

**Análisis con wavelets de alteraciones electrocardiográficas en
pacientes chagásticos crónicos**

Fernando Riveros Sanabria

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al
título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Director
Jairo Villegas Gutiérrez

Universidad EAFIT
Departamento de Ciencias Básicas
Maestría en Matemáticas Aplicadas
Medellín
2012

A la memoria de Hermencia Amaya,
quien en vida donó una muestra electrocardiográfica, sólo con el noble propósito de colaborar con esta investigación.

Agradecimientos

A los profesores de la maestría en matemáticas aplicadas de la Universidad EAFIT, en especial a su director y también director del presente trabajo, profesor Jairo Villegas Gutiérrez, como también al especialista en electrofisiología y profesor de la Universidad de los Llanos Dr. José Ricardo Corredor M., al ingeniero Electrónico Jairo D. Cuero Ortega, al médico cardiólogo Luis Fernando Leal M. de la Clínica Meta, a la Dra. Elsy Stella Eslava Cifuentes, como también a todas y cada una de las personas que colaboraron con su asesoría y conocimiento en la culminación de este trabajo.

Agradecer enormemente a los pacientes chagásticos de la región, quienes a pesar de sus limitaciones y dolencias propias de ésta enfermedad, voluntariamente colaboraron accediendo cada uno de ellos a la toma de una muestra electrocardiográfica realizada en la Universidad de los Llanos.

Índice general

	pág.
Introducción	6
1. Chagas y Electrofisiología del corazón	
1.1 Epidemiología de la enfermedad de chagas en Latinoamérica y Colombia.....	9
1.2 Fisiología del corazón.....	11
1.3 El electrocardiograma (ECG).....	11
2. Introducción a la teoría wavelets	
2.1 Análisis de Fourier.....	15
2.2 Coeficientes y series de Fourier.....	15
2.3 Transformada de Fourier.....	16
2.4 Limitaciones del análisis de Fourier.....	17
2.5 Transformada corta de Fourier.....	18
2.6 Resolución Tiempo-Frecuencia.....	19
2.7 Transformada Wavelet Continua (CWT).....	21
2.8 Función escala.....	23
2.9 Características de la función escala.....	24
2.10 Wavelets de Daubechies.....	24
2.11 Evaluación de la función y sus derivadas.....	26
2.12 Análisis multirresolución.....	27
3. Algoritmo para detección de características del ECG	
3.1 Construcción de la base de datos de ECG de la región.....	32
3.2 Procesamiento y análisis de la señal ECG.....	32
3.2.1 Conversión análogo-digital (A/D) y filtrado.....	33
3.2.2 Extracción promediada en épocas.....	34
3.2.3 Filtraje de ruido de altas frecuencias.....	35
3.2.4 Sobre-muestreo (upsampling) y normalización de muestras...36	
3.2.5 Descomposición y reconstrucción eliminando el ruido de línea base.....	36
3.2.6 Identificación de características del ECG	38
3.3 Construcción de una GUI (Graphic User Interface).....	40

4. Resultados y comparaciones	
4.1 Ajustes del algoritmo.....	42
4.2 Aplicación del algoritmo.....	43
4.3 Identificación de alteraciones electrocardiográficas.....	45
4.4 Conclusiones.....	46
Referencias	48
Apéndice: Glosario	51

Introducción

El análisis de las señales electrofisiológicas constituye un elemento muy importante para estudiar el funcionamiento del cuerpo humano, como también identificar y diagnosticar un conjunto amplio de enfermedades. La señal electrocardiográfica refleja el funcionamiento eléctrico del corazón, tiene la ventaja de ser un procedimiento médico con resultados disponibles inmediatamente, no es invasivo y es económico. Para propósitos de diagnóstico de enfermedades del corazón es de gran valor. El electrocardiograma (ECG ó EKG) es la representación gráfica de los potenciales eléctricos del músculo cardiaco en función del tiempo y recogidos en la superficie de la piel a través de electrodos, presenta cinco o seis ondas a saber: onda P, Q, R, S, T y U, figura 1. La onda P se produce por la despolarización auricular, el complejo QRS se debe a la despolarización ventricular, la onda T representa la repolarización ventricular y en algunos casos aparece la onda U.

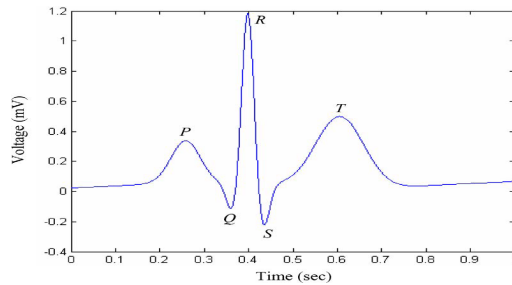


Figura 1. Electrocardiograma de un latido. <http://fisiopuj.tripod.com>

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS) [26], la principal causa de muertes en nuestro país y en la mayoría del mundo se debe a enfermedades cardiovasculares. El DANE concluyó que la primera causa de defunciones en nuestro país es el Infarto Agudo del Miocardio [24]. La enfermedad de Chagas (Tripanosomiasis americana) es producida por un parásito denominado *Trypanosoma cruzi*, éste parásito ingresa al torrente sanguíneo de los seres humanos y permanece allí por un largo periodo de tiempo, luego ingresa a las células del corazón y allí se desarrolla, afectando principalmente el miocardio. Según estudios se estima que entre 17 a 20 millones de personas están infectadas por este parásito, que se extiende por toda Latinoamérica desde Argentina, Brasil hasta México. El parásito es transmitido por un insecto denominado comúnmente como Pito, chinche, Vinchuca, Chipó, etc. (Triatomíno hematófago). De este total de personas infectadas, se estima que un 37 % de ellas desarrollan problemas crónicos del

corazón y por ende altísima probabilidad de muerte súbita por ésta causa. Esta enfermedad se refleja en aumento del tamaño del corazón (figura 4 b), debilitamiento del mismo, arritmias, dolor en el pecho, cardiomiopatía dilatada y afecta también el sistema de transmisión de los impulsos eléctricos del corazón.

En la enfermedad de Chagas, después de haber sido infectada la persona puede durar entre 10 años a 15 años en un periodo latente (sin sintomatología). Luego el parásito se desarrolla en las células fibrosas del corazón y es cuando el paciente entra en una fase crónica, con afecciones cardiacas complicadas como por ejemplo cardiomiopatía difusa grave.

Inmediatamente al tomar un electrocardiograma a un paciente con esta enfermedad de Chagas Crónico, algunas veces se pueden observar alteraciones difusas en la repolarización ventricular, arritmias, extrasístoles ventriculares, como también alteraciones en el tiempo y amplitud del complejo QRS, bloqueos en la transmisión interna del impulso eléctrico del corazón, es decir, alteraciones en el electrocardiograma [12]. Las señales electrocardiográficas son variantes en el tiempo, no estacionarias y usualmente afectadas por ruido eléctrico (temblor muscular, artefactos eléctricos y la red domiciliaria), también son señales muy débiles, de milivoltios (mV) y fracciones de milivoltios. La transformada de Fourier ha sido empleada por un largo periodo de tiempo para el análisis de estas señales, sin embargo esta herramienta presenta deficiencias para el análisis debido a que en el electrocardiograma están presentes diferentes componentes frecuenciales y además no es una señal estacionaria.

La Transformada Wavelet ha sido utilizada para suplir las deficiencias que presenta la Transformada de Fourier. Es así como en el análisis de señales electrocardiográficas, se ha venido empleando el análisis con wavelets (ondículas) gracias a su alta capacidad de resolución para visualizar y analizar señales ó imágenes. También se ha empleado para reducción de ruido eléctrico en el ECG, detección del complejo QRS, medición de la frecuencia cardiaca. [16].

Los registros electrocardiográficos son estudiados por los cardiólogos, para ellos se presenta en ocasiones, alguna dificultad para diferenciar ó resaltar alteraciones electrocardiográficas de estos registros, de ésta manera, se realizó un análisis con la transformada wavelets que sirve de apoyo a un diagnóstico de ésta enfermedad.

Para esto se creó una base de datos propia de pacientes de la región del Departamento del Meta, los cuáles ya habían sido confirmados de ser portadores del parásito (pacientes chagásticos crónicos), paso éste a resaltar ya que no existe, ó nunca se han realizado trabajos con base de datos de

electrocardiogramas propias de nuestra región. A estos pacientes se les tomó un ECG con pleno conocimiento y aceptación voluntaria por parte de ellos para tomar dichos registros, teniendo en la cuenta las recomendaciones existentes en éste tipo de procedimientos por parte del Ministerio de Salud y Protección social. Se utilizó un equipo de Alta Resolución, marca ADInstruments, modelo Power Lab 8/30 perteneciente a la Universidad de los Llanos y asesorados por un médico especialista en electrofisiología.

Una vez obtenidos los registros de ECG, como antes se mencionó, fueron llevados a un formato digital para luego ser importados a un programa de análisis matemático aplicando un filtrado de la señal previamente, posteriormente se utilizó la función sub-muestreo (downsampling) reduciendo la carga computacional y haciendo todo el desarrollo matemático y creando algoritmos para éste propósito, como también la función de sup-muestreo (upsampling). Luego se utilizó una función wavelet, la daubechies 5 (db5) que mejor se adaptó para aplicar un análisis multirresolución junto con un filtrado de línea base, debido a la similitud de la función db5 con la señal analizada, para ello se elaboró un algoritmo con el programa Matlab, también se utilizó un algoritmo modificado de Pan-Tompkins para determinar las ondas QRS, como también se determinó la frecuencia cardiaca, para que ayude a diagnosticar efectivamente cuándo un paciente posee las características electrocardiográficas de la enfermedad de chagas.

Chagas y electrofisiología del corazón

1.1 Epidemiología de la enfermedad de Chagas en Latinoamérica y Colombia

La Tripanosomiasis Americana ó enfermedad de Chagas es una zoonosis muy compleja que está presente en todo el territorio de Suramérica, Centroamérica y México, y representa una grave amenaza para la salud de los países de la región. El parásito *Trypanosoma cruzi* (figura 2) se presenta en una gran variedad de cepas e infecta 150 especies de 24 familias de animales domésticos y silvestres. La existencia de la enfermedad de Chagas en humanos es un hecho puramente accidental; en la medida en que el hombre entró en contacto con los focos naturales y provocó desequilibrios ecológicos, forzó a los triatominos (ver figura 3) infectados a ocupar viviendas humanas, con lo que se llevó a cabo el proceso de domiciliación encontrando así refugio y suficiente alimento en la sangre humana y en la de los animales domésticos. De esta manera el hombre pasó a formar parte activa de la cadena epidemiológica de la enfermedad de chagas.

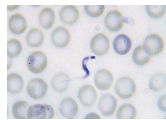


Figura 2. *Trypanosoma Cruzi* (Parásito causante de la enfermedad).

Cortesía Grupo de Parasitología. Instituto Nacional de Salud. Bogotá, Colombia.

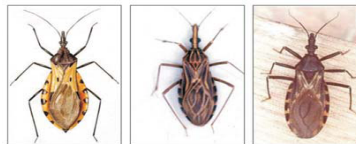


Figura 3. Triatominos insectos vectores del parásito. Fuente *Enfermedad de chagas* [10].

La enfermedad asociada con la pobreza y las malas condiciones de vivienda, se encuentra ampliamente difundida en las áreas rurales de todo el continente Latinoamericano. Se considera como la cuarta causa de mortalidad en América Latina, ya que provoca 43000 muertes por año, debidas sobre todo, a la cardiopatía ocasionada por el parásito cuando se anida en las fibras cardiacas. [10]

El estimativo de prevalencia de la infección por *trypanosoma cruzi* en Colombia es de 1.300.000 habitantes y de 3.000.000 de individuos bajo riesgo de adquirir la infección, de acuerdo con la distribución geográfica de los insectos vectores ó pitos. Las áreas geográficas más comprometidas son Arauca, Boyacá, Cundinamarca, Santander, Norte de Santander, Casanare y Meta.[10]

Alrededor del 10 % al 30 % de los pacientes infectados desarrollan la fase crónica de la enfermedad y esto puede ocurrir años ó a veces décadas después de la infección inicial.

