

TRABAJO DE GRADO

Turbulencia en dos dimensiones y su cascada inversa de energía

REALIZADO POR

Sebastian Hernández Arboleda

Para la obtención del grado de Máster en Ingeniería

ASESOR

Juan Camilo Isaza Betancourt



Universidad EAFIT
Facultad de Ingeniería
Medellín
2017

*Somos polvo de estrellas que piensa acerca de las estrellas.
Somos el medio para que el Cosmos se conozca a sí mismo.*

Carl Sagan

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer profundamente a mis padres, hermana y novia por su incondicional apoyo, sobre todo en los momentos cuando el tiempo parecía escaparse entre las manos.

Al director de esta tesis de maestría, el profesor Juan Camilo Isaza, no solo por los conocimientos compartidos en este camino, por su enorme paciencia y sus oportunas asesorías, además por las oportunidades que se abrieron durante el mismo, como lo fue la hermosa experiencia de la docencia durante mi tiempo como estudiante de la maestría.

También quisiera agradecer a la Universidad EAFIT por el apoyo económico otorgado durante el último año de estudios y al equipo de APOLO por su constante asesoría y disponibilidad, sobre todo quisiera agradecer a Juan David Pineda por sus oportunas asesorías y completa disponibilidad cuando me encontraba computando en APOLO.

Y por último a todos mis profesores y compañeros de clase de los cuales he aprendido gran cantidad de cosas, no solo en el ámbito profesional.

RESUMEN

La turbulencia se encuentra implícita en todas las escalas de movimiento, desde el vapor que sale de una taza de café hasta la formación de eyecciones de masa coronal en la superficie de las estrellas. Es un fenómeno que caracteriza el flujo de fluidos con altos números de Reynolds, en los cuales existe una alta aleatoriedad en el movimiento de sus partículas y una dinámica caótica de vórtices. Estudiarla nos permite entender cómo se transporta la energía dentro de un flujo y la predicción de su comportamiento. El mundo físico es un espacio tridimensional por lo que los primeros estudios de la turbulencia fueron tridimensionales, Richardson (1922) fue el primero quien introdujo el termino cascada de energía, explicando que para el caso tridimensional de la turbulencia la energía es transportada desde vórtices de gran tamaño a vórtices más pequeños, estos a su vez pasan la energía cinética a vórtices cada vez más pequeños y así hasta que la inexorable acción de la viscosidad disipa la energía cinética en forma de calor.

Luego años más tarde Batchelor (1953), propuso su interés en el estudio de la turbulencia en dos dimensiones, poniendo en discusión que cuando se “simplificaba” una de las dimensiones espaciales un nuevo conjunto de fenómenos aparecía. Según sus cálculos en la turbulencia bidimensional el flujo de energía debía darse de escalas pequeñas a escalas más grandes, es decir, los vórtices más pequeños ceden su energía a vórtices de mayor tamaño, desencadenando una convergencia de vórtices. La confirmación de estas hipótesis no llegaría hasta 30 años después con los estudios llevados a cabo por Orszag (1970). Aunque la turbulencia en dos dimensiones no es posible de realizarse en el espacio físico, debido a la tridimensionalidad del mundo en que vivimos, es posible realizar aproximaciones bidimensionales de fenómenos atmosféricos u oceánicos debido a la relación existente entre las escalas verticales y horizontales de este tipo de fenómenos, verticalmente están del orden de 10 km mientras que horizontalmente se aproximan a 10^3 - 10^4 Km, Boffeta and Ecke (2012).

Experimentalmente se han realizado aproximaciones a la turbulencia en dos dimensiones, una de ellas se basa en la utilización de finas capas de un fluido con alta capacidad de conducción eléctrica y se pasa por un arreglo de imanes donde se aplica una carga eléctrica, también se han realizado experimentos con finas películas de jabón que se dejan fluir por acción de la gravedad. A estos casos cuasi-bidimensionales no se les ha demostrado que satisfagan completamente la ecuación de Navier-Stokes en dos dimensiones (Couder et al. (1989), Chomaz (2001), Rivera and Wu (2002)), pero la aproximación encontrada es considerable. La manera más común para el estudio de la turbulencia en dos dimensiones es por medio de simulaciones numéricas directas de la ecuación de Navier-Stokes, la primera simulación realizada fue llevada a cabo por Lilly (1969) para una resolución de malla de 64^2 , se pretendía encontrar las predicciones realizadas por Kraichnan y Batchelor sobre la cascada inversa de energía pero no se llegó a conclusiones relevantes debido a la baja resolución utilizada. Luego con la implementación de resoluciones más finas se comprobó la cascada inversa de energía, gracias a los trabajos de Maltrud M (1991) quienes realizaron simulaciones con una resolución de 512^2 y Smith (1993) con una resolución de malla de 2048^2 .

Gracias a los avances tecnológicos y al desarrollo de la computación científica, se pudieron realizar cada vez simulaciones con mayor resolución de malla, Boffetta and Musacchio (2010) mostraron el desarrollo de la doble cascada de la turbulencia en dos dimensiones, la cascada inversa de energía y la cascada directa de entropía, al realizar simulaciones con resoluciones de malla de 32768^2 . En esta investigación se realizaron simulaciones numéricas directas de la ecuación de Navier-Stokes en dos dimensiones para resoluciones de malla de 1024^2 , 2048^2 y 4096^2 , con el fin de evidenciar la doble cascada de la turbulencia bidimensional y la convergencia de vórtices con la evolución del tiempo.

Para las simulaciones realizadas se utilizó el método Pseudospectral de Fourier-Galerkin para la derivación espacial y un integrador temporal Runge-Kutta de cuarto orden, adicionalmente se utilizó computación paralela para disminuir el tiempo de computo requerido para cada simulación. De los resultados de esta investigación puede evidenciarse que aun para resoluciones de 1024^2 es posible la observación de la cascada inversa del espectro de energía, mientras que para el estudio de la cascada de entropía es necesario resoluciones de malla superiores a 4096^2 , ya que a estas resoluciones no hay resultados concluyentes. También pudo comprobarse la convergencia de vórtices tal y como expusieron Batchelor y Kraichnan en sus discusiones de los años 50.

Palabras claves: *Turbulencia en dos dimensiones, cascada inversa de energía, cascada de entropía, función de estructura, espectro de energía, función de distribución de probabilidad, computación paralela, convergencia de vortices.*

OBJETIVOS

Objetivo general

Evidenciar la cascada inversa de energía presente en la turbulencia bidimensional con decaimiento libre, a partir de la evolución en el tiempo y la dependencia del número de Reynolds del espectro de energía, adicionalmente calcular el espectro de entropía, la función de estructura de segundo orden, la curtosis y PDF con el fin de caracterizar la turbulencia.

Objetivos específicos

- Realizar simulaciones numéricas directas de la ecuación de Navier-Stokes en un campo aleatorio de dominio cuadrado, $n_x = n_y$, en un rango de $[0 : 2\pi]$, con condiciones de frontera periódicas.
- Utilizar computación paralela con el fin de poder simular campos con una discretización espacial de resolución media, máximo 4096 nodos para cada coordenada espacial.
- Calcular los espectros de energía y de entropía para cada simulación realizada, observando la dependencia temporal y del número de Reynolds con el fin de evidenciar la cascada de energía y de entropía.
- Calcular las estadísticas tales como la función de estructura, curtosis y PDF con el fin de caracterizar la turbulencia y analizar la evolución temporal del campo de vorticidad.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	3
RESUMEN	4
OBJETIVOS	6
INTRODUCCIÓN	9
1 Turbulencia en dos dimensiones	13
1.1 Ecuación de Navier-Stokes	15
1.2 Las micro escalas de Kolmogorov y Taylor	17
1.3 Cascada de energía y enstropía	18
1.4 Función de estructura	20
1.5 Evolución de los vórtices	21
2 Método numérico	23
2.1 Método Pseudospectral Fourier-Galerkin	23
2.2 Ecuación de Poisson	26
2.3 Integración temporal	26
2.4 Algoritmo	27
2.5 Recursos Computacionales	33
2.6 Validación	35
2.6.1 Vórtice de Taylor-Green	35
2.6.2 Aceleración computacional	37
3 Resultados	39
3.1 Condiciones iniciales	39
3.2 Parámetros para las simulaciones	41
3.3 Disipación de energía y enstropía	42
3.4 Cascada de energía y enstropía	43
3.5 Campo de Vorticidad	52
3.6 Función de estructura	60
4 Conclusiones	63
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67

ÍNDICE DE FIGURAS

0.1	Fotografía de la atmosfera de Júpiter	10
1.1	Esquema de los espectros de Energía y Enstropía	19
1.2	Esquema de la cascada inversa de energía	20
2.1	Convergencia espacial, Vórtice de Taylor-Green	36
2.2	Convergencia temporal, Vórtice de Taylor-Green	36
2.3	Aceleración computacional	38
3.1	Espectro de energía inicial	40
3.2	Disipación de energía y enstropía	42
3.3	Dependencia del número de Reynolds de la disipación	43
3.4	[Evolución del espectro de energía, resolución 1024^2	44
3.5	Evolución del espectro de energía, resolución 2048^2	45
3.6	Evolución del espectro de energía, resolución 4096^2	46
3.7	Dependencia del número de Reynolds del espectro de energía, resolución 4096^2	47
3.8	Evolución del espectro de enstropía, resolución 4096^2	48
3.9	Dependencia del número de Reynolds del espectro de enstropía, resolución 4096^2	49
3.10	Evolución de la escala integral de Taylor, Reynolds	50
3.11	Evolución de la escala integral de Taylor, Resolución	51
3.12	Evolución del campo vorticidad $R_\lambda = 1,95$, Resolución 1024^2	52
3.13	Evolución del campo vorticidad $R_\lambda = 19,47$, Resolución 1024^2	53
3.14	Evolución del campo vorticidad $R_\lambda = 194,68$, Resolución 1024^2	53
3.15	Evolución del campo vorticidad $R_\lambda = 1,95$, Resolución 2048^2	54
3.16	Evolución del campo vorticidad $R_\lambda = 19,47$, Resolución 2048^2	55
3.17	Evolución del campo vorticidad $R_\lambda = 194,68$, Resolución 2048^2	55
3.18	Evolución del campo vorticidad, resolución 4096^2	56
3.19	Evolución de la curtosis, resolución 1024^2	57
3.20	Evolución de la curtosis, resolución 2048^2	58
3.21	Evolución de la curtosis, resolución 4096^2	58
3.22	Evolución del PDF, resolución 1024^2	59
3.23	Evolución de la función de estructura, resolución 2048^2	61
3.24	Dependencia de la función de estructura al R_e , Resolución 2048^2	62

ÍNDICE DE TABLAS

2.1	Especificaciones técnicas de Apolo, EAFIT (2017)	34
2.2	Convergencia espacial, Vórtice de Taylor-Green	35
2.3	Convergencia temporal, Vórtice de Taylor-Green	37
2.4	Aceleración computacional	38
3.1	micro escalas de la turbulencia	41
3.2	Tiempo de computo en horas	41
3.3	Intervalo de tiempo para la disipación entre escalas, τ_d	43
4.1	Memoria utilizada en las simulaciones	64

INTRODUCCIÓN

Los flujos turbulentos están presentes en todas las escalas de movimiento, desde el flujo de humo de una chimenea en la comodidad de nuestra casa, hasta la caótica formación de las galaxias. Al observar un río o el humo de un cigarrillo fácilmente podemos deducir que su flujo es impredecible, con cambios de dirección caóticos e irregulares, aparición de vórtices, cambios abruptos de velocidad, entre muchos otros fenómenos que hacen de los flujos turbulentos un objeto interesante de estudio.

