuencias. Los sistemas pasivos típicos utilizan resortes o soportes neumáticos a alta presión para soportar las cargas.

Debido a que el desempeño de los sistemas pasivos es excelente a altas frecuencias [31], pueden lograrse mejoras significativas mediante la adición de un control de la respuesta a bajas frecuencias [1]. Un procedimiento práctico para alcanzar esta reducción implica adicionar un sistema de amortiguamiento activo colocado en serie o en paralelo con el sistema de aislamiento pasivo. Una de las formas de alcanzar esto consiste en el diseño de estructuras de soporte modulares, que pueden ser instaladas independientemente en las esquinas inferiores del sistema de soporte de la máquina o equipo. A continuación se muestran las suposiciones básicas utilizadas para el desarrollo de este tipo de modelos.

4.2. Descripción del modelo básico de una máquina simplemente apoyada

Como se indicó previamente en la sección 1.2, un análisis completo debe considerar que una máquina o cuerpo rígido apoyado sobre soportes elásticos tiene en general seis grados de libertad [31]. Tres grados de libertad son de traslación a lo largo de los tres ejes coordenados y tres son de rotación alrededor de los mismos ejes. Un sistema de control de vibraciones debe ser por lo tanto capaz de controlar efectivamente el movimiento definido por los seis grados de libertad del sistema.

En muchas aplicaciones de ingeniería que involucran el diseño de sistemas de control activo, se utiliza el bien conocido modelo de múltiples grados de libertad mostrado en la Figura 4.1. La precisión de este modelo depende de la selección adecuada de los parámetros internos (masas, inercias, constantes elásticas, constantes de amortiguación, ...) y de las fuerzas perturbadoras que exciten todos los modos de vibración del sistema.

Si se asume que la estructura de apoyo (piso) es completamente rígida, la máquina o equipo puede representarse como un cuerpo rígido de masa² m , y los elementos aisladores por medio de un conjunto formado por resortes lineales de constante k_i y amortiguadores viscosos de constantes c_i , todos sin masa.

La excitación del sistema (perturbación) se representa por una fuerza oscilatoria $F(t)$ aplicada al cuerpo de masa m , o bien por un movimiento oscilatorio del apoyo (piso).

El análisis de la respuesta del sistema ante una perturbación permite obtener los siguientes resultados:

1. La fuerza transmitida a cada uno de los puntos de apoyo ($F_i(t)$) expresada como una fracción de la

²Un listado completo de los nombres asignados a los símbolos utilizados en el capítulo aparece en la Tabla 4.1. Un listado completo de los nombres asignados a los símbolos utilizados en todo el trabajo aparece en el Anexo A.

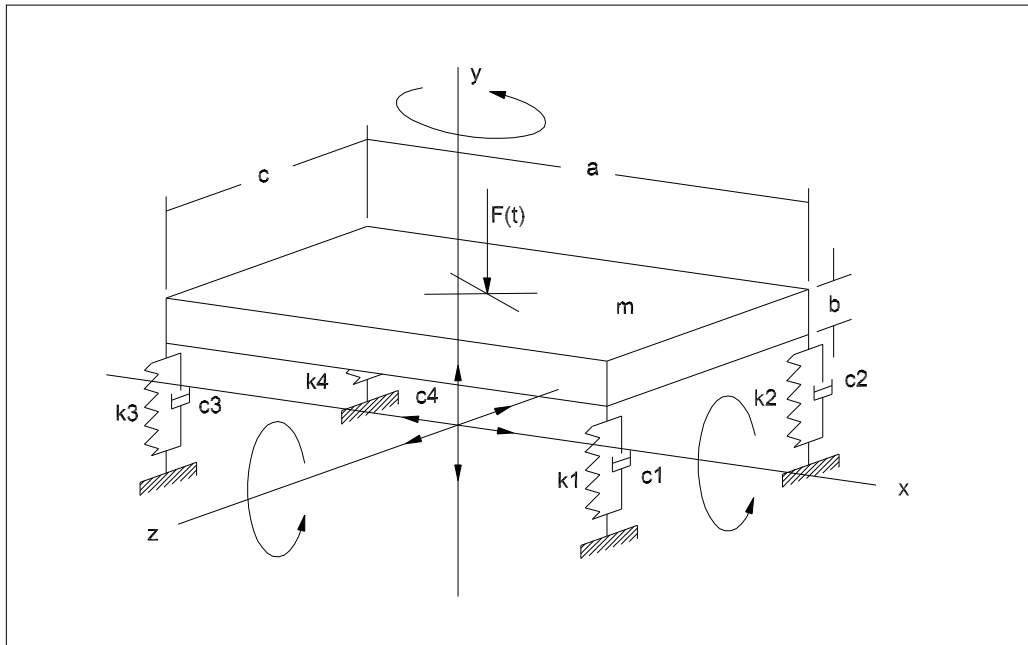


Figura 4.1: Modelo de máquina con seis grados de libertad. Tres grados de libertad para los desplazamientos longitudinales de la máquina y tres grados de libertad para las rotaciones alrededor de los ejes de referencia.

Tabla 4.1: Símbolos utilizados en el modelado de máquinas sometidas a vibración

Símbolo	Descripción
c, c_i	Constantes o coeficientes de amortiguación viscosa
c_s	Coeficiente de amortiguación viscosa en la zona activa
F	Fuerza de control
$F(t)$	Fuerza dependiente del tiempo
$F_i(t)$	Fracción de la fuerza total transmitida al piso en un punto de apoyo
k, k_i	Constantes elásticas de resortes
k_s	Constante elástica en la zona activa
k_u	Constante elástica en la zona pasiva
m	Masa de un cuerpo rígido en general
m_s	Masa amortiguada (o de la máquina)
m_u	Masa no amortiguada (intermedia, o disipadora de energía)
x, y, z	Ejes coordenados de referencia

fuerza aplicada $F(t)$, la cual se designa como la transmisibilidad de fuerza. Esta última determina la eficacia del aislador.

2. Los desplazamientos relativos entre las terminales del aislador, los cuales son importantes para determinar no solamente el tamaño requerido del aislador, sino también de los espacios libres que deben permitirse alrededor de la máquina. Una amortiguación grande tiende a limitar el movimiento del equipo, no solamente a la frecuencia de resonancia sino también a otras frecuencias. Sin embargo, la eficacia del aislamiento de una vibración se deteriora al aumentar la amortiguación.

En una máquina real, el sistema de control de vibraciones debe ser capaz de controlar los seis grados de libertad del sistema. Sin embargo, por consideraciones de tipo económico y práctico, el control se diseña para manejar algunos de los grados de libertad con un sistema pasivo y el resto de los grados de libertad con sistemas activos³.

En la Figura 4.2 se muestran algunas de las posibles formas de controlar pasivamente tres de los grados de libertad de una máquina. Estas consisten en la restricción de los movimientos de traslación a lo largo de los ejes x y z , los cuales a su vez impiden la rotación de la máquina alrededor del eje vertical y . Esto se puede lograr fácilmente con la instalación de elementos mecánicos denominados “topes de desplazamiento” en las esquinas de apoyo de la máquina.

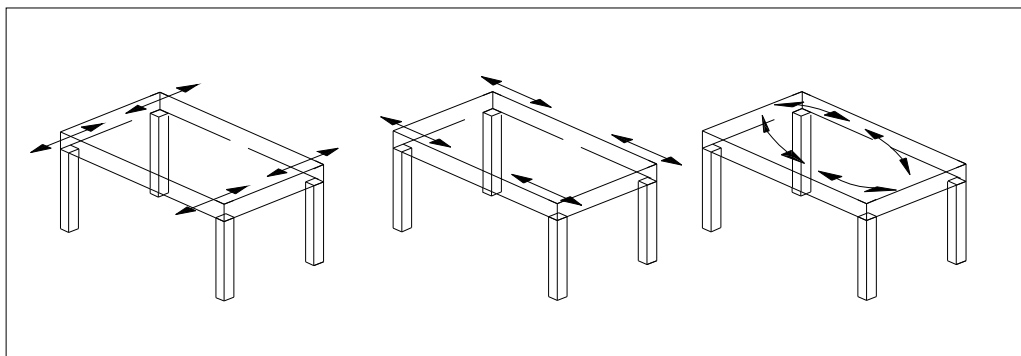


Figura 4.2: Modos de vibración controlados pasivamente en una máquina simplemente apoyada

Con las anteriores restricciones, la máquina queda condicionada a sólo tres movimientos como se muestra en la Figura 4.3: uno de traslación vertical en el eje y , y dos movimientos de rotación a lo largo de los ejes perpendiculares x y z . Estos tres últimos movimientos corresponden a los grados de libertad que pueden ser controlados activamente.

Con base en lo anterior, el movimiento de cada uno de los puntos de apoyo de la máquina⁴ contiene la superposición de tres movimientos completamente independientes: uno debido al desplazamiento vertical de la máquina⁵, y dos desplazamientos aproximadamente verticales⁶ debidos a las rotaciones de la máquina

³Esto es lo que se utiliza en sistemas dinámicos complejos como los de la suspensión de vehículos automotores [13], [14], [15].

⁴Es decir, las esquinas de soporte elástico.

⁵El cual es igual en todos los apoyos.

⁶Los cuales son diferentes en todos los apoyos.

alrededor de los ejes x y z .

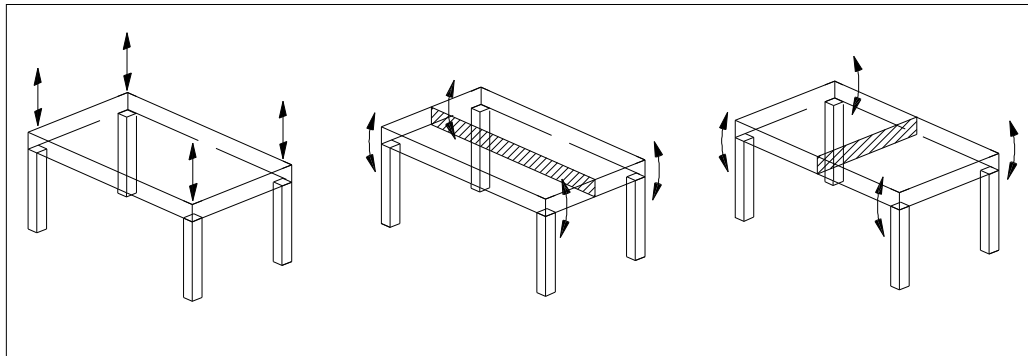


Figura 4.3: Modos de vibración controlados activamente en una máquina simplemente apoyada

Para efectos del diseño de un sistema de control activo, cada uno de los apoyos de la máquina se puede suponer como una unidad independiente a través del cual se pueden aplicar fuerzas externas en respuesta al movimiento aleatorio de la máquina. La magnitud de estas fuerzas de control se calcula con base en la determinación de una variable asociada a la máquina como puede ser la posición, velocidad o aceleración en el punto de interés. En estas condiciones, cada apoyo o soporte recibe solamente una fracción de la fuerza total transmitida por la máquina al piso, y las fuerzas de control se pueden aplicar de tal forma que su dirección sea la del eje vertical y . Esta es la justificación por la cual se puede trabajar con un modelo “reducido” de la máquina, esto es, con un sistema de control activo que sólo se ocupa del control de una fracción de la fuerza total transmitida por la máquina al piso.

Teniendo en cuenta lo anterior, el sistema propuesto en este trabajo se enfoca en el análisis del control del movimiento vertical de una de las esquinas de soporte de la máquina. Como se explicó anteriormente, esto permite el control activo de vibraciones para los siguientes tres grados de libertad del sistema: uno de movimiento de traslación vertical (dirección y) y dos movimientos de rotación en ejes perpendiculares (direcciones x y z). El ensamble completo activo-pasivo en los cuatro puntos de apoyo de la máquina, permite por lo tanto el aislamiento de vibraciones para los seis grados de libertad de la misma.

En la práctica [1], cada uno de los apoyos activos se diseña para que sea modular e independiente, de tal forma que pueda ser utilizado en diferentes aplicaciones (soporte de máquinas, equipos delicados o instrumentos). Los requerimientos finales de la instalación definen la geometría, dimensiones y colocación de las unidades de control (también denominados módulos aisladores). En una configuración típica se pueden utilizar tres o cuatro módulos idénticos que permitan la utilización de un mismo sistema de control digital para soportar una carga determinada (véase la Figura 4.4).

4.3. Descripción de los módulos de control activo

En general, se asume que cada unidad de control activo (o módulo de control) se instala en las esquinas inferiores de una cierta estructura de soporte o máquina. Esta estructura tiene la posibilidad de moverse con seis grados de libertad. Por consideraciones de diseño, tres de los grados de libertad del sistema se controlan

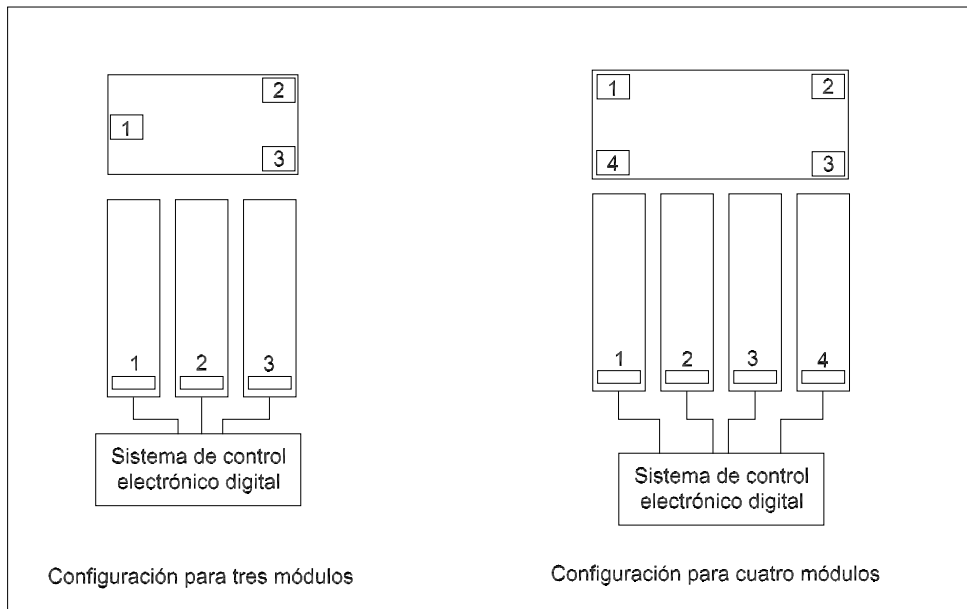


Figura 4.4: Diagrama esquemático que muestra la utilización de diferentes configuraciones típicas para el sistema de control digital de una máquina simplemente apoyada.

pasivamente, por medio de topes que restringen el movimiento lateral. Esta restricción, permite únicamente el movimiento de traslación de las esquinas de la estructura de soporte en dirección vertical y , además del movimiento de rotación a lo largo de los ejes x y z . En estas condiciones, cada módulo colocado en las esquinas actúa en una sola dirección (vertical o y).

Cada uno de los módulos de control activo (o elementos de soporte en las Figuras 4.2 y 4.3, debe generar por lo tanto una fuerza de control en dirección vertical positiva o negativa en respuesta a una vibración que se origina en la estructura o en el piso. El cálculo de la fuerza de respuesta de este módulo se realiza con base en la determinación de una o más variables asociadas al comportamiento de la máquina en el punto de interés (posición, velocidad o aceleración).

En la Figura 4.5 se muestra el esquema de uno de los posibles principios utilizados para cada uno de los módulos de control. El sistema comprende la instalación en serie de una parte **activa** (amortiguada) que reduce la transmisión de vibración a bajas frecuencias y de una parte **pasiva** (no amortiguada) que atenúa las vibraciones de alta frecuencia. La etapa activa incluye un resorte de constante k_s y un amortiguador de constante b_s , mientras que la etapa pasiva sólo incluye un resorte de constante k_u .

La masa superior m_s corresponde en este caso a la máquina (o a la fracción de fuerza transmitida por la máquina), mientras que la masa inferior o intermedia m_u es una masa que se puede mover libremente bajo la acción de una fuerza de control F con el fin de absorber energía.

En este punto es necesario aclarar que la estrategia de diseño de los módulos es diferente dependiendo

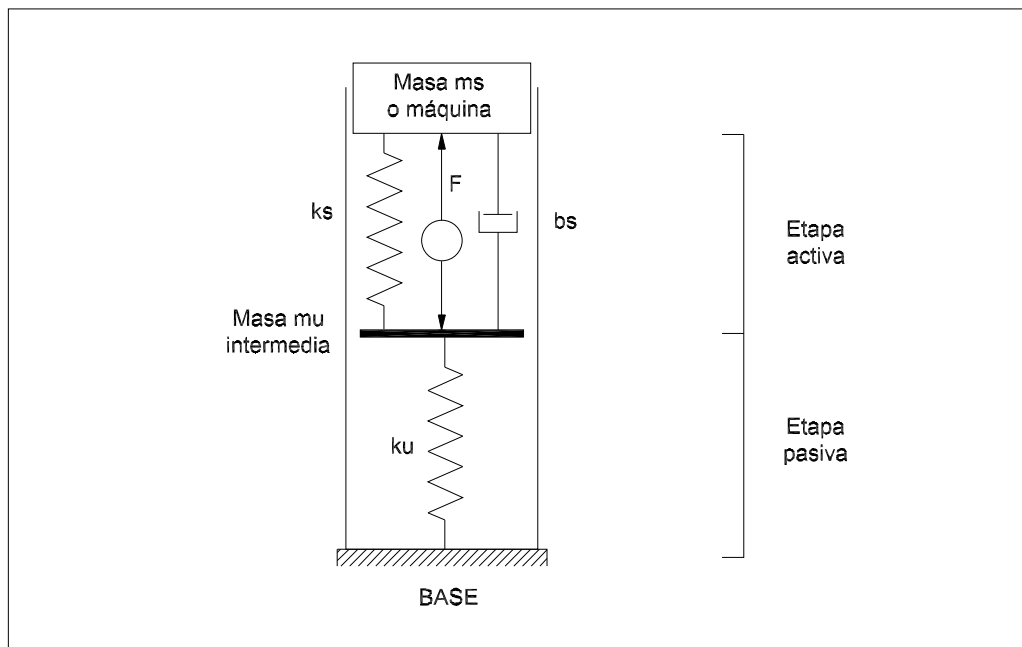


Figura 4.5: Arquitectura básica de un módulo típico de control activo de vibraciones

del tipo de perturbación que origina el problema de vibración. Si lo que se pretende es diseñar un sistema de control vibración sobre la masa superior (máquina), debida a una perturbación que se origina en el piso, la fuerza de control se determina de tal forma que al aplicarse entre las masas móviles, la masa superior (máquina) permanezca estacionaria ya que es el piso el que se mueve. Pero si lo que se pretende es minimizar la vibración transmitida al piso como consecuencia una perturbación que se origina en la máquina (como es el caso mostrado en la Figura 4.5), entonces el sistema se diseña de tal forma que la fuerza de control haga oscilar la masa intermedia (no amortiguada) buscando que la masa superior permanezca estacionaria.

En cualquiera de los casos, el beneficio visible de la instalación de uno de estos módulos es el desacople de los sistemas activo y pasivo, el cual resulta en mayor flexibilidad desde el punto de vista del diseño de sistemas de control para diferentes aplicaciones.

Los roles correspondientes a las etapas activa y pasiva [1] se ilustran en la Figura 4.6 con las gráficas de *transmisibilidad vs frecuencia*. En las gráficas, una transmisibilidad de 1 significa que la relación entre la magnitud del movimiento vibratorio de la masa y la magnitud del movimiento vibratorio de la base es 1.

Las suposiciones más importantes para la realización de estas gráficas son la de ausencia de amplificación a cualquier frecuencia, y la transmisibilidad cero a altas frecuencias. La gráfica de la parte superior izquierda de la Figura 4.6 muestra la transmisibilidad para el caso de un aislador pasivo perfecto. El aislamiento comienza a una cierta frecuencia f_p . La gráfica de la parte inferior izquierda de la misma figura muestra la transmisibilidad idealizada para el caso de un aislador activo perfecto. Existe una atenuación sobre el ancho de banda del sistema activo entre las frecuencias f_a y f_p . El efecto de una combinación en serie

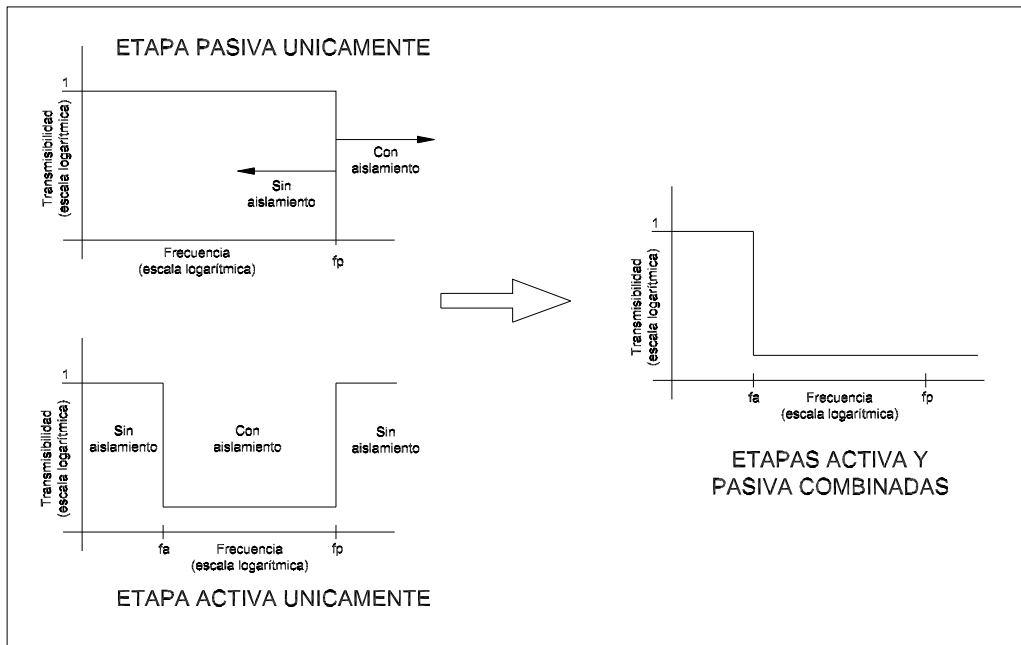


Figura 4.6: Transmisibilidad vs frecuencia para etapas de control activo y pasivo

de etapas activa–pasiva se ilustra con la última gráfica. El sistema activo se superpone al pasivo en todo el rango de frecuencias intermedia, aumentando la transmisibilidad pasiva con el fin de reducir la frecuencia de aislamiento de todo el sistema hasta f_p .

Cada módulo aislador se diseña para que sea electromecánicamente idéntico a los demás. La arquitectura en serie activa–pasiva se diseña para desacoplar las acciones de cada módulo, con el fin de permitir un proceso de control del tipo una entrada, una salida (SISO). El procedimiento de control SISO es simple, y requiere únicamente de un sensor de movimiento y de un actuador que pueda cambiar su longitud dentro de la estructura de soporte.

4.4. Modelo reducido de una máquina. Justificación

Para la realización de este trabajo, se utilizó un modelo matemático no lineal en Matlab, obtenido a partir de un modelo físico como el indicado en la sección 4.3. Para el caso la máquina se supuso como un objeto amorfo para el cual se pueden obtener directamente sus parámetros principales (dimensiones, masas, momentos de inercia, ...).

En la realidad una máquina se encuentra conectada al piso por medio de soportes individuales localizados en los puntos de apoyo. Cada uno de estos elementos de soporte puede ser modelado independientemente en términos de sus constantes elásticas y amortiguaciones. Ya que cada elemento de apoyo soporta fuerzas aproximadamente lineales, es lógico suponer que la introducción de una fuerza de control externa calculada

adecuadamente en cada uno de estos puntos, puede mantener las vibraciones dentro de unos límites prescritos.

Por esta razón, para el trabajo se consideró el análisis de uno de estos elementos de soporte. La denominación asignada al elemento de apoyo, incluida la acción de control, es el de “módulo de control”. Las suposiciones básicas son:

1. La masa soportada por cada módulo de control es aproximadamente la cuarta parte de la masa total de la máquina. En términos prácticos la masa m_s se puede asumir como la cuarta parte de la masa de la máquina.
2. Teniendo en cuenta lo anterior, la fuerza transmitida al piso (transmisibilidad) a través de cada módulo de control es también una fracción de la fuerza total transmitida por la máquina⁷.
3. La masa m_u (masa intermedia o masa no amortiguada), es una masa móvil utilizada para disipar energía.
4. El actuador de control debe generar una fuerza de control F que se aplica entre las masas móviles del sistema. La fuerza de control se calcula a partir de alguna variable física que se pueda medir experimentalmente (posición, velocidad, aceleración). La idea es que la fuerza de control debe cambiar continuamente como respuesta al cambio de la variable medida, de acuerdo con la ley de control especificada.
5. Las constantes k_s y k_u corresponden a las constantes elásticas de los resortes que soportan las masas de la máquina e intermedia respectivamente.
6. En ausencia de una fuerza de control F el sistema se comporta como un apoyo simple de masas, resorte, amortiguador, es decir, un sistema de control totalmente pasivo.