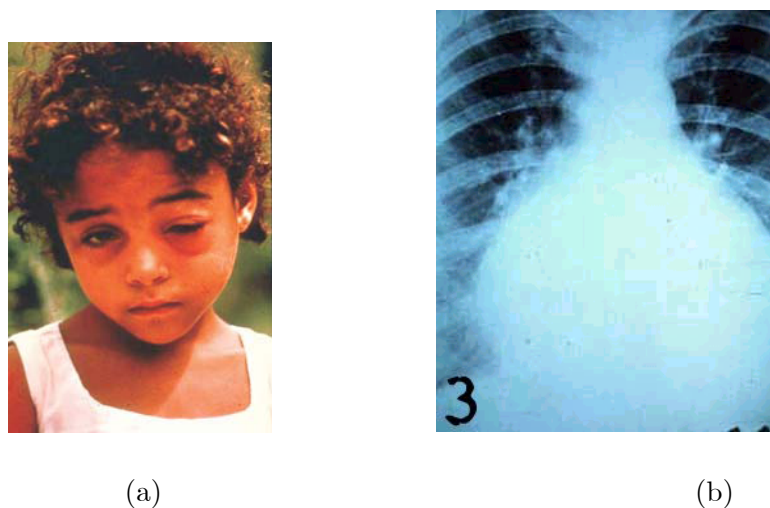


Figura 4. (a) Infección inicial, signo de Romaña en niña con fase aguda de la enfermedad de Chagas. Tomada de WHO/TDR/unicef, UNDP. (b) Cardiomegalia (inflamación del corazón) en paciente chagástico.

La fase crónica tiene como principal órgano de choque el corazón y allí produce miocarditis que usualmente evoluciona hacia cardiomiopatía dilatada. [10]

1.2 Fisiología del corazón

El corazón se divide en cuatro cámaras o cavidades cardíacas, dos superiores llamadas aurículas y dos inferiores ventrículos. Las aurículas reciben la sangre del sistema venoso, pasa a los ventrículos y desde allí sale a la circulación arterial. La aurícula derecha reciben la sangre de todo el cuerpo y pasa al ventrículo derecho y de allí a los pulmones, luego ingresa ésta sangre ya oxigenada a la aurícula izquierda, pasa al ventrículo izquierdo y de aquí es bombeada a todo el cuerpo. Este proceso se hace de una forma rítmica. La secuencia de las contracciones es producida por la despolarización del nodo Sinusal (nodo S-A), situado en la parte superior de la aurícula derecha. La corriente eléctrica producida, del orden de microamperios, se transmite a lo largo de las aurículas y pasa al nodo Auriculoventricular (nodo A-V), en este nodo se hace una pequeña pausa del orden de milisegundos para esperar que la totalidad de la sangre llene los ventrículos. El impulso eléctrico continúa por el Haz de His, sigue por las ramas derecha e izquierda, hasta llegar a las fibras de Purkinje para producir la contracción de los ventrículos.

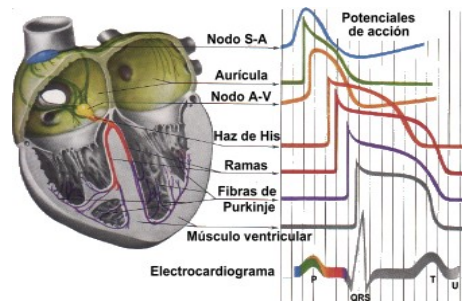


Figura 5. Partes del corazón humano y sus ondas características. Fuente <http://www.ferato.com/wiki/index.php/Electrocardiograma>.

1.3 El electrocardiograma

El Electrocardiograma (ECG) es el registro gráfico de las señales eléctricas del corazón. Estas señales son generadas cuando el músculo cardíaco se despolariza en respuesta a los impulsos eléctricos generados por un marcapasos biológico de algunas células. En la despolarización, los músculos se contraen y bombean sangre a través del cuerpo. El electrocardiograma revela características acerca del corazón, incluyendo su ritmo cardíaco (frecuencia cardíaca) ó algunas enfermedades del mismo. Un registro típico de un ECG de una persona normal es mostrado en la Figura 6.

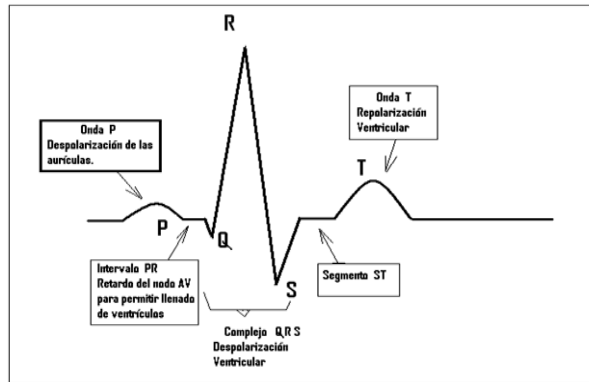


Figura 6. Registro típico de un ECG con sus características. Fuente propia.

El ECG está descrito por ondas, segmentos e intervalos de tiempo:

- Las ondas son denotadas por las letras P, QRS, T y U. En un electrocardiograma típico no necesariamente aparece la onda U.

- Los segmentos son duraciones de tiempo entre las ondas, ej. El segmento P-R es la duración entre las ondas P y R.

- La onda P corresponde a la despolarización de las aurículas, e indica el inicio de la contracción auricular que bombea sangre hacia los ventrículos. Ver Figura 6.

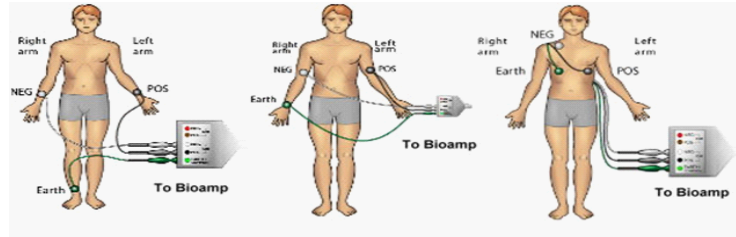
Las ondas Q, R y S son usualmente tratadas como una composición de una sola onda denominada el complejo QRS, y éste refleja la despolarización del miocardio ventricular, e indica el inicio de la contracción ventricular que bombea sangre a los pulmones y al resto del cuerpo.

- La onda T corresponde a la repolarización de los ventrículos el cual es un proceso de reconversión necesario del miocardio para poderse despolarizar y contraer de nuevo. El final de la onda T coincide con el final de la contracción ventricular.

- El origen de la onda U es incierto, y está relacionado con la repolarización de las estructuras del endocardio ó despolarización tardía ventricular. La onda U puede ser vista en un ECG normal, pero con una amplitud menor al 10% de la amplitud de la onda T. [16]

En un paciente chagástico el parásito se posesiona en las células fibrosas del corazón, creando alteraciones en los tejidos, ya sea del miocardio (músculo principal del ventrículo), y logran afectar al sistema de conducción eléctrica interna del corazón, creando potenciales tardíos y por ende alteraciones en tiempo de los segmentos en el electrocardiograma, también afectan la duración de los segmentos entre diferentes ondas (como por ejemplo el intervalo

QT), ó posibles extrasístoles ventriculares. [16]



(a)



(b)

Figura 7. (a) Métodos para tomar muestras electrocardiográficas. Fuente www.ADIInstrument.com (b) Realización de un electrocardiograma en el laboratorio. Fuente propia.

Introducción a la teoría de wavelets

Este capítulo tratará la Transformada Wavelet, herramienta matemática desarrollada a mediados de los años 80's. Esta Transformada es eficiente para el análisis local de señales no estacionarias y de rápida transitoriedad y, al igual que la Transformada de Fourier con Ventana, mapea la señal en una representación de tiempo-escala. El aspecto temporal de las señales es preservado. La diferencia está en que la Transformada Wavelet provee análisis de multirresolución con ventanas dilatadas. El análisis de las frecuencias de mayor rango se realiza usando ventanas angostas y el análisis de las frecuencias de menor rango se realiza usando ventanas anchas.

Las wavelets, funciones bases de la Transformada Wavelet, son generadas a partir de una función wavelet básica, mediante traslaciones y dilataciones. Estas permiten reconstruir la señal original a través de la Transformada Wavelet inversa.

La Transformada Wavelet no es solamente local en el tiempo, sino también en frecuencia. Dentro de los usos de esta poderosa herramienta podemos nombrar además del análisis local de señales no estacionarias, el análisis de señales electrocardiográficas, sísmicas, de sonido, de radar, así como también es utilizada para la compresión y procesamiento de imágenes y reconocimiento de patrones.

Enseguida se supondrá (para facilitar el uso de ciertos ejemplos) que la función a analizar es función del tiempo t .

Para una mejor comprensión del presente tema se desarrollarán aquí algunos conceptos matemáticos necesarios, como los conceptos de espacios de Hilbert, ortogonalidad, y bases ortogonales, además de realizar una breve descripción del Análisis de Fourier, sus usos y aplicaciones, así como también sus limitaciones.

2.1 Análisis de Fourier

En 1807, Jean B. Fourier demostró que una función podía ser desarrollada en términos de series trigonométricas, y que se podían obtener, por integración, fórmulas para los coeficientes del desarrollo.

2.2 Coeficientes y series de Fourier

Los desarrollos en Series de Fourier, Ec. (1.5), tienen aplicaciones fundamentales:

- Representar una función $f(x)$ definida en el intervalo $(-c, c)$, para valores de x en ese intervalo, ó
- Representar una función periódica con periodo $2c$ para todos los valores de x .

La función $f(x)$ puede ser proyectada en una base Ortonormal de funciones $\{\phi_k(x)\}$, de la siguiente forma :

$$f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + c_3\phi_3(x) + \dots + c_k\phi_k(x) + \dots \quad (1,1)$$
$$(-c < x < c) \quad k = 1, 2, \dots$$

Se espera que el desarrollo de $f(x)$ converja a la función $f(x)$.

Se puede demostrar que los coeficientes c_k de la suma son los coeficientes de Fourier de $f(x)$ con respecto a la base ortonormal $\{\phi_k(x)\}$. Estos coeficientes pueden expresarse como :

$$\int_{-c}^c f(x)\phi_k^*(x)d(x) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1,2)$$

Siendo ϕ^* el complejo conjugado de ϕ .

La serie de la Ec. (1.3) con estos coeficientes es la serie de Fourier genérica correspondiente a la función

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi(x) \quad (1,3)$$

Si $f(x)$ está definida en el intervalo $(0, 2\pi)$, y determinada fuera de ese intervalo por $f(x + 2\pi) = f(x)$, esto es, $f(x)$ tiene periodo 2π , la

serie de Fourier que corresponde a $f(x)$ sobre la base ortogonal de senos y cosenos se define como :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos kx + b_n \operatorname{sen} kx), \quad (1,4)$$

donde los coeficientes de Fourier a_k y b_k se definen como:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \quad (1,5)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Puede observarse que los coeficientes de Fourier de la función transformada representan la contribución de cada función seno y coseno para cada frecuencia.

Usando la identidad de Euler $e^{i k x} = \cos kx + i \sin kx$ podemos escribir la serie de Fourier de $f(x)$ como Combinación Lineal de funciones exponenciales complejas :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad (1,6)$$

donde las funciones $e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ constituyen un conjunto ortonormal.

Los coeficientes de Fourier de $f(x)$, respecto de esta base, pueden expresarse como:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (1,7)$$

Es evidente que la Serie de Fourier, Ec. (1.3), no puede representar una función para todos los valores de x si la función no es periódica .

2.3 Transformada de Fourier

Para obtener una representación que pueda ser válida para todos los valores de x cuando $f(x)$ no es periódica, es natural intentar extender la representación anterior dejando que c tienda a infinito, lo que da lugar a la Transformada de Fourier.

La Transformada de Fourier de una función no periódica $f(x)$ está definida por

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (1,8)$$

donde k es una variable real continua.

La función puede ser reconstruida a partir de sus componentes de Fourier, por medio de la transformada inversa de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk, \quad (1,9)$$

La Transformada de Fourier en $L_2(\mathbb{R})$ satisface las siguientes propiedades:

- Es una transformación de Fourier uno-a-uno de $L_2(\mathbb{R})$ en sí mismo.
- Preserva la norma,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk. \quad (1,10)$$

Preserva el producto interno,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)G^*(k) dk. \quad (1,11)$$

2.4 Limitaciones del análisis de Fourier

La Transformada de Fourier es ampliamente utilizada en el procesamiento y análisis de señales y con resultados satisfactorios en los casos en que estas señales son periódicas y lo suficientemente regulares, pero no ocurre lo mismo para el análisis de señales cuyo espectro varía con el tiempo (señales no estacionarias).

Tomando el caso en el que la función f a descomponer es una señal dependiente del tiempo, puede decirse que las funciones de la base de Fourier son de duración infinita en el tiempo pero locales en frecuencia.

La Transformada de Fourier detecta la presencia de una determinada frecuencia pero no brinda información acerca de la evolución en el tiempo de las características espectrales de la señal. Muchos aspectos temporales de la señal, tales como el comienzo y el fin de una señal finita y el instante de aparición de una singularidad en una señal transitoria, no pueden ser analizados adecuadamente por el análisis de Fourier.