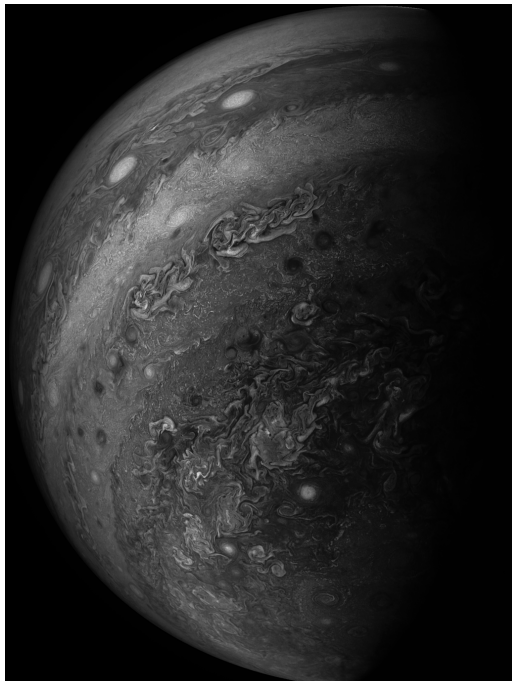


Figura 0.1: Fotografía de la atmosfera de Júpiter a 46,900 kilómetros de distancia, tomada por la sonda espacial Juno, muestra la turbulencia presente en los fenómenos naturales; Tomada el 19 de Mayo de 2017. Fuente: NASA (2017).

Comenzó a estudiarse en la antigüedad cuando Leonardo Da Vinci realizó los primeros bosquejos de los remolinos que se generaban en los ríos, luego Osborne Reynolds (1883) caracterizó los flujos en laminares y turbulentos, encontrando una relación adimensional conocida desde entonces como el número de Reynolds

y que calcula la relación existente entre la energía cinética y el amortiguamiento viscoso en el flujo de un fluido.

En 1753 el matemático suizo Leonhard Euler concibió lo que actualmente se conoce como la descripción euleriana de un fluido, donde el flujo se define en un volumen finito y todas las variables de este se definen como variables de campo, es decir como funciones del espacio y el tiempo, dentro de ese volumen finito. De esta manera describió por medio de sus ecuaciones el flujo de un fluido en dos y tres dimensiones.

A finales del siglo XIX los físicos y matemáticos Claude-Louis Navier y Sir George Gabriel Stokes de manera independiente consolidaron una ecuación en la cual se describía como la velocidad, la presión, la temperatura y la densidad están relacionados en el movimiento de un fluido. Dicha ecuación actualmente conocida como la ecuación de Navier-Stokes (N-S) es una extensión de la ecuación de Euler e incluye los efectos de la viscosidad en el movimiento de un fluido, NASA (2015).

En la primera mitad del siglo XX los estudios continuaron, Richardson (1922) pionero de la meteorología moderna realizó un primer sondeo al explicar cómo es el flujo de la energía cinética en un flujo turbulento, modelo que se conoce como la cascada de energía. Según este modelo la energía es transportada desde remolinos de gran tamaño los cuales ceden su energía a remolinos más pequeños, estos a su vez ceden la energía a remolinos cada vez más pequeños y así hasta que las fuerzas viscosas disipan esta energía en forma de calor

Luego en 1941, Kolmogorov formaliza y concreta las teorías de escalas de Richardson y Taylor para consolidar la teoría más usada hasta el momento en el comportamiento de los flujos turbulentos, conocida como K41, Kolmogorov (1941). Él supuso que, en las escalas pequeñas donde la viscosidad no es importante todavía, la distribución de probabilidad de la velocidad tan sólo dependía del valor medio de la tasa de transferencia de energía entre los remolinos.

Luego Kraichnan (1967) y Batchelor (1969) comenzaron el estudio de la turbulencia en dos dimensiones, el primero en un caso forzado y el segundo en decaimiento libre. Tiempo después se descubrió que en las grandes escalas la turbulencia en dos dimensiones está dominada por vórtices de apariencia casi circular y de larga vida, lo cual representó una gran modificación de las teorías expuestas por Richardson y Kolmogorov.

Aunque la turbulencia en dos dimensiones es una idealización ya que en nuestro mundo tridimensional no se da realmente, existen aproximaciones experimentales como por ejemplo películas de jabón que fluyen por la acción de la gravedad. La idealización de la turbulencia en dos dimensiones puede contemplarse para el estudio de fenómenos atmosféricos y oceanográficos de gran escala debido a la razón existente entre las escalas horizontales y verticales que existen en estos tipos de sistemas Boffeta and Ecke (2012).

Se ha encontrado que la turbulencia en dos dimensiones difiere de la tridimensional en que la cascada de energía en esta última va de las escalas grandes a las pequeñas, mientras en la turbulencia en dos dimensiones la energía se propaga de las escalas pequeñas a las grandes, a este fenómeno se le llamó "*la cascada inversa de energía*".

Se han realizado múltiples estudios de la turbulencia en dos dimensiones utilizando simulaciones numéricas directas, entre los estudios más recientes y relevantes se encuentran los realizados por H and van Heijst G. (2009), Boffeta and Ecke (2012), Fox and Davidson (2010) y Kuznetsov E. (2010). Cada vez con las nuevas tecnologías de cómputo y la computación paralela se podrán realizar simulaciones numéricas directas cada vez con mayor resolución y de esta manera esclarecer que pasa en las diferentes escalas del flujo.

El presente trabajo utilizó el método pseudospectral para la simulación numérica directa de la ecuación de Navier-Stokes, debido a la gran precisión del método numérico y la reducción de operaciones computacionales que este ofrece. Se realizaron discretizaciones espaciales para tres tamaños de malla y se simuló estas condiciones iniciales para tres números de Reynolds diferentes con el fin de analizar la dependencia de esta variable en la cascada de energía, también se presentarán los resultados a diferentes tiempos de simulación con el fin de esclarecer la dependencia temporal y el decaimiento de la turbulencia. Adicionalmente se calcularon determinadas estadísticas para la caracterización de la turbulencia.

El documento consta de tres capítulos. El primero presenta los conceptos principales de la turbulencia en dos dimensiones, su descripción física y matemática, sus ecuaciones gobernantes y como se ha tratado hasta la

fecha, dando un pequeño resumen de las simulaciones y estudios más relevantes.

El segundo capítulo describe el método numérico empleado, la discretización temporal utilizada en las simulaciones y un breve recuento de la computación paralela, entrando un poco en las características del cluster, APOLO, utilizado para la computación. Adicionalmente se presentan en este capítulo los test y validaciones realizados al código generado.

El tercer capítulo se centra en el análisis de los datos obtenidos de las simulaciones realizadas. En la primera sección se exponen las condiciones iniciales y los parámetros utilizados para cada simulación. En la siguiente sección se analiza la evolución del campo de vorticidad, analizando la convergencia de vórtices por medio de la evolución de la curtosis y la función de densidad de probabilidad. Luego se analizan las cascadas de energía y entropía a partir de sus espectros, mostrando su evolución en el tiempo y su dependencia al número de Reynolds. Por último, se exponen los resultados obtenidos para la evolución y dependencia al número de Reynolds de la función de estructura de segundo orden.

Como capítulo final del presente documento encontraremos un resumen de todos los resultados más relevante obtenidos en esta investigación.

CAPÍTULO 1

TURBULENCIA EN DOS DIMENSIONES

Para hablar de la turbulencia en dos dimensiones primero es necesario dar un pequeño vistazo a las características de un flujo turbulento. Teniendo en cuenta los estudios realizados por Reynolds (1883), podemos clasificar los flujos en turbulentos y laminares; al observar el flujo de un fluido podemos notar que a bajas velocidades o viscosidades altas su comportamiento es estable, con ausencia de fluctuaciones en su velocidad y sus líneas de corriente pueden identificarse como líneas suaves. A este régimen de flujo se le conoce como **laminar**; mientras que a altas velocidades o bajas viscosidades puede notarse que el flujo es inestable, con altas fluctuaciones en su velocidad y sus líneas de corriente tienden a ser desordenadas mostrando cambios de dirección caóticos y aleatorios. A este régimen se le conoce como **turbulento**, Çengel and Cimbala (2012).

Después de un arduo trabajo de experimentación Reynolds (1883) descubrió que la caracterización de un flujo en su régimen depende de la razón entre fuerzas inerciales y fuerzas viscosas. A esta razón se le llamo **número de Reynolds** y en su forma dimensional puede expresarse de la siguiente manera:

$$R_e = \left| \frac{ma}{F_v} \right| = \frac{mU^2}{L} \frac{1}{\tau L^2} = \frac{\rho L^3 U^2}{L^3 \mu U / L} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{LU}{\nu} \quad (1.1)$$

Donde m es la masa, a la aceleración, F_v la fuerza viscosa, τ el esfuerzo cortante, μ la viscosidad dinámica, ρ la densidad, L la longitud y ν la viscosidad cinemática. Cuando R_e está por debajo de un valor crítico, por ejemplo en el caso del flujo en tuberías sería de 2300, las fuerzas viscosas son lo suficientemente altas para suavizar la inestabilidad del flujo. Por otra parte, cuando el R_e supera este valor crítico, la inercia del flujo sobrepasa los efectos disipativos de la viscosidad, aumentando la inestabilidad de las líneas de corriente y convirtiendo el flujo en uno turbulento.

Como puede verse en la ecuación (1.1) el número de Reynolds depende únicamente de la longitud, la velocidad y la viscosidad cinemática. Usualmente para análisis de la turbulencia en dos dimensiones es útil definir el R_e en términos de la vorticidad, $\omega = \nabla \times u$, o el rotacional de la velocidad, la longitud característica y la viscosidad cinemática de la siguiente manera, Davidson (2013):

$$R_e = \frac{|\omega| l^2}{\nu} \quad (1.2)$$

Cuando R_e es lo suficientemente grande el flujo se vuelve caótico e impredecible, mostrándonos todas las características de un flujo turbulento. Entre los atributos universales de la turbulencia se encuentran, Tsinober (2009):

- Aleatoriedad espacio-temporal intrínseca, irregularidad. La turbulencia es caos (pero no necesariamente el caos es turbulencia).
- Pérdida de predictibilidad, pero posee propiedades estadísticas estables.
- Altamente disipativa, estadísticamente irreversible.
- Es fuertemente difusiva, facilita el transporte de momentum, energía y objetos pasivos.
- Altamente no lineal, no integrable, no local y no gaussiana.

Es difícil dar con una definición clara de lo que es la turbulencia, por ello, en la mayoría de literatura al tratar de definir la turbulencia se limitan a enumerar sus características, según Tennekes and Lumley (1972) los flujos turbulentos se caracterizan por:

- **Irregularidad:** una característica es la irregularidad o aleatoriedad de los flujos turbulentos. Esto provoca que el estudio de las turbulencias se aborde desde métodos estadísticos ya que una aproximación determinística del problema se hace imposible debido a la naturaleza aleatoria de la turbulencia.
- **Difusividad:** esta característica hace de la turbulencia un excelente medio para mezclar y favorecer la transferencia de momentum, calor y masa en determinados procesos.
- **Alto número de Reynolds:** todos los flujos turbulentos ocurren a altos números de Reynolds, normalmente los flujos turbulentos se originan por la inestabilidad de los flujos laminares cuando el número de Reynolds es muy grande.
- **Disipación:** los flujos turbulentos siempre son disipativos. Los esfuerzos cortantes viscosos realizan un trabajo de deformación que incrementa la energía interna del fluido a costas del gasto de la energía cinética de la turbulencia.
- **Continuo:** la turbulencia es un fenómeno continuo, gobernando por las ecuaciones de la mecánica de fluidos.
- **Los flujos turbulentos son flujos:** la turbulencia no es una características de los fluidos, sino de los flujos de los fluidos. La turbulencia se puede dar en cualquier tipo de flujos sea líquidos o gases, si el número de Reynolds es lo suficientemente grande.