En cada una de las etapas del presente trabajo, la máquina se simuló por medio de la herramienta *Sim-Mechanics* (Simulink ®) del programa Matlab. Esta herramienta dispone en su última versión de diferentes barras y pares⁸, además de sensores y actuadores, con los cuales se pueden simular máquinas complejas en condiciones muy similares a las condiciones reales de operación.

En los siguientes capítulos, se hará una descripción detallada del algoritmo utilizado en Matlab para simular el modelo reducido de una máquina, además de los procesos de identificación y diseño del sistema de control en cada caso. Igualmente, se presentarán en cada caso las conclusiones y recomendaciones respectivas.

4.5. Resumen

En este capítulo se justificó la forma de modelar una máquina real como un cuerpo rígido de masa m_s soportado por elementos elásticos. Se mostró que en esta configuración, una máquina posee seis grados de libertad. Por consideraciones de índole económica y práctica, el control de vibraciones se diseña para que

⁷En términos más precisos, aproximadamente la cuarta parte de la fuerza total transmitida o recibida por la máquina.

⁸En mecánica, los términos barra y par hacen referencia en abstracto a cuerpos y elementos conectores básicos a partir de los cuales se pueden modelar objetos con diferentes grados de libertad.

tres de los grados de libertad sean manejados por un control pasivo, mientras que los otros tres sean controlados por un sistema activo.

A partir de esta configuración, y teniendo en cuenta que una máquina real puede soportarse sobre tres o cuatro apoyos, cada uno de los cuales tiene un movimiento aproximadamente vertical, se explicaron las razones bajo las cuales se puede trabajar con un modelo reducido de la máquina.

Igualmente, se describió someramente la arquitectura de lo que se denominó un “módulo” de control activo, y las ventajas de la utilización de un dispositivo de esta clase para el control de un sistema de hasta seis grados de libertad. Con base en esta arquitectura, se pasará en los siguientes capítulos a describir la forma de modelar uno de estos módulos con la utilización de la herramienta *SimMechanics* del Matlab, y a presentar la forma de identificar paramétricamente el modelo reducido y el diseño de estrategias de control basadas en el modelo identificado.

Modelo reducido de una máquina simplemente apoyada

5.1. Introducción

Con el fin de simular el comportamiento de una máquina bajo el supuesto idealizado del movimiento de dos grados de libertad en dirección vertical, se construyó un algoritmo con la herramienta *SimMechanics* [29] de Matlab teniendo en cuenta las características físicas más importantes de la cuarta parte de una máquina y sus correspondientes elementos disipadores de energía¹. En este punto debe tenerse en cuenta que en una máquina real, cada elemento de soporte se desplaza en una dirección aproximadamente vertical [31].

Las razones por las que se decidió utilizar el *SimMechanics* son las siguientes:

- Es una herramienta que soporta sistemas lineales y no lineales, modelados en tiempo continuo o discreto.
- Utiliza una interfase de usuario gráfica (GUI) para construir los modelos como diagramas de bloques, los cuales se conectan en orden jerárquico.
- Permite disponer de diferentes “objetos” mecánicos en los cuales es posible definir las propiedades físicas más importantes (dimensiones, masas e inercias), así como los grados de libertad y límites de movimiento. Para realizar la simulación los bloques se pueden conectar a sensores y actuadores con el objeto de aplicar fuerzas y momentos, con lo cual se pueden obtener (registrar) datos del comportamiento del sistema.
- Se pueden simular diferentes elementos mecánicos (cuerpos rígidos) con sus respectivos conectores (pares). Esto permite generar sistemas multicuerpo complejos (lineales y no lineales) de varios grados de libertad en forma relativamente simple.
- Las ecuaciones restrictivas no lineales impuestas por el sistema multicuerpo, se incorporan de forma automática cuando se definen los tipos de enlaces entre cuerpos rígidos.

¹Véase el capítulo 4 para la justificación de este modelo.

- Las características físicas de los objetos utilizados (dimensiones, masas, inercias, posiciones relativas en el sistema de referencia, etc.), se pueden definir fácilmente desde la etapa de construcción del modelo.
- Se puede trabajar con un modelo matemático no lineal que representa de forma muy precisa el comportamiento dinámico de una máquina o sistema técnico, sin necesidad de disponer de un arreglo experimental real.
- Se puede modificar muy fácilmente el valor de alguno de los parámetros utilizados, con lo que se gana flexibilidad en el análisis.
- Se pueden simular diferentes tipos de “actuadores” lineales y no lineales con los cuales se pueden generar modelos de máquinas bastante complejos.
- Se pueden simular diferentes tipos de “sensores”, con los cuales se pueden “medir” o “registrar” las características dinámicas de la máquina o sistema bajo estudio.

En la Figura 5.1 se muestra el diagrama del modelo teórico utilizado con base en lo descrito en el Capítulo 4. Los aspectos que se tuvieron en cuenta al desarrollar el algoritmo fueron los siguientes:

1. El sistema completo *sin acción de control*, está compuesto por la masa de la máquina² m_s y por una masa “intermedia” de magnitud m_u que actúa como disipadora de energía. Se establecen por lo tanto dos zonas claramente identificables: una zona amortiguada contigua a la máquina que incluye un resorte de constante k_s y un amortiguador lineal de constante b_s , y una zona no amortiguada que contiene un resorte de constante k_u .
2. La masa de la máquina y la masa intermedia (m_s y m_u), se consideran como objetos puntuales (es decir, de masa concentrada en un punto denominado centro de masa), con movimiento independiente en dirección vertical.
3. Cualquier perturbación externa al sistema, se representa por medio de una fuerza $F(t)$ que se aplica sobre la masa de la máquina. De esta manera se puede simular el comportamiento de todo el sistema a través de la determinación de las respuestas de las masas de la máquina e intermedia en términos de las posiciones, velocidades y aceleraciones.
4. El algoritmo permite analizar el comportamiento temporal del elemento de soporte de una máquina, sin acción de control. Para efectos prácticos, luego de la asignación de los parámetros asociados a las masas m_s , m_u , constantes elásticas k_s , k_u , constante de amortiguación b_s y longitudes de los resortes l_s y l_u , se dispone de una máquina “virtual” equivalente a la cuarta parte de una máquina real con movimiento vertical. El modelo se convierte por lo tanto en un “modelo reducido” o simplificado. Esta fue la denominación asignada al modelo de la máquina en este trabajo.

5.2. Aspectos a considerar en la construcción del modelo reducido en *SimMechanics* de Matlab

Una vez definidas las condiciones de operación del modelo reducido, se procedió a su construcción en el ambiente de Matlab por medio de la herramienta *SimMechanics*[29]. El modelo en Matlab se construyó

²Un listado de los nombres asignados a los símbolos utilizados en el capítulo aparece en la Tabla 5.1. Un listado completo de los nombres asignados a los símbolos utilizados en todo el trabajo aparece en el Anexo A.

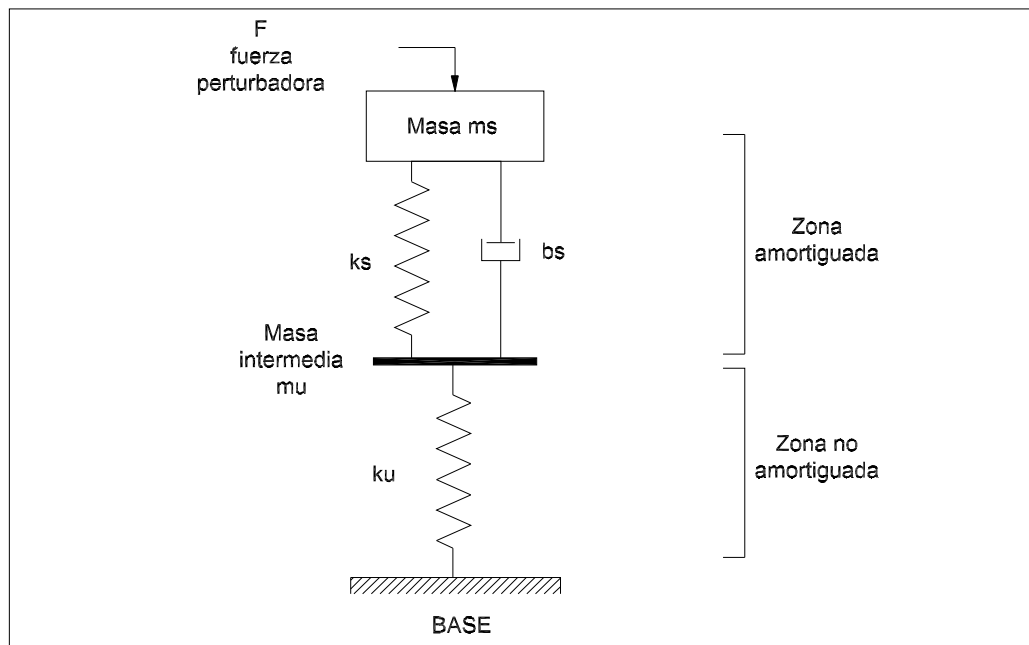


Figura 5.1: Esquema básico del modelo reducido de una máquina, sin acción de control

considerando los siguientes aspectos:

1. El sistema de coordenadas de referencia utilizado es el “mundo”. En *SimMechanics* el mundo hace relación al marco de referencia inercial absoluto (RF – Reference Frame) y a sistemas de coordenadas absolutos (CS – Coordinate System) en tal marco de referencia. El mundo tiene por lo tanto un origen fijo y ejes coordenados fijos que no pueden ser cambiados. Las propiedades del mundo se definen por medio del bloque denominado “Machine Environment”.
2. Los elementos básicos de un sistema mecánico o máquina se denominan cuerpos (*Bodies*). Se caracterizan por las propiedades de masa (masa, centro de masa y tensor de inercias), posición y orientación en el espacio, y por la colocación de algún sistema coordenado (CS) sujeto al cuerpo en un punto definido por el usuario.
3. Con base en lo anterior, las masas de la máquina (m_s) e intermedia (m_u) se construyen como bloques para modelado de cuerpos rígidos. Se asignaron los siguientes parámetros: masa, tensor de inercia³, coordenadas del centro de masa en el objeto y localización del centro de masa con respecto al sistema de referencia inercial utilizado (se especifica el mundo). A las masas, se les asignó elementos conectores para permitir su enlace con otros elementos y actuadores.
4. Para garantizar el desplazamiento lineal (vertical) de las masas, se utilizan bloques para modelar pares prismáticos (*Prismatic*)⁴ a los que se les definió el eje y como el eje del movimiento. Ambos pares

³Como las masas se consideraron objetos puntuales, es necesario especificar en Matlab que las inercias toman el valor $I = eye(3)$.

⁴En el lenguaje de mecanismos, los objetos pueden describir movimientos de traslación, rotación y sus combinaciones. Para el caso

prismáticos se referencian con respecto a tierra (*Ground*) para indicar que el desplazamiento de las masas se hace efectivamente con respecto a este sistema de coordenadas. A los pares, se les asignó elementos conectores para permitir su enlace con otros elementos y actuadores.

5. Los resortes y amortiguadores se modelan como bloques de aplicación de fuerza (*Body Spring and Damper*). Los elementos internos de cada uno de estos bloques requieren la asignación de los siguientes parámetros: constante elástica k [N/m], constante de amortiguación b [$N \cdot s/m$] y longitud de los elementos l [m]. En el modelo, las masas de la máquina e intermedia se encuentran conectadas a través de un sistema de resorte–amortiguador (*Body Spring & Damper 1*), configurando la que se denomina zona “amortiguada”. Todo el conjunto anterior (máquina y masa intermedia) se encuentra conectado a tierra a través de un resorte sin amortiguación (*Body Spring & Damper*), configurando la que se denomina zona “no amortiguada”.

El modelo reducido se complementa con sensores y actuadores (*Sensors & Actuators*) para obtener la respuesta del sistema (posiciones, velocidades, aceleraciones) ante una perturbación externa $F(t)$. Para esto, se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones:

1. La perturbación, se simula con una señal de entrada (*Signal*) conectada a través de un actuador (*Joint Actuator*) al par prismático correspondiente a la masa de la máquina (véase la Figura 5.1). Para modificar en cualquier momento la magnitud de la señal correspondiente a la fuerza perturbadora, se utiliza un bloque de “ganancia” (*Gain*) ubicado antes del actuador.
2. Las respuestas del sistema (posición, velocidad, aceleración, ...), se obtienen conectando sensores a los pares prismáticos correspondientes (*Joint Sensor*)⁵.
3. Los datos obtenidos en la simulación, se visualizan por medio de un bloque de visualización (*Scope*), o se guardan como vectores de datos en el espacio de trabajo de Matlab a través de un bloque de registro de datos⁶.

En la parte superior de la Figura 5.2, se muestra el diagrama del modelo reducido de una máquina simplemente apoyada, *sin acción de control*, tal como se visualiza en la ventana de simulación de *SimMechanics*. En la Tabla 5.2 aparecen los nombres de las variables asignadas a cada uno de los bloques del modelo.

Para facilitar la utilización del modelo reducido, se enmascaran en Matlab las partes correspondientes a la máquina y sólo se dejan visibles la señal de entrada (perturbación) y las señales de salida (posición, velocidad, aceleración), las cuales se pueden enviar al espacio de trabajo de Matlab para efectos de análisis después de la simulación. En parte inferior de la Figura 5.2, se muestra el diagrama simplificado (enmascarado) para su utilización en las simulaciones. Es interesante observar en esta última figura que el modelo enmascarado (o modelo reducido) se comporta como una “emphcaja negra”, de la cual solo pueden extraerse datos del comportamiento dinámico (posiciones, velocidades, aceleraciones, ...) causado por una perturbación externa (una fuerza variable en este caso).

de movimientos en una sola dirección axial, se utilizan los denominados “pares lineales” o “pares prismáticos”, de un solo grado de libertad.

⁵Se pueden conectar tantos sensores como sean necesarios en cada par.

⁶Este bloque se denomina *To Workspace* en el ambiente de *SimMechanics*.

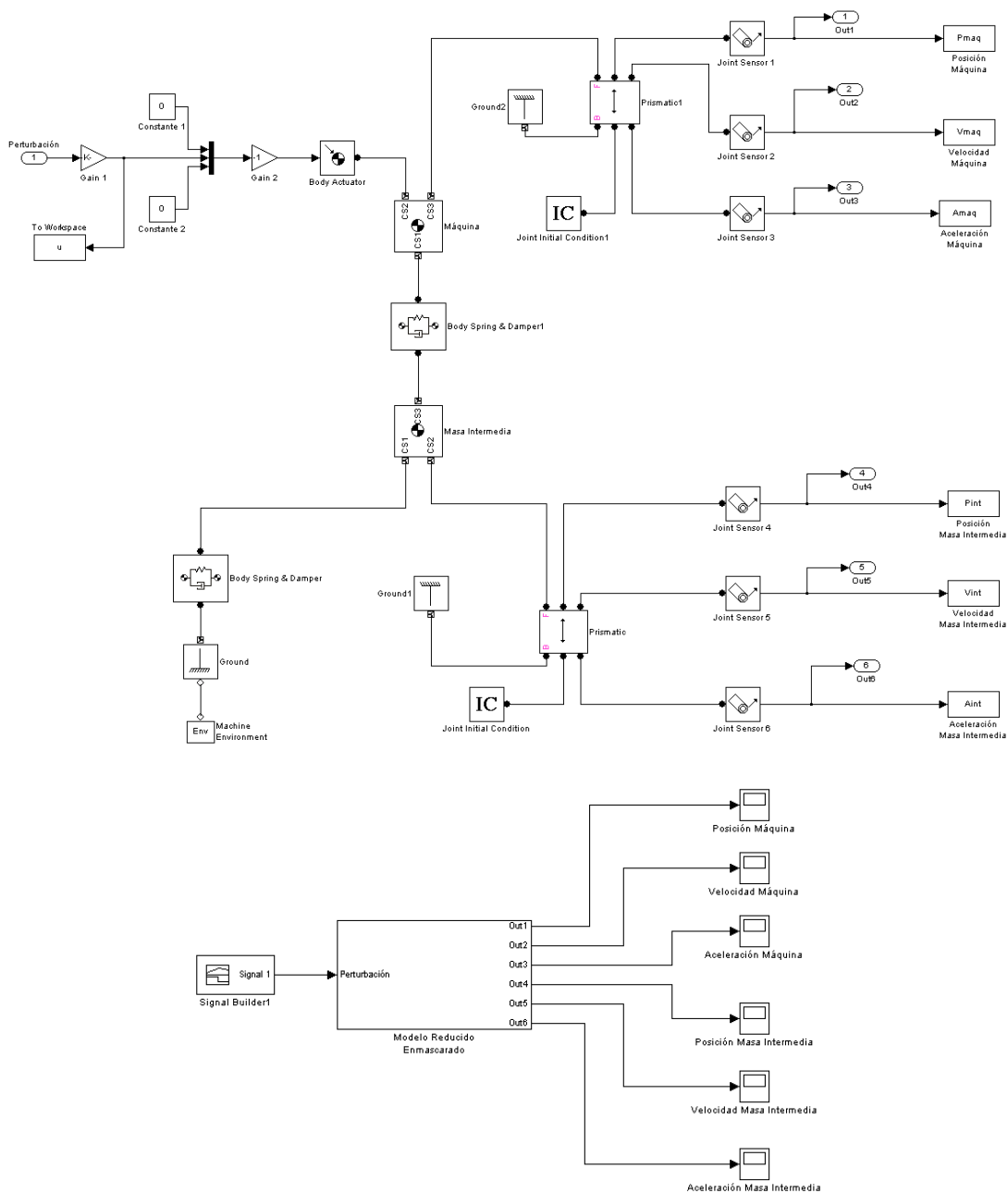


Figura 5.2: Modelo reducido de una máquina simplemente apoyada, de acuerdo con su representación en Matlab. En la parte inferior aparece el mismo modelo “enmascarado” para efectos de simulación.

Tabla 5.1: Descripción de las variables y los parámetros utilizados en la construcción del modelo reducido de una máquina, y su denominación en Matlab.

Variable	Matlab	Definición de la variable
m_s		Masa de la máquina, amortiguada
m_u		Masa intermedia, no amortiguada
k_s		Constante elástica del resorte superior
k_u		Constante elástica del resorte inferior
b_s		Constante viscosa del amortiguador superior
f_s		Fuerza ejercida por el resorte superior
f_u		Fuerza ejercida por el resorte inferior
f_d		Fuerza ejercida por el amortiguador superior
z_s	Pmaq	Posición de la máquina
z_u	Pint	Posición de la masa intermedia
\dot{z}_s	Vmaq	Velocidad de la máquina
\dot{z}_u	Vint	Velocidad de la masa intermedia
\ddot{z}_s	Amaq	Aceleración de la máquina
\ddot{z}_u	Aint	Aceleración de la masa intermedia
u		Señal de entrada o perturbación

5.3. Aspectos a considerar en la validación del modelo

Con el fin de asegurar la validez del modelo construido en Matlab, se utilizan las diferentes señales de excitación provistas por el programa, para diferentes valores de las constantes físicas del modelo y para diferentes ganancias (fuerzas de perturbación). Algunos de los procedimientos utilizados en la validación del modelo fueron los siguientes:

1. Análisis de la respuesta del sistema ante una perturbación cero. Con los datos incluidos en el modelo y sin la presencia de ninguna perturbación, se puede verificar si el sistema tiende a estabilizarse a movimiento “cero” cuando se deja oscilar libremente a partir de posiciones arbitrarias de partida.
2. Respuesta del sistema ante una perturbación diferente de cero. Aquí se pueden verificar las respuestas temporales, resonancias, y atenuaciones del movimiento por la suma de desplazamientos que se contrarrestan, para diferentes señales de entrada. En particular se utilizaron las siguientes señales provistas por Matlab: entrada escalón unitario, entrada rampa, entrada pulso, entrada aleatoria.
3. Respuesta del sistema ante datos inadecuados de los parámetros físicos del modelo, para validar inconsistencias lógicas del modelo.

La comparación de los resultados generados por el *SimMechanics* permite analizar si las respuestas del modelo están de acuerdo con los efectos físicos que se esperan de cada una de las perturbaciones sobre el sistema. Con base en los resultados obtenidos se puede decidir si el modelo reducido es válido para las pruebas de simulación, con lo cual se puede proceder a su utilización para fines de identificación de parámetros y diseño de estrategias de control. En el siguiente capítulo se definirán valores para cada uno

Tabla 5.2: Definición de los nombres asignados a cada uno de los bloques del modelo reducido de una máquina en el diagrama de simulación de Matlab.

Nombre del Bloque	Definición del Nombre Asignado al Bloque
Máquina	Masa de la máquina o amortiguada m_s .
Masa Intermedia	Masa no amortiguada m_u .
Body Spring & Damper 1	Zona elástica amortiguada. Resorte de constante k_s y amortiguador de constante b_s .
Body Spring & Damper	Zona elástica no amortiguada. Resorte de constante k_u .
Prismatic	Denominación dada a los pares prismáticos (lineales). Se requiere uno por cada masa.
Joint Sensor	Denominación dada a los sensores. Se requiere uno por cada variable a medir.
Body Actuator	Denominación dada al actuador. Se requiere uno para aplicar la fuerza de perturbación externa.
Gain	Denominación dada a la ganancia. Se requiere para modificar la magnitud de la perturbación.
Out	Denominación dada a la salida de los sensores. Se requiere una por cada variable a medir.
In	Denominación dada a la señal de entrada u .
To Workspace	Denominación dada a la salida de datos al espacio de trabajo de Matlab. Se requiere una por cada variable a medir. En este caso, hace referencia a la señal de entrada U .
Ground	Bloque del sistema de referencia (tierra).
Pmaq	Denominación dada a la salida de datos al espacio de trabajo de Matlab para la posición de la máquina o masa superior.
Pint	Denominación dada a la salida de datos al espacio de trabajo de Matlab para la posición de la masa intermedia.
Vmaq	Denominación dada a la salida de datos al espacio de trabajo de Matlab para la velocidad de la máquina o masa superior.
Vint	Denominación dada a la salida de datos al espacio de trabajo de Matlab para la velocidad de la masa intermedia.
Amaq	Denominación dada a la salida de datos al espacio de trabajo de Matlab para la aceleración de la máquina o masa superior.
Aint	Denominación dada a la salida de datos al espacio de trabajo de Matlab para la aceleración de la masa intermedia.
IC	Bloque de condiciones iniciales. Hace referencia a la velocidad de inicio de movimiento de las masas, que se asume en cero.
Machine Environment	Denominación dada al ambiente de simulación para la máquina. Se asume como referencia la tierra, con atracción gravitacional equivalente a $9,81m/s^2$.

de los parámetros del modelo y se procederá a enmascarar el sistema para efectos de evaluar estrategias de identificación y control.

5.4. Construcción del modelo en Matlab

En la Figura 5.2 se muestra el diagrama construido en SimMechanics para la simulación del modelo reducido de una máquina. En la parte inferior de la figura se muestra el modelo “enmascarado” o simplificado (configuración de “caja negra”) que incluye las señales de entrada y de salida. Los nombres de las variables utilizadas en el modelo, aparecen en la Tabla 5.1.

Los parámetros que se utilizaron para m_s , m_u , k_s , k_u , b_s en el diagrama de la Figura 5.2 aparecen en la Tabla 5.3. A continuación se describe brevemente el procedimiento para construir el modelo con base en estos datos:

1. En el modelo se incluyen dos bloques de modelado de “cuerpo rígido” que representan respectivamente la masa de la máquina (*Máquina* o m_s) y la masa intermedia utilizada para disipar energía (*Masa Intermedia* o m_u). Las propiedades correspondientes a estos cuerpos aparecen en la Figura 5.3.
2. La zonas amortiguada y no amortiguada se definen en cada caso por medio de los bloques *Body Spring and Damper 2* y *Body Spring and Damper 1*. Las propiedades de los objetos incluidos en estos bloques aparecen en la Figura 5.4.
3. Para garantizar el desplazamiento lineal (vertical) de las masas de la máquina e intermedia con respecto al sistema de referencia en tierra, se utilizaron “pares prismáticos” (*Prismatic* y *Prismatic2*). En la Figura 5.5, se muestran los datos incluidos en cada uno de estos bloques. Obsérvese en la figura que el desplazamiento vertical queda definido en ambos casos por medio de un vector de dirección de movimiento especificado como $[0 \ 1 \ 0]$.
4. Para simular la perturbación (o excitación U) sobre el sistema, se utiliza una señal⁷ que se aplica sobre uno de los cuerpos. En el caso que aquí se ilustra, la señal de perturbación se aplica directamente sobre la máquina a través de un actuador de fuerza (*Body Actuator*). El bloque de ganancia (*Gain*) ubicado antes del actuador permite amplificar o reducir la magnitud de la señal (en este caso la magnitud de la

⁷La cual puede tomarse directamente desde una de las “fuentes” provistas por el *SimMechanics*, o construirse a voluntad del usuario.