Para los casos de señales no estacionarias y transitorias se utiliza generalmente la Transformada de Fourier con Ventana.

2.5 Transformada corta de Fourier (STFT) [8]

Como ya es sabido, la transformada de Fourier constituye una herramienta mediante la cual podemos obtener información sobre como está distribuida la energía de una señal a través de sus distintas componentes de frecuencia, es decir, podemos conocer todas las componentes de frecuencia existentes en la señal y sus respectivos aportes energéticos. Todo lo anterior se puede resumir diciendo que la transformada de Fourier tiene una perfecta resolución en frecuencia lo que la hace una herramienta muy útil para el análisis de señales estacionarias. Sin embargo, ella no puede ser aplicada con el objeto de obtener información precisa de cuando o donde las diferentes componentes de frecuencia se encuentran en la señal, como es el caso de señales quasi-estacionarias o no estacionarias cuyo contenido espectral varía con el tiempo. En otras palabras, la transformada de Fourier posee una muy pobre resolución en tiempo.

En un esfuerzo por resolver el problema de resolución en tiempo de la transformada de Fourier, Denis Gabor (1946) adaptó la transformada utilizando un procedimiento llamado *ventanamiento*. Este procedimiento consiste en dividir una señal $x(t)$ en pequeños segmentos a través del tiempo de tal manera que podamos asumir que para cada segmento la señal es estacionaria y así calcular la Transformada de Fourier clásica para cada porción de la señal.

La forma de dividir la señal se realiza mediante lo que llamaremos una función *tiempo - ventana* $h(t)$ cuyo ancho o soporte corresponde a la longitud de cada segmentación de la señal. Con la función ventana encuadramos la señal alrededor de un instante de tiempo y calculamos su transformada de Fourier, luego trasladamos la función ventana hasta que no se sobrepone con la anterior cubriendo una nueva porción de la señal a la que volvemos a calcular su transformada de Fourier. Este proceso es repetido hasta que se ha cubierto la totalidad de la señal.

El resultado de lo expresado anteriormente se define en forma matemática de la siguiente manera:

$$STFT(t, w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h^*(\tau-t)e^{-iwt}dt \quad (1.12)$$

y si consideramos a $h(t)$ como una función ventana de valores sólo reales no complejos de tal manera que $h(-t) = h^*(t)$ entonces (1.12) nos queda

$$STFT(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t-\tau)e^{-i\xi t} dt \quad (1,13)$$

que calcula el producto interno entre la señal y la función tiempo-ventana trasladada y modulada.

De acuerdo con las propiedades de la transformada de Fourier de translación en tiempo y frecuencia

$$\begin{aligned} h(t - t_o) &\Leftrightarrow H(w)e^{iwt_o} \\ h(t)e^{-i\omega_o t} &\Leftrightarrow H(w - w_o) \end{aligned}$$

y utilizando el teorema de Parseval podemos expresar también la STFT en términos de la transformada de Fourier de la señal y la transformada de Fourier de la función tiempo ventana, lo que nos da

$$STFT(t, \xi) = \frac{e^{-i\xi b}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)H(w-\xi)e^{i\tau w} dt \quad (1,14)$$

de tal manera que mientras la función tiempo-ventana modulada

$$e^{i\xi t}h(t - \tau)$$

en (1.13) localiza la señal $x(t)$ cerca de $t = \tau$, la correspondiente función *frecuencia-ventana*

$$\frac{e^{-i\xi b}}{2\pi}H(w - \xi)e^{-i\tau w}$$

en (1.14) localiza el espectro $x(t)$ de la señal en la vecindad de $w = \xi$ limitada por el soporte de la función frecuencia-ventana $H(w)$

2.6 Resolución tiempo-frecuencia

Ahora bien, el soporte de la ventana constituye un parámetro de gran importancia ya que a través de este se establece el grado de resolución tanto de tiempo como de frecuencia que se desea. Si nuestra ventana es muy angosta analizaremos una porción muy pequeña de la señal lo que permite

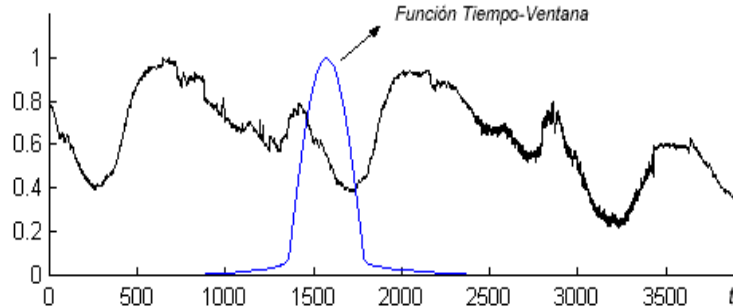


Figura 8. Señal $x(t)$ y función tiempo-ventana centrada en τ . [8]

tener una buena resolución en tiempo pero una mala resolución en frecuencia ya que se conocerá una mínima fracción del espectro total existente en la señal. Por otro lado, si la ventana es muy ancha se tendrá una buena resolución en frecuencia pero una mala resolución en tiempo, por lo tanto una deficiencia de la *STFT* es que no puede entregar una buena resolución tanto en tiempo como en frecuencia de manera instantánea ya que el soporte de la ventana es fijo.

Ejemplo: sea $x(t)$ dentro de un intervalo de tiempo igual a una décima de segundo. Esta señal está compuesta por sólo dos frecuencias, una correspondiente a 250 Hz y la otra correspondiente a 500 Hz.

$$x(t) = 0,8 * \text{sen}(2\pi 250t) + \text{sen}(2\pi 500t) \quad (1,15)$$

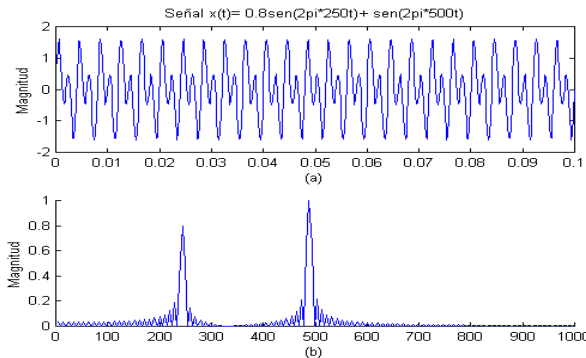


Figura 9. (a) Representación de la señal $x(t)$; (b) Contenido espectral de la señal con *STFT*. [8]

Como se puede observar en la Figura 9 la transformada de Fourier entrega una resolución perfecta de dicha señal. Ahora se supone otra señal

$y(t)$ con las mismas componentes de frecuencia sobre el mismo intervalo de tiempo, pero ahora en las primeras 5 centésimas de segundo contiene la frecuencia de 250 Hz y las otras 5 centésimas de segundo restante contienen a la frecuencia de 500 Hz, lo que se define como:

$$y(t) = \begin{cases} 0,8 \operatorname{sen}(2 \pi 250t) & 0 \leq t < 0,05 \\ \operatorname{sen}(2 \pi 500t) & 0,05 \leq t < 0,1 \end{cases} \quad (1,16)$$

Al obtener la transformada de Fourier sobre $y(t)$ se observa que también se puede obtener las frecuencias existentes de la señal pero con una amplitud igual a la mitad de la amplitud real debido a que cada componente de frecuencia se encuentra sólo la mitad del tiempo de análisis de la señal como se muestra en la figura 10. Esta información errónea se debe a que la transformada de Fourier, como se expresó antes, no puede determinar en que momento dentro de la señal se encuentra una respectiva componente de frecuencia.

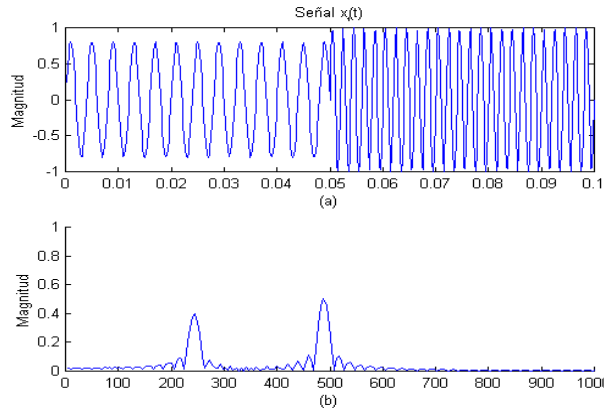


Figura 10. (a) Señal $y(t)$; (b) Contenido espectral de la señal aplicando la *STFT*. [8]

2.7 Transformada wavelet continúa (CWT) [2, 9, 19]

La Transformada Wavelet constituye una técnica relativamente nueva que ha sido propuesta por los investigadores como una poderosa herramienta en el análisis sobre el comportamiento local de una señal. Al igual que la *STFT*, esta transformada utiliza una función ventana que encuadra una señal dentro de un intervalo y focaliza el análisis sólo en ese segmento de la señal.

La Transformada Wavelet Contínua (CWT) propone expresar una señal $x(t)$ continua en el tiempo, mediante una expresión de términos o coeficientes

proporcionales al producto interno entre la señal y diferentes versiones escaladas y trasladadas de una función prototipo $\psi(t)$ conocida como wavelet madre. Asumiendo que tanto la señal como la nueva función $\psi(t)$ son de energía finita, entonces se puede definir:

$$W_{\Psi} x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (1,17)$$

donde a y b son dos nuevas variables. La variable a controla el ancho o soporte efectivo de la función $\psi(t)$. y la variable b indica la ubicación en el dominio del tiempo de ψ .

Para que este análisis sea posible y además poder lograr una perfecta reconstrucción de la señal a partir de la transformada, la función $\psi(t)$ debe cumplir con la condición de **admisibilidad**. El cumplimiento de esta condición significa que el valor medio de $\psi(t)$ es igual a cero (0), lo cual implica que $\psi(t)$ tenga valores tanto positivos como negativos, es decir, que sea una onda. Además, como $\psi(t)$ es una función que "ventaniza" la señal sobre un intervalo de tiempo dado por a alrededor de un punto $t = b$, se observa intuitivamente que $\psi(t)$ es de **soporte compacto**, es decir, es una onda definida sobre un intervalo de tiempo finito, de ahí el nombre, wavelet u ondita.

Además $\bar{\psi}$ denota el complejo conjugado de ψ donde $\psi(t) \in L_2(\mathbb{R})$, también debe satisfacer que $C_{\Psi} < \infty$ con

$$C_{\Psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|w|} \left| \widehat{\psi}(w) \right|^2 dw < \infty$$

Mediante la variable de escala se puede comprimir ($|a| < 1$) ó dilatar ($|a| > 1$) la función $\psi(t)$, lo que dará el grado de resolución con el cual se esté analizando la señal. Por definición la Transformada Continua Wavelet (CWT) es más una representación tiempo-frecuencia. En particular, para valores pequeños de a la CWT obtiene información de $x(t)$ que esté esencialmente localizada en el dominio del tiempo, mientras que para valores grandes de a la CWT obtiene información de $x(t)$ que está localizada en el dominio de la frecuencia. Cuando el valor de la variable a cambia, tanto la duración como el ancho de banda de la wavelet cambian pero su forma se mantiene igual. En lo anteriormente dicho se encuentra la diferencia principal entre la CWT y la STFT, ya que la primera ocupa ventanas de corta duración para altas frecuencias y ventanas de larga duración para bajas frecuencias, mientras que la STFT ocupa una sola ventana con la misma duración tanto para altas frecuencias como para bajas frecuencias.

La Transformada Continua Wavelet es una transformada reversible siempre y cuando la función $\psi(t)$ cumpla con la condición de **admisibilidad**. La reconstrucción es posible usando la expresión:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi^2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} CWT_x^\psi(a, b) \frac{1}{a^2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da db \quad (1,18)$$

La continuidad de la CWT reside en que tanto la variable de escala como la variable de traslación varían en forma continua. Sin embargo, en términos de cálculo computacional es imprescindible discretizar la transformada, y la suposición más lógica es que tanto los valores de escala como traslación sean discretos. Adelantándonos un poco a lo que es la Transformada Discreta Wavelet, la forma más común de discretizar los valores de a y de b es utilizar una red diádica, es decir, $a = 2^{-j}$ y $b = k 2^{-j}$ con $j, k \in \mathbb{Z}$, de tal manera que el conjunto de funciones

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (1,19)$$

se transforma en el conjunto de funciones

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (1,20)$$

que corresponde a la versión diádicamente discretizada de la función wavelet.