La turbulencia esta intrínseca en la naturaleza, podemos observarla en todas las escalas, desde el humo de un cigarrillo hasta la formación de las galaxias, pasando por la caótica naturaleza de la superficie de las estrellas hasta en el proceso de generación de la magnetosfera en el núcleo de nuestro planeta. Entre sus numerosas manifestaciones, la turbulencia en dos dimensiones es especial en muchos aspectos. Aunque estrictamente hablando, la turbulencia en dos dimensiones no es posible en nuestro mundo físico ni en el laboratorio, ya que vivimos en un mundo tridimensional. A pesar de esto la idealización de la turbulencia en dos dimensiones parece ser de gran importancia para algunos sistemas físicos. Por ejemplo, el movimiento a gran escala de la atmosfera y los océanos se ha descrito a primera instancia como un flujo turbulento en dos dimensiones, debido a la razón existente entre las escalas laterales y verticales de este tipo de sistemas. Charney (1971) mostró que las características más destacadas de la turbulencia en dos dimensiones están presentes en la teoría de la turbulencia geostrófica. Para ello mostró datos de una simulación numérica, datos experimentales y diferentes circunstancias geofísicas, ilustró la misma filamentación de los vórtices que ocurre en la turbulencia en dos dimensiones y en la medición realizada a una gran cantidad de sistemas.

Desde un punto de vista teórico, la turbulencia en dos dimensiones no es simplemente una versión con una reducción dimensional de la turbulencia en tres dimensiones, debido a que en dos dimensiones surgen unas

nuevas leyes de conservación y por lo tanto da pie a toda una nueva gama de fenómenos. Además, la ecuación de Navier-Stokes en dos dimensiones simplifica el marco de trabajo para algunos problemas de turbulencia, por ejemplo, la dispersión turbulenta, debido a que numéricamente se puede hacer una discretización espacial y temporal con mayor resolución que para problemas del mismo tipo abordados en tres dimensiones. Cuando se realizan estas simplificaciones a 2D es importante tener claro como las nuevas leyes de conservación limitan la aplicabilidad de los resultados obtenidos, Boffeta and Ecke (2012).

1.1. Ecuación de Navier-Stokes

La ecuación de Navier-Stokes es un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales que describen el movimiento de un fluido. Es una extensión de la ecuación de Euler pero incluyendo los efectos de la viscosidad en el flujo de los fluidos, basándose en los principios de conservación de la mecánica y de la termodinámica.

Para tratar de entenderla, consideremos un fluido con densidad ρ el cual fue puesto en movimiento con un campo de velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Ya que ρ es constante, entonces la ley de conservación de masa puede reducirse a la siguiente expresión,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.3)$$

La cual es conocida como la ecuación de continuidad. Una segunda ecuación para $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ proviene de la segunda ley de Newton. Si consideramos una pequeña porción del fluido de volumen $\delta\mathbf{V}$ y seguimos esta pequeña porción mientras se mueve por el campo del fluido, la segunda ley de Newton nos lleva a:

$$(\rho\delta\mathbf{V})\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -(\nabla p)\delta\mathbf{V} + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}\delta\mathbf{V} \quad (1.4)$$

Donde $p(\mathbf{x}, t)$ es el campo de presión, τ_{ij} es el tensor de esfuerzos viscosos y $D\mathbf{u}/Dt$ es la aceleración instantánea de la porción de fluido. Ahora introduciremos el tensor de simetría, el cual puede expresarse como:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (1.5)$$

Centrándonos en el tensor de esfuerzos, τ_{ij} . Se espera que τ_{ij} esté relacionado con la deformación del fluido, por lo tanto τ_{ij} depende del tensor de simetría S_{ij} . Teniendo en cuenta la ley de la viscosidad de Newton o ley constitutiva, la cual dicta que τ_{ij} es proporcional a S_{ij} de la siguiente manera:

$$\tau_{ij} = 2\rho v S_{ij} = \rho v \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (1.6)$$

La constante de proporcionalidad, v , es llamada la viscosidad cinemática. Ahora estamos en posición de describir el movimiento de la porción de fluido desde un punto de vista Euleriano, para ello sustituimos la ecuación (1.6) en la ecuación (1.4), y teniendo en cuenta la ley de conservación de masa, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, llegamos a la ecuación de Navier-Stokes, Davidson (2013):

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho v \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.7)$$

Como mencionamos anteriormente la ecuación de Navier-Stokes describe el movimiento de un fluido, por esta razón es la ecuación idónea para el estudio de los flujos turbulentos, ya que nos brinda la información necesaria para el estudio de un campo de fluido en su evolución en el tiempo. Si realizamos una simplificación algebraica a la ecuación (1.7) y la reescribimos en notación indicial obtendremos:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (1.8)$$

Donde u es el campo de velocidad, ρ es la densidad, P es la presión y Re es el número de Reynolds. Nuestro interés es “simplificar” la ecuación (1.8) en su forma bidimensional y expresarla no en términos del campo de velocidad, u , sino en términos de la vorticidad, ω . La interpretación física de ω puede ser entendida como el doble de la velocidad angular intrínseca de una pequeña burbuja de fluido que se mueve por un campo, por lo tanto ω es una medida del momentum angular intrínseco en un elemento de fluido.

Como veremos más adelante, en ocasiones es más conveniente estudiar la evolución de un fluido en términos de ω que de la u , y la principal razón es la siguiente, la evolución del campo de ω es más simple de interpretar, además es libre del termino no-local de la presión. Esto es crucial ya que, sin la presión, la ω se esparce por todo el campo ya sea por movimiento material o por difusión. Lo cual no es cierto para la u , ya que la presión instantáneamente está redistribuyendo el momentum lineal por el campo, Davidson (2013). Para pasar la ecuación (1.8) a términos de la vorticidad, le calculamos el rotacional a toda la ecuación.

$$\nabla \times \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) \quad (1.9)$$

Teniendo en cuenta que $\nabla \times u = \omega$, $\nabla \times \nabla P = 0$ y realizando una serie de simplificaciones algebraicas obtenemos:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (1.10)$$

Para eliminar los términos de u que aún nos quedan en la ecuación, debemos pasarla a términos de la función de corriente ψ , ya que esta y la ω se encuentran relacionadas como veremos más adelante. Entonces, sabemos por definición que:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.11)$$

Ahora reemplazando la ecuación (1.11) en la ecuación (1.10) obtenemos la ecuación de Navier-Stokes en su formulación vorticidad-función de corriente para el caso de dos dimensiones:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1.12)$$

La cual puede ser reescrita de una manera más compacta usando notación vectorial:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\psi, \omega) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (1.13)$$

Donde $J(\psi, \omega)$ representa el Jacobiano entre la función de corriente y la vorticidad. De acuerdo a la ecuación de Poisson, la vorticidad y la función de corriente tienen una relación cinemática, la cual está dada por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega. \quad (1.14)$$

Desde el punto de vista computacional la formulación de la ecuación (1.12) tiene múltiples ventajas con respecto a la formulación de la ecuación (1.8) ya que esta elimina la presión de la ecuación de Navier-Stokes. Esta formulación automáticamente satisface la condición de no divergencia y por lo tanto reduce el número de ecuaciones a ser resueltas.

1.2. Las micro escalas de Kolmogorov y Taylor

Como se ha mencionado anteriormente una de las características de la turbulencia es la transferencia de energía desde vórtices de gran tamaño hacia vórtices cada vez más pequeños para el caso tridimensional y para el caso bidimensional en el sentido contrario como lo veremos más adelante. A esto se le llamó la cascada de energía y la cascada inversa de energía respectivamente.

Siguiendo las hipótesis de Richardson (1922) se puede considerar que la turbulencia está compuesta de remolinos de diferentes tamaños, los cuales transfieren la energía de torbellinos de gran tamaño a unos cada vez más pequeños. Entonces cada remolino de tamaño l posee una velocidad característica $u(l)$ y una escala de tiempo $t(l) = l/u(l)$. Pero vale preguntarse, ¿Cuál es el tamaño de los torbellinos más pequeños encargados de la disipación de la energía?, En respuesta a esta pregunta Kolmogorov (1941), propuso las que se conocen como las escalas de Kolmogorov basándose en su hipótesis de similaridad, la cual dice: “En flujos realmente turbulentos con un número de Reynolds lo suficientemente alto, las estadísticas del movimiento del fluido a pequeñas escalas poseen una forma universal y están determinadas únicamente por ν y ϵ ”, Pope (2000). Siendo ν la viscosidad cinemática y ϵ la disipación de la energía cinética.

Teniendo en cuenta los dos únicos parámetros ν y ϵ , solo existe una escala longitudinal η , de velocidad u_η y temporal τ_η que se puedan formar. Estas escalas caracterizan a los torbellinos más pequeños encargados de la disipación y están dadas por:

$$\eta \equiv (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \quad (1.15)$$

$$u_\eta \equiv (\epsilon\nu)^{1/4} \quad (1.16)$$

$$\tau_\eta \equiv (\nu/\epsilon)^{1/2} \quad (1.17)$$

Como puede observarse las escalas de Kolmogorov no están relacionadas con la ecuación de Navier-Stokes. Con el fin de extraer información útil de la ecuación de Navier-Stokes acerca de la cascada de energía, Taylor (1935) propuso unas escalas basadas en las funciones de autocorrelación. Según estos trabajos puede encontrarse una escala espacial la cual puede calcularse por medio de las derivadas de la velocidad y que nos dan una medida del diámetro del torbellino más pequeño responsable de la disipación de energía. Dicha escala es llamada la micro escala longitudinal de Taylor λ_f y está dada por:

$$\lambda_f = \sqrt{\frac{2u'^2}{\left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle}} \quad (1.18)$$

Donde $u' = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ y u_1 es la velocidad en la dirección x , los $\langle \dots \rangle$ denotan promedio. Aunque esta escala no tiene una interpretación física clara, ya que a altos números de Reynolds tiene un valor intermedio entre η y L , los vórtices de mayor tamaño, es una cantidad bien definida que se usa usualmente para caracterizar la turbulencia. Particularmente se usa en el cálculo del número de Reynolds de la escala de Taylor, que se usa tradicionalmente para caracterizar la turbulencia de malla. Su definición es la siguiente:

$$R_\lambda = \frac{u'\lambda_f}{\nu} \quad (1.19)$$

Hasta el momento hemos visto como la turbulencia es un fenómeno de múltiples escalas que se transfieren la energía entre estas, para el caso tridimensional este flujo de energía va de escalas mayores a menores, es decir, los torbellinos más grandes ceden su energía a torbellinos más pequeños y estos a su vez pasan la energía a torbellinos cada vez más pequeños y así hasta que el número de Reynolds característico $R_e = \eta u_\eta / \nu$, sea tan pequeño que los efectos viscosos comiencen a ser significantes y se disipe la energía en forma de calor u otras formas de energía. A continuación, revisaremos la cascada de energía de la turbulencia en dos dimensiones.

1.3. Cascada de energía y entropía

Como se ha hablado anteriormente la turbulencia es un fenómeno disipativo, que transporta la energía cinética por diferentes escalas espaciales hasta alcanzar las escalas más pequeñas donde la viscosidad molecular termina convirtiendo la energía cinética en otras formas de energía como, por ejemplo, calor. Para el cálculo y posterior análisis de la *cascada de energía*, es necesario como primera instancia definir la energía cinética y la entropía como actores principales en la caracterización de la turbulencia en dos dimensiones y su *cascada inversa de energía*.