Tabla 5.3: Parámetros utilizados en el modelo reducido de una máquina simplemente apoyada.

Parámetro	Nombre	Valor
Masa superior	m_s	250 kg
Masa inferior	m_u	26,5 kg
Constante elástica del resorte superior	k_s	24600 N/m
Constante elástica del resorte inferior	k_u	138000 N/m
Longitud del resorte superior	—	0,6 m
Constante viscosa del amortiguador superior	b_s	1570 N · s/m
Longitud del resorte inferior	—	0,5 m

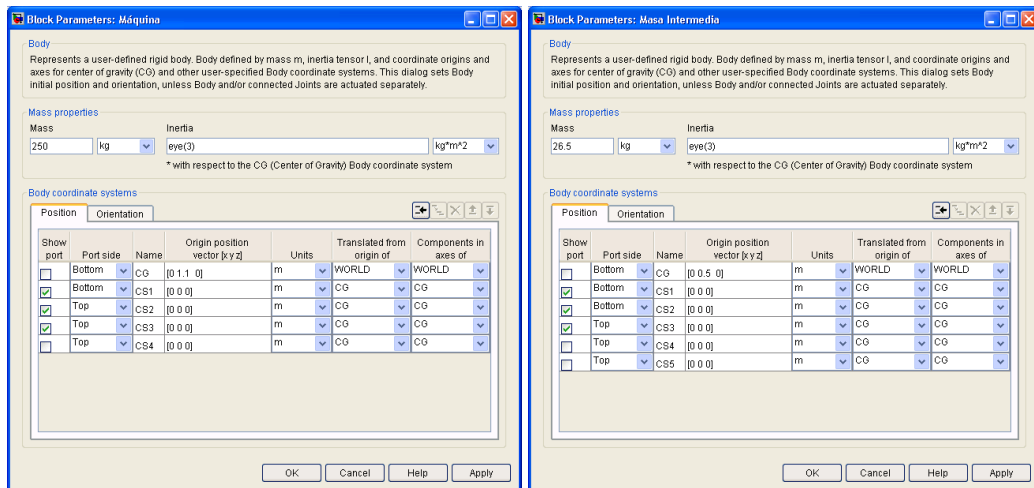


Figura 5.3: Propiedades de masa correspondientes a la máquina (izquierda) y a la masa intermedia no amortiguada o disipadora de energía (derecha). Se observan los espacios correspondientes a las masas e inercias, además de los puertos habilitados para la ubicación de sensores y actuadores.

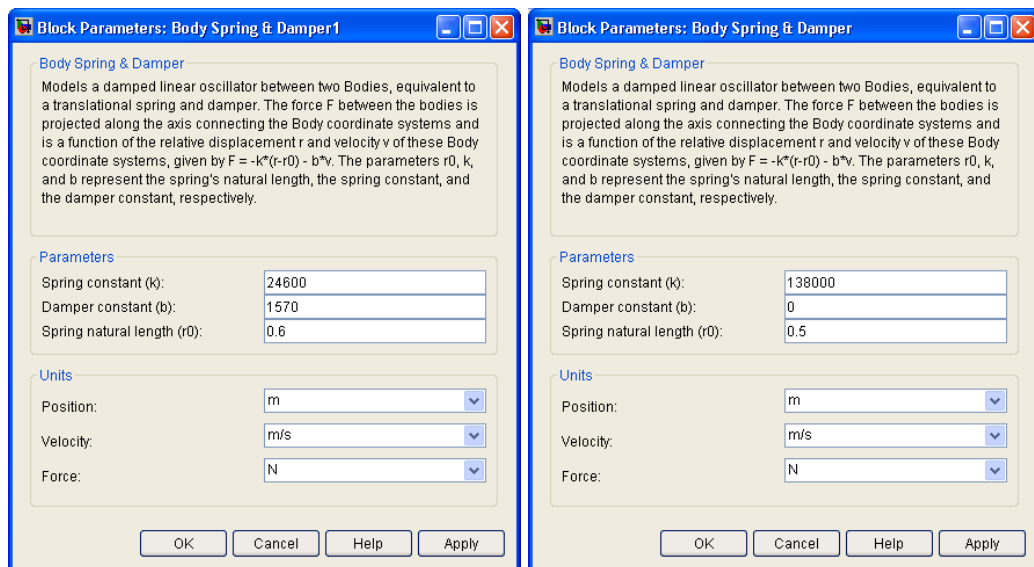


Figura 5.4: Propiedades de las zonas amortiguada (entre máquina y masa intermedia, izquierda) y no amortiguada (entre masa intermedia y tierra, derecha)

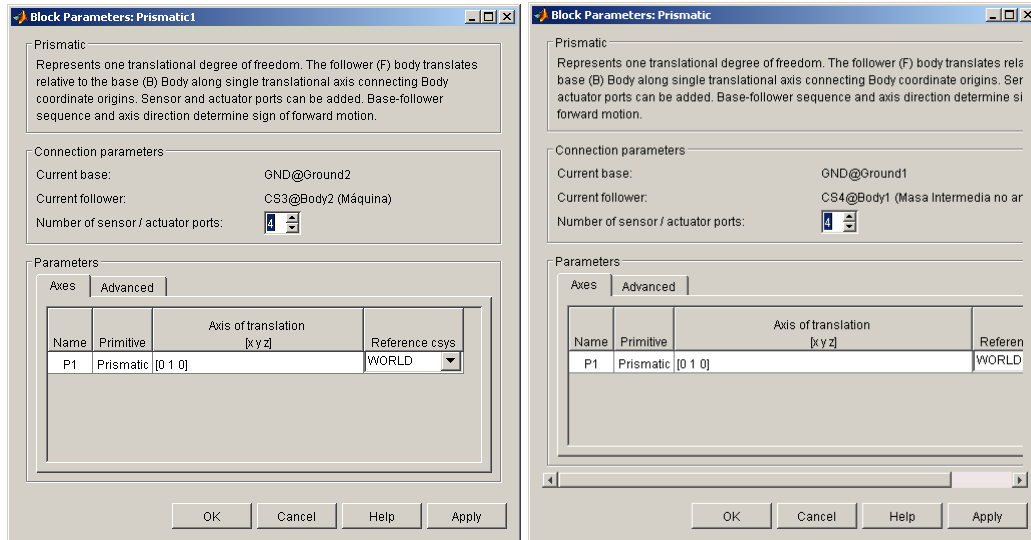


Figura 5.5: Propiedades de los pares de conexión prismáticos entre la máquina y tierra (izquierda), y entre la masa intermedia y tierra (derecha).

fuerza de perturbación) que se aplica sobre la máquina. En la Figura 5.6 se muestran las características de una de las posibles señales de perturbación diseñada con base en el *Signal Builder*, mientras que en la Figura 5.7 se muestran las propiedades del actuador de fuerza utilizado.

- En la Figura 5.2 también aparecen bloques para definir las condiciones iniciales de movimiento denominados *IC (Joint Initial Condition)*, mediante los cuales pueden definirse las velocidades iniciales de cada una de las masas. En este caso, las condiciones se han ajustado a cero para representar el inicio del movimiento con velocidad inicial cero, como se puede apreciar en la Figura 5.8.
- Por último, los resultados de la simulación (datos correspondientes a posición, velocidad y aceleración de cada una de las masas), se obtienen conectando “sensores” adecuados (*Joint Sensor*) a cada uno de los pares prismáticos. Estos datos se envían como “vectores” al espacio de trabajo de Matlab, donde se pueden utilizar para efectos de análisis, identificación o control. En la Figura 5.9 se muestran las propiedades de uno de los sensores utilizados.

5.5. Resultados de la simulación

Respuesta del sistema a señales de perturbación constantes

- Respuesta del sistema ante una señal de perturbación constante, $K = 0$. En la Figura 5.10 se muestran las respuestas del sistema ante la aplicación de una señal de entrada constante de magnitud $K = 0$. Esto es equivalente a liberar las masas sin carga, con velocidad inicial cero. Se observa que las posiciones de la máquina y de la masa intermedia se estabilizan en un punto de equilibrio diferente al del inicio del movimiento, mientras que las velocidades y aceleraciones tienden a un valor de cero (es decir, al reposo).

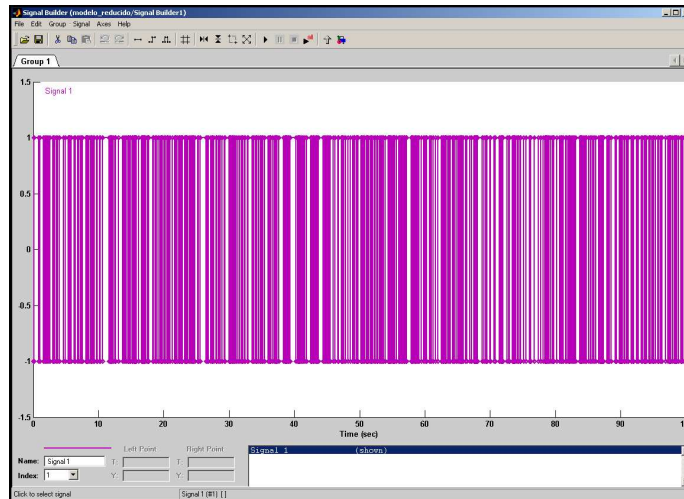


Figura 5.6: Propiedades de una de las señales de perturbación sobre la máquina. En este caso se trata de una señal del tipo PRBS (Pseudo Random Binary Signal) persistentemente excitada.

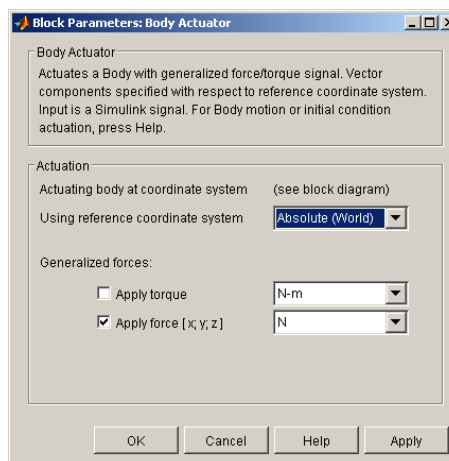


Figura 5.7: Propiedades del actuador de fuerza utilizado para aplicar la perturbación.

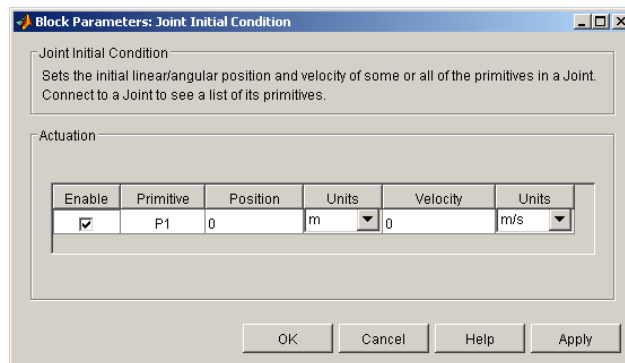


Figura 5.8: Propiedades de inicio de movimiento para las masas del sistema.

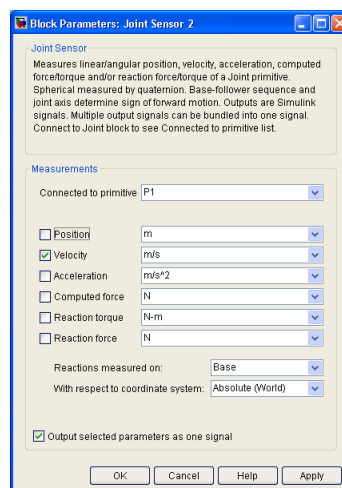


Figura 5.9: Propiedades de los sensores para medición de las variables (posición, velocidad, aceleración, fuerza, etc) del sistema.

2. Respuesta del sistema ante una señal de perturbación constante, $K = 1000$. En la Figura 5.11 se muestran las respuestas del sistema ante la aplicación de una señal de entrada constante de magnitud $K = 1000$ (fuerza positiva hacia arriba). Se observa un comportamiento similar al anterior de tal forma que las posiciones de la máquina y de la masa intermedia se estabilizan en un punto de equilibrio diferente al del inicio del movimiento, mientras que las velocidades y aceleraciones tienden a un valor de cero (es decir, al reposo). En el equilibrio las posiciones de la máquina y de la masa intermedia son diferentes a las que se obtenían al no existir cargas sobre el sistema.

Respuesta del sistema ante una señal del tipo *PRBS* (Señal binaria seudo – aleatoria)

En la Figura 5.12 se muestran las respuestas del sistema ante la aplicación de una señal de entrada del tipo *PRBS*, es decir, señal binaria seudo aleatoria. Se observa que las masas de la máquina e intermedia oscilan alrededor de un cierto punto, sin estabilizarse en una posición específica. Las velocidades y aceleraciones también comienzan a variar aleatoriamente en respuesta a la perturbación.

Respuesta de la masa de la máquina a diferentes tipos de entradas

Por último a manera de comprobación final, se muestran en la Figura 5.13 las respuestas de la posición de la masa de la máquina a diferentes tipos de entrada, para comparar los resultados con los efectos físicos que se esperan del sistema ante cada una de estas señales. Las gráficas muestran que la respuestas de la máquina se ajustan a los resultados esperados en la realidad ante cada una de las perturbaciones. Por ejemplo, en la figura 5.13–a la máquina se estabiliza en una posición de equilibrio como consecuencia de la aplicación de una fuerza de magnitud constante; en la figura 5.13–b, la posición de la máquina cambia proporcionalmente en el tiempo con el incremento constante de la magnitud de la fuerza⁸; en la figura 5.13–c, se ilustra el efecto de dejar que la máquina se estabilice en una posición de reposo, sin carga, y luego aplicar repentinamente una fuerza de magnitud constante⁹; en la figura 5.13–d, la máquina oscila con amplitud constante alrededor de una posición de equilibrio como consecuencia de la aplicación de una fuerza senoidal; por último, en las figuras 5.13–e y 5.13–f, la máquina oscila aleatoriamente (con amplitud variable) alrededor de un punto de equilibrio por la aplicación de fuerzas aleatorias representadas por señales del tipo ruido blanco de banda limitada y persistentemente excitada del tipo *PRBS*.

Con base en los resultados obtenidos, se acepta que el modelo reducido está acorde con los resultados que se esperan de un sistema equivalente real, por lo que se enmascara para su utilización en simulaciones posteriores.

5.6. Resumen

En el presente capítulo se describió el procedimiento para simular el comportamiento del modelo reducido de una máquina sin acción de control, bajo el supuesto de que el movimiento de la misma está dirigido en una sola dirección. Para el caso se construyó un modelo matemático utilizando las herramientas del *Sim-Mechanics* del Matlab.

⁸Representada en este caso por una señal tipo rampa.

⁹Este resultado es compatible con lo mostrado en la figura 5.13–a.

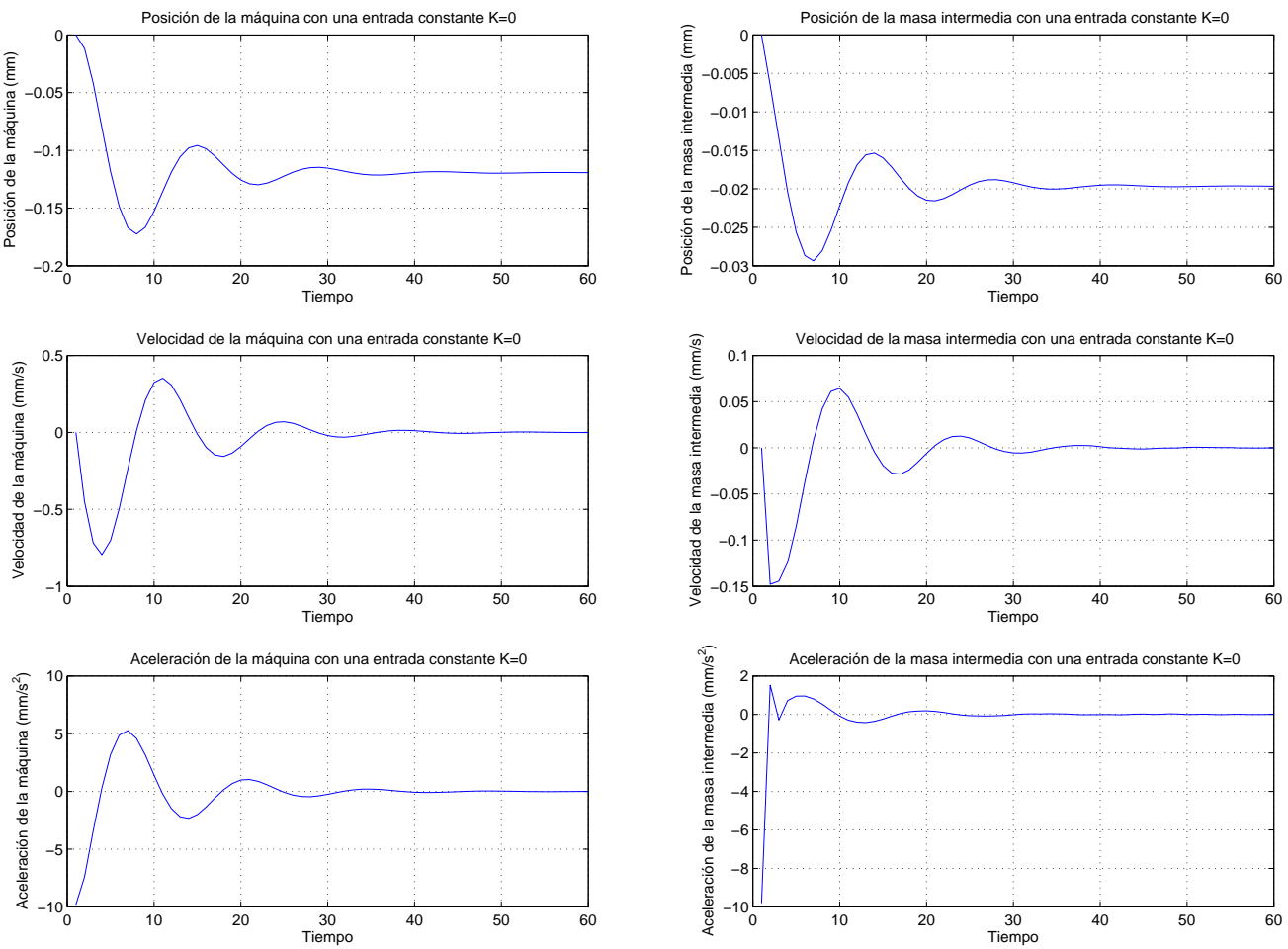


Figura 5.10: Posición, velocidad y aceleración de la máquina y de la masa intermedia ante una señal de perturbación constante $K = 0$.

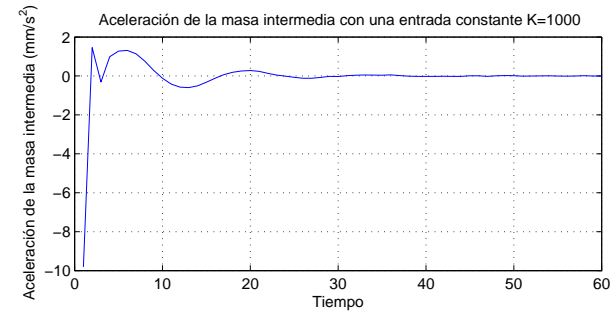
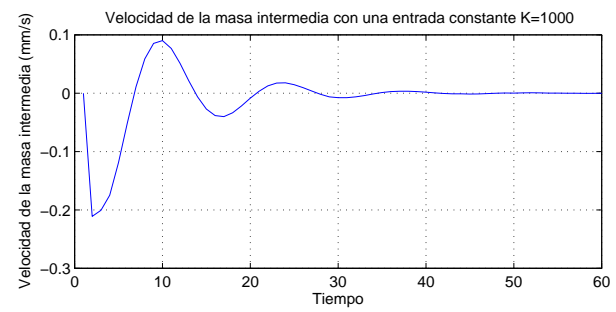
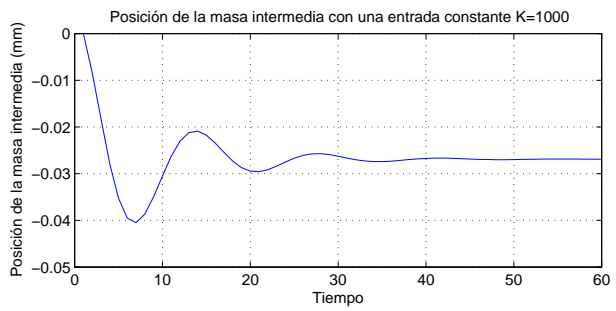
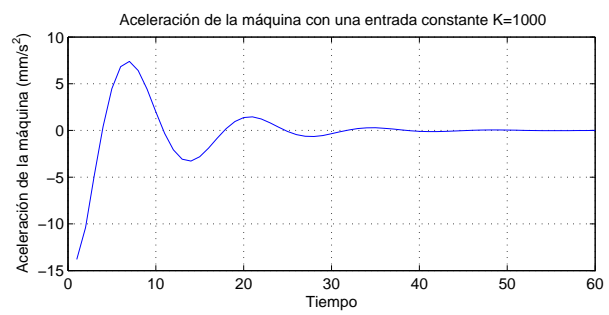
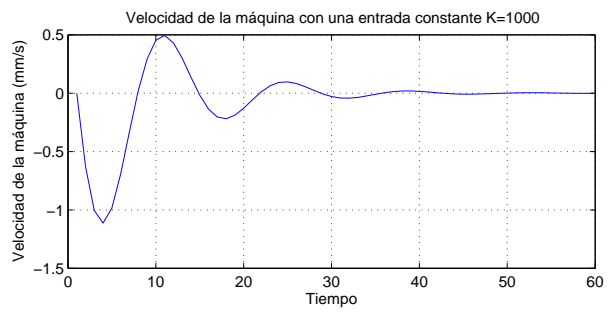
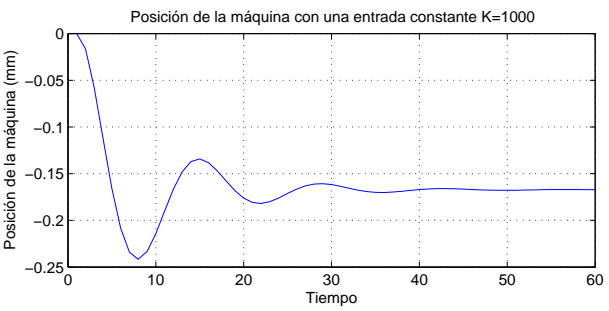


Figura 5.11: Posición, velocidad y aceleración de la máquina y de la masa intermedia ante una señal de perturbación constante $K = 1000$.

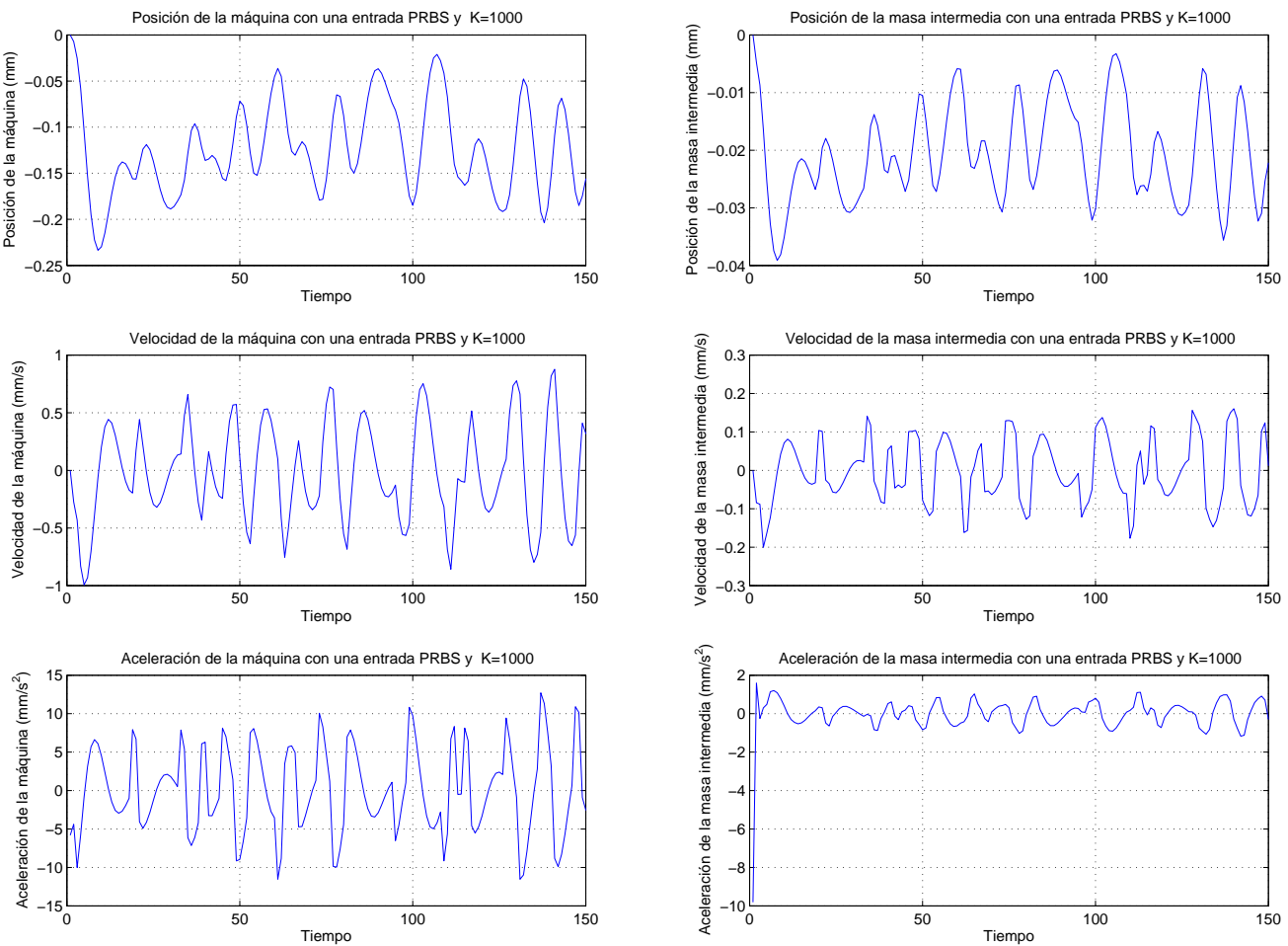


Figura 5.12: Posición, velocidad y aceleración de la máquina y de la masa intermedia ante una señal de perturbación del tipo *PRBS* persistentemente excitada y una constante de amplificación $K = 1000$.