2.8 Función escala

Sea $\phi(t) \in L_2(\mathbb{R})$, una función escala, que trasladada y escalada genera una familia de funciones $\{\phi_{j,k}(t) / j, k \in \mathbb{Z}\}$ definida como:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (1,21)$$

$\forall j \in \mathbb{Z}$ la función escala define un subespacio $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$ como

$$V_j = \overline{Span_{k \in \mathbb{Z}} \{\phi_{j,k}(t)\}}$$

Entonces una función $f(t)$ estará en V_j si puede escribirse como

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (1,22)$$

con

$$c_{j,k} = \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t), \phi_{j,k}(t)| dt \quad (1,23)$$

Esta última ecuación se demuestra multiplicando vectorialmente (1.23) por $\phi_{j,k}(t)$, lo que entrega $\langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = c_{j, -\infty} \langle \phi_{j, -\infty}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle + \dots + c_{j,k} \langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle + \dots + c_{j, \infty} \langle \phi_{j, \infty}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle$

como se verá luego, la función escala debe cumplir con ciertos requisitos, y uno de ellos es ser ortonormal, por lo que sólo unos de los productos punto de la ecuación anterior es distinto de cero ($\langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = 1$), lo que entrega

$$c_{j,k} = \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle$$

Otra valiosa propiedad que nos entrega la definición de la función escala es que

$$f(t) \in V_j \iff f(2t) \in V_{j+1}$$

2.9 Características de la Función Escala

Una función $\phi(t) \in L_2(\mathbb{R})$ es considerada como una "buena" función de escala si cumple con la siguientes condiciones:

1. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, $\{\phi_{j,k}(t) / j, k \in \mathbb{Z}\}$ forma una base ortonormal para el subespacio $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$.

2. Los subespacios V_j están anidados, es decir

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \{V_j \subset V_{j+1}\}$$

3. La función $\phi(t)$ tiene **soporte compacto**. Esto es, existe un subconjunto del dominio de $\phi(t)$ donde esta no es cero, ejemplo: $\text{sup } \{\phi\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \phi(x) \neq 0\}$

2.10 Wavelets de Daubechies

Si la familia $\{\psi_{j,k}\}$ es una base de wavelets ortonormal, y la wavelet $\psi(x)$ es suave, entonces debe tener momentos nulos y cuanto mayor suavidad, más cantidad de momentos nulos. En 1988 Ingrid Daubechies, con el interés de construir bases ortonormales, suaves y con el requerimiento de varios momentos nulos, pudo construir una familia de bases ortonormales, suaves y de soporte compacto. Las wavelets de Daubechies son las que tienen mayor cantidad de momentos nulos para su soporte.

De lo anterior surge que, como en el caso de las B-splines, sólo finitos coeficientes del filtro de la escala h_k de la función :

$$H(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2\pi i k w} \quad (1.24)$$

son no nulos, y en este caso, además, su longitud es $2N$. Según Daubechies demostró que para que la función de escala ϕ y la wavelet ψ sean regulares, el filtro de la función de escala deberá ser de la forma,

$$H_N(w) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi iw}}{2}\right)^N \ell(w) \quad (1.25)$$

con $N \geq 1$, y ℓ un polinomio trigonométrico.

Es posible hallar los coeficientes para cada N luego de realizar varias operaciones algebraicas. La familia de wavelets daubechies está gobernada por un conjunto de N (entero par) coeficientes p_k : con $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ se tendrá la función de escala y la wavelet que llamaremos de orden N , y denotamos ϕ_N y ψ_N .

La función de escala $\phi_N(x)$ satisface la relación de dos escalas:

$$\phi_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi_N(2x - k) \quad (1.26)$$

y su regularidad aumenta al aumentar N .

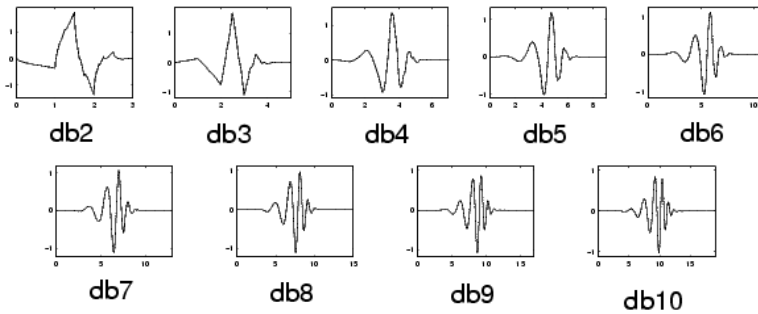


Figura 11. Funciones wavelets daubechies db2 hasta db10.

La wavelet madre puede escribirse, como:

$$\psi_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} q_k \phi_N(2x - k) \quad (1.27)$$

p_k y q_k son los coeficientes del filtro de la función escala y wavelet correspondiente, cuyos soportes son, respectivamente,

$$\text{sup } \phi_N(x) = [0, N-1] \quad (1.28)$$

y

$$\text{sup } \psi_N(x) = [1 - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}] \quad (1,29)$$

I. Daubechies [23] encontró la relación entre momentos nulos y regularidad de la wavelet $\psi_N(x)$ y de la función de escala $\phi_N(x)$. Una condición necesaria y suficiente para tener m Momentos nulos es que las trasladadas entera de la función de escala $\phi_N(x)$ interpolen polinomios de grado hasta m , es decir, que para cada k , $0 \leq k \leq m$ existan constantes tales que,

$$x^k = \sum_i c_i \phi_i(x) \quad (1,30)$$

Estos coeficientes c_i estarán dados por los momentos, es decir,

$$c_i = M_i^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi_i(x - i) dx \quad (1,31)$$

2.11 Evaluación de la función y de sus derivadas.

Como la función de escala no tiene una expresión explícita, se deberán considerar puntos especiales para evaluar, tanto la relación de dos escalas (1.26), m veces, y se denota $\phi_N^{(m)}(x)$ la m -ésima derivada de la función de escala

$$\phi_N^{(m)}(x) = 2^m \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi_N^{(m)}(2x - k) \quad (1,32)$$

A partir de la evaluación en todos los valores enteros del intervalo $[0, N - 1]$, se tiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \phi_N^{(m)}(0) &= 2^m p_0 \phi_N^{(m)}(0) \\ \phi_N^{(m)}(1) &= 2^m [p_0 \phi_N^{(m)}(2) + p_1 \phi_N^{(m)}(1) + p_2 \phi_N^{(m)}(0)] \\ &\dots \dots \dots \\ \phi_N^{(m)}(N-2) &= 2^m [p_{N-3} \phi_N^{(m)}(N-1) + p_{N-2} \phi_N^{(m)}(N-2) + p_{N-1} \phi_N^{(m)}(N-3)] \\ \phi_N^{(m)}(N-1) &= 2^m p_{N-1} \phi_N^{(m)}(N-1) \end{aligned} \quad (1,33)$$

que también puede escribirse en forma matricial como

$$(2^m P - I) [\phi_N^{-(m)}] = 0 \quad (1,34)$$

donde, $[\phi_N^{-(m)}] = [\phi_N^{(m)}(0), \phi_N^{(m)}(1), \dots, \phi_N^{(m)}(N-1)]^t$, I es la matriz identidad y P la matriz compuesta de los coeficientes del filtro, que puede expresarse

$$P = p_{2i-k-1} \mathbf{1}_{1 \leq i, k \leq N} \quad (1,35)$$

se puede observar que, si $2i - k - 1 < 0$ ó $2i - k - 1 > N - 1$, $p_{2i-k-1} = 0$.

Es claro que la solución de (1.34) no es única. Se debe agregar, entonces, una condición de normalización para obtener un autovector $[\phi_N^{-(m)}]$, que sea único.

A partir de las propiedades de las funciones de escala de Daubechies, se tiene que :

$$\sum_k k^m \phi_N(x-k) = x^m + \sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k} M_k^{\phi_N} \quad (1,36)$$

$$\text{donde, } M_k^{\phi_N} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_N(z) z^k dz \quad (1,37)$$

son los momentos de la función ϕ_N . Cabe señalar que la función (1.36) es conocida cuando todos los momentos son nulos. El caso general se obtiene mediante transformada de Fourier ó usando la regla de Leibniz . Agregando esta condición de normalización a (1.33), el sistema no-homogéneo de ecuaciones puede resolverse y las derivadas pueden evaluarse en valores enteros de x y luego utilizarse para obtener los valores en los puntos diádicos. Usando la relación de dos escalas nuevamente pueden ser determinados los valores de $\phi_N^{(m)}(x)$ en $x = \frac{i}{2^n}$ con $n \in \mathbb{Z}$, para los enteros $i = 1, 3, 5, \dots, 2^n(N-1) - 1$. De esa forma, las funciones son evaluadas primero en los enteros $\{0, 1, \dots, N-1\}$, y luego en todos los diádicos, aumentando el valor de n desde 0 hasta la resolución deseada.

2.12 Análisis multirresolución

Para realizar un Análisis Multirresolución (MRA) se necesita una función base $\phi = \phi(t)$ bien localizada tanto en el tiempo como en frecuencia. El Análisis Multirresolución consiste básicamente en aproximar una función $f(t)$ en distintos niveles de resolución $\{f_1(t), f_2(t), f_3(t), \dots\}$, la cual entrega una descomposición multi-escala de la forma :

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{j \geq 0} g_j(t) \quad (1,38)$$

donde cada $g_j(t) = f_{j+1}(t) - f_j(t)$ representa el error en que se incurre al aproximar $f_{j+1}(t)$ mediante $f_j(t)$, o lo que es lo mismo, la fluctuación entre dos niveles sucesivos de resolución. En este análisis se emplea una función $\psi(t)$ escogida según la señal a analizar. Esta función esta bien localizada tanto en el tiempo como en frecuencia, y traslaciones y escalamientos de ella misma, generan una base $\{\psi_{j,k}(t) / j, k \in \mathbb{Z}\}$, que expande $g_j(t)$ como:

$$g_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (1,39)$$

donde los $d_{j,k}(t)$ son los coeficientes escalares llamados coeficientes wavelet.

En la sección anterior se esbozaron varios principios de multirresolución, como condiciones para una "buena" función escala. Ahora los daremos como requerimientos básicos para este tipo de análisis.

Un análisis multirresolución requiere un anidamiento de los espacios generados por las funciones escala, de la forma:

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L_2$$

$$\text{ó} \quad V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

con

$$V_{-\infty} = \{0\}, \quad V_{\infty} = L_2$$

Así el espacio que contiene las señales de más alta resolución contiene también las de más baja resolución.

Debido a la definición de V_j , estos espacios cumplen con la siguiente condición de escalamiento

$$f(t) \in V_j \iff f(2t) \in V_{j+1}$$

lo que asegura que los elementos de un espacio son simplemente versiones escaladas de los elementos del siguiente espacio. Como una forma práctica de mostrar esta propiedad se representará la función de escala Haar mediante versiones escaladas y trasladadas de ella misma. Así se tendrá que

$$\phi_{0,0}(t) = \phi_{1,0}(t) + \phi_{1,1}(t)$$

esta ecuación puede verse de otra forma aplicando

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(n) \sqrt{2} \phi(2t - k), \text{ se tiene entonces}$$

$$\phi(t) = h(0)\sqrt{2} \phi(2t) + h(1)\sqrt{2} \phi(2t - 1) \quad (1,40)$$

donde

$$h(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(t)\sqrt{2}\phi(2t)dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1,41)$$

$$h(1) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \phi(t)\sqrt{2}\phi(2t - 1)dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1,42)$$

entonces (1.40) queda como $\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t - 1)$

lo que demuestra que la función de escala se puede representar por una versión de ella misma escalada más otra versión de ella misma escalada y trasladada.

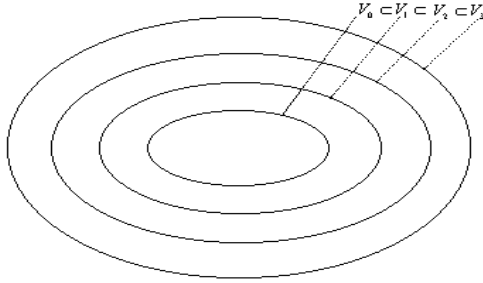


Figura 12. Espacios anidados generados por la función escala. [8]

En la figura 12 se muestra la relación entre los espacios expandidos por las funciones escala en sus distintos niveles de resolución.

Así la familia de funciones $\phi_{j,k}(t)$ generará un espacio $V_j = \overline{Span_{k \in \mathbb{Z}} \{ \phi_{j,k}(t) \}}$ donde el super-rayado denota *clausura*.