Como primera instancia definiremos la energía cinética del flujo y su entropía asociada, como la turbulencia en libre decaimiento es un fenómeno disipativo también definiremos la rata de disipación de la energía cinética ϵ y de la entropía β . La energía cinética por definición está dada por:

$$E = \frac{1}{2} \int \int \mathbf{u}^2 dx dy \quad (1.20)$$

La entropía (Vorticidad al cuadrado), la cual puede definirse como una cantidad directamente relacionada a la energía cinética en el modelo de flujo que corresponde a los efectos disipativos en un flujo turbulento. Por definición está dada por:

$$\Omega = \frac{1}{2} \int \int \omega^2 dx dy \quad (1.21)$$

En la turbulencia homogénea puede decirse que la disipación de la energía cinética ϵ y de la entropía β están dadas por, Davidson (2013):

$$\epsilon = \nu \langle \omega^2 \rangle \quad (1.22)$$

$$\beta = \nu \langle (\nabla \omega)^2 \rangle \quad (1.23)$$

Con el fin de observar cómo se distribuye la energía cinética y la entropía a través de las diferentes escalas de un campo, la manera más común es por medio de sus transformadas de Fourier y espectro. Por ejemplo, la ecuación (1.13) tiene energía cinética $E = (1/2) \langle u^2 \rangle = (1/2) \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\omega}(\mathbf{k})|^2 / \kappa^2$ y entropía $\Omega = (1/2) \langle \omega^2 \rangle = (1/2) \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\omega}(\mathbf{k})|^2$ como variantes cuadráticas, donde $\tilde{\omega}(\mathbf{k}, t) = \langle \omega(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \rangle$ es la transformada de Fourier y $\langle \dots \rangle$ representa un promedio en el espacio, Boffeta and Ecke (2012).

Como la ecuación de Navier-Stokes que planteamos en la sección 1.1 se encuentra en términos de la ω y ψ es conveniente calcular los espectros de energía y entropía a partir del espectro de la función de corriente, $S(\mathbf{k}) = \langle |\tilde{\psi}(\mathbf{k})|^2 \rangle$. Ya que $S(\kappa)$ puede ser interpretada como la varianza de ψ asociada con la escala espacial, $L = 1/\kappa$, donde el promedio es sobre todo $|\mathbf{k}| = \kappa$, tal que la varianza total, $\int \psi^2 dx$, es igual a $\int S d\mathbf{k}$ debido al teorema de Parseval, McWilliams (1984). Entonces la energía y la entropía son integrales sobre sus correspondientes espectros,

$$E = \int E(\kappa) d\kappa, \quad \Omega = \int \kappa^2 E(\kappa) d\kappa \quad (1.24)$$

Donde,

$$E(\kappa) = \frac{1}{2}\kappa^2 S, \quad \Omega(\kappa) = \frac{1}{2}\kappa^4 S = \kappa^2 E(\kappa) \quad (1.25)$$

El espectro en la ecuación (1.25) tiene diferentes perfiles debido a los pesos que le da el factor κ , por ejemplo el espectro de entropía tiene una magnitud relativamente mayor a pequeñas escalas, es decir mayores κ , que las que posee el espectro de energía.

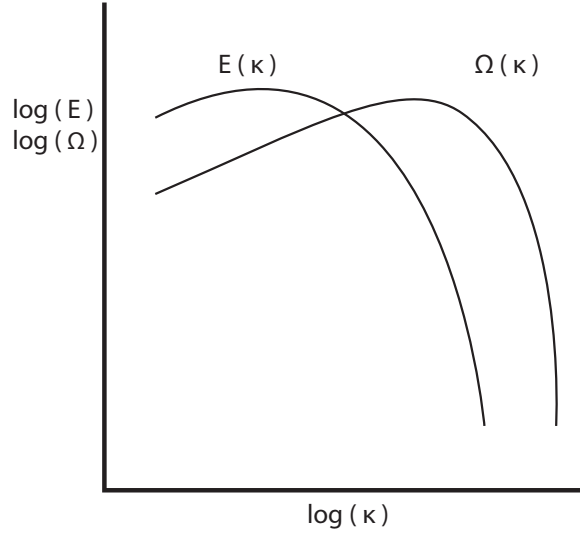


Figura 1.1: Esquema de los espectros de energía $E(\kappa)$ y Entropía $\Omega(\kappa)$ en la turbulencia en dos dimensiones para altos números de Reynolds. El espectro de entropía posee un pico a números de onda mayores que el espectro de energía.

En ausencia de viscosidad tanto E como Ω se conservan con el tiempo. Normalmente en la turbulencia, el proceso de cascada transfiere la energía en diferentes escalas espaciales, por lo tanto, para que ambas se conserven, dado que los pesos otorgados por κ son diferentes para cada una, es que la mayoría de la energía es transferida a escalas más grandes (menor κ) mientras la entropía es transferida a escalas más pequeñas (mayores κ). A estas tendencias es a lo que se le denomina la *cascada inversa de energía* y la *cascada de entropía* de la turbulencia en dos dimensiones.

Por otro lado, debido a que el espectro de entropía es auto-similar, la escala integral de longitud debe crecer con el tiempo, esto quiere decir que la energía es continuamente transferida a escalas más grandes mientras la entropía es transferida a escalas cada vez más pequeñas Davidson (2013). A altos números de Reynolds, la Ω decae significativamente mientras la E decae muy poco.

Para que comience el flujo de entropía hacia escalas cada vez más pequeñas, cuando se inicia desde una condición suave, es necesario un intervalo de tiempo para que la turbulencia se desarrolle completamente y se alcancen las escalas disipativas, η . Normalmente este tiempo está dado por unas cuantas rotaciones de un remolino, cada rotación tarda un tiempo aproximado de, $\tau_\omega = \Omega^{-1/2}$. Entonces para que la turbulencia se desarrolle completamente se requiere un intervalo de tiempo de τ_d , el cual está dado por, McWilliams (1984):

$$\tau_d = \Omega^{-1/2} \log R_e \quad (1.26)$$

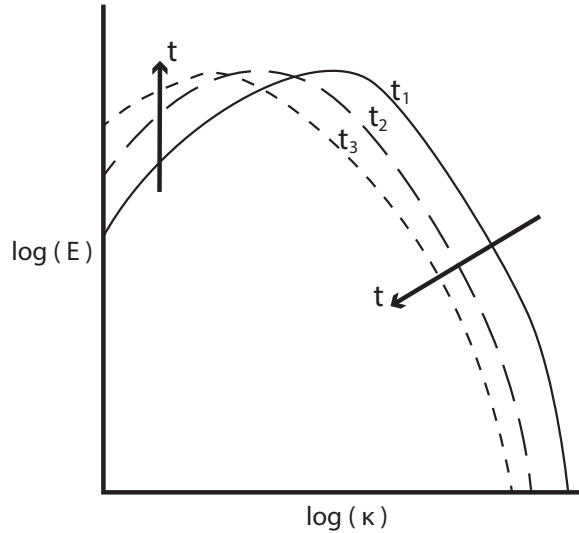


Figura 1.2: Evolución del espectro de energía $E(\kappa, t)$ a tres tiempos consecutivos, $t_1 < t_2 < t_3$. Con el tiempo puede observarse como la energía contenida en las κ más pequeñas va aumentando, mientras a grandes κ disminuye.

En la turbulencia en tres dimensiones la cascada de energía va en el sentido directo, es decir, la energía es transferidas de escalas grandes a más pequeñas, mientras la entropía no es una invariante integral, su cascada sigue siendo en la misma dirección. Este es uno de los fenómenos que distan la turbulencia bidimensional de la tridimensional, adicionalmente en la turbulencia en dos dimensiones τ_d tiende a infinito conforme $R_e \rightarrow \infty$, mientras que en la turbulencia tridimensional este tiempo es finito cuando $R_e \rightarrow \infty$.

1.4. Función de estructura

Con el fin de caracterizar la turbulencia en decaimiento en dos dimensiones y su dependencia con el número de R_e , una de las estadísticas normalmente utilizadas es la función de estructura de segundo orden, la cual se define como:

$$\langle \delta u(r)^2 \rangle = \langle |u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{x})|^2 \rangle \quad (1.27)$$

Con $r = |\mathbf{r}|$ siendo la separación espacial. Por definición la función de estructura de segundo orden es la covarianza de la diferencia de la velocidad entre dos puntos, $(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ y \mathbf{x} , Pope (2000).

La función de estructura de segundo orden, es una medida de la energía acumulada por remolinos con un tamaño característico menor a r . El argumento de esta interpretación es el siguiente, los remolinos más grandes que r contribuyen más o menos igual a $u(\mathbf{x})$ como a $u(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ cuando pasan por los puntos de medición \mathbf{x} y $(\mathbf{x} + \mathbf{r})$, debido a que los gradientes de la velocidad a lo largo de un remolino son relativamente pequeños, por lo que $\langle \delta u(r)^2 \rangle \approx 0$ para remolinos más grandes que r . Si los remolinos son más pequeños que r , entonces estos deben contribuir a $u(\mathbf{x})$ y a $u(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ mientras pasan por los puntos de medición \mathbf{x} y $(\mathbf{x} + \mathbf{r})$, pero no en ambos puntos simultáneamente, por lo que $\langle \delta u(r)^2 \rangle \sim u^2$ en estos casos. En resumen $\langle \delta u(r)^2 \rangle$ nos proporciona un medio para distinguir la energía contenida en diversas escalas, Davidson (2013).

1.5. Evolución de los vórtices

En la turbulencia en dos dimensiones las cascadas de energía y entropía coexisten con la conjunción de los vórtices y el ensanchamiento de estos a lo largo del tiempo. Cuando poseemos unas condiciones iniciales suaves los vórtices se van moviendo en dipolos por breves instantes de tiempo y se juntan entre ellos cuando vórtices de la misma polaridad se mueven lo suficientemente cerca el uno del otro. Por lo tanto, habrá cada vez menos vórtices, distanciándose unos de otros y haciéndose cada vez más grandes, haciendo que el encuentro entre vórtices sea cada vez más escaso. Esto último es debido a que el acercamiento entre vórtices es el mecanismo por el cual la deformación del vórtice se transforma en movimiento y por lo tanto la interacción entre vórtices se hace más lenta.

La aparición de filamentos en los vórtices es consecuencia de la diferencia en los campos de velocidades de cada vórtice actuando uno sobre el otro, causando cizallamiento o deformación entre los vórtices, esta deformación aumenta rápidamente a medida que la distancia entre vórtices va disminuyendo. Los filamentos se alargan irreversiblemente hasta que su escala transversal se contrae lo suficiente para quedar bajo el control de la difusión viscosa, rompiéndose así el filamento o simplemente desapareciendo. Lo anterior solo es aplicable para la turbulencia en decaimiento donde la energía y la entropía son disipadas debido a la acción inexorable de la viscosidad.

Una manera común de evidenciar este comportamiento de los vórtices es a través de la curtosis y la función de densidad de probabilidad (PDF). Antes de indicar como estas estadísticas pueden ayudarnos a medirlo es necesario definir las. Primero definiremos la curtosis exponiendo como la medición de esta estadística nos da una indicación de la evolución del campo de vorticidad, para luego dar lugar a la definición de la función de densidad de probabilidad.