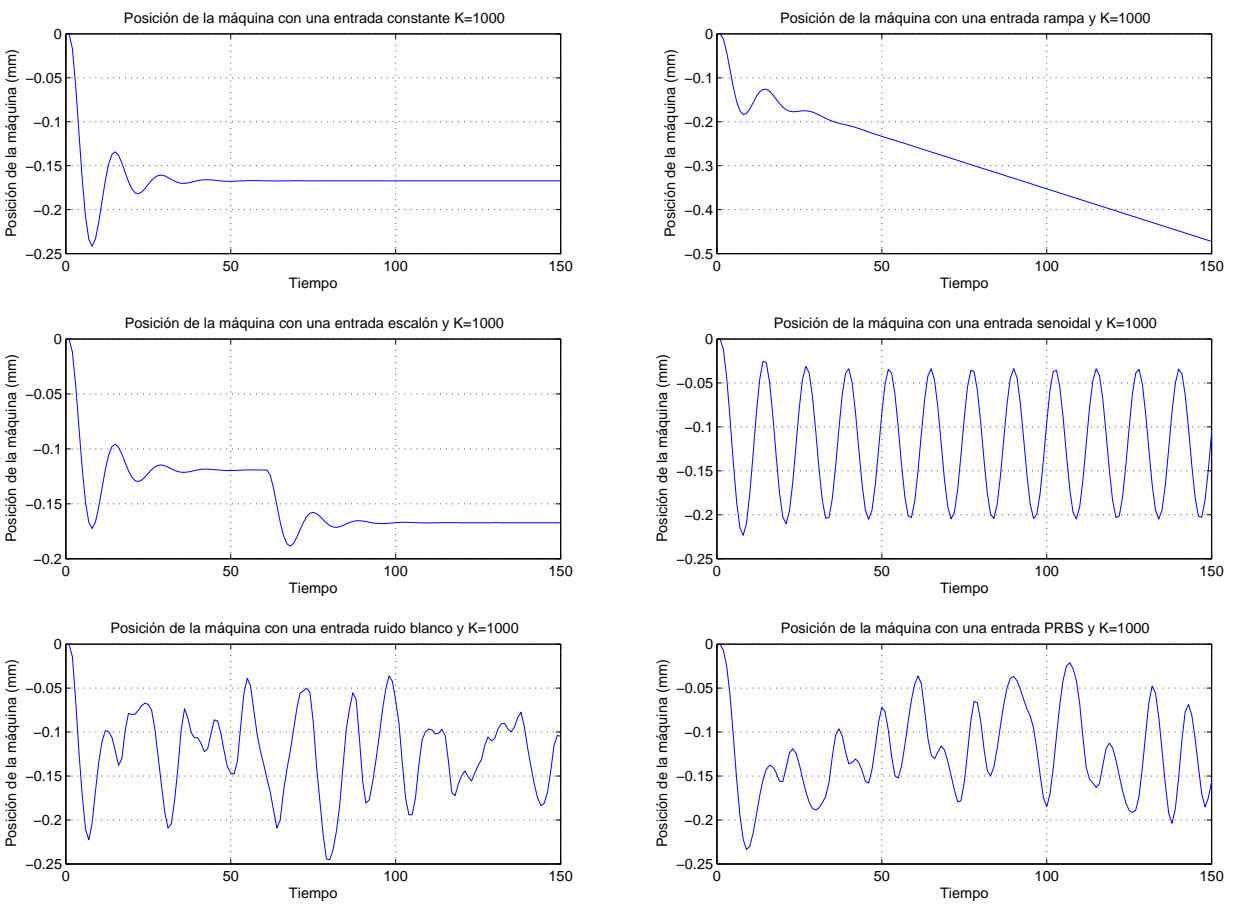


Figura 5.13: Posición de la máquina ante diferentes señales de perturbación. Se aplican las siguientes señales:
a) Señal constante $K = 1000$; b) Señal tipo rampa, $K = 1000$; c) Señal escalón, $K = 1000$; d) Señal de tipo senoidal, $K = 1000$, frecuencia $f = 10\text{rad/s}$; e) Señal del tipo ruido blanco de banda limitada, $K = 1000$; f) Señal del tipo PRBS persistentemente excitada, $k = 1000$.

El modelo reducido se complementó con “sensores” y “actuadores” para obtener datos de la respuesta del sistema ante la acción de diferentes fuerzas de perturbación. Para facilitar la utilización de este modelo durante las simulaciones, el diagrama de la máquina reducida se enmascaró para configurar un modelo del tipo “**caja negra**”.

Con el fin de validar el modelo construido en Matlab se utilizaron diferentes señales de excitación y diferentes valores para las constantes físicas del modelo. Aceptada la validez del modelo reducido, éste se utilizó para efectos de la identificación paramétrica y para el diseño de diferentes estrategias de control de vibraciones.

Identificación de los parámetros del modelo reducido de una máquina

6.1. Introducción

En este capítulo se describe el procedimiento utilizado y los resultados obtenidos en la identificación de los parámetros internos del modelo de una máquina simplemente apoyada. En ausencia de un arreglo experimental real se utilizó un modelo reducido para simular el comportamiento de la máquina y para obtener la respuesta del sistema a partir de la aplicación de perturbaciones conocidas.

El modelo reducido utilizado para las simulaciones que se describió en el Capítulo 5, fue modificado ligeramente para permitir la aplicación de una fuerza de perturbación entre las masas móviles del sistema. Esto puede verse en la Figura 6.1. Los estados que se asumieron para realizar la identificación son las posiciones, velocidades y aceleraciones de las masas de la máquina e intermedia respectivamente¹. En la misma figura se pueden ver las variables y los parámetros que se utilizaron en el modelo.

Teniendo en cuenta que existen diferentes procedimientos de identificación que se basan en la selección de los estados, aquí se utilizó la identificación con el propósito específico de estimar los valores de los parámetros² \hat{m}_s , \hat{m}_u , \hat{k}_s , \hat{k}_u , \hat{b}_s del modelo reducido a partir de mediciones de posición de las dos masas móviles del sistema. Con este procedimiento, se busca obtener información sobre los parámetros internos de la “caja negra” denominada modelo reducido y comparar los resultados “estimados” con los valores “reales” incluidos en la caja negra.

¹Esto no implica que todas las variables tengan que utilizarse necesariamente en el trabajo de identificación.

²Un listado de los nombres asignados a los símbolos utilizados en el capítulo aparece en la Tabla 6.1. Un listado completo de los nombres asignados a los símbolos utilizados en todo el trabajo aparece en el Anexo A.

Tabla 6.1: Descripción de las variables y los parámetros utilizados en la identificación paramétrica del modelo reducido de una máquina, y su denominación en Matlab.

Variable	Matlab	Definición de la variable
m_s		Masa amortiguada (o de la máquina)
\hat{m}_s		Masa amortiguada (o de la máquina) estimada
m_u		Masa no amortiguada (o intermedia)
\hat{m}_u		Masa no amortiguada (o intermedia) estimada
k_s		Constante elástica del resorte superior
\hat{k}_s		Constante elástica estimada del resorte superior
k_u		Constante elástica del resorte inferior
\hat{k}_u		Constante elástica estimada del resorte inferior
b_s		Constante viscosa del amortiguador
\hat{b}_s		Constante viscosa estimada del amortiguador
f_s		Fuerza ejercida por el resorte superior
f_u		Fuerza ejercida por el resorte inferior
f_b		Fuerza ejercida por el amortiguador
z_s, Z_s	Pmaq	Posición de la máquina (masa superior)
z_u, Z_u	Pint	Posición de la masa intermedia
z_{sus}, Z_{sus}	difpos	Diferencia de posiciones de las masas
\dot{z}_s	Vmaq	Velocidad de la máquina (masa superior)
\dot{z}_u	Vint	Velocidad de la masa intermedia
\ddot{z}_s	Amaq	Aceleración de la máquina (masa superior)
\ddot{z}_u	Aint	Aceleración de la masa intermedia
u, U		Señal de entrada (persistentemente excitada)
c_1, c_2, c_3		Constantes
a_0, a_1, a_2, a_3		Constantes
b_0, b_1, b_2		Constantes
FTS		Función de transferencia para la posición de la máquina
FTU		Función de transferencia para la posición de la masa intermedia
FT		Función de transferencia para la diferencia de posiciones de las masas

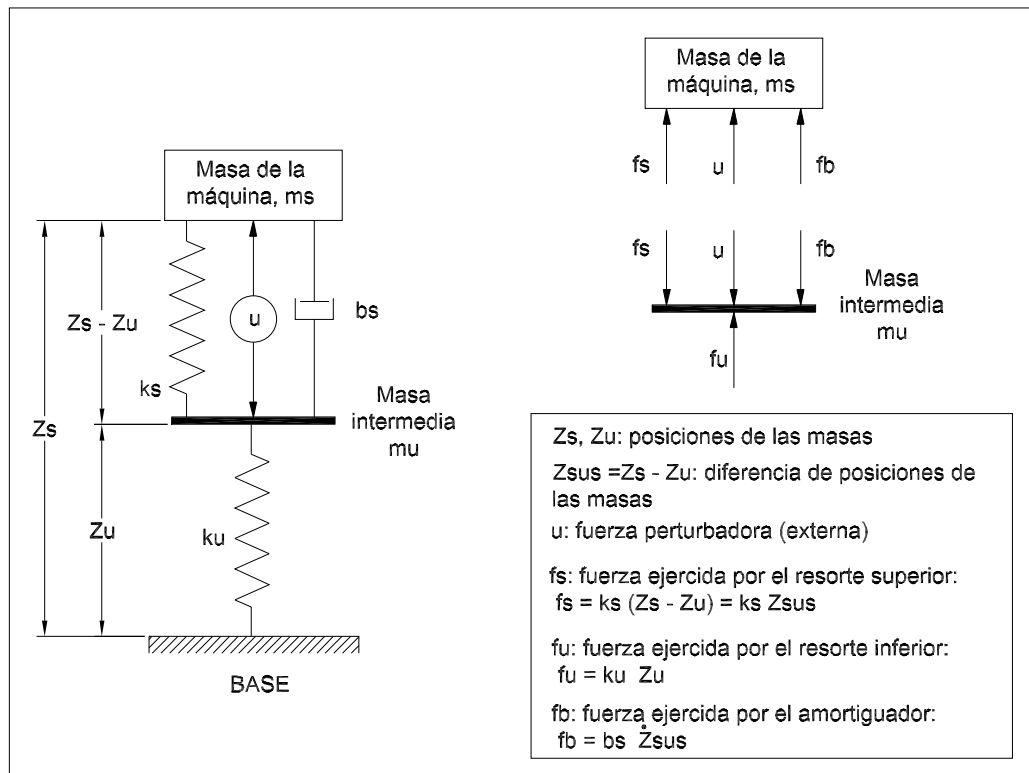


Figura 6.1: Modelo reducido de una máquina vista como un arreglo simplificado de dos masas, sometido a la acción de una perturbación u .

6.2. Cálculo de la función de transferencia correspondiente a la diferencia de posiciones de dos masas con base en el modelo reducido de una máquina

El sistema reducido de una máquina es básicamente el de dos masas conectadas por resortes y amortiguadores. Las posiciones de la máquina y de la masa intermedia están denominadas por las variables z_s y z_u respectivamente. Si el sistema es afectado por una perturbación externa u que se aplica simultáneamente entre las masas móviles, durante el movimiento se presentan fuerzas internas ejercidas por los elementos conectados a las masas de la siguiente forma (véase la Figura 6.1):

- Fuerza ejercida por el resorte superior de constante k_s :

$$f_s = k_s (z_s - z_u) = k_s z_{sus} \quad (6.1)$$

- Fuerza ejercida por el resorte inferior de constante k_u :

$$f_u = k_u z_u \quad (6.2)$$

- Fuerza ejercida por el el amortiguador superior de constante b_s :

$$f_b = b_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) = b_s \dot{z}_{sus} \quad (6.3)$$

Con base en el diagrama de fuerzas incluido en la Figura 6.1, las ecuaciones de movimiento del sistema debido a una fuerza de perturbación u se pueden escribir de la siguiente forma:

$$m_s \ddot{z}_s + f_s + f_b + u = 0 \quad (6.4)$$

$$m_u \ddot{z}_u - f_s - f_b - u + f_u = 0 \quad (6.5)$$

Al reemplazar las expresiones para las fuerzas (ecuaciones 6.1, 6.2 y 6.3) en las ecuaciones 6.4 y 6.5 se obtiene:

$$m_s \ddot{z}_s + k_s(z_s - z_u) + b_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + u = 0 \quad (6.6)$$

$$m_u \ddot{z}_u - k_s(z_s - z_u) - b_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) - u + k_u z_u = 0, \quad (6.7)$$

las que también se pueden reescribir en la forma:

$$m_s \ddot{z}_s + b_s \dot{z}_s + k_s z_s = b_s \dot{z}_u + k_s z_u - u \quad (6.8)$$

$$m_u \ddot{z}_u + b_s \dot{z}_u + (k_s + k_u) z_u = b_s \dot{z}_s + k_s z_s + u \quad (6.9)$$

Estas ecuaciones diferenciales de segundo orden se pueden presentar en la forma de ecuaciones algebraicas en la variable s de la transformada de Laplace³:

$$(m_s s^2 + b_s s + k_s) Z_s(s) = (b_s s + k_s) Z_u(s) - U(s) \quad (6.10)$$

$$(m_u s^2 + b_s s + (k_s + k_u)) Z_u(s) = (b_s s + k_s) Z_s(s) + U(s), \quad (6.11)$$

a partir de las cuales se pueden obtener las funciones de transferencia para las posiciones de las masas de la máquina e intermedia respectivamente.

6.2.1. Función de transferencia para la posición de la máquina

De la ecuación 6.11 se puede obtener la siguiente expresión para la posición de la masa intermedia:

$$Z_u(s) = \frac{(b_s s + k_s) Z_s(s) + U(s)}{(m_u s^2 + b_s s + k_s + k_u)} \quad (6.12)$$

Al reemplazar la ecuación 6.12 en la ecuación 6.10 se obtiene:

$$(m_s s^2 + b_s s + k_s) Z_s(s) = (b_s s + k_s) \left[\frac{(b_s s + k_s) Z_s(s) + U(s)}{(m_u s^2 + b_s s + k_s + k_u)} \right] - U(s) \quad (6.13)$$

Si se agrupan los términos asociados a los factores comunes $Z_s(s)$ y $U(s)$, la ecuación 6.13 se convierte en:

$$\left[(m_s s^2 + b_s s + k_s) - \frac{(b_s s + k_s)^2}{(m_u s^2 + b_s s + k_s + k_u)} \right] Z_s(s) = \left[\frac{(b_s s + k_s)}{(m_u s^2 + b_s s + k_s + k_u)} - 1 \right] U(s) \quad (6.14)$$

³Esto se logra al obtener la transformada de Laplace de cada término de la ecuación.

Para simplificar las expresiones, se pueden utilizar los siguientes coeficientes:

$$c_1 = m_s s^2 + b_s s + k_s \quad (6.15)$$

$$c_2 = m_u s^2 + b_s s + k_s + k_u \quad (6.16)$$

$$c_3 = b_s s + k_s \quad (6.17)$$

Con estos coeficientes, la ecuación 6.14 se convierte en:

$$\left(c_1 - \frac{c_3^2}{c_2} \right) Z_s(s) = \left(\frac{c_3}{c_2} - 1 \right) U(s) \quad (6.18)$$

Por lo tanto, la función de transferencia correspondiente a la posición de la máquina para una señal de entrada U está dada por:

$$FTS = \frac{Z_s(s)}{U(s)} = \frac{\left(\frac{c_3}{c_2} - 1 \right)}{\left(c_1 - \frac{c_3^2}{c_2} \right)} \quad (6.19)$$

6.2.2. Función de transferencia para la posición de la masa intermedia

El procedimiento anterior puede repetirse para calcular la función de transferencia correspondiente a la posición de la masa intermedia de la siguiente forma. De la ecuación 6.11 se puede obtener la siguiente expresión para la posición de la masa de la máquina:

$$Z_s(s) = \frac{(m_u s^2 + b_s s + k_s + k_u) Z_u(s) - U(s)}{(b_s s + k_s)} \quad (6.20)$$

Al reemplazar la ecuación 6.20 en la ecuación 6.10 se obtiene:

$$(m_s s^2 + b_s s + k_s) \left[\frac{(m_u s^2 + b_s s + k_s + k_u) Z_u(s) - U(s)}{(b_s s + k_s)} \right] = (b_s s + k_s) Z_u(s) - U(s) \quad (6.21)$$

Al agrupar los términos asociados a los factores comunes $Z_u(s)$ y $U(s)$, la ecuación 6.21 se convierte en:

$$\left[\frac{(m_s s^2 + b_s s + k_s)(m_u s^2 + b_s s + k_s + k_u)}{(b_s s + k_s)} - (b_s s + k_s) \right] Z_u(s) = \left[\frac{(m_s s^2 + b_s s + k_s)}{(b_s s + k_s)} - 1 \right] U(s) \quad (6.22)$$

Teniendo en cuenta las expresiones correspondientes a las constantes c_1 , c_2 y c_3 (ecuaciones 6.15, 6.16 y 6.17), la ecuación 6.22 se convierte en:

$$\left(\frac{c_1 c_2}{c_3} - c_3 \right) Z_u(s) = \left(\frac{c_1}{c_3} - 1 \right) U(s) \quad (6.23)$$

Por lo tanto, la función de transferencia para la posición de la masa intermedia para una señal de entrada U está dada por:

$$FTU = \frac{Z_u(s)}{U(s)} = \frac{\left(\frac{c_1}{c_3} - 1 \right)}{\left(\frac{c_1 c_2}{c_3} - c_3 \right)} \quad (6.24)$$

6.2.3. Función de transferencia para la diferencia de posiciones de la máquina y de la masa intermedia

Ya que la diferencia de posiciones de las masas se calcula como $Z_{sus} = Z_s(s) - Z_u(s)$, la función de transferencia (FT) que relaciona la diferencia de posiciones de la máquina y de la masa intermedia (es decir, $Z_s(s) - Z_u(s)$) está dada por la diferencia entre las funciones de transferencia para la máquina (F_{TS}) y para la masa intermedia (F_{TU}) respectivamente:

$$\frac{Z_{sus}}{U(s)} = \frac{Z_s(s) - Z_u(s)}{U(s)} = F_{TS} - F_{TU}, \quad (6.25)$$

a partir de la cual se obtiene⁴:

$$FT = \frac{Z_{sus}}{U} = \frac{Z_s - Z_u}{U} = \frac{num}{den}, \quad (6.26)$$

donde

$$num = \frac{m_s + m_u}{m_s m_u} s^2 + \frac{k_u}{m_s m_u} \quad (6.27)$$

$$den = s^4 + \frac{m_s + m_u}{m_s m_u} b_s s^3 + \frac{m_s k_s + m_s k_u + m_u k_s}{m_s m_u} s^2 + \frac{b_s k_u}{m_s m_u} s + \frac{k_s k_u}{m_s m_u} \quad (6.28)$$

La ecuación 6.26 corresponde a la función de transferencia que relaciona la *diferencia de posiciones* de la máquina y de la masa intermedia ante la presencia de una señal de perturbación U aplicada entre ambas. En las expresiones anteriores los parámetros a identificar⁵ son \hat{m}_s , \hat{m}_u , \hat{k}_s , \hat{k}_u y \hat{b}_s . Estos se pueden calcular a partir de las mediciones de las posiciones (Z_s , Z_u) de las masas, las cuales se obtienen directamente de la simulación con el modelo reducido. A continuación se muestra el procedimiento de cálculo de estos parámetros.

6.3. Algoritmo para el cálculo de parámetros equivalentes en un sistema de dos masas

En el caso de un sistema de dos masas, la función de transferencia continua correspondiente a la respuesta en términos de las diferencias de desplazamientos de las masas superior e inferior $Z_{sus} = Z_s - Z_u$ ante la acción de una fuerza de excitación U ⁶ está dada por la ecuación 6.26.

La idea de la identificación es la de obtener los parámetros estimados $\hat{\theta} = [\hat{m}_s \hat{m}_u \hat{k}_s \hat{k}_u \hat{b}_s]$ a partir de la respuesta del sistema real (función de transferencia) ante una perturbación (excitación) conocida.

Dado que el sistema de dos masas es de orden cuatro, la función de transferencia del mismo se puede calcular tomando como referencia el siguiente modelo:

$$\frac{Z_s - Z_u}{U} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (6.29)$$

⁴Realizando las operaciones simbólicas correspondientes.

⁵También conocidos como parámetros a estimar.

⁶Persistentemente excitada.

En teoría, las funciones de transferencia 6.26 y 6.29 son equivalentes, es decir, $Z_{sus} = Z_s - Z_u$ para $t = \infty$. Por lo tanto se puede proceder a igualar los coeficientes similares en los numeradores y denominadores de ambas expresiones, con lo cual se obtiene:

$$\frac{m_s + m_u}{m_s m_u} = b_2 \quad (6.30)$$

$$\frac{k_u}{m_s m_u} = b_0 \quad (6.31)$$

$$\frac{m_s + m_u}{m_s m_u} b_s = a_3 \quad (6.32)$$

$$\frac{m_s(k_s + k_u) + m_u k_s}{m_s m_u} = a_2 \quad (6.33)$$

$$\frac{b_s k_u}{m_s m_u} = a_1 \quad (6.34)$$

$$\frac{k_s k_u}{m_s m_u} = a_0 \quad (6.35)$$

Con base en lo anterior, el procedimiento para obtener los parámetros estimados es el siguiente:

1. Al relacionar las expresiones 6.31 y 6.35 se obtiene $1/k_s = b_0/a_0$, con lo cual:

$$\hat{k}_s = \frac{a_0}{b_0} \quad (6.36)$$

2. Igualmente, al relacionar 6.34 y 6.31 se obtiene $b_s = a_1/b_0$, a partir de la cual:

$$\hat{b}_s = \frac{a_1}{b_0} \quad (6.37)$$

3. Con $a_3 = [(m_s + m_u)/(m_s m_u)]b_s$,

$$\frac{m_s + m_u}{m_s m_u} = \frac{a_3}{\hat{b}_s} \quad (6.38)$$

4. De $[(m_s + m_u)/(m_s m_u)]k_s + m_s k_u/(m_s m_u) = a_2$. Teniendo en cuenta el resultado de la expresión 6.38 se obtiene:

$$m_s \left(\frac{k_u}{m_s m_u} \right) = a_2 - \left(\frac{a_3}{\hat{b}_s} \right) \hat{k}_s, \quad (6.39)$$

o lo que es lo mismo,

$$\hat{m}_s = \frac{a_2 - (a_3/\hat{b}_s)\hat{k}_s}{b_0} \quad (6.40)$$

5. De $(m_s + m_u)/(m_s m_u) = 1/m_u + 1/m_s = a_3/\hat{b}_s$,

$$\hat{m}_u = \frac{1}{a_3/\hat{b}_s - 1/\hat{m}_s} \quad (6.41)$$

6. Finalmente con base en el resultado del segundo paso,

$$\hat{k}_u = b_0 \hat{m}_s \hat{m}_u \quad (6.42)$$

En resumen, los resultados obtenidos a partir de la función de transferencia identificada (continua) *permiten estimar los coeficientes* del sistema de la siguiente forma:

$$\hat{k}_s = \frac{a_0}{b_0} \quad (6.43)$$

$$\hat{b}_s = \frac{a_1}{b_0} \quad (6.44)$$

$$\hat{m}_s = \frac{a_2 - (a_3/\hat{b}_s)\hat{k}_s}{b_0} \quad (6.45)$$

$$\hat{m}_u = \frac{1}{a_3/\hat{b}_s - 1/\hat{m}_s} \quad (6.46)$$

$$\hat{k}_u = b_0 \hat{m}_s \hat{m}_u \quad (6.47)$$

Para realizar el proceso de identificación de los parámetros de la máquina se realizan los ajustes correspondientes en el modelo reducido construido en Symmechanics [29] de Matlab (véase la Figura 6.2). Se introducen los datos conocidos para m_s , m_u , k_s , k_u , b_s (los cuales aparecen en la Tabla 5.3). Estos valores se escogen arbitrariamente, y se suponen a partir de valores representativos de las variables de un sistema real. Estos son por lo tanto los valores que configuran la caja negra denominada “modelo reducido”. En el diagrama de simulación, la magnitud de la fuerza de perturbación puede modificarse cambiando el valor de la ganancia K ubicada justamente después de la señal de perturbación. Esta es la fuerza (o señal de entrada u) que se aplica simultáneamente a las masas de la máquina e intermedia, enviada al espacio de trabajo de Matlab para efectos de identificación.