Entonces al aumentar j en la función escala mejoraremos la resolución de la representación de la función $f(t)$, como se muestra en la figura 12. No obstante una mejor representación de la señal es obtenida, no mediante el aumento de j , sino que al definir un nuevo espacio W_j , llamado espacio *wavelet*, como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} . Lo anterior puede expresarse de la siguiente forma

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}$$

por consiguiente, W_j contiene los detalles en V_{j+1} que no se representan en V_j , y cada función (señal) en W_j es ortogonal a toda función en V_j .

Esta residencia de los espacios wavelet en los espacios de escalamiento se muestran en la figura 13, donde se puede observar que dentro del espacio V_3 se encuentran contenidos W_2, V_2, V_1 y V_0 , o dicho de otra forma, V_3 esta conformado por V_0, W_0, W_1 , y W_2 .

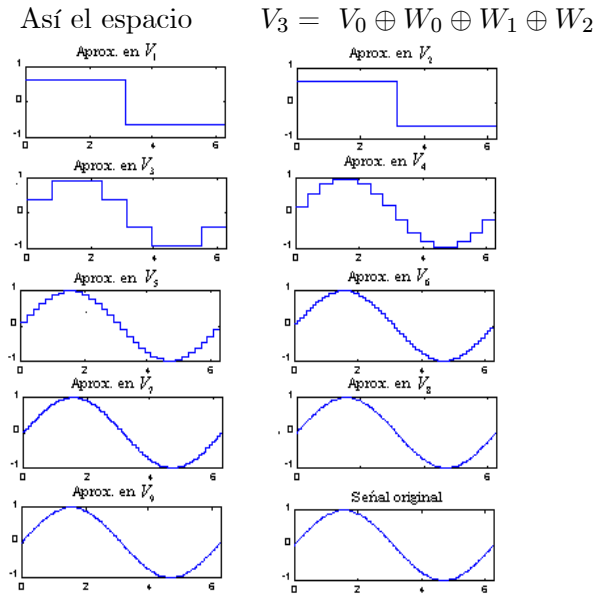


Figura 13. Representación de la función $\text{Sen}(t)$, por la función escala en distintos espacios.[8]

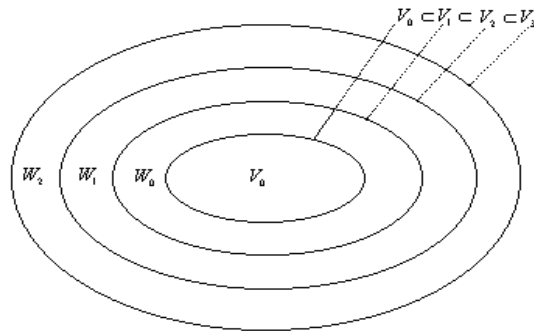


Figura 14. Espacios wavelet. [8]

Así se puede hacer extensible a todos los espacios siguientes, por ejemplo.

$$V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots = L_2$$

donde V_0 es el espacio inicial, expandido por la función escala $\phi(t - k)$, y los espacios W_j entregan información mas detallada de la señal a medida que j crece. La escala que se use para expandir el espacio inicial será una decisión del ingeniero, dependiendo su elección del análisis que se realice y de la señal en cuestión. Así se puede representar el espacio L_2 partiendo de una resolución más alta, como $j = 8$, lo que entregaría

$$L_2 = V_8 \oplus W_8 \oplus W_9 \oplus W_{10} \oplus \dots$$

De esta manera se puede tomar una escala negativa para el espacio inicial, como $j = -\infty$, donde escalas más gruesas entrarían en juego. Al tomar $j = -\infty$ se tiene

$$L_2 = \dots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \quad (1.43)$$

Como se puede ver en (1.43) se ha representado el espacio L_2 solo con espacios wavelet, lo que lleva a la siguiente ecuación

$$V_0 = W_{-\infty} \oplus \dots \oplus W_{-1}$$

Esto demuestra de nuevo que se puede escoger cualquier resolución para un espacio inicial determinado. La función que expande el espacio W_j es la wavelet madre $\psi_{j,k}(t)$. Como $W_0 \subset V_1$, la función wavelet $\psi(t)$ puede ser representada por una suma de funciones escala, escaladas y trasladadas, de la forma

$$\psi(t) = \sum_n h_1(n) \sqrt{2} \phi(2t - n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.44)$$

Lo anterior es también válido para $\phi(t)$, ya que $V_0 \subset V_1$, por lo que la función escala puede representarse como

$$\phi(t) = \sum_n h(n) \sqrt{2} \phi(2t - n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.45)$$

Una función pertenecerá al espacio W_j si puede ser representada por la función prototipo de una wavelet madre de la forma

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad (1.46)$$

donde 2^j es la escala de t , k es la traslación en t y $2^{\frac{j}{2}}$ mantiene constante la norma de la wavelet en diferentes escalas. Como se puede observar, la variable j indicará en que espacio wavelet se esta trabajando la función madre. Esto es análogo para la función escala. La resolución de una representación mejora al cambiar a un espacio escala más grande ó de más alta resolución.

Algoritmo para detección de características del ECG

3.1 Construcción de la base de datos de ECG de la región

Se procedió a localizar pacientes chagásticos crónicos de la región del departamento del Meta, a quienes ya había sido diagnosticada la enfermedad de chagas, a través de un exámen serológico previo.

La toma de las muestras de registros electrocardiográficos se realizó siguiendo las recomendaciones del Ministerio de Salud y Protección Social (resolución No. 008430), por la cual se reglamenta los aspectos éticos de la investigación médica en humanos, siendo éste exámen voluntario y de riesgo mínimo para el paciente. El equipo utilizado fué un electrocardiografo marca ADInstruments, modelo PowerLab 8/30 de 8 canales y conversor de 16 bits, ubicado en las instalaciones del Laboratorio de Electrofisiología de la Universidad de los Llanos. Se recopilaron 48 registros correspondientes a la derivación D II, con diferentes velocidades de muestreo, predominantemente de 2000 muestras/segundo, amplificación de 1mV y 2mV, y una resolución de 62.5 nV.[25]

3.2 Procesamiento y análisis de la señal de ECG

Para este procesamiento se utilizaron las siguientes etapas que presenta el diagrama de bloques indicado en la figura 15, pasos estos que se explicarán a continuación:

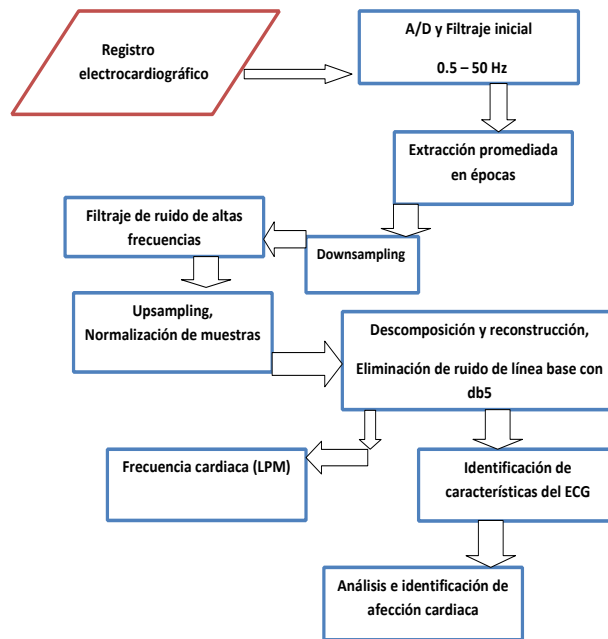


Figura 15. Secuencia de procesos y análisis de los registros electrocardiográficos. Fuente propia.

3.2.1 Conversión análogo - digital (A/D) y filtrado

Una vez tomado cada registro electrocardiográfico, el equipo realiza una conversión A/D, se efectúa con él un filtraje de la señal desde 1 Hz hasta 50 Hz, ya que las ondas (P,QRS,T) que componen el ECG están en este rango de frecuencias. Aunque para un mayor análisis se puede ampliar dicho filtro, hasta un rango de máximo 150 Hz.

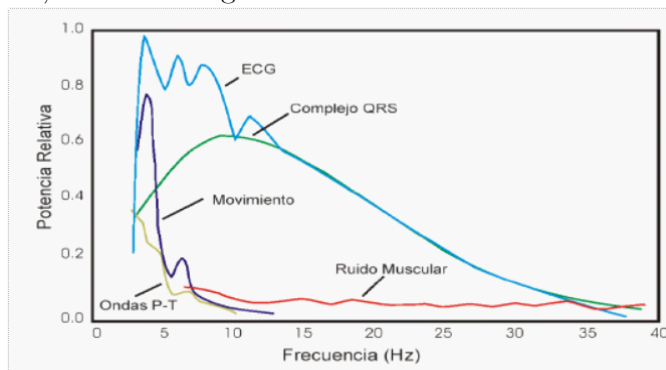
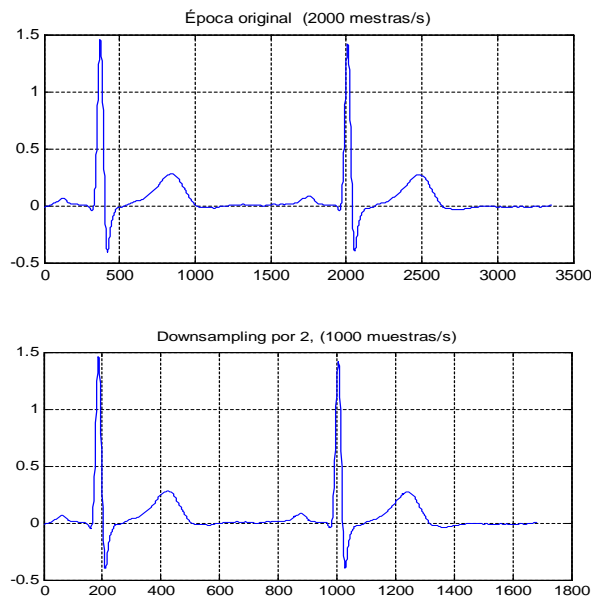


Figura 16. Componentes frecuenciales de la señal ECG. Fuente: Morales L. A. Universidad Nacional. Manizales 2003.

3.2.2 Extracción promediada en épocas

En la totalidad de los registros, se procedió a extraer épocas de dos latidos cada una, siendo ellas representativas, además de contener por lo menos dos picos R (segmento RR) para obtener la frecuencia cardiaca por medio de un algoritmo. Para luego poder así ser exportadas como un archivo **.tex** e importarlo así como un archivo **.mat** y cargarlas en el programa Matlab R2010a de Mathworks Inc., todas ellas conservando la velocidad de muestreo de 2000 muestras/segundo.

Este proceso se realiza a cada una de las épocas, debido a la necesidad de reducir la carga computacional y lograr mayor velocidad de cómputo. Se utilizó una función `downsample` en Matlab, y se obtuvo una cantidad de 1000 muestras/segundo. (Se utilizó Matlab para este análisis de señales, debido a que este software de análisis matemático es multifuncional, y compacto).



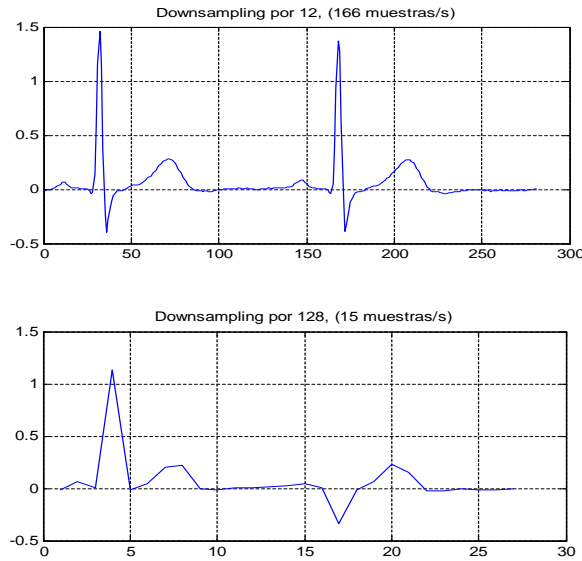


Figura 17. Sub-muestreo (Downsampling) a 1000 muestras/s, 166 muestras/s y 15 muestras/s. Fuente propia.

3.2.3 Filtraje de ruido de altas frecuencias

Para éste proceso se llevó cada muestra (Época) una vez sub-muestreada mediante un algoritmo y teniendo en la cuenta las diferentes componentes frecuenciales de éste tipo de señales de ECG, mediante el uso de la Transformada Wavelet Discreta (DWT) a una descomposición hasta el nivel once (11). Se probaron las diferentes wavelets que presenta el toolbox de Matlab como son: la haar, familia daubechies, symlet, la coiflet, biortogonal, la reverse-biortogonal, la meyer), siendo la daubechies 5 (db 5) la que mejor resultado presentó, debido a su similitud con la señal de ECG.