Curtosis: Es una medida que sirve para analizar el grado de concentración de una variable alrededor de la zona central de la distribución de frecuencias. Una mayor curtosis implica una mayor concentración de datos muy cerca de la media coexistiendo con una elevada frecuencia de datos alejada de la misma. Matemáticamente se basa en el cuarto momento con respecto a la media, y se escribe de la siguiente manera, Wikipedia (2017b):

$$Curt = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad (1.28)$$

Donde μ_4 es el cuarto momento centrado, el cual está dado por $\mu_4 = (\omega - \langle \omega \rangle)^4$, y σ es la desviación estándar, la cual es una medida de cuanto tiende a alejarse una variable de su promedio en una distribución de datos y está dada por $\sigma = \sqrt{\int (x - \mu)^2 f(x) dx}$, donde $\mu = \int x f(x) dx$ y x es la variable aleatoria. Cuando calculamos la curtosis para el campo de vorticidad un alto valor indica una significativa intermitencia espacial, y un valor creciente en el tiempo indica un aumento en la intermitencia. Por lo tanto, sirve como indicativo estadístico de la convergencia de vórtices, la dominación del campo de ω por vórtices coherentes y el ensanchamiento del área entre vórtices donde el campo de ω es débil, McWilliams (1984). Todas estas características de la turbulencia bidimensional.

PDF: La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria describe la probabilidad relativa según la cual dicha variable tomara determinado valor. Esta probabilidad está dada por la integral de la densidad de la variable entre unos límites definidos. Supongamos que una variable aleatoria X posee una densidad f , entonces el PDF en el intervalo $[a, b]$ está dado por, Wikipedia (2017c):

$$PDF = \int_a^b f(x) dx \quad (1.29)$$

Y si F es la función de distribución de la variable X , entonces $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$. Podríamos concluir entonces que $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, lo cual nos dice que $f(x) dx$ es la probabilidad de que X tome un valor en el intervalo infinitesimal $[x, x + dx]$. En este orden de ideas al calcular el PDF para la ω y grificándola a diferentes tiempos, podemos observar como en el tiempo inicial su distribución es Gaussiana, es decir, es simétrica con respecto a

su media y por lo tanto la ω tiene una distribución normal en el campo. A medida que el tiempo evoluciona se genera la aparición de picos en las zonas de baja intensidad de ω , donde es poco probable debido al crecimiento del área entre vórtices, McWilliams (1984), Lo cual indica un incremento en la intermitencia espacial de la ω debido a la convergencia entre vórtices.

CAPÍTULO 2

MÉTODO NUMÉRICO

Para alcanzar los objetivos de esta investigación es necesario llevar a cabo una serie de simulaciones numéricas de la ecuación de Navier-Stokes en su formulación vorticidad-función de corriente, ecuación (1.13). Para ello se escogió el método pseudoespectral de Fourier-Galerkin y un integrador temporal, Runge-Kutta.

En las siguientes páginas de este capítulo se darán a conocer los métodos numéricos empleados para la simulación, la solución de la ecuación de Poisson necesaria para hallar la función de corriente a partir del campo de vorticidad, y el proceso de validación del código generado, el cual fue validado con el problema del **vórtice de Taylor-Green**.

Por último, debido a la resolución deseada se hizo necesario la implementación de computación paralela. Se describirá el algoritmo realizado y se hablará ligeramente de los paquetes y librerías utilizadas para el desarrollo del mismo, al igual que se presentarán las características del *Cluster Apolo* de la Universidad EAFIT, donde fueron realizadas las simulaciones.

2.1. Método Pseudoespectral Fourier-Galerkin

El método pseudoespectral es básicamente un esquema de puntos de malla al igual que diferencias finitas, con la diferencia que las derivadas espaciales se realizan computando en primera instancia la transformada discreta de Fourier y luego derivando analíticamente los modos de Fourier, para luego aplicar la transformada inversa y regresar al espacio físico. Este procedimiento se debe realizar en cada paso de tiempo, Durran (2010).

Dado que la derivación espacial es analítica, podría decirse que el método pseudoespectral es uno de los métodos con mayor precisión para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes cuando el dominio es periódico, como lo es nuestro caso de estudio. Debe tenerse en cuenta que la transformada discreta de Fourier tiene $O(N_x^2 N_y^2)$ operaciones, lo cual es costoso computacionalmente para altas resoluciones. Por otro lado existen paquetes o librerías como lo es *Fast Fourier Transform Western* o *FFTW* por sus siglas en inglés, FFTW.org (2017a), la cual posee $O(N_x N_y \log(N_x N_y))$ operaciones, disminuyendo así la carga computacional además de mantener una alta precisión espectral, Canuto (2006).

Para la implementación del método supondremos un intervalo $[0, L_x] \times [0, L_y]$ sobre el cual tenemos N_x y N_y puntos uniformemente distribuidos, la transformada de cualquier función discreta u sobre este intervalo sería:

$$u_{i,j} = \sum_{m=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{n=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \tilde{u}_{m,n} e^{i\left(\frac{2\pi m}{L_x} x_i + \frac{2\pi n}{L_y} y_j\right)} \quad (2.1)$$

Y la transformada inversa para encontrar los coeficientes de Fourier es:

$$\tilde{u}_{m,n} = \frac{1}{N_x \times N_y} \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} u_{i,j} e^{-i\left(\frac{2\pi m}{L_x} x_i + \frac{2\pi n}{L_y} y_j\right)} \quad (2.2)$$

Donde $i = \sqrt{-1}$, los índices del espacio físico están representados por i , y j y los índices en el espacio de Fourier están representados por m , y n . Las coordenadas de la malla en el espacio físico para $i = 0, 1, \dots, N_x$ y $j = 0, 1, \dots, N_y$ están dadas por:

$$x_i = \frac{i L_x}{N_x}, \quad y_j = \frac{j L_y}{N_y} \quad (2.3)$$

Debido a que el dominio que vamos a trabajar es periódico, podemos decir que $x_0 = x_{N_x}$ y $y_0 = y_{N_y}$ y por lo tanto, los números de onda se definen como:

$$\kappa_x = \frac{2\pi m}{L_x}, \quad \kappa_y = \frac{2\pi n}{L_y} \quad (2.4)$$

Ya que tenemos definidas las transformadas y los números de onda podemos efectuar derivadas espaciales en ambas direcciones. Entonces la primera y segunda derivada de cualquier función u en un dominio discreto se convierten en:

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \sum_{m=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{n=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \tilde{u}_{m,n} (i\kappa_x) e^{i(\kappa_x x_i + \kappa_y y_j)} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \sum_{m=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{n=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \tilde{u}_{m,n} (-\kappa_x^2) e^{i(\kappa_x x_i + \kappa_y y_j)} \quad (2.6)$$

Y de la misma manera para la dirección y . Ahora con el fin de tener las ecuaciones de Navier-Stokes y Poisson en los modos de Fourier aplicamos las transformadas a la ecuación (1.13) y a la ecuación (1.14), quedando estas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_{m,n}}{\partial t} + \tilde{N} = \frac{1}{Re} \left[(-\kappa_x^2 - \kappa_y^2) \tilde{\omega}_{m,n} \right] \quad (2.7)$$

$$(-\kappa_x^2 - \kappa_y^2) \tilde{\psi}_{m,n} = -\tilde{\omega}_{m,n} \quad (2.8)$$

Donde \tilde{N} representa el termino no lineal (la transformada de Fourier del Jacobiano) y debe ser computado de acuerdo con la siguiente convolución:

$$\tilde{N} = (i\kappa_y \tilde{\psi}_{m,n}) \circ (i\kappa_x \tilde{\omega}_{m,n}) - (i\kappa_x \tilde{\psi}_{m,n}) \circ (i\kappa_y \tilde{\omega}_{m,n}) \quad (2.9)$$

La convolución del termino no lineal es computada en el espacio físico, con la ayuda del teorema de la convolución. Usualmente cuando realizamos las transformaciones del espacio de Fourier al físico para la solución de la convolución se presenta el *Aliasing error*, el cual ocurre cuando un sistema se mide a una frecuencia de muestro insuficiente Physlink (2017), una de las técnicas básicas para evitarlo es la regla de los 3/2, la cual es conocida como el algoritmo de relleno. La clave del algoritmo de relleno es el uso de una transformada discreta de M_x y M_y en vez de N_x y N_y puntos, San and Staples (2012). De tal manera que $M_x \geq 3N_x/2$ y $M_y \geq 3N_y/2$. Por ejemplo, sean $\tilde{a}_{m,n}$ y $\tilde{b}_{m,n}$ los coeficientes de Fourier de dos términos en multiplicación, como en \tilde{N} , y queremos computar los coeficientes de Fourier de estos dos términos $\tilde{c}_{m,n} = \tilde{a}_{m,n} \circ \tilde{b}_{m,n}$. En el método pseudospectral (PS, por sus siglas en ingles), podemos computar este término como $\tilde{c}_{m,n} = F^{-1}(F(\tilde{a}_{m,n})F(\tilde{b}_{m,n}))$, donde F y F^{-1} representan la transformada y la transformada inversa de Fourier, respectivamente. Primero debemos utilizar la transformada de Fourier usando M_x y M_y números de onda de la siguiente manera:

$$A_{i,j} = \sum_{m=-\frac{M_x}{2}}^{\frac{M_x}{2}-1} \sum_{n=-\frac{M_y}{2}}^{\frac{M_y}{2}-1} \tilde{a}_{m,n} e^{i(\kappa_x X_i + \kappa_y Y_j)} \quad (2.10)$$

$$B_{i,j} = \sum_{m=-\frac{M_x}{2}}^{\frac{M_x}{2}-1} \sum_{n=-\frac{M_y}{2}}^{\frac{M_y}{2}-1} \tilde{b}_{m,n} e^{i(\kappa_x X_i + \kappa_y Y_j)} \quad (2.11)$$

Donde $X_i = \frac{iL_x}{M_x}$, $Y_j = \frac{jL_y}{M_y}$. Los coeficientes de Fourier son rellenos con ceros para los números de onda adicionales de la siguiente manera:

$$\tilde{a}_{m,n} = \begin{cases} \tilde{a}_{m,n} & |m| \leq N_x \quad |n| \leq N_y \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\tilde{b}_{m,n} = \begin{cases} \tilde{b}_{m,n} & |m| \leq N_x \quad |n| \leq N_y \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (2.13)$$

La multiplicación es realizada en el espacio físico, pero con los números de onda mayores rellenos,

$$C_{i,j} = A_{i,j} B_{i,j} \quad (2.14)$$

Entonces, la transformada inversa nos da los coeficientes de Fourier sin el *aliasing error*:

$$\tilde{c}_{i,j} = \frac{1}{N_x \times N_y} \sum_{i=0}^{M_x-1} \sum_{j=0}^{M_y-1} C_{i,j} e^{-i(\kappa_x X_i + \kappa_y Y_j)} \quad (2.15)$$

En nuestro caso solo estamos interesados en los $\tilde{c}_{m,n}$ con los números de onda pertenecientes a $|m| \leq N_x$, $|n| \leq N_y$ (por ejemplo, $\tilde{c}_{m,n} = \tilde{c}_{m,n}$ para $|m| \leq N_x, |n| \leq N_y$). Aunque en la práctica solo es necesario realizar el relleno con $M_x \geq 3N_x/2$ se ha utilizado en nuestro código un relleno de $M_x = 2N_x$ debido a que el algoritmo *FFT* requiere resoluciones que sean potencias de dos, esto acarrea un costo computacional el cual no se puede evitar.

2.2. Ecuación de Poisson

Con el fin de obtener la función de corriente a partir de la vorticidad, ecuación (1.14), debemos resolver la ecuación de Poisson. Para ello nos aprovecharemos del bajo costo computacional que poseen los solucionadores de Poisson basados en el algoritmo FFTW, cuyo costo computacional es de $O(C_{fp} N \log(N))$, donde C_{fp} es una constante de proporcionalidad y N es el número total de puntos en la malla ($N = N_x \times N_y$). El procedimiento consta de tres pasos básicos para hallar ψ a partir de los valores conocidos de ω en cualquier tiempo (aun en los primeros pasos del Runge-Kutta). Estos pasos son los siguientes, San and Staples (2012):

1. Usar la transformada de Fourier (FFT) para encontrar los coeficientes de Fourier de ω de acuerdo con la ecuación (2.1)
2. Computar los coeficientes de Fourier de la función de corriente de acuerdo a la ecuación (2.8).

$$\tilde{\psi}_{m,n} = \frac{\tilde{\omega}_{m,n}}{(\kappa_x^2 + \kappa_y^2)} \quad (2.16)$$

3. Usar la transformada inversa FFT para hallar los coeficientes en el espacio físico de ψ según ecuación (2.2)

De esta manera obtenemos ψ a partir de ω a un bajo costo computacional. Ahora ya que poseemos todas nuestras variables discretas espacialmente podemos empezar a realizar la integración temporal bajo un método de Runge-Kutta.