Luego, el sistema se somete a excitación con diferentes magnitudes de fuerza. Los vectores de datos correspondientes a la señal de excitación, posiciones, velocidades y aceleraciones de las masas, se almacenan en la memoria (*Workspace*) de Matlab para su análisis posterior. Con base en las posiciones Z_s y Z_u se calcula la diferencia de posiciones Z_{sus} , y finalmente se procede de acuerdo con lo indicado en la sección 6.4.

6.4. Procedimiento de identificación utilizado en Matlab

Para la identificación se utilizó la interfase gráfica de usuario *GUI* (Graphical User Interface) de la herramienta *System Identification Toolbox* [19] del Matlab. La ventaja de la utilización de esta herramienta estriba en que permite calcular, evaluar y validar rápidamente el modelo matemático del sistema empleando una gran variedad de métodos.

En general el procedimiento que se utiliza durante la identificación es el siguiente:

1. El sistema a identificar se somete a excitación con algún tipo de señal de entrada (denominada u en este caso) y se observa el comportamiento (respuesta o salida). Se procesan la entrada (excitación) y la salida (respuesta) en un intervalo de tiempo determinado. La entrada se selecciona de tal forma que produzca *excitación persistente* sobre el sistema.

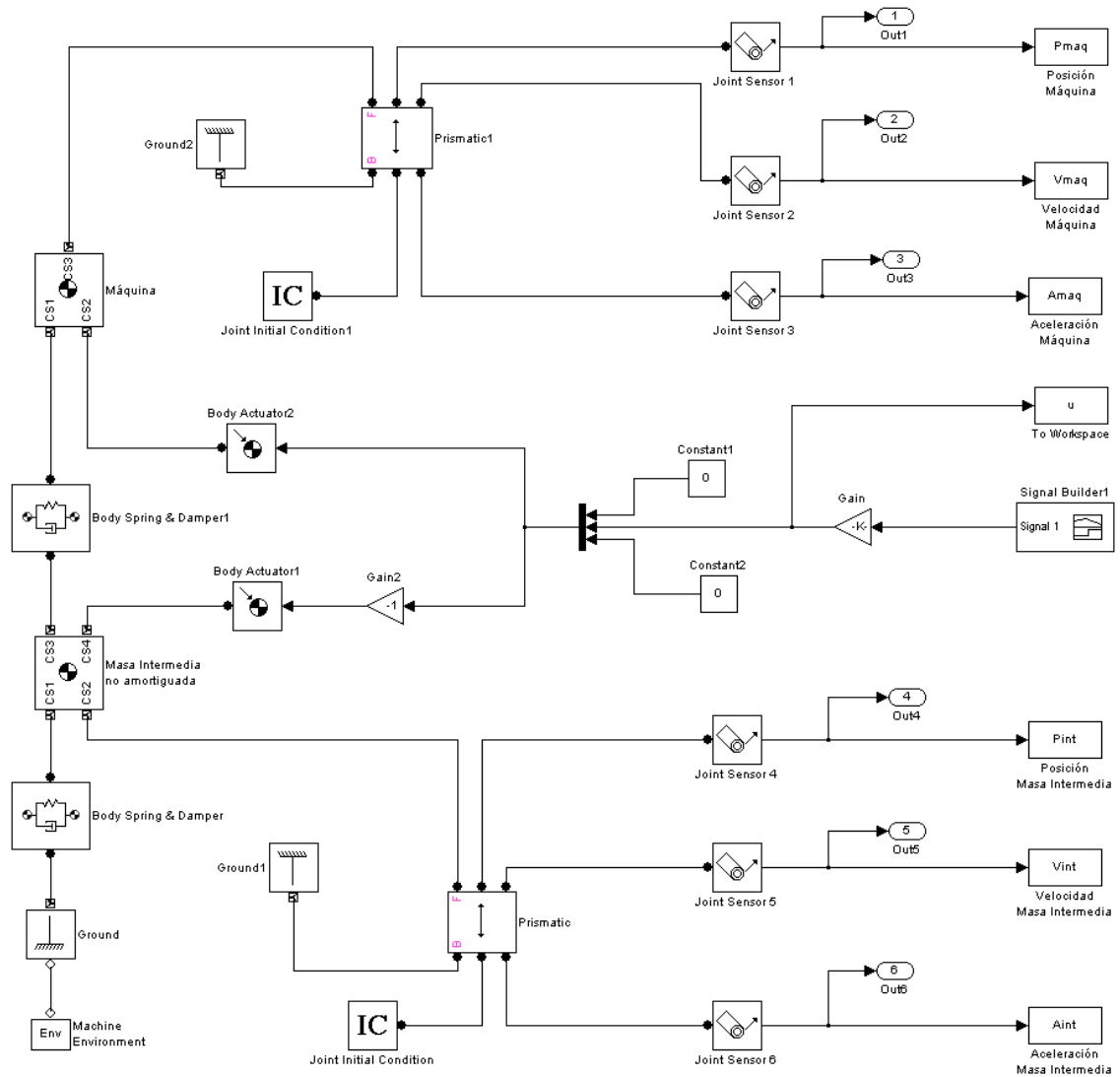


Figura 6.2: Modelo reducido utilizado en Matlab para la identificación paramétrica con perturbación simultánea de las dos masas del sistema.

2. Se obtienen (registran) los vectores correspondientes a los datos experimentales (entradas, datos intermedios, salidas). En el modelo utilizado, la entrada es una señal de perturbación persistentemente excitada y las salidas son las posiciones, velocidades o aceleraciones de las masas del sistema. Terminada la simulación, los vectores de datos quedan almacenados en el espacio de trabajo de Matlab (*Workspace*). Con los datos de posición de las masas del sistema, se procede a calcular la diferencia de posiciones de las masas (*dif_pos*). Los resultados se visualizan en este entorno en una ventana similar a la mostrada en la Figura 6.3.
3. Desde el espacio de trabajo de Matlab se inicia el procedimiento de identificación por medio del comando *ident*. El primer paso de la identificación consiste en introducir el conjunto de datos a utilizar, especificando claramente los que corresponden a las señales de entrada y de salida. Para esto se utiliza la ventana de entrada de datos en la interfase gráfica *GUI*, similar a la mostrada en la Figura 6.4.
4. A continuación se examinan los datos mediante su representación espectral o temporal. Se realiza el pre-procesamiento de los datos, que consiste en la eliminación de los valores medios y en el filtrado o separación del conjunto de datos en dos partes: una que se utiliza para la estimación y otra para la validación. Los resultados se visualizan en una ventana similar a la mostrada en la Figura 6.5.
5. Se procede a la estimación de uno o varios modelos, para lo cual se puede escoger la estructura del modelo, el orden y el retardo. La interfase gráfica del usuario permite visualizar los resultados de la estimación, como puede verse en la Figura 6.6. Desde esta ventana (también denominada “tablero de modelos”), se puede escoger cualquiera de los modelos para su análisis detallado.
6. El modelo escogido se somete a validación, para lo cual se pueden utilizar varias series de datos: los asignados por el programa durante la etapa de pre-procesamiento y el conjunto completo de datos originales. En esta etapa se analizan las salidas del modelo y del sistema original (*Model Output*), los residuos (*Model Resids*), respuesta transitoria (*Transient Resp*), ceros y polos (*Zeros and Poles*) y espectro del ruido (*Noise Spectrum*). Los diferentes modelos se pueden conservar en el “tablero de modelos” de la interfase gráfica o simplemente se eliminan (*Trash*) si se considera que no tienen los niveles de calidad adecuados.
7. Si el modelo obtenido se ajusta a los requerimientos de validación, se procede a enviarlo al espacio de trabajo de Matlab (*To Workspace* en el “tablero de modelos”) en un formato estándar (denominado

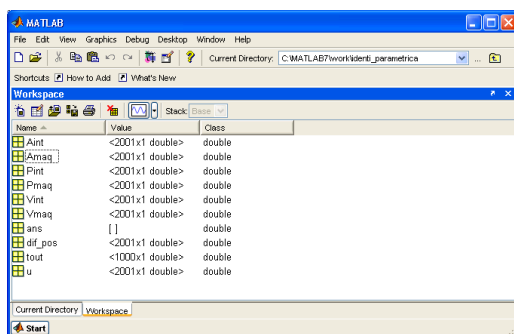


Figura 6.3: Datos correspondientes a la simulación del sistema, almacenados como vectores de datos en el espacio de trabajo de Matlab.

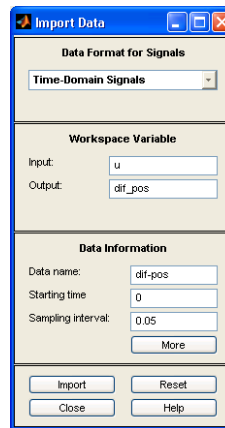


Figura 6.4: Ventana inicial de la interfase gráfica de usuario (GUI)

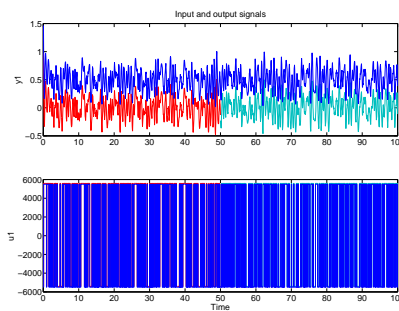


Figura 6.5: Representación espectral de los datos

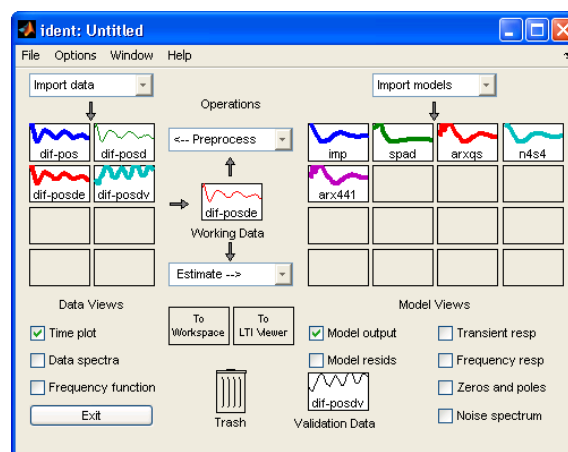


Figura 6.6: Ventana denominada “tablero de modelos”, desde la cual pueden seleccionarse los diferentes modelos identificados.

THETA), a partir del cual se pueden obtener los demás formatos del modelo por medio de operaciones matemáticas: función de transferencia continua, función de transferencia discreta, variables de estado continuas, variables de estado discretas, En este punto, la información obtenida se puede utilizar para los propósitos que se requieran: diseño, simulación, control, etc.

6.4.1. Señales de excitación

Simulink [30] de Matlab permite utilizar diferentes señales de excitación con el fin de realizar la identificación. Estas señales pueden definirse mediante el uso de la opción *Signal Builder*, la cual permite modificar la magnitud, la frecuencia, el período de muestreo, etc. Algunas de las señales predefinidas son: **constant**, **step**, **pulse**, **triangle**, **square**, **sampled sin**, **sampled gaussian noise**, **pseudo random noise**, **poisson random noise**. Además pueden seleccionarse otras que pueden ser modificadas directamente por el usuario (**custom**).

De acuerdo con lo expuesto en la literatura ([2], [18]), no todas las señales permiten excitar persistentemente los modos del sistema para una adecuada identificación. Esta es una exigencia requerida para efectos de lograr convergencia en la aplicación de los diversos algoritmos de regresión (mínimos cuadrados, mínimos cuadrados recursivos, mínimos cuadrados generalizados, variable instrumental, espacio de estados, etc.) utilizados en el proceso de identificación.

Con base en lo anterior, se efectuaron diferentes intentos de identificación y después de evaluar la calidad de los datos resultantes⁷, se decidió emplear en definitiva como entrada U una señal de onda cuadrada del tipo PRBS⁸.

Aplicada la señal de excitación U al modelo reducido, los datos de respuesta reportados para las posiciones y por lo tanto para las diferencias de posición de las masas Z_{sus} se registran en el espacio de trabajo de Matlab para su análisis. Al invocar los datos en el Matlab (*System Identification Toolbox* SITB) [19] se procede a realizar el pre-procesamiento y división del conjunto de datos en partes para la estimación y validación.

6.4.2. Selección de modelos identificados

Del conjunto de modelos estimados durante la identificación, sólo se escogen aquellos que durante la validación presentan un margen de ajuste adecuado. Con base en los análisis⁹ se encuentra que los mejores modelos identificados corresponden a la denominación ARX441¹⁰ y N4S4¹¹. Los resultados obtenidos para

⁷La evaluación de la calidad de los datos se hace durante la validación [18, páginas 520 a 525]

⁸Onda del tipo PRBS – *Pseudo Random Binary Signal*, persistentemente excitada. Una señal binaria aleatoria es una señal que puede ser generada de diferentes formas y que asume únicamente dos valores. Aparentemente, la forma más común de generarla es por medio de un ruido blanco gaussiano de media cero, filtrado mediante un filtro lineal adecuadamente seleccionado y tomar el signo correspondiente a la señal filtrada. Posteriormente, la señal puede ajustarse a los valores binarios deseados. El valor ideal considerado para el factor de cresta es 1 [18, página 418] generada con el *Signal Builder*, con un período de muestreo $T = 0,05s$.

⁹Respuesta del sistema, ajuste, retardo, análisis de ceros y polos, . . .

¹⁰La denominación [ARX n_a n_b n_k] hace referencia a modelos de estructura ARX (modelos autoregresivos con variables exógenas) calculados por el método de mínimos cuadrados. Estos modelos se representan en la forma $A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})q^{-n_k}u(t) + e(t)$, donde $u(t)$ es la entrada al sistema, $y(t)$ la respuesta del sistema y $e(t)$ la perturbación. Las expresiones $A(q^{-1})$ y $B(q^{-1})$ son polinomios autoregresivos de orden n_a y n_b respectivamente. El término n_k representa el retardo total. Como retardo se debe seleccionar aquel que produzca la menor función de coste.

¹¹La denominación [N 4 S n] hace referencia a modelos de orden n en variables de estado.

el cálculo de los parámetros internos del sistema para estos dos modelos se muestran en las siguientes secciones.

6.5. Análisis de modelos identificados

6.5.1. Análisis de modelos ARX441

Para la identificación de estos modelos¹², se utilizaron diferentes magnitudes de la fuerza de perturbación. La fuerza se incrementó desde un valor de $500N$ hasta un valor de $5500N$ ¹³. En la Tabla 6.2 se muestran los resultados obtenidos para los parámetros internos del sistema con base en estos modelos, calculados de acuerdo con las ecuaciones 6.43 a 6.47.

En los resultados puede apreciarse que los valores calculados dependen de la magnitud de la fuerza de perturbación aplicada. En general se encuentra que el margen de ajuste (en porcentaje) de los modelos se incrementa levemente con el aumento de la magnitud de la fuerza aplicada, aunque esto no implica que siempre se encuentren mejores resultados en los parámetros calculados.

El procedimiento de cálculo de los coeficientes en cada identificación es el siguiente (se ilustra para el caso de una fuerza de perturbación de $5500N$):

1. Primero que todo, se encuentra la ecuación en diferencias del modelo ARX441 con base en la diferencia de posiciones de las masas. Para el caso se utiliza en el espacio de trabajo de Matlab el nombre del modelo ya definido en la identificación de la siguiente forma¹⁴:

```
>> arx441

Discrete-time IDPOLY model: A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)

A(q) = 1 - 1.345 q^-1 + 0.3995 q^-2 + 0.1758 q^-3 + 0.01311 q^-4

B(q) = 9.415e-006 q^-1 - 7.922e-006 q^-2 + 8.073e-006 q^-3 + 3.166e-007 q^-4

Estimated using ARX from data set dif-posde
Loss function 7.18236e-008 and FPE 7.29809e-008
Sampling interval: 0.05
```

2. La función de transferencia discreta Gd para la diferencia de posiciones de las masas móviles del sistema se obtiene usando el comando `tf` de Matlab:

```
>> Gd = tf(arx441)
```

¹²La teoría básica se mostró en las secciones 3.2 y 3.3.

¹³Esta es la fuerza máxima que puede aplicarse entre las masas del sistema antes de que los movimientos de las mismas se superpongan, es decir, que el sistema colapse.

¹⁴Se imprimen los resultados tal como aparecen en el espacio de trabajo de Matlab.

Tabla 6.2: Valores calculados de los parámetros internos del modelo reducido de una máquina con base en los modelos identificados ARX441.

Fuerza N	Ajuste (%)	k_s N/m	b_s $N \cdot s/m$	m_s kg	m_u kg	k_u N/m
500	96,05	24295,04	1503,34	251,28	41,96	166969,64
1000	98,09	24542,96	1685,03	239,73	29,85	97997,89
1500	98,67	24593,29	1620,12	244,87	27,12	115242,51
2000	98,96	24577,09	1622,73	244,75	27,52	114792,09
2500	99,15	24598,76	1687,28	240,16	20,75	97353,74
3000	99,27	24598,38	1731,04	237,43	23,45	89112,02
3500	99,35	24602,81	1728,36	237,76	22,93	89750,24
4000	99,42	24620,40	1692,54	240,39	20,69	96994,20
4500	99,46	24614,99	1605,65	247,45	27,61	123331,83
5000	99,50	24611,56	1608,06	247,14	27,62	122291,50
5500	99,53	24606,92	1693,57	240,14	21,27	96674,85
Promedios →		24569,30	1652,52	242,83	26,43	110046,41
Desviaciones →		93,43	67,70	4,51	6,08	22631,47
Valores Reales →		24600	1570	250	26,5	138000

Transfer function from input "u1" to output "y1":

$$\frac{9.415e-006 z^3 - 7.922e-006 z^2 + 8.073e-006 z + 3.166e-007}{z^4 - 1.345 z^3 + 0.3995 z^2 + 0.1758 z + 0.01311}$$

Transfer function from input "v@y1" to output "y1":

$$\frac{0.0002696 z^4}{z^4 - 1.345 z^3 + 0.3995 z^2 + 0.1758 z + 0.01311}$$

Input groups:

Name	Channels
Measured	1
Noise	2

Sampling time: 0.05

- La conversión de la función de transferencia discreta Gd a continua G para la diferencia de posiciones de las masas móviles se obtiene utilizando el comando `d2c`:

```
>> G = d2c(Gd)
```

Transfer function from input "u1" to output "y1":

```

      0.003224 s^3 + 0.05131 s^2 + 0.362 s + 18.93
-----
s^4 + 86.69 s^3 + 5806 s^2 + 3.206e004 s + 4.658e005

Transfer function from input "v@y1" to output "y1":
0.0002696 s^4 + 0.02961 s^3 + 2.164 s^2 + 49.5 s + 516.5
-----
      s^4 + 86.69 s^3 + 5806 s^2 + 3.206e004 s + 4.658e005

Input groups:
      Name      Channels
Measured      1
Noise         2

```

4. Con base en la función de transferencia continua G se procede finalmente a obtener el numerador ($numc$) y el denominador ($denc$) continuos, los cuales se utilizan para el cálculo de los coeficientes estimados:

```

>> numc = G.num{1}

numc =

Columns 1 through 4

0    0.00322374573094    0.05131115675818    0.36204350762017

Column 5

18.93034327651506

>> denc = G.denc{1}

denc =

1.0e+005 *

Columns 1 through 4

0.00001000000000    0.00086689956286    0.05805560088047    0.32059875494940

Column 5

4.65817442705673

```

5. Conocidos los coeficientes del numerador y denominador del modelo ARX441 para la diferencia de posiciones de las masas móviles, y como la función de transferencia que describe la respuesta $(Z_s - Z_u)/U$ está dada por la ecuación 6.29, se encuentra que:

```

a_0 = 4.658174427056732e+005
a_1 = 3.205987549493954e+004
a_2 = 5.805560088047459e+003
a_3 = 86.68995628599750
b_0 = 18.93034327651506

```

6. Por lo tanto, los coeficientes correspondientes al sistema identificado obtenidos de acuerdo con las ecuaciones 6.43 a 6.47 para el modelo ARX441 son:

```

ks = 2.460692000675789e+004
bs = 1.693570741250791e+003
ms = 2.401429750775826e+002
mu = 21.26596568236834
ku = 9.667484508100670e+004

```

Estos últimos son los valores que aparecen en la Tabla 6.2 para una fuerza perturbadora de 5500N. En la Figura 6.7, se muestran las gráficas obtenidas durante la identificación y validación del modelo del sistema para esta fuerza de perturbación.

6.5.2. Análisis de modelos N4S4

Para la identificación de estos modelos¹⁵, se utilizaron diferentes magnitudes para la fuerza de perturbación. Igual que en el caso anterior, la fuerza se incrementó desde un valor de 500N hasta un valor de 5500N¹⁶. En la Tabla 6.3 se muestran los resultados obtenidos para los parámetros internos del sistema con base en este modelo, calculados de acuerdo con las ecuaciones 6.43 a 6.47.

Igual a lo observado en los análisis de los modelos ARX441, en los resultados de los análisis de los modelos N4S4 puede apreciarse que los valores calculados dependen de la magnitud de la fuerza de perturbación aplicada. En general se encuentra que el margen de ajuste (en porcentaje) de los modelos se incrementa con el aumento de la magnitud de la fuerza aplicada, aunque esto no implica que siempre se encuentren mejores resultados en los parámetros calculados.

El procedimiento de cálculo de los coeficientes en cada identificación es el siguiente (se ilustra para el caso de una fuerza de perturbación de 5500N):

1. Primero que todo se encuentra el modelo en la representación del espacio de estados con base en la diferencia de posiciones de las masas móviles del sistema. Para el caso se utiliza el nombre del modelo ya definido en la identificación de la siguiente forma¹⁷:

¹⁵La teoría básica fue presentada en la sección 3.4. Estos modelos se utilizan aquí sólo como una herramienta para comparar con los resultados obtenidos con los modelos ARX.

¹⁶Esta es la fuerza máxima que puede aplicarse entre las masas del sistema antes de que los movimientos de las mismas se superpongan.

¹⁷Se imprimen los resultados tal como aparecen en el espacio de trabajo de Matlab.

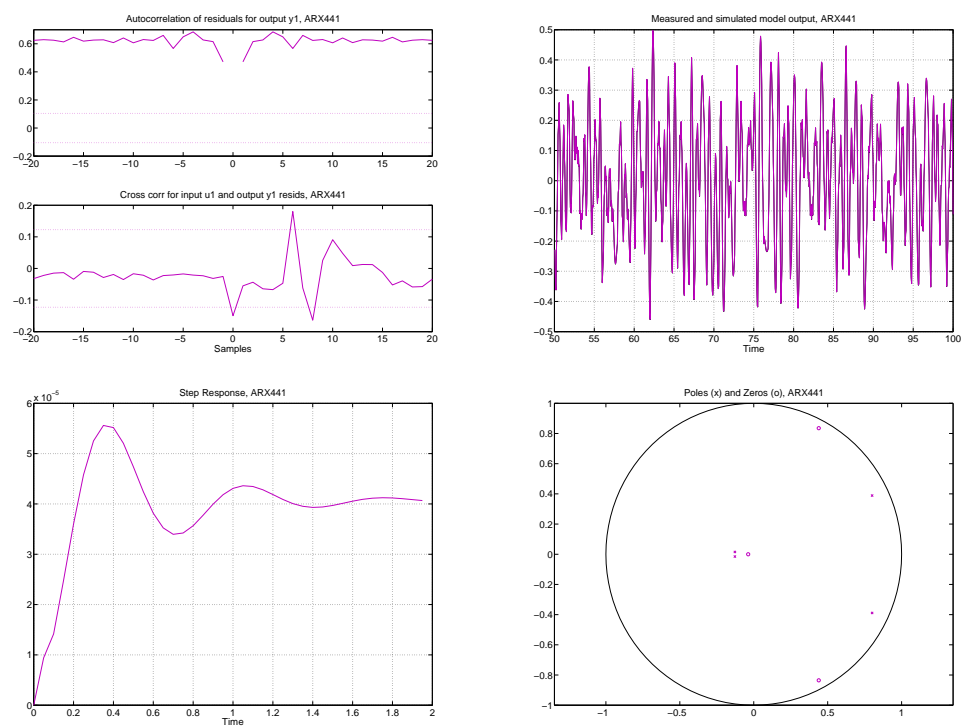


Figura 6.7: Resultados obtenidos para la identificación del modelo ARX441, para una fuerza perturbadora de 5500N. De Arriba a abajo e izquierda a derecha: a) Análisis de residuos, incluyendo el intervalo de confianza del 99%. En este caso, la autocorrelación de los residuos indica que el sistema no es afectado por señales de ruido externas al sistema. b) Superposición del modelo con los datos de validación. Se observa que las curvas de respuesta correspondientes a las salidas medida y simulada prácticamente se superponen, lo cual es un indicio del buen ajuste del modelo. c) Respuesta al escalón d) Gráfica de polos y ceros dentro del círculo unitario.