Se observaron los coeficientes de detalle de los niveles 2^1 , 2^2 , y 2^3 , es decir, d1, d2 y d3 que son los niveles que mayor contiene los componentes de alta frecuencia de la señal.

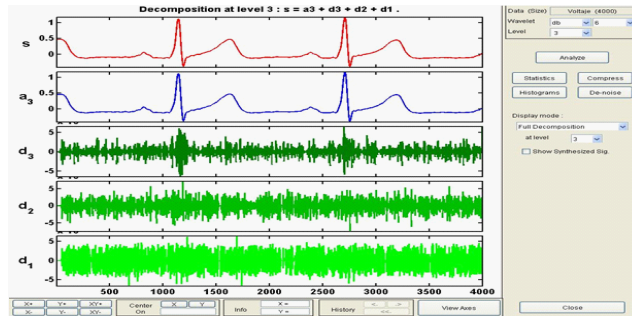


Figura 18. Descomposición en 3 niveles de un ECG chagástico con wavelet db 6. FuenteToolbox de wavelets Matlab.

Para éste paso se utilizó un algoritmo que descompone la señal hasta el nivel deseado utilizando el Análisis Multirresolución (ver figura 19) con la función wavelet Daubechies 5 (db5), luego se hacen todos los coeficientes de algunos niveles iguales a cero y posteriormente se reconstruye la señal usando la wavelet db5 ya que ésta es ortogonal y permite reconstruir la señal.

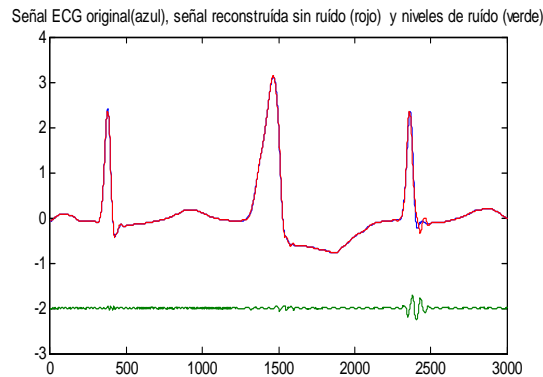


Figura 19. Filtraje de ruido de componentes de altas frecuencias con db5. Fuente propia.

3.2.4 Sobre-muestreo (Upsampling) y normalización de muestras.

Este proceso se realiza a cada una de las épocas, debido a la necesidad de reducir la carga computacional y lograr mayor velocidad de cómputo. Se utilizó una función resample en Matlab (R2010a), y se obtuvo una cantidad de 1000 muestras/segundo. (Se utilizó Matlab para este análisis de señales,

debido a que este software de análisis matemático es multifuncional, y compacto).

Para este paso se utilizó la función $\text{resample}(s,p,q)$, la cual ofrece ventajas sobre la función upsample , ya que permite normalizar el total de las épocas a un número fijo de puntos (N). Para esta etapa se seleccionó $N=2000$ puntos, por lo tanto, a cada muestra se le multiplicó por $p=2000$, y se dividió por el número de puntos de cada época. (por ejemplo, para la Época0001 se multiplicó por $2000/3653$), dando como resultado una época de tan sólo 2000 puntos, al igual que todas las demás. Este método se realiza para facilitar el proceso siguiente de descomposición y reconstrucción, eliminando el ruido de línea base de bajas frecuencias.

3.2.5 Descomposición y reconstrucción, eliminando el ruido de línea base.

En esta etapa, cada muestra está normalizada y también con una velocidad de muestreo de 2000 muestras/s, implicando que se necesite un total de once (11) niveles de descomposición (2^{11}) para llegar a la componente de bajas frecuencias de 0.9 Hz (frecuencia de ruido de línea base). Interferencia (ver figura 20) debido a la respiración del paciente durante la toma del registro electrocardiográfico ó a movimientos del mismo.

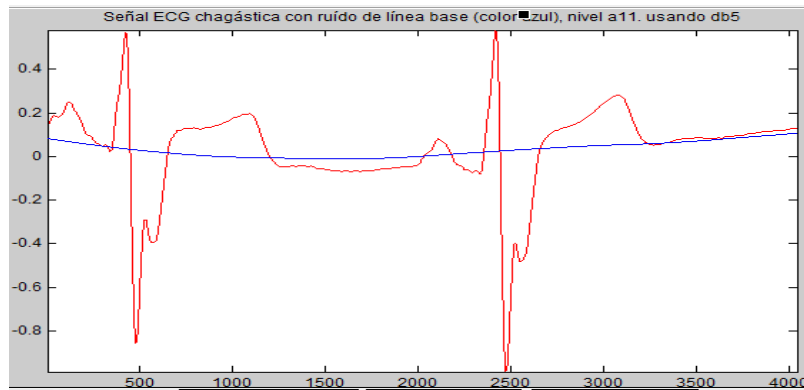


Figura 20. Señal ECG chagástico, con ruido de línea base, nivel a11. Fuente propia.

Para efectuar la descomposición de la señal hasta el nivel 11 de aproximación y también de detalle, y luego la reconstrucción (ver figura

21) a través del análisis multirresolución (AMR), la reconstrucción se hace luego de eliminar los coeficientes de detalle (cD) y los de aproximación (cA) deseados, se utilizaron las funciones:

```
r=V(1:4041);
[C,L] = wavedec(r,11,'db5');
X = waverec(C,L,'db5');
```

Es de resaltar que la función "waverec" sólo aplica para wavelet ortogonales para 1D y biortogonales para 2D.

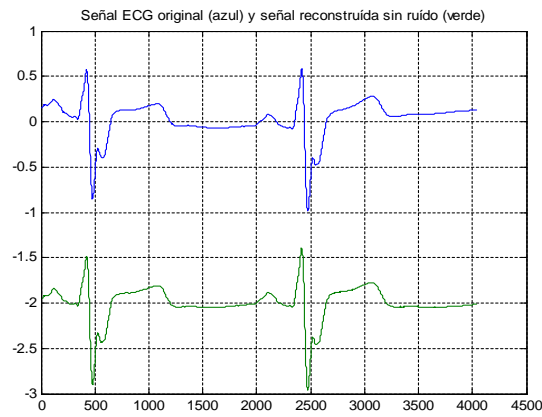


Figura 21. Señal ECG original con ruido de línea base (azul) y señal reconstruida sin ruido (verde). Fuente propia.

3.2.6 Identificación de características del ECG

En esta etapa se elaboró un algoritmo de Pan-Tompkins modificado, con este algoritmo de Pan-Topkins [15] se detectaron los complejos QRS, que es un algoritmo básico, pero que en este trabajo fué necesario modificarlo y complementarlo para poder tener una alta efectividad al analizar todas las muestras recopiladas, debido a la no homogeneidad de los registros electrocardiográficos propios de la enfermedad de chagas, como se podrá observar en cada una de ellas.

El algoritmo de Pan-Tompkins (ver figura 22) incluye una serie de filtros, (pasa-bajos y pasa-altos), luego un bloque que aplica la derivada a la señal. Posteriormente un elevador al cuadrado y por último un integrador de ventana móvil.

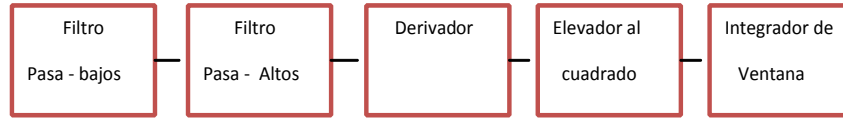


Figura 22. Diagrama de bloques para detectar las ondas QRS.Fuente propia.

El filtraje pasa- bajos deja pasar las componentes frecuenciales de bajas frecuencias, es decir, elimina el ruido de altas frecuencias, se puede considerar la frecuencia de corte en 15 Hz, luego se hace un filtraje pasa- altos, es decir, deja pasar las componentes de altas frecuencias a partir de 8 Hz, eliminando así las ondas P y T del ECG, debido a que las ondas P y T tienen componentes frecuenciales menores a 8 Hz. Ver Figura 16. El anterior filtraje se realiza debido a que el rango de frecuencias en la cual se encuentra la mayor densidad de energía del complejo QRS esta centrada en 10 Hz.

Paso siguiente del algoritmo de Pan- Tompkins consiste en encontrar las variaciones de la señal de ECG abruptas, correspondientes a los picos de las ondas Q,R y S. Para esto se encuentra la derivada de la señal, teniendo en la cuenta que esta señal de ECG esta previamente discretizada, ecuación (1.47).

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = (señal(i + t) - señal(i)) * fs \quad (1,47)$$

donde fs corresponde a la velocidad de muestreo. La siguiente etapa consiste en elevar al cuadrado la señal, punto a punto, para lograr prolongar aún más los picos del ECG, que corresponderían a las ondas Q,R y S. Posteriormente se realiza una integración en un intervalo de tiempo de la señal (integración por ventana móvil), que significa analizar cualitativamente la energía de un determinado sector, o ventana de la señal. Permitiendo con esto ubicar el punto máximo, (correspondería al pico R), luego la ventana se corre hacia atrás y hacia adelante para detectar los otros picos que corresponderían a las ondas Q y S respectivamente.

Sin embargo, debido a la gran cantidad de variaciones que puede tener la señal de ECG propias de las electrocardiopatías chagásticas (arritmias cardiacas, bloqueos de rama, extrasístoles ventriculares, bajos voltajes del complejo QRS, entre otras), algunas ondas como las mismas Q,R, ó S pueden no estar presentes, implicando con ésto que el algoritmo falle.

En esta etapa, y para dar solución a los anteriores inconvenientes se elaboraron algoritmos adicionales para detectar los complejos QRS de una

forma más exacta, además de identificar las otras ondas presentes en la señales ECG, (ondas P y ondas T). Como también se identificó el inicio y final del complejo QRS, otra etapa importante en la modificación y complemento del mismo fué identificar la amplitud de la onda T, como también el final de esta misma onda T. Con esto se logró obtener el valor del intervalo QT (medido desde el inicio de la onda Q hasta el final de la onda T), parámetro muy importante en la identificación de cardiopatías ventriculares (por ejemplo, enfermedad aguda del miocardio), punto este crucial en la inmensa mayoría de muertes por infarto del corazón.

Una vez medido este valor del intervalo QT, se procedió a implementar un algoritmo para calcular el intervalo QT corregido (QTc). Utilizando para ello la fórmula de Bazett. [21]

$$QTc = \frac{QT}{\sqrt{RR}} \quad (1,48)$$

La medición de la frecuencia cardiaca se realizó elaborando un algoritmo luego de encontrar los valores en el eje del tiempo correspondientes a los picos R en cada época (intervalo RR en segundos).

$$Frecuencia\ Cardiac a = \frac{60}{RR} \text{ (LPM)} \quad (1,49)$$

donde RR , significa el valor del tiempo (segundos) empleado del intervalo RR, es decir, desde un pico R hasta el siguiente pico R.

Se abordó el inconveniente para detectar el punto J (punto final de la onda S) y se logró identificarlo y ubicarlo en el eje del tiempo. Con este procedimiento se logra obtener en la mayoría de las muestras electrocardiográficas de personas sanas y pacientes chagásticos, el valor en tiempo (ms) de todo el complejo QRS. También dato muy importante en el análisis de este tipo de señales.

Luego se procedió a elaborar otro algoritmo para calcular el tiempo del intervalo PR, comprendido desde el inicio de la onda P hasta el pico de la onda Q. Este intervalo es muy importante en la detección de los bloqueos auriculo-ventriculares de 1er grado. Para éste intervalo se fijó un umbral de 200 ms. (se elige un color rojo de la casilla si el tiempo del intervalo medido supera éste valor).

Para este análisis de descomposición y reconstrucción se probaron varias funciones wavelets de diferentes formas y las que mejores resultados ofrecieron

fueron las wavelets daubechies, y particularmente la db5, debido a sus momentos de desvanecimiento (5 momentos) y a su similitud con la señal ECG, además de su caracter ortogonal y funcionamiento tanto para la transformada wavelet continúa como transformada wavelet discreta. Cabe resaltar que se debe utilizar la misma wavelet tanto para la descomposición como para la reconstrucción, cuando se requiere un mínimo error (aproximadamente igual a cero (0)).