2.3. Integración temporal

Con el fin de realizar un avance en el tiempo es necesario la utilización de métodos de integración temporal tales como los esquemas Runge-Kutta. En esta investigación se utilizó un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden el cual será explicado en los siguientes párrafos.

El objetivo de los esquemas Runge-Kutta es avanzar desde ω^n en el tiempo t^n a ω^{n+1} en el tiempo $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Con el fin de facilitar la implementación del esquema Runge-Kutta es necesario tratar la ecuación de la ω de la siguiente manera:

$$\frac{d\omega}{dt} = \xi(\omega, \psi) \quad (2.17)$$

Donde $\xi(\omega, \psi)$ es el operador discreto de las derivadas espaciales incluyendo el término convectivo no-lineal y el término difusivo lineal, y ψ es obtenida a partir de la ecuación de Poisson. El esquema de cuarto orden puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} &= \omega^n + \frac{\Delta t}{2} \xi(\omega^n, \psi^n) \\ \omega^{(2)} &= \omega^n + \frac{\Delta t}{2} \xi(\omega^1, \psi^1) \\ \omega^{(3)} &= \omega^n + \Delta t \xi(\omega^2, \psi^2) \\ \omega^{n+1} &= \frac{1}{3}(-\omega^n + \omega^1 + 2\omega^2 + \omega^3) + \frac{\Delta t}{6} \xi(\omega^3, \psi^3) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como se explicó anteriormente la idea es dar un avance en el tiempo por medio de los cuatro pasos de este esquema.

2.4. Algoritmo

Hasta el momento hemos visto las ecuaciones y los métodos numéricos que se han empleado en la realización del código con el cual se simulará la ecuación de Navier-Stokes. En esta sección se hablará brevemente del lenguaje empleado para tal fin y de los paquetes empleados para la computación paralela, necesaria cuando se desea tener resultados con altas resoluciones de malla. Luego se describirá el algoritmo desarrollado para las simulaciones necesarias para el alcance de los objetivos de esta investigación.

Primero hablaremos del lenguaje de programación utilizado, para su elección se tuvo en consideración un lenguaje de arquitectura básica y de compilación directa en la máquina, con el fin de disminuir la carga computacional a la hora de computar. En la actualidad los lenguajes más usados en la computación científica con estas características son C++ y FORTRAN, se ha escogido trabajar con Fortran debido a que es mucho más simple, léible y la escritura de fórmulas matemáticas se hace de una manera realmente sencilla. Fortran nace en 1957 creado en IBM con el fin de facilitar la traducción de fórmulas matemáticas al computador, de allí proviene su nombre (FORmula TRANslation, por su significado en inglés), van Mourik (2005). Con el paso del tiempo se ha ido implementando nuevas versiones y actualmente la versión más reciente y de libre acceso disponible son los estándares ANSI de FORTRAN 90/95, con la cual fue realizado el código para esta investigación.

Como se mencionó anteriormente fue necesario la implementación de computación paralela con el fin de disminuir el tiempo de cómputo de cada una de las simulaciones realizadas. Existen diversas maneras de paralelizar un código, entre ellas se encuentran las librerías **OpenMP** y **MPI**, las cuales por medio de pragmas que se añaden al código en serie permiten paralelizar las instrucciones. A continuación, se presentará de manera breve las características de ambas librerías.

- **OpenMP:** Su nombre proviene de **MP** que son las siglas en inglés de multiprocesamiento y open que se refiere que es abierto para todo el mundo. Permite distribuir la información o las rutinas a los diferentes núcleos de un procesador y de esta manera computar de manera paralela dentro de un equipo. Esta paralelización se logra gracias a un conjunto de directivas de compilación, rutinas de librerías y variables de entorno que permiten tener el control sobre los núcleos que entrarán en ejecución y la distribución de las variables locales del código en estos núcleos, lo que influye finalmente en el tiempo de computación.
- **MPI:** Su nombre proviene de *message-passing Interface* y es una librería con *especificaciones* que permite la interacción entre procesadores con el fin de poner a trabajar varias máquinas en conjunto. Su implementación se realiza por medio de instrucciones o pragmas con los cuales un procesador maestro se encarga de distribuir los datos a los demás equipos y mantener la comunicación entre estos de manera que no se pierda la sincronización de los datos y de esta manera realizar una computación paralela utilizando la comunicación entre procesadores.

Como se mencionó anteriormente se implementó el método pseudospectral y un esquema de integración temporal Runge-Kutta de cuarto orden para la simulación numérica directa de la ecuación de Navier-Stokes. A continuación, se expondrá de manera breve el algoritmo realizado, ilustrando como se implementó la paralelización del mismo y como se puso en ejecución en el *Cluster Apolo* de la universidad EAFIT. El Algoritmo puede dividirse en 6 secciones las cuales se explican a continuación:

- **Declaración de variables:** Es la primera sección del algoritmo, en esta sección se inicializa el programa, se cargan las librerías externas como por ejemplo *FFTW* y se declaran todas las variables que se ejecutarán en el código. La primera parte de esta sección consta de la inicialización del programa, la declaración del uso de librerías y la sentencia `IMPLICIT NONE` de FORTRAN la cual garantiza que todas las variables del código deben ser declaradas.

```
Program ns2d
Use mpi
Use, intrinsic :: iso_c_binding
IMPLICIT NONE
INCLUDE 'fftw3.f'
```

Después comienza la declaración de las variables, primero se declararon dos variables que me indican la precisión del resto de variables, la primera es *ITG* la cual será asignada a todos los números enteros para que sean de 8 bits y la segunda *DBL* la cual es para asignar a las variables reales y complejas una precisión con 15 dígitos y 307 en el exponente, esto se logra con las siguientes sentencias:

```
INTEGER, PARAMETER :: ITG = SELECTED_INT_KIND(8)
INTEGER, PARAMETER :: DBL = SELECTED_REAL_KIND(15,307)
```

Luego van la declaración de todas las variables, como lo son los arreglos asignados para el campo de ω , ψ , los arreglos auxiliares utilizados durante el Runge-Kutta, los contadores, etc. Los arreglos fueron declarados con la sentencia *ALLOCATABLE*, la cual permite una asignación dinámica de memoria y permiten ser eliminados en cualquier momento para liberar RAM y de esta manera hacer el código un poco más eficiente en el consumo de recursos computacionales. A continuación, algunos ejemplos de la declaración de variables.

```
INTEGER(KIND=ITG), PARAMETER :: nx=4096, ny=4096
COMPLEX(KIND=DBL), PARAMETER :: img=(0.0D0,1.0D0)
REAL(KIND=DBL), PARAMETER :: PI = ACOS(-1.0D0)
INTEGER(KIND=ITG), PARAMETER :: nume_threads=32
REAL(KIND=DBL), ALLOCATABLE, DIMENSION(:, :) :: Wk
COMPLEX(KIND=DBL), ALLOCATABLE, DIMENSION(:, :) :: Wfk
```

En los ejemplos anteriores se encuentra la declaración del número de nodos en cada dirección de la malla, el número imaginario i , el número π , el número de núcleos en ejecución para openmp y los arreglos del campo de ω tanto en el espacio físico como en el de Fourier.

- Inicialización de variables:** En esta sección se inicializan las variables, como los vectores κ_x y κ_y , entre otras. Se asignan en la memoria los arreglos para la ω tanto en el espacio físico como en el de Fourier y se lee el campo inicial de ω a partir de un archivo de texto. Luego se pasa al espacio de Fourier el campo de ω y se desasigna de la memoria el campo de vorticidad en el espacio físico para liberar memoria.

Con el fin de ilustrar como se realiza la computación paralela por medio de las librerías MPI y openMP se ilustra a continuación el código para la generación de los vectores κ . En el siguiente ejemplo se ilustra como el procesador Maestro envía la información a cada uno de los procesadores esclavos y se le asigna parte de la tarea al procesador Maestro. Luego se muestra la recepción de los datos por los procesadores esclavos, la tarea ejecutada por cada uno de ellos y luego el envío de la información de nuevo al procesador Maestro, para de esta manera obtener una correcta sincronización de los datos. Adicionalmente puede observarse como los ciclos DO son realizados con las directivas de openMP.

```
!!!! Inicializacion MPI!!!!!!!!!!!!!!

call MPI_INIT(ierr)
call MPI_COMM_SIZE(MPI_COMM_WORLD, numtasks, ierr)
call MPI_COMM_RANK(MPI_COMM_WORLD, taskid, ierr)
  chunksize=INT(nx/numtasks)

!!!!!!!!!!!!!! MASTER ONLY !!!!!!!!!!!!!!!
if (taskid .eq. MASTER) then
  mtype=FROM_MASTER
  offset=chunksize
  do dest=1,INT(numtasks-1)
    call MPI_SEND(offset,1,MPI_INTEGER,dest,mtype,MPI_COMM_WORLD,ierr)
    call MPI_SEND(kx(offset),chunksize,MPI_DOUBLE_PRECISION,&
      &dest,mtype,MPI_COMM_WORLD,ierr)
    call MPI_SEND(ky(offset),chunksize,MPI_DOUBLE_PRECISION,&
      &dest,mtype,MPI_COMM_WORLD,ierr)
```

```

        offset=offset+chunksize
end do

!!! Parte del trabajo del master
istart=0
iend=INT(chunksize-1)
!$omp parallel num_threads( num_threads )
!$omp do
do ii=istart ,iend
    IF ( ii .GT. nx/2 ) THEN
        kx( ii )=DBLE( ii -nx )
        ky( ii )=DBLE( ii -nx )
    ELSE
        kx( ii )=DBLE( ii )
        ky( ii )=DBLE( ii )
    END IF
END DO
!$omp end do
!$omp end parallel
!!!! recibir la informacion
mtype=FROM_WORKER
do ii=1,INT(numtasks-1)
    source=ii
    call MPI_RECV( offset ,1 ,MPI_INTEGER, source , mtype ,MPI_COMM_WORLD, status , ierr )
    call MPI_RECV( kx( offset ) ,chunksize ,MPI_DOUBLE_PRECISION,&
&source ,mtype ,MPI_COMM_WORLD, status , ierr )
    call MPI_RECV( ky( offset ) ,chunksize ,MPI_DOUBLE_PRECISION,&
&source ,mtype ,MPI_COMM_WORLD, status , ierr )
end do

!!!!!!!!!!!!!! trabajo de los esclavos !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
if ( taskid .gt. MASTER ) then
mtype=FROM_MASTER

!!!! Recibir la informacion
call MPI_RECV( offset ,1 ,MPI_INTEGER, MASTER, mtype ,MPI_COMM_WORLD, status , ierr )
call MPI_RECV( kx( offset ) ,chunksize ,MPI_DOUBLE_PRECISION, MASTER,&
&mtype ,MPI_COMM_WORLD, status , ierr )
call MPI_RECV( ky( offset ) ,chunksize ,MPI_DOUBLE_PRECISION, MASTER,&
&mtype ,MPI_COMM_WORLD, status , ierr )

istart=offset
iend=(offset+chunksize)-1
!$omp parallel num_threads( num_threads )
!$omp do
do ii=istart ,iend
    IF ( ii .GT. nx/2 ) THEN
        kx( ii )=DBLE( ii -nx )
        ky( ii )=DBLE( ii -nx )
    ELSE
        kx( ii )=DBLE( ii )
        ky( ii )=DBLE( ii )
    END IF