Tabla 6.3: Valores calculados de los parámetros internos del modelo reducido de una máquina con base en el modelo identificado N4S4.

Fuerza N	Ajuste (%)	k_s N/m	b_s $N \cdot s/m$	m_s kg	m_u kg	k_u N/m
500	98,84	23411,74	1548,19	231,78	25,11	108292,81
1000	99,64	24600,10	1620,11	245,50	27,60	117176,10
1500	99,80	24598,89	1621,82	245,10	27,23	116116,53
2000	99,82	19917,64	1312,62	198,55	22,21	94496,48
2500	99,83	21182,97	1394,49	211,32	23,81	101029,11
3000	99,84	22343,65	1470,70	222,94	25,16	106674,99
3500	99,85	22614,46	1488,86	225,61	25,43	107885,64
4000	99,85	21660,78	1425,92	216,07	24,33	103249,03
4500	99,87	21188,74	1394,68	211,37	23,83	101074,30
5000	99,87	22686,94	1493,04	226,33	25,54	108295,70
5500	99,87	22492,08	1480,27	224,39	25,33	107389,45
Promedios →		22427,09	1477,33	223,54	25,05	106516,38
Desviaciones →		1431,36	94,96	14,16	1,53	6554,82
Valores Reales →		24600	1570	250	26,5	138000

```
>> n4s4
```

```
State-space model:  $x(t+Ts) = A x(t) + B u(t) + K e(t)$   

 $y(t) = C x(t) + D u(t) + e(t)$ 
```

```
A =
```

```

          x1          x2          x3          x4
x1    0.83454    0.28922    0.018538    3.5568e-005
x2   -0.48938    0.78313   -0.064125    8.4532e-005
x3    0.26169    0.52304   -0.23766   -0.025291
x4    0.0055975  0.0078757   -0.039361    0.99949
```

```
B =
```

```

          u1
x1 -1.9165e-006
x2 -1.8855e-006
x3  9.9509e-006
x4  3.6119e-007
```

```
C =
```

```

          x1          x2          x3          x4
y1   -4.9313    2.6048    0.49108   -0.014041
```

```

D =
      u1
      y1      0

K =
      y1
      x1  -0.003474
      x2  -0.0011587
      x3   0.099335
      x4  -2.7348

x(0) =
      x1  -0.14085
      x2   0.095803
      x3  -0.49345
      x4   0.013007

```

```

Estimated using N4SID from data set mydatade
Loss function 6.82797e-008 and FPE 7.0498e-008
Sampling interval: 0.05

```

2. La función de transferencia discreta $Gd1$ se obtiene mediante el comando `tf` de Matlab:

```

>> Gd1 = tf(n4s4)

Transfer function from input "u1" to output "y1":
9.421e-006 z^3 - 1.771e-005 z^2 + 1.667e-005 z - 8.377e-006
-----
z^4 - 2.379 z^3 + 1.818 z^2 - 0.2631 z - 0.1751

Transfer function from input "v@y1" to output "y1":
0.0002613 z^4 - 0.0005953 z^3 + 0.0004256 z^2 - 3.785e-005 z - 4.936e-005
-----
z^4 - 2.379 z^3 + 1.818 z^2 - 0.2631 z - 0.1751

Input groups:
      Name      Channels
  Measured      1
      Noise      2

Sampling time: 0.05

```

3. La conversión de la función de transferencia discreta $Gd1$ a continua $Gc1$ se obtiene utilizando el comando `d2c` de Matlab:

```

Transfer function from input "u1" to output "y1":
  0.000155 s^4 + 0.03552 s^3 + 0.04152 s^2 + 17.28 s - 0.1008
-----
s^5 + 65.04 s^4 + 5228 s^3 + 2.794e004 s^2 + 4.249e005 s - 2267

Transfer function from input "v@y1" to output "y1":
0.0002613 s^5 + 0.01759 s^4 + 1.426 s^3 + 9.377 s^2 + 119.4 s + 161
-----
s^5 + 65.04 s^4 + 5228 s^3 + 2.794e004 s^2 + 4.249e005 s - 2267

```

Input groups:

Name	Channels
Measured	1
Noise	2

4. En este caso se encuentra que el orden de la función de transferencia para el modelo N4S4 es de 5, por lo que se requiere disminuirlo y adecuarlo al uso de las ecuaciones 6.43 a 6.47. Matlab permite utilizar varios comandos para hacer esta reducción. Aquí se utilizan los comandos *balreal* y *modred* para obtener un nuevo modelo equivalente continuo (de orden reducido) de la siguiente forma:

```

[hb,g] = balreal(Gc1);
s = length(g);
Gcred = modred(hb,[1,2,7:s], 'Truncate');

```

```

a =
      x1      x2      x3      x4      x5      x6
x1  0.005334      0      0      0      0      0
x2      0  0.005334      0      0      0      0
x3      0      0  -1.728  -8.708   5.224   4.124
x4      0      0   8.585  -2.602   9.671   6.042
x5      0      0   1.852  -4.027  -26.55  -62.87
x6      0      0  -2.538   0.9597   62.75  -34.17
x7      0      0 -1.558e-007 -1.121e-007  2.064e-006 -3.108e-006
x8      0      0  9.86e-008  -7.825e-008  1.866e-007  4.903e-007
x9      0      0   4.426  -7.891   1.652   5.543
x10     0      0  -13.53   24.26  -7.409  -12.94

      x7      x8      x9      x10
x1      0      0      0      0
x2      0      0      0      0
x3   1.93e-007  -7.451e-008  9.978e-015  -3.58e-015
x4   2.172e-007  -5.96e-008  -1.49e-015  -4.004e-015
x5  -1.536e-006   1.49e-007  -1.611e-014  -4.829e-015
x6  -4.147e-006  -1.043e-007  -5.052e-014   1.221e-015
x7  -2.219e-013      0  -2.55e-021  -2.316e-023
x8   2.009e-014  -1.665e-015  2.017e-022  -3.97e-023
x9  -1.063e+008   6.81e+006  -14.46  -45.76

```

```

x10  3.172e+008  -2.195e+007          95.4      -49.22

b =
      u1      v@y1
x1  0.0006023      0
x2      0      0.002409
x3  0.01256      -0.002814
x4  -0.01053      0.006697
x5  -0.01382      -0.01529
x6  0.01087      0.009942
x7  3.341e-010  -2.896e-011
x8  -2.71e-012  1.292e-010
x9  -0.01389      0.01342
x10  0.04222      -0.04204

c =
      x1      x2      x3      x4      x5      x6
y1  -3.362e-005  0.1578  0.01288  0  0.01248  -0.02061  -0.01473

      x7      x8      x9      x10
y1  -5.48e-010  1.164e-010  -6.614e-018  -2.602e-018

d =
      u1      v@y1
y1      0  0.0002613

Input groups:
      Name      Channels
Measured      1
Noise        2

Continuous-time model.

g =
1.0e-004 *
      Inf
      Inf
0.47961714508233
0.29929471537899
0.08001066389973
0.03177085532372
0.00000000000000
0.00000000000000
0.00000000000000

```

```

0.0000000000000000
s = 10

a =
      x1      x2      x3      x4
x1 -1.728 -8.708  5.224  4.124
x2  8.585 -2.602  9.671  6.042
x3  1.852 -4.027 -26.55 -62.87
x4 -2.538  0.9597  62.75 -34.17

b =
      u1      v@y1
x1  0.01256 -0.002814
x2 -0.01053  0.006697
x3 -0.01382 -0.01529
x4  0.01087  0.009942

c =
      x1      x2      x3      x4
y1  0.01288  0.01248 -0.02061 -0.01473

d =
      u1      v@y1
y1  3.796e-006 -0.07102

Input groups:
  Name      Channels
Measured    1
Noise       2

```

Continuous-time model.

5. Con base en lo anterior, la nueva función de transferencia continua (de orden 4) para el modelo N4S4 se obtiene de la siguiente forma:

```

>> NGc = tf(Gcred)

Transfer function from input "u1" to output "y1":
3.796e-006 s^4 + 0.000402 s^3 + 0.05537 s^2 + 0.148 s + 18.9
-----
s^4 + 65.04 s^3 + 5229 s^2 + 2.797e004 s + 4.25e005

```

```
Transfer function from input "v@y1" to output "y1":
-0.07102 s^4 - 4.619 s^3 - 371.3 s^2 - 1986 s - 3.019e004
-----
s^4 + 65.04 s^3 + 5229 s^2 + 2.797e004 s + 4.25e005
```

```
Input groups:
      Name      Channels
Measured        1
Noise           2
```

6. El numerador *numc* y denominador *denc* continuos se obtienen a partir de la función de transferencia *NGc*

```
>> numc = NGc.num{1}

numc =

Columns 1 through 4

0.00000379619891    0.00040195092527    0.05536705047877    0.14800519043370

Column 5

18.89634898830225

>> denc = NGc.den{1}

denc =

1.0e+005 *

Columns 1 through 4

0.00001000000000    0.00065044013916    0.05228505576269    0.27971661946674

Column 5

4.25018284664304
```

7. Conocidos los coeficientes del numerador y denominador del modelo N4S4 (de orden 4), y como la función de transferencia que describe la respuesta $(Z_s - Z_u)/U$ esta dada por la ecuación 6.29, se encuentra que:

```
a_0 = 4.250182846643038e+005
a_1 = 2.797166194667367e+004
```

$$\begin{aligned} a_2 &= 5.228505576268737e+003 \\ a_3 &= 65.04401391638999 \\ b_0 &= 18.89634898830225 \end{aligned}$$

8. Por lo tanto, los coeficientes correspondientes al sistema identificado obtenidos de acuerdo con las ecuaciones 6.43 a 6.47 para el modelo N4S4 son:

$$\begin{aligned} k_s &= 2.249208484281331e+004 \\ b_s &= 1.480268064692787e+003 \\ m_s &= 2.243918993108164e+002 \\ \mu &= 25.32657963441288 \\ k_u &= 1.073894499172873e+005 \end{aligned}$$

Estos últimos son los valores que aparecen en la Tabla 6.3 para una fuerza perturbadora de 5500N. En la Figura 6.8, se muestran las gráficas obtenidas durante la identificación y validación del modelo del sistema para esta fuerza de perturbación.

6.5.3. Comparación de los resultados obtenidos en los procedimientos de identificación

A manera de resumen, en la Tabla 6.4 se muestra la comparación de los datos identificados en los modelos ARX441 y N4S4 con los datos “reales” incluidos en el modelo reducido.

Se observa en la tabla que aunque ambos modelos presentan ajustes muy altos en la identificación (98,86% en el caso del modelo ARX441 y 99,73% en el caso del modelo N4S4), se presentan algunas diferencias en los resultados de los parámetros estimados. Esta es una condición que debe ser considerada normal debido a las diferencias propias de cada uno de los modelos matemáticos utilizados. En general, para el caso aquí planteado los valores estimados para las variables son más precisos cuando el cálculo se hace con base en el modelo ARX441.

Tabla 6.4: Comparación de los datos identificados con los datos “reales” incluidos en el modelo reducido.

Variable	Modelo reducido	Modelo ARX441	Error relativo ARX441	Modelo N4S4	Error relativo N4S4
m_s (kg)	250	242,83 ± 9,03	2,87 %	223,54 ± 28,33	10,58 %
m_u (kg)	26,5	26,43 ± 12,17	0,26 %	25,05 ± 3,06	5,47 %
k_s (N/m)	24600	24569,30 ± 186,85	0,12 %	22427,09 ± 2862,72	8,83 %
k_u (N/m)	138000	110046,41 ± 45262,93	20,26 %	106516,38 ± 13109,64	22,81 %
b_s (N · s/m)	1570	1652,52 ± 135,40	5,22 %	1477,33 ± 189,93	5,90 %

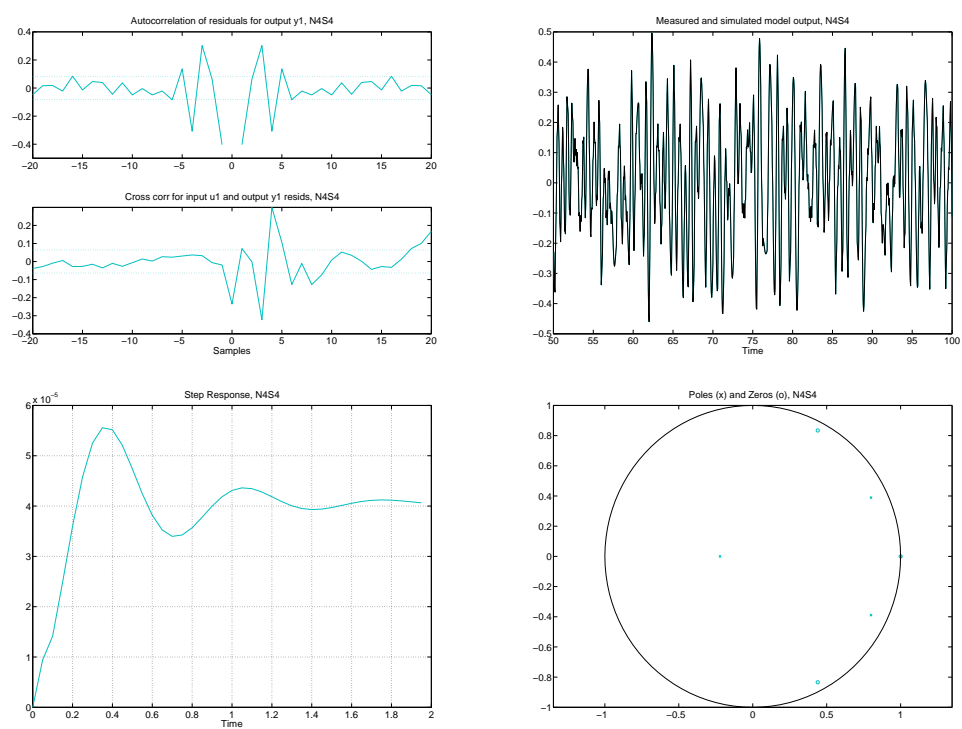


Figura 6.8: Resultados obtenidos para la identificación del modelo ARX441, para una fuerza perturbadora de 5500N. De Arriba a abajo e izquierda a derecha: a) Análisis de residuos, incluyendo el intervalo de confianza del 99%. b) Superposición del modelo con los datos de validación. Se observa que las curvas de respuesta correspondientes a las salidas medida y simulada prácticamente se superponen. c) Respuesta al escalón. d) Gráfica de polos y ceros dentro del círculo unitario.

6.6. Resumen

En este capítulo se mostró el procedimiento de cálculo realizado en Matlab para obtener los parámetros internos del modelo reducido de una máquina simplemente apoyada, a partir de la aplicación de una fuerza de perturbación persistentemente excitada entre las masas móviles del sistema.

Los resultados de este procedimiento muestran que es posible calcular con buena precisión los parámetros internos del sistema a partir de las mediciones. Al utilizar los datos identificados para modelar el sistema como un todo, se logra describir en forma muy precisa la dinámica del sistema (98,86% en el caso del modelo ARX441 y 99,73% en el caso del modelo N4S4). Al superponer los datos de las respuestas del sistema con los modelos identificados, prácticamente no hay diferencias con la respuesta del sistema original, lo cual es una muy buena indicación del ajuste de los modelos. Sin embargo, al utilizar los datos de la identificación para obtener los parámetros internos del sistema, es necesario tener cuidado con la interpretación de los resultados. En este caso, como se muestra en la Tabla 6.4, hay una mayor precisión en el cálculo de los parámetros con base en el modelo ARX441. Esto sugiere que es necesario un conocimiento preliminar de los valores de los parámetros que permitan “validar” el grado de precisión obtenida. Este es un tema que bien merece la pena explorarse por su aplicabilidad en el campo de la mecánica experimental, debido a que permite aproximar los valores de los parámetros internos de sistemas mecánicos reales (masas, constantes de resortes y amortiguadores, inercias, etc.) con el uso de técnicas de identificación.

Control activo de vibraciones con base en un modelo reducido de una máquina

7.1. Introducción

Existen múltiples formas de obtener la magnitud de la señal de control que se debe aplicar a un sistema para estabilizar alguna variable en un valor predeterminado. Cada una de estas formas permite obtener una “ley de control” con sus respectivas ventajas y desventajas.

Es demasiada extensa la literatura al respecto¹. Durante los últimos 30 años, diferentes autores han desarrollado nuevos algoritmos de control aplicados a problemas específicos con muy buenos resultados generalmente. Sin embargo, el hecho de alcanzar buenos resultados en una cierta aplicación no garantiza su eficacia al migrar a otra. Esta es una de las razones por las que se siguen utilizando en forma amplia algunos de los procedimientos de control considerados como “clásicos”, debido a que han demostrado su aplicabilidad generalizada sin pérdida de validez tecnológica.

En este capítulo, se muestran dos procedimientos para el control de la velocidad de una máquina representada por un sistema de dos masas y dos grados de libertad como el que conforma un modelo reducido de una máquina simplemente apoyada, basados en la identificación de la velocidad. Estas leyes de control se pueden expresar brevemente de la siguiente forma:

- Control proporcional
- Control por ubicación de polos

En cada uno de estos controladores, las “leyes de control” calculadas con el modelo identificado se trasladan al modelo reducido original para comparar los resultados obtenidos. Con este procedimiento se pueden evaluar las ventajas de trabajar repetidamente con un modelo matemático a través de una serie de simulaciones, en lugar de utilizar directamente un arreglo experimental real.

¹Véanse las referencias [2], [6], [7], [10], [12], [13], [14], [15], [17], [23], [24], [25], [26], [32].

7.2. Modelo reducido de una máquina, con acción de control

Considérese el diagrama que muestra el sistema reducido de una máquina afectada por una perturbación externa U y al mismo tiempo **con acción de control** u_a mostrado en la Figura 7.1. La definición de cada una de las variables y parámetros fue presentada en la Tabla 6.1. La dinámica de este sistema de dos masas con acción de control se puede representar por las ecuaciones²:

$$m_s \ddot{z}_s + f_s + f_b - u + u_a = 0 \quad (7.1)$$

$$m_u \ddot{z}_u - f_s - f_b + f_u - u_a = 0. \quad (7.2)$$

En presencia de una acción de control, el elemento activo representado por u_a se utiliza para generar una fuerza de compensación que aplicada simultáneamente a las masas del sistema permita controlar el movimiento de la masa de la máquina causado por una perturbación externa.

En lo que resta de este capítulo el objetivo es el de mostrar los resultados obtenidos al calcular la magnitud de esta fuerza de compensación, a partir de las leyes de control mencionadas en la sección anterior. Se utilizará el modelo reducido para evaluar los resultados al trasladar dicha acción de control al modelo reducido original sin control.

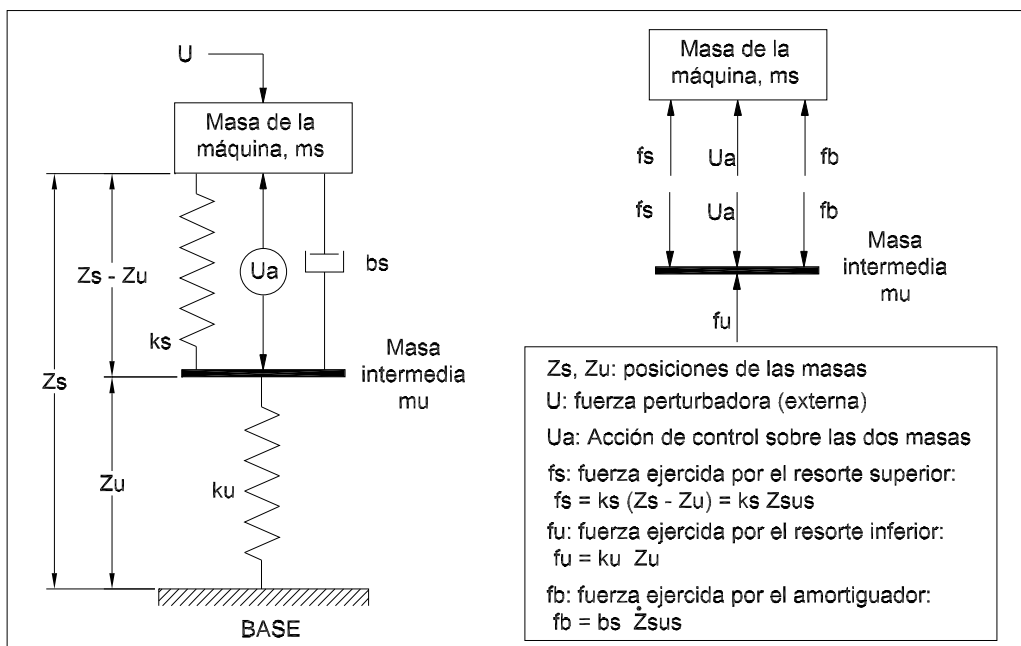


Figura 7.1: Modelo reducido de una máquina vista como un arreglo simplificado de dos masas, **con acción de control**

²Véanse las expresiones 6.4 y 6.5 para el mismo sistema sin acción de control.

7.3. Identificación de los modelos de la velocidad

Para la identificación de los modelos de la velocidad de la máquina se utilizó el modelo reducido en Matlab (sin acción de control) mostrado en la Figura 7.2. Los datos de cada uno de los componentes de este modelo (masas, dimensiones, etc.) son los mismos que se utilizaron en los Capítulos 5 y 6, los cuales están especificados en la Tabla 5.3. En este caso, la perturbación (persistentemente excitada) se aplica directamente sobre la masa de la máquina. Los datos “enviados” al espacio de trabajo de Matlab son la perturbación y la velocidad de la máquina. De nuevo, se empleó la interfase gráfica de usuario del *System Identification Toolbox* del Matlab descrita en la sección 6.4.

Realizada la estimación de algunos modelos se encuentra que las mejores identificaciones corresponden a los modelos N4S5 (con un ajuste del 100 %), N4S4 (con un ajuste del 99,99 %) y ARX441 (con un ajuste del 99,37 %). En la Figura 7.3 se muestran los resultados obtenidos durante la identificación.

Los modelos identificados se envían al espacio de trabajo de Matlab, y desde este lugar se obtienen las funciones de transferencia correspondientes³ en el dominio de z . En la Tabla 7.1 se muestran las funciones de transferencia obtenidas con base en cada uno de los modelos identificados.

7.4. Control proporcional

En un control proporcional la salida del controlador es directamente proporcional a su entrada. La entrada es una señal de error e , la cual es una función del tiempo. La función de transferencia $G(z)$ para el controlador es por lo tanto:

$$G(z) = K_v \quad (7.3)$$

En este procedimiento de control se utiliza el modelo reducido de una máquina de tal forma que al determinar la velocidad de la misma (masa superior), denominada \dot{z}_s , se puede estimar la magnitud de una ganancia K_v (*ganancia proporcional*) para producir una fuerza de control u_a definida por:

$$u_a = -K_v \dot{z}_s \quad (7.4)$$

El procedimiento para el diseño del control proporcional es el siguiente:

- Se identifica el modelo de la velocidad de la máquina
- Con base en el modelo de la velocidad, se estima el valor de la ganancia proporcional K_v que minimiza la amplitud de vibración
- Se compara la respuesta del sistema con y sin acción de control, utilizando el modelo reducido en Matlab

7.4.1. Cálculo de la constante proporcional

Cada una de las funciones de transferencia obtenidas en la sección 7.3 se utilizan para calcular directamente el valor de la constante proporcional K_v correspondiente a la acción de control para una respuesta requerida. En este punto es necesario hacer referencia a unas condiciones de diseño deseadas. Para el caso,

³Esto se realiza con el comando *tf* del Matlab.