3.3 Construcción de una GUI (Graphic User Interface).

Utilizando el mismo software de Matlab, se creó una Interfaz Gráfica de Usuario, para facilitar todos los pasos anteriores y poder observar mejor todo el análisis, de una manera visual, mucho más rápida y simple. En esta interfaz, se empieza por cargar la señal (se carga la época deseada), épocas estas que ya estan normalizadas gracias a las función de resampling ya antes mencionada. Paso siguiente consiste en descomponer la señal hasta una nivel 11, para eliminar la componente A11 de aproximación, la cual contiene los coeficientes de aproximación de la señal de frecuencias bajas $f = 0,9 Hz$ que corresponde a la interferencia de ruido de línea base y luego con la misma función wavelet volver a reconstruirla sin este ruido (Filtraje de línea base), se presenta la señal en color rojo, señal esta que será sometida al posterior análisis.

El proceso siguiente consiste en aplicar el algoritmo de pan-Tompkins mejorado y totalmente complementado para identificar todos los picos y ondas características de la señal ECG en estudio.

Por último se aplica el análisis a toda la señal de ECG, usando el algoritmo creado para encontrar las amplitudes de todas las ondas que componen el ECG en milivoltios (mV), y los tiempos de los intervalos más importantes del mismo en milisegundos (ms). También se presenta en otra casilla el valor de la frecuencia cardiaca (Latidos por Minuto).

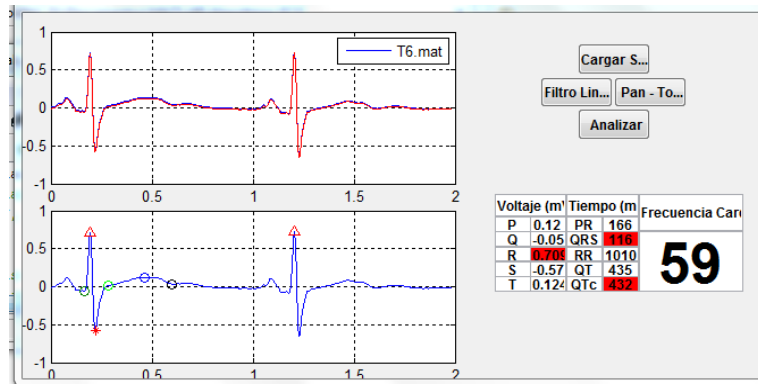


Figura 23. Interfaz Gráfica de Usuario. Fuente propia.

Resultados y comparaciones

4.1 Ajustes del algoritmo.

Haciendo uso del algoritmo elaborado y la interfaz gráfica (GUI), se logró distinguir las variaciones existentes al utilizar una determinada función wavelet para la descomposición (análisis) y al mismo tiempo utilizar otra función wavelet distinta en la reconstrucción (síntesis) de la señal ECG, como se puede observar en la interfaz gráfica de usuario (GUI), ver Figura 24 . Allí se descompuso una señal ECG con *db5* y se reconstruyó con la wavelet *sym3*. La señal ECG original se presenta en color azul y la señal reconstruída en color rojo, obteniendose de manera inmediata la diferencia y el error en la reconstrucción. Al seguir aplicando el proceso siguiente de análisis se podrá observar las inconsistencias en las mediciones de las ondas y los segmentos propios característicos de las señales ECG. llevando ésto a obtener datos inexactos, y también un mal diagnóstico en todos los registros electrocardiográficos.

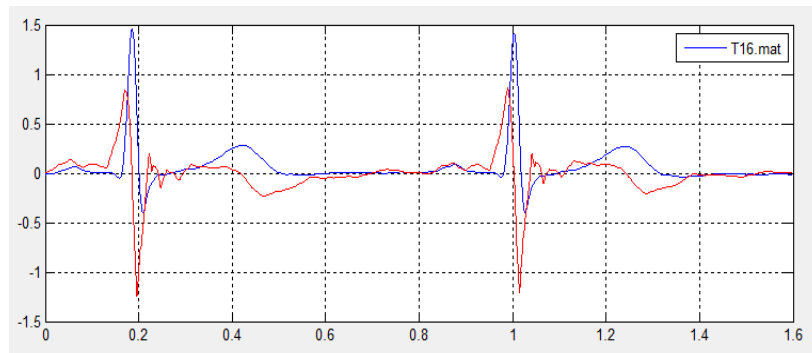


Figura 24. Descomposición y reconstrucción con diferente wavelet al mismo tiempo. Fuente propia.

4.2 Aplicación del algoritmo.

El algoritmo fué aplicado a la totalidad de las épocas almacenadas de todos los registros electrocardiográficos de pacientes chagásticos y de personas sanas, en cada uno de ellos se obtuvieron las características más importantes de sus ondas y amplitudes, también el tiempo de los intervalos más representativos y se comparó con un equipo de alta resolución y con la clasificación de un especialista en electrofisiología.

Los valores obtenidos de las amplitudes (mV), intervalos (ms) y frecuencia cardiaca (LPM), de la época 0001 se muestran en la tabla de datos No. 1. En esta tabla se aprecian los valores obtenidos con el algoritmo y los valores obtenidos con un software especializado de un equipo de alta resolución.

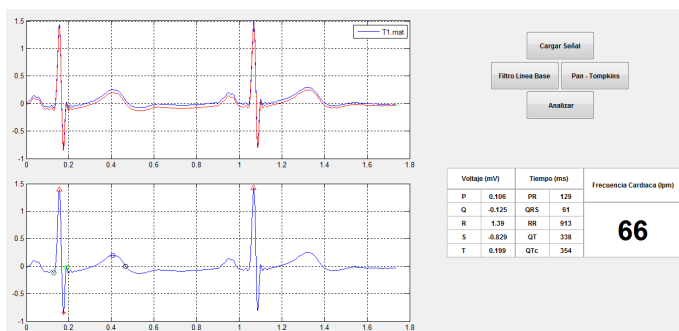


Figura 25. Aplicación del algoritmo a la época 0001. Fuente propia.

Época 0001	Amplitudes (mV)					Segmentos (ms)				
Característica	P	Q	R	S	T	PR	QRS	QT	QTc	Frecuen. cardiaca (LPM)
Algoritmo	0.106	-0.125	1.39	-0.829	0.19	129	61	338	354	66
Equipo ECG alta resolución	0.128	-0.103	1.38	-0.858	0.186	134	56	338	356	66.7
% Error	20.7	18.12	0.72	3.4	2.1	3.7	8.9	0	0.56	1.05
% Error total	5.8									
Exactitud	94.2 %									

Tabla No. 1. Resultado del análisis a la época 0001 con el algoritmo y con un equipo de alta resolución. Fuente propia.

En la siguiente figura se aprecia el algoritmo aplicado para analizar la época 0008.

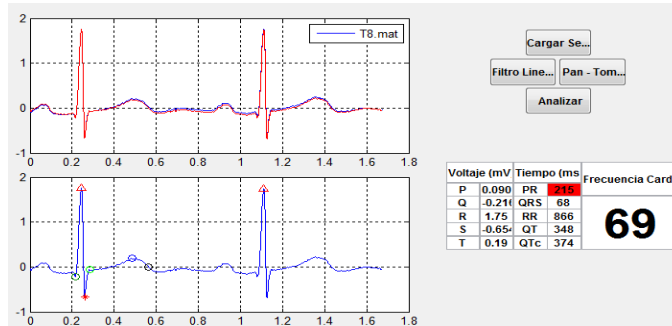


Figura 26. Aplicación del algoritmo a la época 0008. Fuente propia.

Epoca 0008	Amplitudes (mV)					Segmentos (ms)				
Característica	P	Q	R	S	T	PR	QRS	QT	QTc	Frecuen. cardíaca (LPM)
Algoritmo	0.090	-0.216	1.75	-0.654	0.19	215	68	348	374	69
Equipo ECG alta resolución	0.097	-0.198	1.82	-0.600	0.186	209	64.4	365	395	70.2
% Error	7.2	9	3.8	9	2.1	2.8	8.9	4.6	5.3	1.7
% Error total	5.4									
Exactitud	94.6 %									

Tabla No. 2. Resultado del análisis a la época 0008 con el algoritmo y con un equipo de alta resolución. Fuente propia.

En la tabla de datos No. 2. se aprecian los datos obtenidos con el algoritmo aplicado a la época 0008 como también datos obtenidos con el equipo de alta resolución y el cálculo de error. Se observa que la exactitud promedio en las mediciones de los intervalos es del 94.6 %, comparado con una exactitud del 98.3 % en la medición de la frecuencia cardíaca (LPM). La exactitud promedio en las mediciones de las amplitudes es del 93.78 %.

Igual tendencia ocurre, al aplicar el algoritmo a la época 0001, allí la exactitud en la medición de los intervalos es del 96.71 %, comparado con una exactitud del 98.9 % en la medición de la frecuencia cardíaca (LPM), y de 90.9 % en la medición de amplitudes.

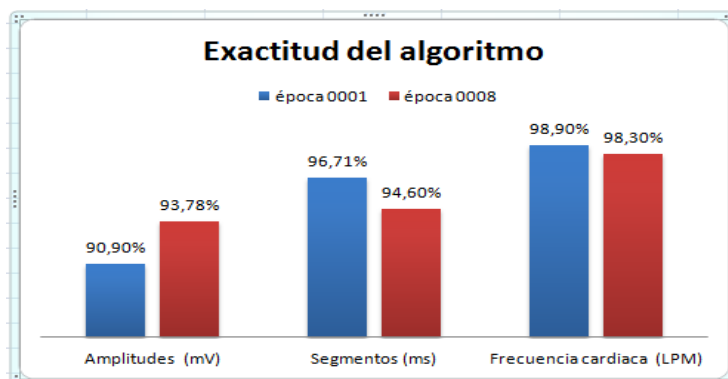


Figura 27. Cuadro comparativo de exactitud del algoritmo. Fuente propia.

4.3 Identificación de Alteraciones electrocardiográficas.

En los registros electrocardiográficos recopilados en el laboratorio, se logró obtener un total de 72% de pacientes con enfermedad de chagas crónico, en estos ECG se pudo sólo apreciar de una forma visual por parte de un especialista en electrofisiología algunas alteraciones electrocardiográficas, del total que pueden estar presentes como son por ejemplo: [12]

Alteraciones difusas de repolarización ventricular. (intervalo QT prolongado, inversión de la onda T, etc.)

Bajo voltaje del QRS.

Extra-sístoles ventriculares.

Bloqueo auriculo-ventricular de 1er grado.

Bloqueo de rama izquierda del haz de His.

Bloqueo de rama derecha del haz de His.

Fibrilación auricular.

Taquicardia sinusal.

Bradicardia sinusal.

El algoritmo permite distinguir la mayoría de ellas. Por ejemplo en el intervalo QT prolongado, se utiliza la fórmula de Bazett (QTc), y en cada registro cuando el QTc sobrepasa un umbral establecido en milisegundos, este dato se presenta resaltado en color rojo. Igual sucede cuando el intervalo PR registra un valor mayor a 200 ms [21], (indica un bloqueo auriculo-ventricular de 1er grado), el dato se resalta en color rojo. Cuando se presenta una extrasístole ventricular, se detecta un pico de voltaje superior a un umbral establecido, este dato es presentado en color Azul. Para el complejo QRS prolongado (>100 ms) [1, 21], el dato es igualmente resaltado en color rojo.

4.4 Conclusiones.

Con el presente trabajo se ha logrado elaborar un algoritmo que facilita a los especialistas identificar las componentes más importantes presentes en las señales de ECG. Este detecta las principales ondas características de las señales electrocardiográficas, como también su duración, con un alto grado de exactitud, de pacientes con la enfermedad de chagas (bajos voltajes del complejo QRS, alteraciones difusas de la repolarización ventricular, intervalo QT prolongado, bloqueo auriculo-ventricular de 1er grado, extra-sístoles ventriculares, bloqueos de rama, taquicardias ó bradicardias) y también de registros sanos de ECG, permitiendo con ello un diagnóstico de las electrocardiopatías presentes, problema este muy relevante en la detección de enfermedad de chagas crónico una vez tomada la muestra ECG, ya que ofrece una visualización mejor y más amplia de las señales y sus mediciones con la ayuda de una interfaz gráfica que resulta de una ayuda rápida, confiable e incomparable en estos procedimientos.

Este algoritmo usa el análisis wavelet discreto en la descomposición y reconstrucción de la señal ECG, que por ser una señal no estacionaria y con diferentes componentes frecuenciales no se facilitaría con otro análisis matemático. Se ha podido concluir que algunas wavelets como por ejemplo las daubechies y en especial la daubechies 5 por su gran similitud con la señal de ECG, ofrece ventajas sobre las demás funciones. Esta daubechies 5 (ortogonal y con cinco (5) momentos de desvanecimiento) fué empleada desde el comienzo cuando se realizó un filtraje de la señal del ruido de línea base (componente frecuencial baja) llevada hasta un nivel 11 de descomposición, se eliminaron los coeficientes de detalle de algunos niveles que contenían ruido de alta frecuencia antes de la reconstrucción, para poder luego aplicar el algoritmo que analiza cada señal de ECG, y lograr los resultados adecuados y con la exactitud final obtenida. Además, el algoritmo permitió probar las diferentes funciones wavelets de una forma muy versátil y lograr utilizar la que mejores resultados ofrecía. Esto último ofrece la posibilidad de obtener finalmente un algoritmo con flexibilidad para probar diferentes funciones wavelets y lograr posteriores estudios sobre análisis de señales electrocardiográficas.