```

```

END DO
!$omp end do
!$omp end parallel
!!!! Enviar resultados
mtype=FROM_WORKER
call MPI_SEND( offset , 1 , MPI_INTEGER , MASTER , mtype , MPI_COMM_WORLD , ierr )
call MPI_SEND( kx( offset ) , chunksize , MPI_DOUBLE_PRECISION , MASTER , &
&mtype , MPI_COMM_WORLD , ierr )
call MPI_SEND( ky( offset ) , chunksize , MPI_DOUBLE_PRECISION , MASTER , &
&mtype , MPI_COMM_WORLD , ierr )

end if

call MPI_FINALIZE( ierr )

```

Este mismo procedimiento se realiza a lo largo de todo el código. Debido a la sincronización de datos requerida para la entrada a la librería *FFTW*, las secciones paralelas se abren y se cierran cada vez que la función es requerida, esto acarrea un costo computacional el cual limita su eficiencia. Adicionalmente no fue posible la ejecución de la librería *FFTW* bajo las directivas de MPI y su paralelización solo fue posible a nivel de un solo procesador por medio de openMP, lo cual incrementa aún más el costo computacional. A continuación, se presenta la asignación de memoria del campo de ω tanto en el espacio físico como en el de Fourier, su transformada al espacio de Fourier por medio de la librería *FFTW* y la limpieza de memoria del campo de ω del espacio físico.

```

ALLOCATE(Wf( 0 : nx - 1 , 0 : ny - 1 ))
ALLOCATE(Wfk( 0 : nxf - 1 , 0 : nyf - 1 ))
call dfftw_plan_with_nthreads( nume_threads )
call dfftw_plan_dft_r2c_2d( plan , nx , ny , Wk , Wfk , FFTW_ESTIMATE )
call dfftw_execute_dft_r2c( plan , Wk , Wfk )
call dfftw_destroy_plan( plan )
DEALLOCATE(Wf)

```

- Integración temporal:** En esta sección se realiza la evolución temporal del campo de ω por medio del Runge-Kutta explicado anteriormente. Para ello en la sección anterior se definió una variable llamada *itera*, la cual me da el número máximo de iteraciones teniendo en cuenta el Δt definido en la declaración de variables y el tiempo máximo de simulación de la siguiente manera $itera = t_f / \Delta t$. Luego por medio de un ciclo DO se realizan las iteraciones desde 1 hasta *itera*. En cada iteración se realizan los 4 pasos del Runge-Kutta, a continuación se explica el primer paso, ya que los siguientes se realizan de la misma manera.

Antes de entrar en el ciclo DO se asigna en memoria todos los arreglos que entraran en juego durante las iteraciones del integrador temporal. Luego dentro del ciclo se calcula ψ a partir del campo de ω por medio de la función de Poisson, ecuación (1.14), luego se realizan las derivadas del campo de ω y ψ con respecto a x y y correspondientes al termino no lineal de la convolución, ecuación (2.5). En seguida se calcula el laplaciano de la vorticidad, con la ayuda de la ecuación (2.6). Ahora calculamos las convoluciones, para ello se crean dos arreglos con los rellenos según se explicó en la sección 2.1 y se asignan a los primeros valores de los arreglos los resultados obtenidos de $\partial\psi/\partial y$ y $\partial\omega/\partial x$, se pasan al espacio físico por medio de la librería *FFTW*, dichos arreglos en el espacio físico deben ser normalizados dividiéndolos por la cantidad de nodos de la malla con el relleno. Se realiza la multiplicación en el espacio físico y el resultado es devuelto al espacio de Fourier, luego se eliminan los valores de relleno. Se repite el procedimiento para la segunda convolución con los resultados de $\partial\psi/\partial x$ y $\partial\omega/\partial y$. Por último se realizan las operaciones algebraicas para que la ecuación de Navier-Stokes me quede de la forma ecuación (2.17) y luego se realizan las operaciones de la primera fila de la ecuación (2.18).

El mismo procedimiento se realiza para cada uno de los pasos del Runge-Kutta. Para el cálculo de las derivadas, el laplaciano y la función de corriente se realizaron unas funciones que serán expuestas

en la última sección del algoritmo. A continuación se presenta el código para este primer paso del integrador temporal, debe tenerse en cuenta que solo se expone la parte en openMP, la sección en MPI es exactamente igual a la expuesta en el cálculo de los números de onda con la salvedad que la parte paralela en MPI se realiza desde el cálculo de la función de corriente hasta la primera convolución donde se cierra para dar paso a la sincronización de datos y el ingreso a la librería *FFTW*. Luego de llevarse a cabo las convoluciones vuelve y se abre la sección paralela en MPI hasta la siguiente convolución correspondiente al paso dos del Runge-Kutta y así hasta completar todos los pasos.

```

ALLOCATE(PHIF(0:nxf-1,0:nyf-1))
.
.
.
DO zz=1,itera
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! Paso 1 Runge-Kutta !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!$omp parallel num_threads( num_threads )
!$omp do private(ii)
DO jj=0,INT(nyf-1)
    DO ii=0,INT(nxf-1)
        PHIF(ii,jj)=stream(Wfk(ii,jj),kx(ii),ky(jj))
        dy1(ii,jj)=deriy(PHIF(ii,jj),ky(jj))
        dx1(ii,jj)=derix(Wfk(ii,jj),kx(ii))
        dy2(ii,jj)=deriy(Wfk(ii,jj),ky(jj))
        dx2(ii,jj)=derix(PHIF(ii,jj),kx(ii))
        LW(ii,jj)=lwp(Wfk(ii,jj),kx(ii),ky(jj))
    END DO
END DO
!$omp end do
!!!!!! CONVOLUCION 1 (phiy*Wx).
!!!!!! CONVOLUCION 2 (phix*Wy)

!$omp parallel num_threads( num_threads )
!$omp workshare
conv2=cf(0:nxf-1,0:nyf-1)
Ngo=conv1-conv2
P=(R*LW)-Ngo
Wn1=Wfk+(P*dt)
!$omp end workshare
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! Paso 2 Runge-Kutta !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! Paso 3 Runge-Kutta !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! Paso 4 Runge-Kutta !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
END DO

```

Nótese que no se expone los pasos realizados en las convoluciones ni la parte de MPI ya que solo se ponen estas secciones de código como ejemplo, y ponerlo completo se hace realmente extenso y no es el objetivo de esta investigación.

- **Resultados:** En esta sección se calculan todas las estadísticas necesarias para el desarrollo de los objetivos de esta investigación. Después de la integración temporal se eliminan de la memoria todas las variables involucradas en la evolución temporal dejando solo la ω en el espacio de Fourier en el tiempo que se deseó evaluar. Luego se calcularon los espectros de Energía y Entropía con la ecuación (1.24), la función de estructura de segundo orden con la ecuación (1.27) y por último se calcula el PDF y la curtosis como se vio en la sección 1.5.
- **Imprimir resultados:** En esta sección se imprimen los resultados obtenidos de cada una de las estadísticas y el campo de ω final.

- Funciones utilizadas:** En esta sección se escriben todas las funciones que se crearon para la ejecución del código. En FORTRAN esto se puede hacer a través de módulos, subrutinas o funciones, para esta investigación se eligió la modalidad de funciones, por su facilidad, para ello al final del código se escribe la sentencia CONTAINS y a continuación se escriben todas las funciones. En este algoritmo se crearon funciones para el cálculo de la función de corriente, las primeras derivadas espaciales, el laplaciano, promedio y la generación de rangos para la caracterización del PDF. A continuación, se presenta el código de dichas funciones.

```

CONTAINS
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! Funcion para el calculo de la funcion corriente !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FUNCTION stream(w,kxx,kyy)
COMPLEX(KIND=DBL) :: w, stream
REAL(KIND=DBL) :: kxx, kyy

IF (kxx==0.0D0 .AND. kyy==0.0D0) THEN
stream=(0.0D0,0.0D0)
ELSE
stream=w/((kxx*kxx)+(kyy*kyy))
END IF
RETURN
END FUNCTION stream
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!! Funcion para el calculo de la derivada espacial en y !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FUNCTION deriy(T,ky)
COMPLEX(KIND=DBL) :: T, deriy
REAL(KIND=DBL) :: ky

deriy=(img*Ky)*T
RETURN

END FUNCTION deriy
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!! Funcion para el calculo de la derivada espacial en x !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FUNCTION derix(T,kx)
COMPLEX(KIND=DBL) :: T, derix
REAL(KIND=DBL) :: kx

derix=(img*Kx)*T
RETURN

END FUNCTION derix
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!! Funcion para el calculo del laplaciano de la W !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FUNCTION lwp(T,kx,ky)
COMPLEX(KIND=DBL) :: T, lwp

```

```

REAL(KIND=DBL) :: kx, ky

lwp=(((-1.0D0)*(kx*kx))+((-1.0D0)*(ky*ky)))*T

RETURN

END FUNCTION lwp
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!funcion promedio!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FUNCTION prome(x,n)
INTEGER(KIND=ITG) :: n, i
REAL(KIND=DBL), DIMENSION(n) :: x
REAL(KIND=DBL) :: prome, sumx

sumx=0.0D0

DO i=1,n
    sumx=sumx+x(i)
END DO

prome=sumx/n
RETURN
END FUNCTION prome
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

FUNCTION rango(x)
REAL(KIND=DBL), DIMENSION(0:nx-1,0:ny-1) :: X
REAL(KIND=DBL) :: xmax, xmin
REAL(KIND=DBL) :: rango

xmax=maxval(x)
xmin=minval(x)

rango=xmax-xmin
RETURN
END FUNCTION rango

```

2.5. Recursos Computacionales

En esta sección se presentan las características del cluster Apolo de la Universidad EAFIT en el cual fueron ejecutadas las simulaciones.

Características	Apolo
Servidores	9
Núcleos de CPU	272
TeraFLOPS	5.8
RAM	864 GB
Memoria Compartida (Disco Duro)	32.4 TB
Memoria Compartida (Estado Solido)	6.4 TB
Velocidad de la red	56 Gbps

Tabla 2.1: Especificaciones técnicas de Apolo, EAFIT (2017)

Y con las siguientes especificaciones de hardware, EAFIT (2017):

Servidores:

- **Nodo Maestro:** 1 servidor DELL PowerEdge R730: Intel Xeon E5-2683v4@2.10GHz (32 Cores) 32 GB RAM DDR4@2400 MHz. HDD: 480 GB SAS-3@12 Gbps. Adaptador de red de alta velocidad: ConnectX-3 Dual Port.
- **Co-Procesamiento:** 1 servidor Dell PowerEdge R730: Intel Xeon E5-2683v4@2.10GHz (32 Cores) 64 GB RAM DDR4@2400 MHz. Co-procesador: nVidia Tesla K80 GPU: 2x Kepler GK210 Memory size (GDDR5) : 24GB (12GB per GPU). CUDA cores: 4992 (2496 per GPU). HDD: 1 TB SAS-3@12 Gbps. Adaptador de red de alta velocidad: ConnectX-3 Dual Port.
- **Procesamiento:** 5 servidores DELL PowerEdge M630: Intel Xeon E5-2683v4@2.10GHz (32 Cores) 64 GB RAM DDR4@2400 MHz. HDD: 1 TB SATA III@12 Gbps. Adaptador de red de alta velocidad: ConnectX-3 Dual Port.
- **Big Memory:** 1 servidor HPE DL360 G9: Intel Xeon E5-2670@2.30Ghz (24 Cores) 388 GB RAM DDR4@2133 MHz. HDD: 1 TB SATA III. Adaptador de red de alta velocidad: Connect-IB MT27600 QSFP@56 Gbps Dual Port.
- **Chasis:** 1 DELL m1000e.
- **Unidades de Rack:** 18.