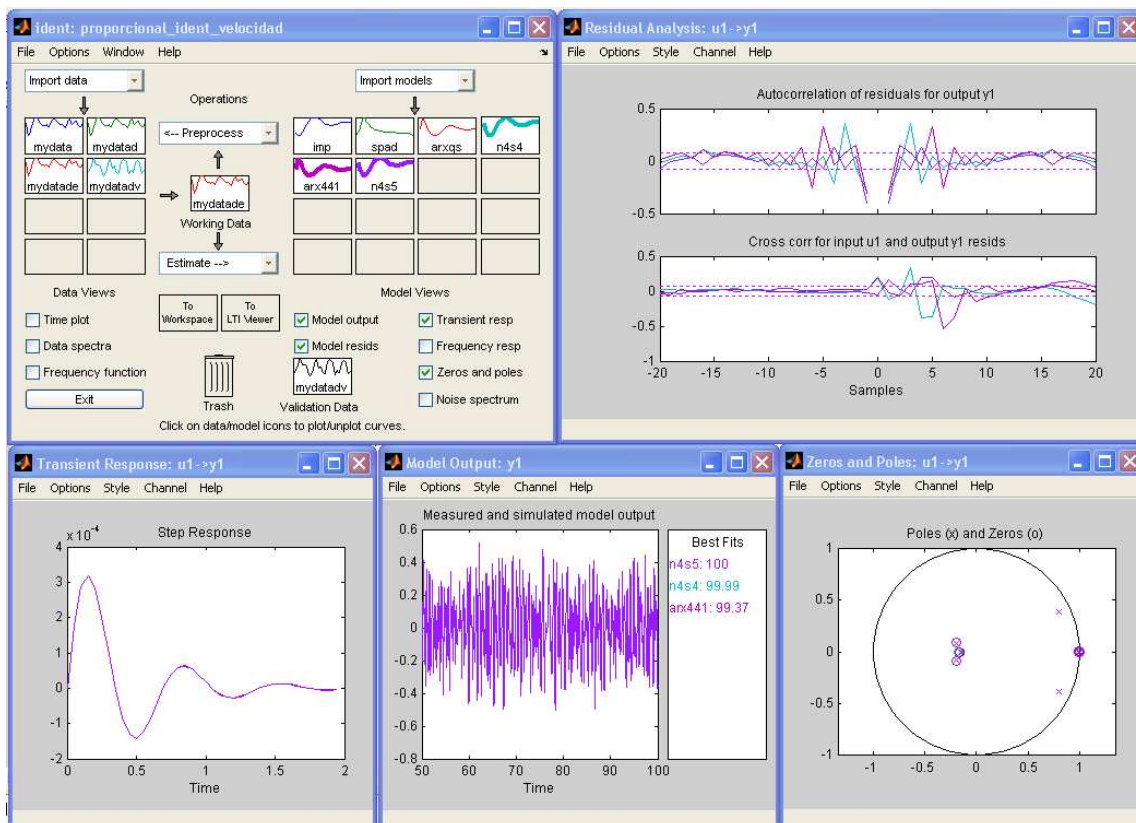


Figura 7.3: Resultados de la identificación de los modelos para la velocidad de la máquina.

Tabla 7.1: Funciones de transferencia para los modelos de velocidad de la máquina con base en los modelos identificados N4S5, N4S4 y ARX441.

Modelo	Función de Transferencia Identificada	Ajuste del modelo
N4S5	$G_1 = \frac{0,0001773z^4 - 0,0002836z^3 + 4,372e-005z^2 + 5,409e-005z + 8,474e-006}{z^5 - 2,218z^4 + 1,442z^3 + 0,009056z^2 - 0,1984z - 0,03443}$	100 %
N4S4	$G_2 = \frac{0,0001773z^3 - 0,0003232z^2 + 0,0001145z + 3,139e-005}{z^4 - 2,442z^3 + 1,98z^2 - 0,413z - 0,1253}$	99,99 %
ARX441	$G_3 = \frac{0,0001773z^3 - 0,0003232z^2 + 0,0001171z + 2,887e-005}{z^4 - 2,442z^3 + 1,994z^2 - 0,4355z - 0,1142}$	99,37 %

el problema que se plantea es el de determinar la magnitud de la ganancia requerida K_v para cumplir con unas condiciones de respuesta transitoria deseadas, las cuales pueden ser el tiempo de asentamiento (TA) y el sobreimpulso.

Si el factor de amortiguamiento relativo de un polo en lazo cerrado⁴ es ζ , puede calcularse la frecuencia natural no amortiguada ω_n para un tiempo de asentamiento (TA) deseado. Esto es, si

$$TA = \frac{4}{\zeta \omega_n},$$

entonces

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta TA}$$

La frecuencia natural amortiguada se determina como

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Para un período de muestreo T (el cual se define durante la simulación), la frecuencia de muestreo correspondiente es:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

Para localizar la magnitud y el ángulo del polo dominante en lazo cerrado deseado para un lugar geométrico de los factores de amortiguamiento relativo constante, se tiene que:

$$|z| = e^{-T\zeta\omega_n} = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_d}{\omega_s}\right)$$

y

$$\angle z = T \omega_d = 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_s}$$

La constante de ganancia proporcional K_v para el controlador se determina a partir de la condición de magnitud

$$|K_v G(z)|_{(|z|+\angle z)} = 1$$

o lo que es lo mismo

$$K_v |G(z)|_{(|z|+\angle z)} = 1$$

Esto quiere decir que la ganancia K_v se puede obtener a partir de

$$K_v = \frac{1}{|G(z)|_{(|z|+\angle z)}}$$

⁴Véase [22], capítulo 8.

7.4.2. Resultados obtenidos

En la Tabla 7.2 aparece el resumen de los resultados obtenidos para el cálculo de la constante K_v con base en cada uno de los modelos identificados. Es necesario especificar que los resultados varían⁵ de acuerdo con las condiciones de diseño planteadas. En este caso se utilizaron los siguientes factores para el cálculo de K_v : Tiempo de asentamiento $TA = 2$ y Factor de Amortiguamiento $\zeta = 0,5$. Con estos datos, los polos dominantes en lazo cerrado se ubican en $z = 0,8913 \pm 0,1559i$. Se observa que en los tres casos el valor de la constante K_v toma el valor aproximado a $K_v = 4035$.

Para analizar los resultados de la introducción del control proporcional, se utiliza el diagrama de Matlab mostrado en la Figura 7.4. Aquí la ganancia K_v calculada por medio de la identificación se multiplica por la velocidad de la máquina, con lo cual se obtiene la magnitud de la fuerza de control que se requiere aplicar entre las masas móviles del sistema para disminuir la amplitud de la velocidad de la máquina. En la Figura 7.5 se muestran los resultados obtenidos.

A partir de los datos obtenidos en la comparación se encuentra que la posición de la masa de la máquina pasa de $-0,1196 \pm 0,0235$ a $-0,1194 \pm 0,0127$ (esto indica que no se observan cambios apreciables en la posición de la máquina), y la velocidad (que es lo que se quiere controlar) pasa de $-0,0014 \pm 0,2041$ a $-0,0013 \pm 0,1097$. Esto quiere decir que la inclusión del controlador proporcional logra disminuir la velocidad al 53,75% de la que se tenía sin control. Este resultado es aceptable teniendo en cuenta que se trata del controlador más elemental aplicable al sistema bajo análisis. La fuerza de control requerida para lograr este resultado es de $\pm 447,6 N$, la cual es alcanzable con un controlador industrial comercial [12].

7.5. Control por ubicación de polos

Cuando el lugar geométrico de las raíces se emplea para diseñar sistemas de control, el enfoque general se puede describir como *ubicación de polos*. En este caso los polos son los de la función de transferencia en lazo cerrado, que también son las raíces de la ecuación característica. Al conocer la relación de los polos en lazo cerrado y el desempeño del sistema, se puede realizar el diseño al especificar la ubicación de los polos. En este caso el criterio de diseño está asociado con las condiciones bajo las cuales se pueden colocar los polos en forma arbitraria.

Cuando se tiene un controlador de un orden igual o mayor que tres, los controladores PD, PI, de adelanto de fase de una etapa o el de atraso de fase no son capaces de controlar en forma independiente todos los

⁵Es decir, no hay una solución única.

Tabla 7.2: Funciones de transferencia para los modelos de velocidad de la máquina con base en los modelos identificados N4S5, N4S4 y ARX441.

Modelo	Constante K_v
N4S5	$K_v = 4035,0$
N4S4	$K_v = 4034,8$
ARX441	$K_v = 4032,7$

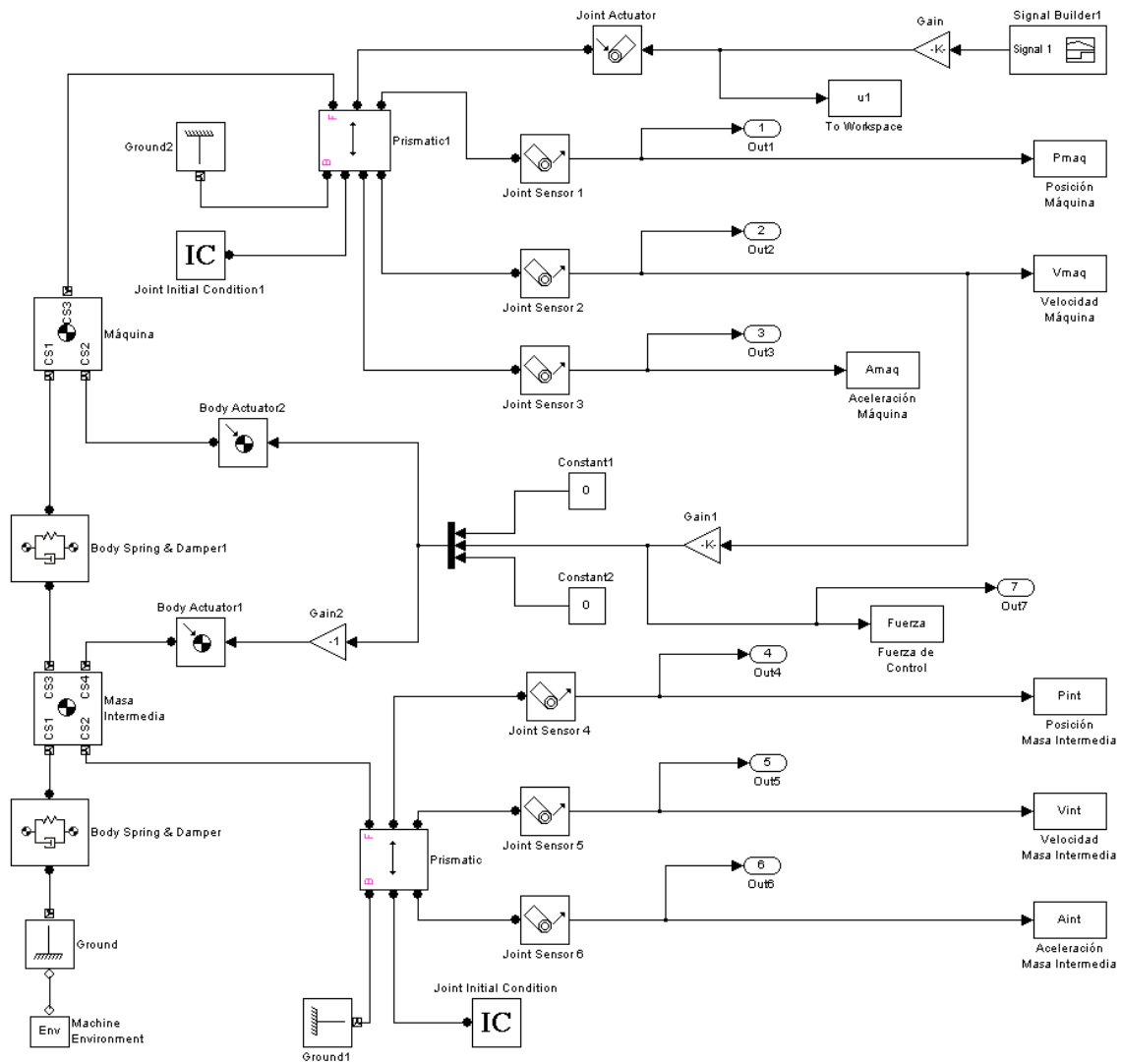


Figura 7.4: Diagrama utilizado en Matlab para el diseño del controlador proporcional en el caso del modelo reducido de una máquina.

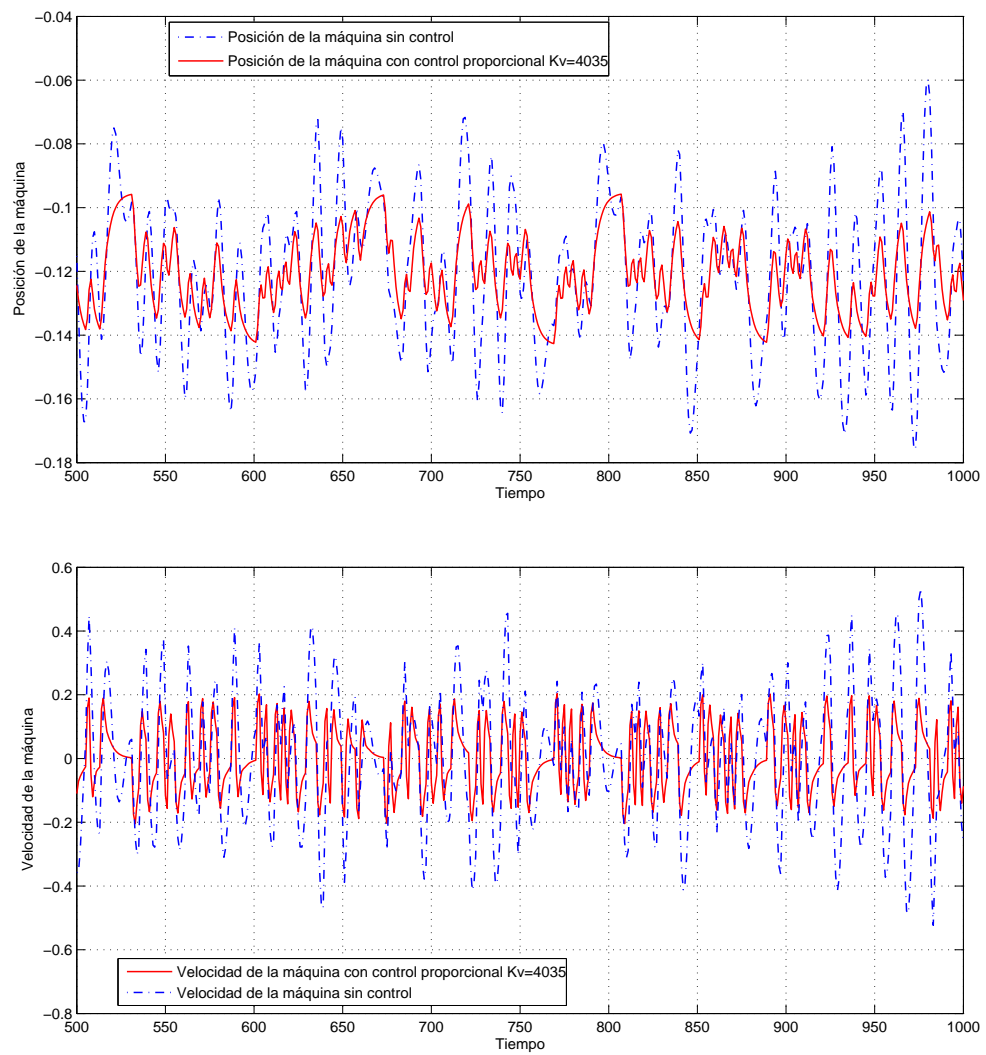


Figura 7.5: Resultados de la introducción del control proporcional en el modelo reducido

polos del sistema, ya que sólo hay dos parámetros⁶ libres en cada uno de estos controladores.

Para investigar las condiciones requeridas para colocar los polos en forma arbitraria en un sistema de orden n se considera que el proceso está descrito por la siguiente ecuación:

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B u(t), \quad (7.5)$$

donde $X(t)$ es un vector de estado de orden $(n \times 1)$ y $u(t)$ es el control escalar.

El control mediante la realimentación del estado es:

$$u(t) = -K X(t) + r(t), \quad (7.6)$$

donde K es la matriz de realimentación de orden $(1 \times n)$ con elementos de ganancia constantes.

Al sustituir la ecuación 7.6 en la ecuación 7.5, el sistema en lazo cerrado está representado por la ecuación de estado:

$$\dot{X}(t) = (A - BK)X(t) + B r(t) \quad (7.7)$$

Si el par $[A, B]$ es completamente controlable, existe una matriz K que puede dar un conjunto arbitrario de valores característicos de $(A - BK)$; esto es, las n raíces de la ecuación característica $|sI - A + BK| = 0$ se pueden ubicar en forma arbitraria.

Si un sistema es por completo controlable, siempre se puede representar en la forma canónica controlable (FCC), esto es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de ganancia de realimentación K se expresa como:

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \cdots \quad k_n],$$

donde $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ son constantes reales. Por lo tanto,

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & -a_2 - k_3 & \cdots & -a_{n-1} - k_n \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Los valores característicos de $[A - BK]$ se encuentran de la ecuación característica:

$$|sI - (A - BK)| = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + k_{n-1})s^{n-2} + \cdots + (a_0 + k_1) = 0$$

⁶ K_u y T_u de los controladores clásicos P, PD, PI

Los polos se pueden asignar en forma arbitraria ya que las ganancias $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ están separadas en cada coeficiente de la ecuación característica. En forma intuitiva tiene sentido que un sistema debe ser *controlable* para que los polos sean colocados en forma arbitraria.

7.5.1. Cálculo de las constantes de ganancia de realimentación

Para realizar el diseño del controlador por asignación de polos en el caso del modelo de una máquina reducida, el proceso se inicia con la identificación de los estados de interés para el control de la máquina. En este caso los estados identificados son la posición y la velocidad de la máquina. Este procedimiento es similar al explicado en la sección 7.3.

Aquí los datos “enviados” al espacio de trabajo de Matlab son la perturbación junto con la posición y velocidad de la máquina. De nuevo, realizada la estimación de algunos modelos se encuentra que las mejores identificaciones corresponden a los modelos N4S5 (con un ajuste del 100%), ARXQS (con un ajuste del 100%), N4S4 (con un ajuste del 99.54%) y ARX221 (con un ajuste del 99.53%). En la Figura 7.6 se muestran los resultados obtenidos durante la identificación.

Luego se procede a expresar el sistema en su representación de variables de estado y a partir de esta representación se obtienen las matrices A , B , C y D , tal como se indica en la ecuación 7.5. Estos resultados son de utilidad para verificar la condición suficiente y necesaria de controlabilidad para el diseño del controlador por ubicación de polos⁷.

7.5.2. Resultados obtenidos

Con la asignación de un conjunto de polos deseados⁸ y con la utilización del comando *place* de Matlab en la forma $K = \text{place}(A, B, [P])$, se obtiene la matriz de ganancias de realimentación K .

A continuación se muestran los resultados obtenidos a partir del modelo identificado N4S4. Para este modelo, las matrices A , B , C , D se obtienen con base en la función *ss* de Matlab:

```
>> G=ss(n4s4)
```

```
a =
```

	x1	x2	x3	x4
x1	0.7402	-0.3186	0.001959	-0.0007725
x2	0.4883	0.8606	0.002351	-0.001479
x3	-0.1255	0.1048	0.925	0.2822
x4	0.442	-0.3834	0.2866	-0.06916

⁷Para verificar esto se utiliza el comando *ctrb*(A, B) de Matlab.

⁸Escritos en forma vectorial $[P]$.

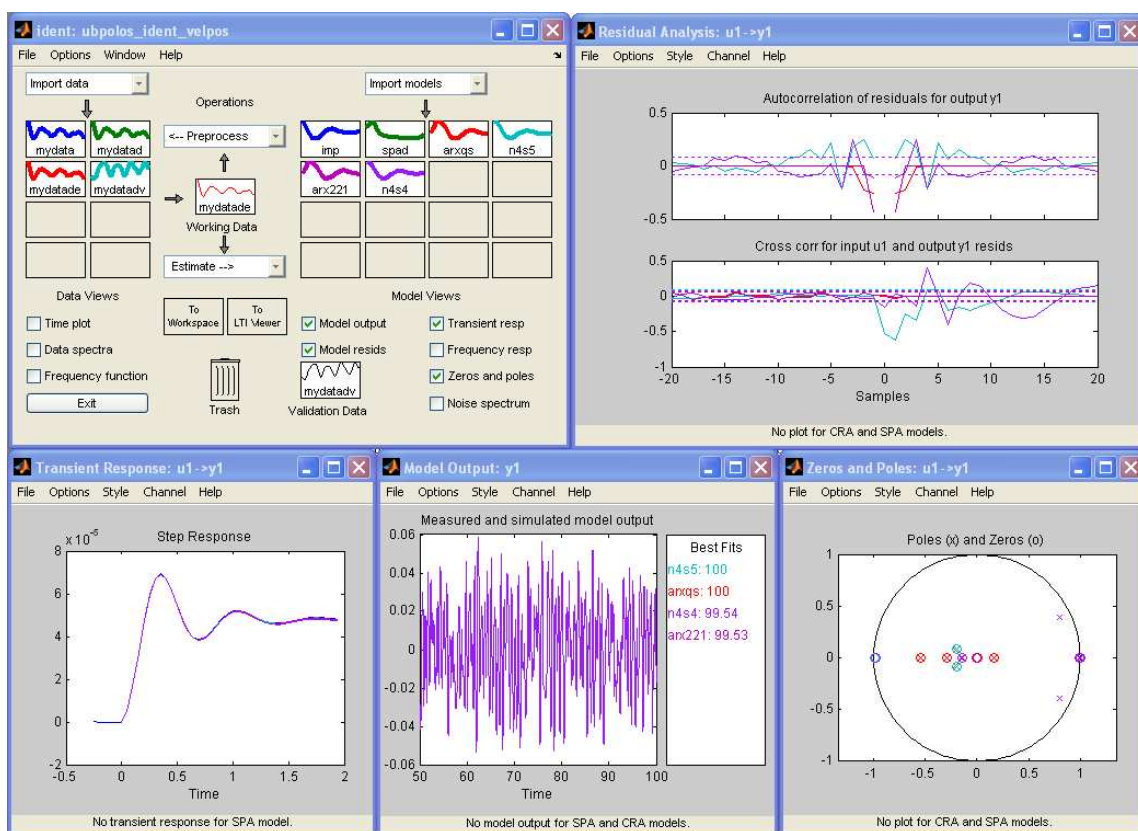


Figura 7.6: Resultados de la identificación simultánea de los modelos para la posición y velocidad de la máquina.

```

b =
      u1      v@y1      v@y2
x1 -2.758e-005 -8.934e-006 2.248e-005
x2 1.379e-005 -2.265e-005 1.571e-005
x3 -2.061e-005 0.009279 -0.005627
x4 9.363e-005 0.002818 -0.005889

```

```

c =
      x1      x2      x3      x4
y1 -0.4417 -0.5565 -0.001251 0.001062
y2 -4.637 3.775 0.01636 -0.02466

```

```

d =
      u1      v@y1      v@y2
y1 0 1.769e-005 0
y2 0 -4.578e-006 3.505e-006

```

```

Input groups:
  Name      Channels
Measured    1
Noise      2,3

```

```

Sampling time: 0.05
Discrete-time model.
>>

```

Luego, con la definición de unas ciertas condiciones de diseño (tiempo de asentamiento $TA = 2$, Factor de amortiguamiento $\zeta = 0,5$), los polos encontrados fueron los siguientes:

$$P = [0,3686 + 0,1717i \quad 0,3686 - 0,1717i \quad 0,3752 + 0,3252i \quad 0,3752 - 0,3252i] \quad (7.9)$$

Con base en las matrices A , B y los polos P se obtienen los siguientes resultados para K :

$$K = [-0,1129 \quad -0,1441 \quad 2,2722 \quad 0,5916] \cdot 10^5 \quad (7.10)$$

Los datos obtenidos para K se utilizan en el diagrama de control construido con base en el modelo reducido para analizar los resultados de la introducción del control por ubicación de polos. La fuerza de control calculada de esta manera se aplica de nuevo simultáneamente a las masas de la máquina e intermedia, buscando que la velocidad de la máquina sea lo mas pequeña posible. En la Figura 7.7 se muestra el diagrama de control utilizado en Matlab, incluyendo la acción de control por ubicación de polos.

A partir de los datos obtenidos en la comparación de las respuestas para la posición y la velocidad antes y después de aplicado el control, se encuentra que la posición de la masa de la máquina pasa de $-0,1196 \pm 0,0235$ a $-0,0817 \pm 0,0272$, y la velocidad⁹ pasa de $-0,0014 \pm 0,2041$ a $0,00083 \pm 0,0355$.

⁹Que es lo que se quiere controlar.