Como otro logro importante se puede mencionar la construcción de una base de datos propia de señales ECG, de pacientes portadores del parásito que produce la enfermedad de chagas del departamento del Meta, la cual es una enfermedad endémica de los llanos orientales y de otras extensas

regiones de nuestro país. Esta enfermedad produce daños en el sistema de conducción eléctrico interno del corazón y de los tejidos fibrosos del mismo, produciendo daños incluso en el miocardio (cardiomiopatía chagástica) que finalmente lleva a producir infarto agudo del miocardio ó graves problemas de incapacidad física, problemas de salud que afecta a millones de personas en toda América Latina, y otros tantos en peligro de contraer la enfermedad. Al ser diagnosticada a tiempo se puede someter al paciente a un tratamiento para neutralizar el avance de la enfermedad ó la eliminación del parásito.

Referencias

- [1] Acharya, U.R., Suri, J.S., Spaan, J.A.E., Krishnan, S.M. *Advances in cardiac signal processing*. Springer-Verlag Berlin heidelberg. ISBN-10 3-540-36674-1. 2007
- [2] Aldroubi, Akran and Unser, Michel. *Wavelets in Medicine and Biology*. CRC Press. New york. 1996.
- [3] Bayes de Luna, A. Fiol-Sala, M. *Electrocardiography in Ischemic Heart Disease: Clinical and Imagin Correlations and Prognostic Implications*. Editorial: Wiley-Blackwell. ISBN 978-1-4051-7362-9. USA. Año 2008.
- [4] Chui, Charles K. *WAVELETS : A Mathematical Tool for Signal Analysis*. SIAM. Philadelphia. ISBN 0-89871-384-6. Año 1997. 210 p.
- [5] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS Series 61, SIAM, Philadelphia 1992.
- [6] Daubechies, Ingrid. *The Wavelet Transform, Tiempo-Frequency Localization and Signal Analysis*. IEEE Trans. Infrom. Theory. Vol 36 1990. 961-1004.
- [7] Daubechies, Ingrid. *Orthonormal bases of compactly supported wavelets II : Variations on a theme*, SIAM J. Math. Anal., 24 (1993), 499-519.
- [8] Faundez, Pablo. Fuentes, Alvaro. *Procesamiento Digital de Señales Acústicas Utilizando Wavelets*. MATEMÁTICAS UACH. Pedro Reumay. México.
- [9] García Mollá, Victor Manuel. *Computación Paralela de la Transformada Wavelet; Aplicaciones de la Transformada Wavelet al Álgebra Lineal Numérica*. Tesis Doctoral. UPV. 2009. 141 p.
- [10] Lazdins-Held, Janis K. MD., PhD. Guhl, Felipe MSc. *Enfermedad de chagas*. Editores: Fernando Rosas, MD., Diego I. Vanegas, MD., Mauricio F. Cabrales, MD. Sociedad colombiana de cardiología y cirugía cardiovascular. ISBN 978-958-970 65-9-6. Año 2007. 224 p.
- [11] Mallat, Stephane. *A Wavelet Tour Of Signal Processing*. 2da. Edición. Edit. Academic Press. Ecole Polytechnique, París. Elsevier, USA. 1.999. ISBN 0-12-466606-X. 637 P.

- [12] Neves, Ana., Gómes, Sheila., Da Silva, Sebastiao., Da Costa, Vera., Gomes, Alberto. *Alteraciones electrocardiográficas durante y después del tratamiento con benzonidazol en fase aguda de la enfermedad de chagas autóctona de la amazonía brasileña*. Instituto Evandro Chagas. Pará, Brasil. 2010.
- [13] Nguyen, Truong. Strang, Gilbert. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press. USA. ISBN 0-9614088-7-1. Año 1997.
- [14] Ottesen, Johnny T. Olufen, Mette S. Larsen, Jesper K. *Applied Mathematical Models In Human Physiology*. SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics). ISBN 0-89871-539-3. USA. Año 2004. 295 p.
- [15] Pan J. and J. Tompkins. *A Real-Time QRS Detection Algorithm*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 32, pp 230-236. 1985
- [16] Rajendra Acharya U, Jasjit S. Suri, Jos A.E. Spaan and Krishnan S.M. *Advances in Cardiac Signal Processing*, ISBN-10 3-540-36674-1. Springer Berlin Heidelberg New York. 2007. 467 p.
- [17] Stark, Hans-George. *Wavelets and Signal Processing*. Springer Berlin Heidelberg New York. ISBN 3-540-23433-0. Año 2005. 149 p.
- [18] Stouffer, George. *Practical ECG Interpretation: Clues to Heart Disease in Young Adults*. Editorial: Wiley-Blackwell. NJ, USA. ISBN 978-1-4051-7928-7. Año 2009.
- [19] Tang, Yuan Yan. *Wavelet Theory Approach to Pattern Recognition*. World Scientific Publishing. ISBN 97898142 73 9 54. Año 2009. 482 p.
- [20] Tentori, María Cristina. MD. Hayes, David L. MD. Segura, Elsa L. MD. *Arrhythmia Management in Chagas Disease*. ISBN 0-8799-450-6. USA. Año 2001
- [21] Uribe Arango, W., Duque Ramírez, M., Medina Durango, E. *Electrocardiografía y arritmias*. P.L.A. Export Editores Ltda. Bogotá. Año 2005.
- [22] Walker, James S. *A Primer Course on Wavelets and Their Scientific Applications*. 2da. Edition. Chapman and Hall/CRC. New York. ISBN 978-1-58488-745-4. Año 2008. 294 p.

[23] Weis, Guido. *Introduction and Basic Aspects of Wavelets Theory*. Departamento of Mathematics, Washington University St. Louis MO 63130, USA. 121 p.

[24] DANE. Departamento Administrativo Nacional de Estadística. *Principales causas de Defunciones en Colombia*. Años 2003 hasta 2010. Consultada 24 Nov. 2012.

http://www.dane.gov.co/index.php?option=com_content&view

[25] <http://www.ADInstruments.com/products/hardware/research/product/FE132/> Consultada Octubre 10 de 2011.

[26] Organización Mundial de la Salud (WHO). *Division of Control of Tropical Diseases*. Chagas Disease Elimination. Burden and Trends.

<http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs317/es>

[27] World Health Organization. <http://www.who.int/>. Consultado 1 de Octubre de 2011.

Apendice

Glosario

ARMÓNICO: componente de frecuencia de una señal periódica que consiste en múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. La frecuencia fundamental es el primer armónico, dos veces esta frecuencia es el segundo armónico etc.

ARRITMIA: ritmo anormal del corazón en lo que se refiere a la frecuencia, la regularidad o el lugar de origen del impulso. Los tipos de arritmias incluyen las taquicardias (latido acelerado) y las bradicardias (latido lento).

COMPONENTE DE FRECUENCIA: frecuencia asociada a cada una de las sinusoides que describen alguna señal mediante el análisis de Fourier.

DEFLEXIÓN: son cada una de las variaciones positivas o negativas que se generan en el electrocardiograma en la medida en que el impulso eléctrico se propaga.

DERIVACIÓN: conexión de electrodos en la superficie del cuerpo, las derivaciones electrocardiográficas son 12 y se encargan de mostrar el comportamiento eléctrico cardiaco desde diferentes puntos.

ELECTROCARDIÓGRAFO: instrumento utilizado para registrar la actividad eléctrica del corazón con el fin de detectar las anomalías en la transmisión del impulso cardiaco a través del tejido conductor del músculo.

ELECTROCARDIOGRAMA (ECG ó EKG): trazado realizado por un electrocardiógrafo utilizado para registrar la actividad eléctrica del corazón, recogido en la superficie de la piel.

ELECTRODO: extremo de un conductor en contacto con un medio, al que lleva o del que recibe una señal eléctrica.

ENFERMEDAD DE CHAGAS : enfermedad endémica producida en los mamíferos por el parásito *Trypanosoma cruzi*.

ESPECTRO: gráfica con la distribución de las frecuencias en Hz de una señal, normalmente contra su amplitud.

EXTRASÍSTOLE VENTRICULAR: contracción prematura del ventrículo debido a desórdenes en la conducción eléctrica de sus tejidos internos del corazón.

FRECUENCIA DE MUESTREO: velocidad con la que el electrocardiógrafo toma muestras por segundo.

FILTRO PASA ALTAS: sistema que atenúa todas las frecuencias que están por debajo de una frecuencia de corte y permite el paso de aquellas que se encuentran por encima de la misma.

FILTRO PASA BAJAS: sistema que atenúa todas las frecuencias que están por encima de una frecuencia de corte y permite el paso de aquellas que se encuentran por debajo de la misma.

HAZ DE HIS: grupo de fibras conductoras que descienden del nodo auriculoventricular (AV) a las ramificaciones del corazón.

INTERVALO QT: tiempo transcurrido desde el inicio de la onda Q y el final de la onda T.

ISQUEMIA DE MIOCARDIO: flujo de sangre insuficiente hacia un tejido como el miocardio y privación de oxígeno del mismo, generalmente debido a una constricción u obstrucción de una arteria.

LÍNEA ISOELÉCTRICA: valor que representa el nivel de voltaje cero (ó neutro), sobre la que se desplaza una señal de voltaje vs tiempo.

MIOCARDIO: Músculo principal del ventrículo.

MIOCARDIOPATÍA CHAGÁSTICA: afectación grave del corazón debido a la enfermedad de chagas.

NODO AURICULOVENTRICULAR (AV): grupo de células localizadas en la pared que se encuentra entre las aurículas derecha e izquierda, justo encima de los ventrículos. Esta parte de la vía de conducción eléctrica del corazón ayuda a llevar las señales eléctricas desde las aurículas a los ventrículos.

NODO SINUSAL (SA): es un aglomerado de células especializadas en un aurícula derecha que inicia el impulso eléctrico que se transmite por el corazón generando sus latidos. A menudo, el nodo SA se denomina el marcapasos biológico del corazón.

PATRÓN: conjunto de características de una señal cardiaca o en general electrofisiológica que posee rasgos muy semejantes..

POTENCIAL DE ACCIÓN: es el fenómeno que se presenta cuando algún mecanismo bien sea eléctrico, químico o mecánico altera el estado de reposo de las células cardiacas, la respuesta generada va a llevar a un proceso de despolarización de las mismas, invirtiendo su polaridad, de tal manera que el interior se convierte en positivo y el exterior en negativo.

REGISTRO: almacenamiento de una señal electrofisiológica para luego procesarla y/o presentarla.

REPOLARIZACIÓN VENTRICULAR : acción del ventrículo en la cual recupera se polarización, y quedar listo para una nueva despolarización.

RESOLUCION: mínimo cambio en voltaje ó corriente que puede leer ó registrar el electrocardiógrafo.

RITMO SINUSAL: ritmo normal del corazón, iniciado por el nodo SA.

RUIDO ELECTROMIOGRÁFICO: ruido causado por la actividad muscular que posee el cuerpo humano. Este tipo de ruido se encuentra presente en toda la banda de la señal electrocardiográfica.

SEÑAL ELECTROFISIOLÓGICA: señal que produce el cuerpo humano, debido a corrientes iónicas en sus tejidos u órganos como el corazón, el cerebro etc, de algunos milivoltios ó microvoltios.

SEÑALES ESTACIONARIAS: señales que poseen un contenido frecuencial invariante en el tiempo.

SEÑALES NO ESTACIONARIAS: señales con contenido frecuencial variante en el tiempo.

SISTEMA DE CONDUCCIÓN CARDIACO: red especializada de células en el corazón que generan una señal eléctrica dentro del corazón y lo transportan por el mismo, produciendo el latido.

SISTEMA DE PURKINJE: sistema de células que conecta las terminaciones de las ramas del Haz de His con la superficie cardiaca de ambos ventrículos.

TRANSFORMADA DE FOURIER: descomposición de una señal o función en senos y cósenos de diferentes frecuencias cuya suma corresponde a la señal original.

TRYPANOSOMA CRUZI : Parásito protozoo flagelado que produce la enfermedad de chagas.

VINCHUCA O PITO: insecto vector o transmisor de la enfermedad de chagas.