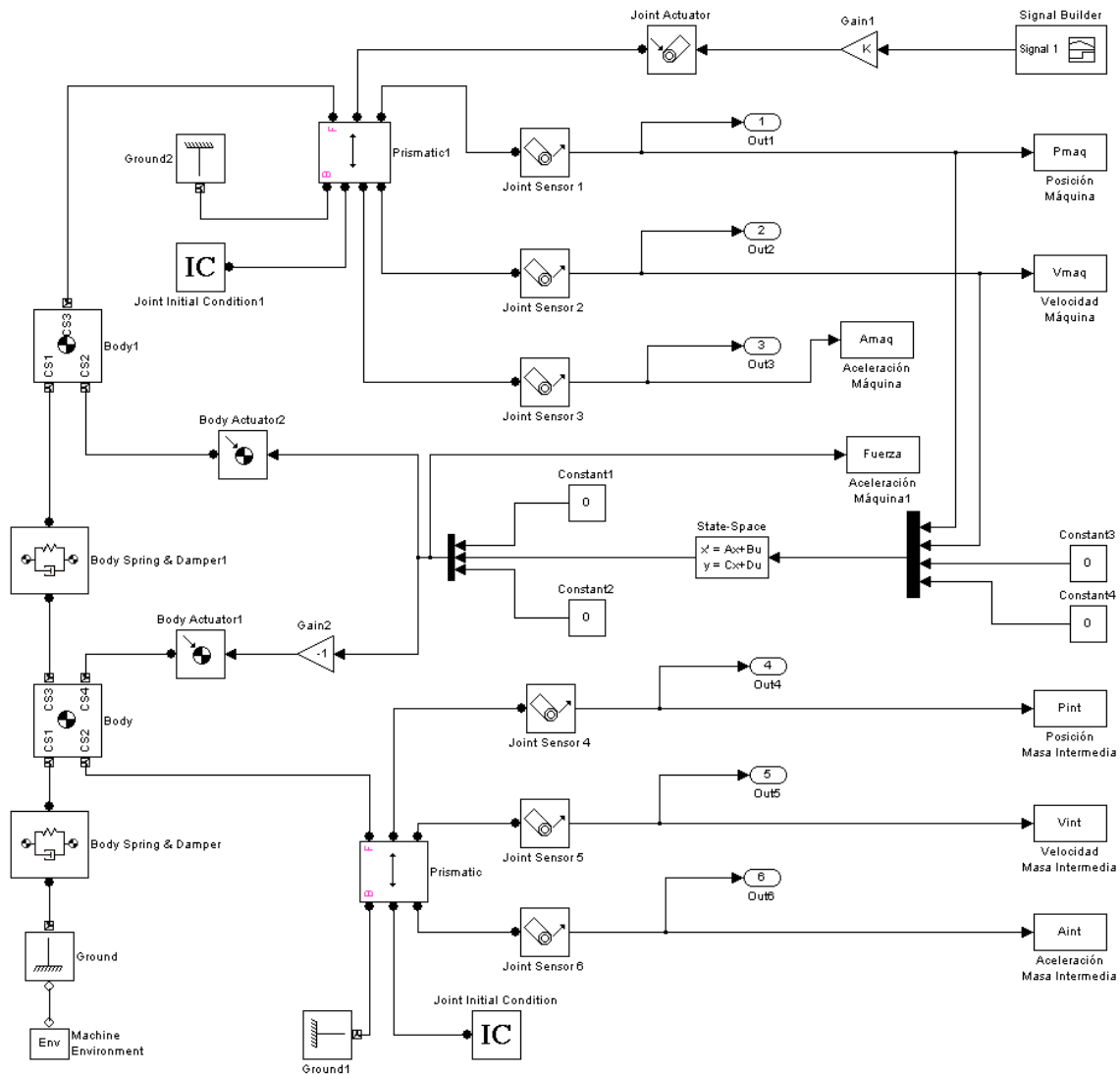


Figura 7.7: Diagrama utilizado en Matlab para el diseño del controlador por ubicación de polos en el caso del modelo reducido de un máquina.

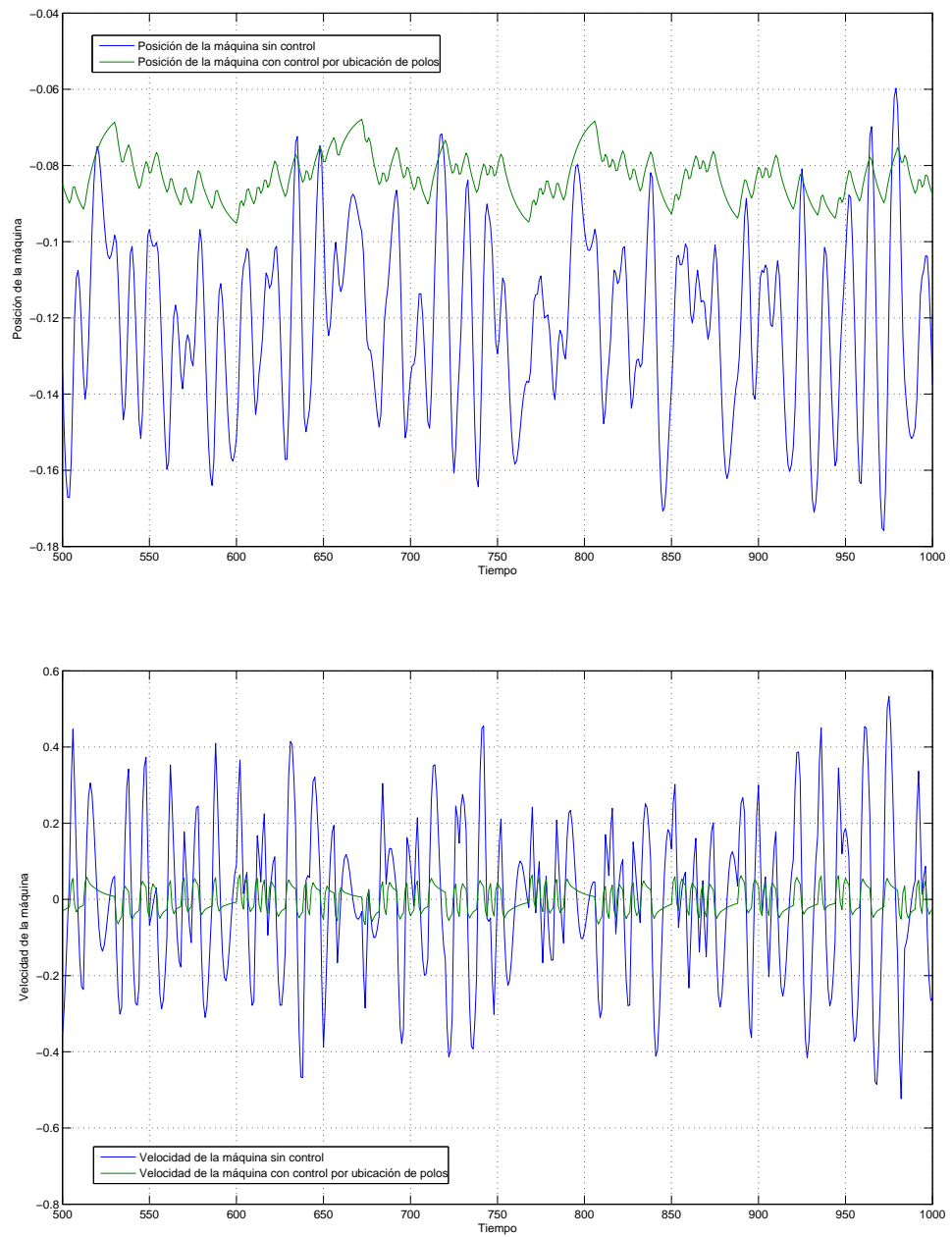


Figura 7.8: Resultados de la introducción del control por ubicación de polos en el modelo reducido.

Esto quiere decir que la inclusión del controlador por ubicación de polos calculados con base en el modelo identificado N4S4 logra disminuir la velocidad al 17,39% de la que se tenía sin control. Este resultado es superior al encontrado con base en el control proporcional. La fuerza de control requerida para lograr este resultado es de 384,5 N (menor que en el caso del control proporcional), la cual es alcanzable con un controlador industrial comercial [12].

7.6. Resumen

En este capítulo se mostraron los procedimientos para el control de la posición de la masa superior de un sistema de dos masas que conforma un modelo reducido de máquina simplemente apoyada, basados en la identificación de la velocidad. Las leyes de control utilizadas fueron las de control proporcional y control por ubicación de polos.

En cada uno de los casos, las leyes de control se utilizaron para generar una fuerza que aplicada entre las masas móviles permiten compensar el movimiento de la masa superior causado por una perturbación externa.

Mediante el empleo del *Simmechanics* del Matlab, se calcularon las respuestas del sistema reducido con y sin acción de control.

Los resultados muestran que se logra una mejora apreciable en el control de vibración en los dos casos, aunque en cada situación los resultados se deben interpretar independientemente.

En este caso, la introducción de un controlador proporcional entre las masas móviles del sistema permite disminuir la velocidad de la máquina al 53,75% de la velocidad sin control, y no se observan desplazamientos significativos en la posición de la máquina. Para alcanzar este resultado se requiere utilizar un actuador que permita aplicar una fuerza de $\pm 447,6$ N. Al introducir un controlador por ubicación de polos en las mismas condiciones de vibración, se logra disminuir la velocidad de la máquina al 17,39% de la velocidad sin control, con una fuerza requerida para alcanzar este resultado de $\pm 384,5$ N. Si embargo este efecto de control de velocidad se logra a costa de un ligero desplazamiento de la máquina (error en estado estacionario), el cual se puede considerar normal en una primera etapa de control.

Conclusiones generales

En el presente trabajo, se realizó un breve recorrido por los procesos de modelado matemático, simulación, identificación y control activo de un sistema vibratorio, representado en este caso por el modelo reducido de una máquina simplemente apoyada.

Durante este recorrido, se mostraron algunos de los procedimientos para modelar matemáticamente sistemas vibratorios de diferentes grados de libertad. Se hizo énfasis en el concepto de función de transferencia por su importancia desde el punto de vista de entender la respuesta de un determinado sistema vibratorio (caja negra) sometido a los efectos de una perturbación externa.

Para efectos del trabajo, se planteó el desarrollo de una máquina simplemente apoyada con múltiples grados de libertad, y la forma de diseñar un sistema de control para mantener la vibración dentro de unos límites predeterminados. Se mostró que uno de los muchos procedimientos que existen para resolver este problema, es el de controlar pasivamente¹ algunos de los grados de libertad de la máquina, y controlar activamente el resto de grados de libertad.

Para efectos del diseño del control activo, se trabajó con base en lo que se denominó “módulos de control” colocados en las esquinas de soporte de la máquina. De esta manera, cada módulo trabajando independientemente permite controlar el movimiento de cada punto de apoyo. Cada módulo se construye en la práctica como un sistema vibratorio clásico compuesto por un arreglo de dos masas conectadas por resortes. Esta simplificación aparentemente trivial, permite manejar problemas con diferentes grados de dificultad de una manera bastante eficaz.

En ausencia de un arreglo experimental real, se utilizó una de las múltiples herramientas (toolbox) disponibles en Matlab, denominado *Simmechanics*. Esta herramienta, en la versión utilizada, permite acceder a diferentes “objetos” o elementos mecánicos en los cuales es posible definir sus propiedades físicas, con lo cual se dispone de una especie de laboratorio en cual es virtualmente posible construir “máquinas” que se modelan en forma bastante aproximada a como lo haría una máquina real.

¹por medios mecánicos

Por medio de simulación, se validó el modelo construido en *Simmechanics*. Con el uso de las posibilidades ofrecidas por el Matlab, se enmascaró el modelo construido en *Simmechanics*, y se configuró el denominado modelo reducido de una máquina simplemente apoyada. Las ventajas de esto son evidentes: se dispone de una máquina virtual en su configuración de “caja negra”, pero de la cual se conocen todos los parámetros internos. Sobre esta máquina virtual pueden aplicarse diferentes tipos de perturbaciones y observar los efectos resultantes.

Posteriormente, el modelo reducido se utilizó para realizar dos tipos diferentes de identificación. La primera de ellas, para tratar de identificar (desenmascarar) matemáticamente los valores internos de los parámetros utilizados en la máquina. La segunda, para identificar la velocidad de una de las masas para su utilización como estrategia para el diseño de un sistema de control de vibraciones.

En ambos procesos de identificación se utilizaron algunos de los modelos matemáticos de identificación de sistemas no lineales, y por medio del Simulink del Matlab se evaluaron las características de los “mejores” modelos identificados. Al disponer de los datos de la máquina construida (enmascarada), se pudieron evaluar los resultados de la identificación. Los resultados muestran las bondades de la identificación y la posibilidad de aplicación a otros campos de la ingeniería.

Con base en los datos obtenidos durante la identificación, se procedió a trabajar en el diseño de estrategias de control para su aplicación al control de vibraciones en el modelo reducido. Se propusieron controladores de los tipos proporcional y por asignación de polos. En general, el diseño de los controladores se realizó con base en el modelo identificado. Luego, los parámetros calculados para los controladores se introdujeron en el modelo reducido original, para observar las diferencias entre las respuestas del sistema controlado con base en la identificación y el modelo real.

Los resultados muestran que hay diferencias apreciables en las respuestas del sistema ante la aplicación de cierta ley de control. No se puede hablar en general de un “mejor sistema de control”. Los resultados deben evaluarse independientemente, pues dependen directamente de las características propias de cada situación. Sin embargo, son evidentes los resultados de trabajar con un modelo identificado y trasladar las leyes de control a un modelo real.

Quedan abiertas muchas preguntas asociadas al trabajo de identificación y diseño de sistemas de control. Las aplicaciones de estas disciplinas a la ingeniería son prácticamente ilimitadas. Es por esto que este trabajo solo debe considerarse como un primer paso hacia aplicaciones más complejas.

Para un trabajo futuro se propone:

- Realizar aplicaciones de control sobre sistemas reales (no simulados), para validar experimentalmente los resultados obtenidos
- Probar otras estrategias de control, como la de asignación de polos por realimentación del estado, introduciendo referencias e integradores para la eliminación del error en estado estacionario

Lista de símbolos utilizados

Símbolo	Descripción	Página²
A	Matriz de coeficientes constantes (matriz de estado)	26
A, A_i	Constantes	12, 15
$A(q^{-1})$	Polinomio autoregresivo	35
a_i	Constantes de polinomio	82
B	Matriz o vector de coeficientes constantes	26
B	Constante	13
$B(q^{-1})$	Polinomio autoregresivo	35
b_i	Constantes de polinomio	82
b_s	Constante de amortiguación viscosa del amortiguador superior	54
\hat{b}_s	Constante de amortiguación viscosa estimada del amortiguador superior	77
β	Factor de amplificación	17
β_l	Transmisibilidad	18
C	Matriz o vector de coeficientes constantes	26
C	Matriz de amortiguamiento de un sistema de múltiples grados de libertad	29
c, c_i	Constantes o coeficientes de amortiguación viscosa	11, 50
C_c	Coficiente de amortiguamiento crítico	13
$C(q^{-1})$	Polinomio autoregresivo	35
D	Matriz o vector de coeficientes constantes	26
$D(q^{-1})$	Polinomio autoregresivo	35
$e(t)$	Perturbación	34
$\varepsilon(t)$	Error de predicción	38
F	Fuerza	11
$F(t), F_i(t)$	Fuerzas perturbadoras dependiente del tiempo	12, 30
$F_i(t)$	Fracción de la fuerza total transmitida al piso en un punto de apoyo	50

¹³Página de primera aparición del símbolo en el texto del documento

Símbolo	Descripción	Página
F_t	Fuerza resultante dependiente del tiempo	17
F_0	Fuerza no dependiente del tiempo (constante)	15
$F(s), G(s)$	Funciones de transferencia para la variable compleja s	23, 9
$F(q^{-1})$	Polinomio autoregresivo	35
f_s	Fuerza ejercida por el resorte superior	79
f_u	Fuerza ejercida por el resorte inferior	79
f_d	Fuerza ejercida por el amortiguador superior	80
ϕ	Angulo constante	22
Φ	Matriz	39
$\varphi^T(t)$	Vector	39
G	Función de transferencia	9
$G(q^{-1})$	Polinomio autoregresivo	34
$H(t)$	Función de respuesta al impulso	23
$H(q^{-1})$	Polinomio autoregresivo	34
I	Impulso lineal	22
\mathbf{I}	Matriz identidad	27
j	Operador imaginario	24
K	Matriz de rigidez de un sistema de múltiples grados de libertad	29
k, k_i	Constantes elásticas de resortes	11, 50
k_s	Constante elástica de resorte en la zona activa	54
\hat{k}_s	Constante elástica estimada del resorte superior	77
k_u	Constante elástica de resorte en la zona pasiva	54
\hat{k}_u	Constante elástica estimada del resorte inferior	77
$\mathcal{L}[F(t)]$	Transformada de Laplace de $F(t)$	9
λ^2	Varianza	40
$\tilde{\lambda}^2$	Estimador de varianza	40
M	Matriz de masa de un sistema de múltiples grados de libertad	29
m, m_i	Masas de cuerpos rígidos en general	11
m_s	Masa amortiguada (o de la máquina)	54
\hat{m}_s	Masa amortiguada (o de la máquina) estimada	77
m_u	Masa no amortiguada (intermedia, o disipadora de energía)	54
\hat{m}_u	Masa no amortiguada (o intermedia) estimada	77
p, p_i	Constantes derivadas de cálculos	12, 12
Ψ, Ψ_t	Ángulos de fase	17, 18
$\tilde{\Psi}$	Diferencia entre ángulos de fase	18
r	Relación entre velocidades angulares	16
s	Nombre asignado a una variable compleja en general	11
t	Tiempo	12
θ	Vector	39
$\hat{\theta}$	Vector de parámetros estimados	39

Símbolo	Descripción	Página
U	Vector de entradas (fuerzas) del sistema	26
U	Fuerza dependiente del tiempo o perturbación	
U	Señal de entrada (persistentemente excitada)	79
$u(t)$	Entrada a un sistema	34
ω	Frecuencia de un sistema	14
ω_d	Frecuencia natural de amortiguamiento de un sistema	22
ω_f	Frecuencia una fuerza perturbadora	15
ω_n	Frecuencia no amortiguada	13
$V(\hat{\theta})$	Función residuo	39
W_e	Trabajo realizado por una fuerza sobre un sistema	19
W_d	Energía disipada por un sistema	20
W_s	Trabajo realizado por un resorte sobre un sistema	21
$\mathbf{X}(s)$	Vector de variables de estado	27
x, y, z	Ejes coordenados de referencia	3
$x_i(t)$	Variables de estado	26
$\dot{x}_i(t)$	Derivadas de las variables de estado	26
$Y, y(t)$	Vector de salidas del sistema	27, 34
ζ	Factor de amortiguamiento	13
Z	Constante	22
z, z_i, Z	Posición de un cuerpo rígido en un sistema coordenado de referencia	11
z	Posición de referencia	11
$\dot{z}, \dot{z}_i, \dot{Z}$	Velocidad de un cuerpo rígido en un sistema coordenado de referencia	11
$\ddot{z}, \ddot{z}_i, \ddot{Z}$	Aceleración de un cuerpo rígido en un sistema coordenado de referencia	12
Z_0	Posición inicial	16
$\Delta\dot{z}$	Cambio de velocidad	22
z_h	Solución complementaria o transitoria de una ecuación diferencial homogénea	15
z_p	Solución particular o estacionaria de una ecuación diferencial homogénea	15
z_s	Posición de la máquina	79
z_u	Posición de la masa intermedia (disipadora de energía)	79
z_{sus}	Diferencia de posiciones de las masas	79
\dot{z}_{sus}	Diferencia de velocidades de las masas	80
\dot{z}_s	Velocidad de la máquina	80
\dot{z}_u	Velocidad de la masa intermedia	80
\ddot{z}_s	Aceleración de la máquina	80
\ddot{z}_u	Aceleración de la masa intermedia	80
\dot{z}_h	Velocidad en estado transitorio	15
\dot{z}_p	Velocidad en estado estacionario	15
\ddot{z}_h	Aceleración en estado transitorio	15
\ddot{z}_p	Aceleración en estado estacionario	15

Bibliografía

- [1] Anderson, Eric H.; Houghton, Bowie. **ELITE-3 Active Vibration Isolation Workstation**. *SPIE1997, SPIE Smart Structures and Materials, 2001. Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*.
- [2] Åström, K.J.; Wittenmark, Björn. **Adaptive Control**, Second Edition. Addison-Wesley. 1995.
- [3] Abu Hanieh, Ahmed. **Active Isolation and Damping of Vibrations via Stewart Platform**, Active Structures Laboratory, Department of Mechanical Engineering and Robotics, Université Libre de Bruxelles, 2003.
- [4] Chen, Chi-Tsong. **Linear System Theory and Design**. Oxford University Press, New York. 1999. ISBN 0-19-511777-8.
- [5] Demic, M. **Identification of Vibration Parameters for Motor Vehicles**. *Veh. Syst. Dyn.* 1997, Vol 27, pp 65-88.
- [6] Franklin, Gene F.; Powell, J. David and Workman, Michael. **Digital Control of Dynamic Systems**. Third edition. Addison Wesley, California. 1997. ISBN 0-201-82054-4.
- [7] Franklin, Gene F.; Powell, J. David and Emami-Narini, Abbas. **Feedback Control of Dynamic Systems**. Third edition. Addison Wesley, . 1994. ISBN 0-201-52744-2.
- [8] García de Jalón, Javier and Bayo, Eduardo. **Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The Real-Time Challenge**. Springer Verlag. ISBN 0-387-94096-0, New York. 1994. ISBN 3-540-94096-0, Berlín.
- [9] Hatch, Michael R. **Vibration Simulation Using Matlab and Ansys**. CRC Press, Florida. 2000. ISBN 1-58488-205-0.
- [10] Howard, Carl. **Active Isolation of Machinery Vibration from Flexible Structures**. Department of Mechanical Engineering, University of Adelaide, Australia. 1999.
- [11] Johansson, R. **System Modeling and Identification**. Prentice Hall International. 1993.
- [12] Johnson, Jack L. **Design of Electrohydraulic Systems for Industrial Motion Control**. 1991.

- [13] Kim, Chul; Ro, Paul I. **An Accurate Full Car Ride Model Using Model Reducing Techniques.** *Transaction of the ASME. Journal of Mechanical Design.* Dec, 2002, Vol. 124, pp 697–705.
- [14] Kim, C.; Ro, P. I. and Kim, H. **Effect of the Suspension Structure on Equivalent Suspension Parameters.** *Proc. Instn. Mech. Engrs, Part D, Journal of Automobile Engineering*, 1999, 213(D), pp 457–470.
- [15] Kim, C.; Ro, P. I. **Reduced–Order Modeling and Parameter Estimation for a Quarter–Car Suspension System.** *Proc. Instn. Mech. Engrs, Part D, Journal of Automobile Engineering*, 2000, 214(D), pp 851–864.
- [16] Kwon, Young W. and Bang, Hyochoong. **The Finite Element Method Using Matlab.** Second Edition. CRC Press, Florida. 2000. ISBN 0-8493-0096-7.
- [17] Landau, I. D.; Lozano; T. and M'Saad, M. "Adaptive Control". Springer–Verlag, Great Britain. 1998. ISBN 3-540-76187-X.
- [18] Ljung, Lennart. **System Identification. Theory for the User.** Second Edition. Prentice Hall. 1999. ISBN 0-13-656695-2, New York.
- [19] Ljung, Lennart. **System Identification Toolbox for Use With Matlab. User's Guide, Version 6.** The MathWorks, Inc, Nov., 2003.
- [20] **Matlab. The Language of Technical Computing. Getting Started With Matlab, Version 6.** The MathWorks, Inc, Jul., 2002.
- [21] **Matlab. The Language of Technical Computing. Using Matlab, Version 6.** The MathWorks, Inc, Aug., 2002.
- [22] Nise, Norman S. **Control Systems Engineering.** third Edition. John Wiley & Sons, 2000. ISBN 0-471-36601–3.
- [23] Ogata, K. **Discrete Time Control Systems.** Prentice Hall International, USA.
- [24] Olson, H. F. **Electronic Control of Noise, Vibration and Reverberation.** *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, Vol. 28, pp 966–972.
- [25] Olson, H. F.; May, E. G. **Electronic Sound Absorber.** *Journal of the Acoustical Society of America*, 1953, Vol. 25, pp 1130–1136.
- [26] Sastry, Shankar; Bodson, Mark. **Adaptive Control: stability, convergence and robustness.** Prentice Hall International. 1989. ISBN 0-13-004326-5, USA.
- [27] Shabana, A.A. **Theory of Vibration. An Introduction.** Second Edition. Springer Verlag. 1996. ISBN 0-387-94524-5, New York.
- [28] Shabana, A.A. **Vibration of Discrete and Continuous Systems.** Second Edition. Springer Verlag. 1997. ISBN 0-387-94744-2, New York.
- [29] **SimMechanics for use With Simulink. User's Guide, Version 2.** The MathWorks, Inc, Nov., 2002.
- [30] **Simulink. Mode–Based and System–Based Design. Using Simulink, Version 5.** The MathWorks, Inc, Sep., 2003.

- [31] Uhlig, A; Schreiber, U. and Blochwitz, T. **ISOMAG 1.1: Design and Calculation of the Vibration Isolation of Machines and Devices**. Dresden, 2002. ISBN 3-89701-804-7.
- [32] Umez-Eronini, Eronini. **Dinámica de Sistemas y Control**. Thomson Learning, Morgan State University. 2001. ISBN 970-686-041-X.
- [33] Walter, Erik; Pronzato, Luc. **Identification of Parametric Models from Experimental Data**. Springer. 1997. ISBN 3-540-76119-5, Berlin.