Red:

- **Red de Datos:** Infiniband Mellanox FDR 56 Gbps.
- **Red de comunicación:** Infiniband Mellanox FDR 56 Gbps.
- **Administrador de Red:** Ethernet 1 Gbps.

Almacenamiento:

- **NAS:** Dell MD3820F 32 TB.
- **SSD:** Samsung NVME SSD 6 TB.

2.6. Validación

En orden de averiguar la exactitud y resolución del código generado este será puesto a prueba con el problema del **vórtice de Taylor-Green**. En esta sección se presentarán los resultados de dichas pruebas y además se medirá la aceleración computacional debido a la puesta en paralelo del mismo.

Primero se exponen los resultados obtenidos para el problema de Taylor-Green con la idea de cuantificar la exactitud del código generado, luego se presentarán los resultados para la aceleración computacional obtenida con la puesta en paralelo del código.

2.6.1. Vórtice de Taylor-Green

El problema del vórtice de Taylor-Green representa físicamente el flujo de un vórtice en dos dimensiones el cual es inestable y se encuentra en decaimiento. Adicionalmente es una solución exacta de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible en coordenadas cartesianas, San and Staples (2012), por lo que nos da una solución analítica con la cual podemos comparar los resultados obtenidos de las simulaciones con los métodos empleados.

La solución exacta del flujo de este vórtice en un dominio cuadrado de $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ con condiciones de frontera periódicas está dada por

$$\omega^e(x, y, t) = 2\kappa \cos(\kappa x) \cos(\kappa y) e^{2\kappa^2 t / Re} \quad (2.19)$$

Donde κ es un entero que representa el número de vórtices en cada dirección sobre el dominio. En orden de cuantificar el orden de exactitud de los métodos utilizados, se computará la diferencia entre la solución exacta y las simulaciones realizadas por medio de la norma L_2 , la cual está dada por

$$\|\omega\|_{L_2} = \sqrt{\frac{1}{N_x N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} |\omega_{i,j}^e - \omega_{i,j}|^2} \quad (2.20)$$

Con el fin de probar la convergencia espacial, primero realizaremos una serie de simulaciones numéricas para diversos tamaños de malla con $Re = 1000$, $\kappa = 4$ y un $\Delta t = 10^{-4}$. Se escogió este paso de tiempo tan pequeño debido a que el máximo número de Courant (CFL) es aproximadamente 0,325 para la resolución de malla de 2048^2 . Los resultados se encuentran presentados en la figura 2.1 y se tabulan en la tabla 2.2, adicionalmente se presentan los valores del número de Courant (CFL) para cada resolución de malla simulado y el tiempo de computo requerido en segundos para cada una de las simulaciones realizadas. El tiempo de simulación fue de $t = 0,1$ debido a que en este intervalo de tiempo y para este problema el 95% del campo inicial a decaído.

Tamaño de malla		16^2	32^2	64^2	128^2	256^2	512^2	1024^2	2048^2
Runge-Kutta 4orden	$\ \omega\ _{L_2}$	6.13E-014	5.96E-014	1.15E-013	1.65E-013	2.29E-013	3.29E-013	4.66E-013	6.58E-013
	CFL	2.54E-003	5.08E-003	1.02E-002	2.03E-002	4.06E-002	8.12E-002	0.1624	0.3249
	CPU time	6.76E-002	0.1741	0.8212	3.5270	19.77	156.1940	1471.1954	4242.2354

Tabla 2.2: Norma discreta L_2 para las diferentes resoluciones de malla en el problema del vórtice de Taylor-Green para $t = 0,1$, $Re = 1000$ y $\kappa = 4$ usando un paso de tiempo de $\Delta t = 10^{-4}$. También se muestran el número de Courant para cada resolución al igual que su respectivo tiempo de computo.

De las pruebas realizadas puede concluirse que el método pseudospectral pierde precisión cuando incrementamos la resolución espacial, esto es debido a la acumulación de los errores de redondeo en la utilización de la librería *FFTW*, en el peor de los casos al implementar la librería se obtienen errores de punto flotante que crecen al orden de $O(\log N)$ y en promedio $O(\sqrt{\log N})$, donde N es el número de nodos para una transformada unidimensional, *FFTW.org* (2017b). Pero aun así la precisión obtenida por el método

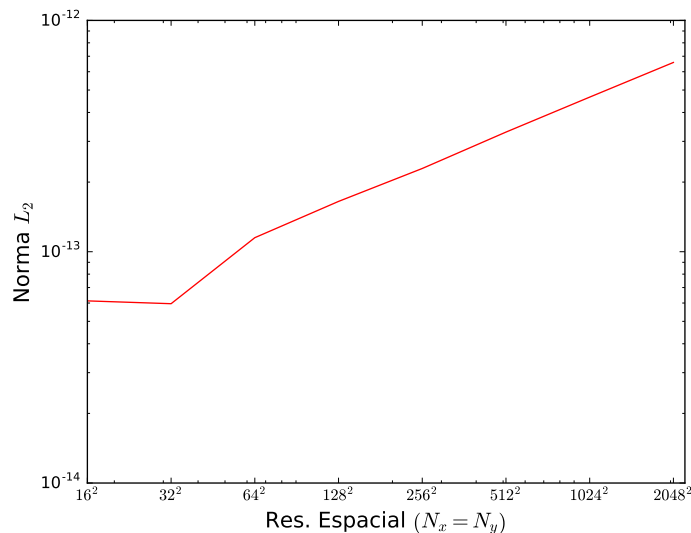


Figura 2.1: Convergencia espacial de la norma discreta L_2 a $t = 0,1$ para el problema del vórtice de Taylor-Green con $R_e = 1000$.

es suficiente para la realización de las simulaciones necesarias para la caracterización de la turbulencia en dos dimensiones y su cascada de energía.

Ahora con el fin de probar la precisión de los esquemas de discretización temporales utilizados, se realizaron una serie de simulaciones con una resoluciones espacial de 16^2 , donde el método pseudospectral mostró la mayor precisión y donde el error es más grande para la discretización temporal. Para ello se variará el paso de tiempo, Δt , para un $R_e = 1000$ y un tiempo de simulación de $t = 20$. Los resultados obtenidos fueron tabulados en la tabla 2.3 y graficados en la figura 2.2.

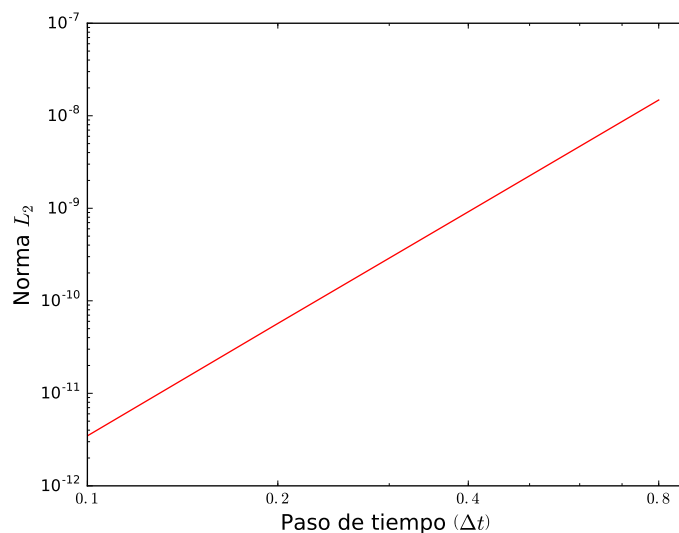


Figura 2.2: Convergencia temporal de la norma discreta L_2 a $t = 20$ para el problema del vórtice de Taylor-Green con $R_e = 1000$ y una resolución de malla de 16^2 .

Δt	$\ \omega\ _{L_2}$			
	0.1	0.2	0.4	0.8
Runge-Kutta 4orden	3.47E-012	5.69E-011	9.16E-010	1.48E-008

Tabla 2.3: Norma discreta L_2 para los diferentes esquemas temporales utilizados en el problema del vórtice de Taylor-Green, para un $t = 20$, $R_e = 1000$ y $\kappa = 4$. Obtenidos usando el método pseudospectral con una resolución espacial de 16^2 .

De los resultados obtenidos en este test, puede concluirse que los errores generados tanto por los esquemas temporales como espaciales empleados en la elaboración del código son lo suficientemente bajos como para ser implementados y ejecutados en las simulaciones que desarrollaran el objetivo de esta tesis.

2.6.2. Aceleración computacional

En condiciones ideales la aceleración computacional posee un comportamiento lineal, es decir, si un algoritmo se demora en su ejecución serial un tiempo x , entonces al doblar el número de procesadores el tiempo de ejecución será la mitad $x/2$ y así entre más procesadores el tiempo de computo cada vez será menor. Pero esta aceleración se ve limitada por las secciones del código no paralelizables como lo son la escritura de datos, la utilización de algunas librerías, el tiempo mismo necesario un procesador para realizar las operaciones, entre otros factores. A esta limitación en la aceleración se le conoce como la **Ley de Amdahl** y matemáticamente se expresa como, Wikipedia (2017a):

$$S = \frac{1}{\alpha} = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1-\alpha}{P} + \alpha} \quad (2.21)$$

Donde α es la fracción de tiempo que se gasta en la parte no paralelizable, S es la máxima aceleración computacional alcanzable y P es el número de procesadores. Por ejemplo, si la parte secuencial de un programa abarca el 10% del tiempo de computo, entonces se podría obtener no más que una aceleración de $10x$ independientemente de cuantos procesadores se añadan.

Con el fin de medir la aceleración obtenida con el algoritmo generado y expuesto en la sección 2.4, se realizaron una serie de simulaciones para una resolución de malla de 1024 con las condiciones iniciales expuestas en la sección 3.1 y para una sola iteración del Runge-Kutta, variando la cantidad de nodos en ejecución. Los resultados se encuentran tabulados en la tabla 2.4 y representados en la figura 2.3. La aceleración se midió dividiendo el tiempo de computo de cada simulación en paralelo por el tiempo de computo de la simulación en serie.

Como puede observarse en la figura 2.3, cuando nos acercamos a los 64 nodos comenzamos a observar una normalización en el tiempo de computo necesario para cada ejecución, quedándose en aproximadamente 27 segundos, esto es debido a las secciones no paralelas del código como lo son la escritura de los resultados y la sincronización de datos para la entrada a la función FFTW, entre otras variables (Ley de Amdahl).

Finalmente, con el fin de verificar la correcta sincronización de los datos y la no pérdida de precisión en el algoritmo en paralelo, se calculó la norma discreta L_2 para cada una de las simulaciones realizadas en la medición de la aceleración, comparando los resultados obtenidos por el código en paralelo con respecto a la versión serial del código, ya validado en la sección 2.6.1. En todos los casos la norma discreta L_2 dio exactamente cero, lo que indica una correcta sincronización entre los nodos.

Núcleos	CPU (seg)	Aceleración
1	1140.75	1
2	579.59	1.97
4	354.83	3.21
8	213.75	5.34
12	134.03	8.51
16	99.3	11.49
20	61.58	18.52
24	51.7	22.06
28	44.99	25.36
32	39.51	28.87
36	35.28	32.33
40	32.98	34.59
44	30.43	37.49
48	29.56	38.59
52	28.74	39.69
56	28.08	40.63
60	27.87	40.93
64	27.55	41.41

Tabla 2.4: Tiempo de cómputo y aceleración computacional para una sola iteración en una resolución de malla de 1024^2 , variando el número de núcleos en paralelo.

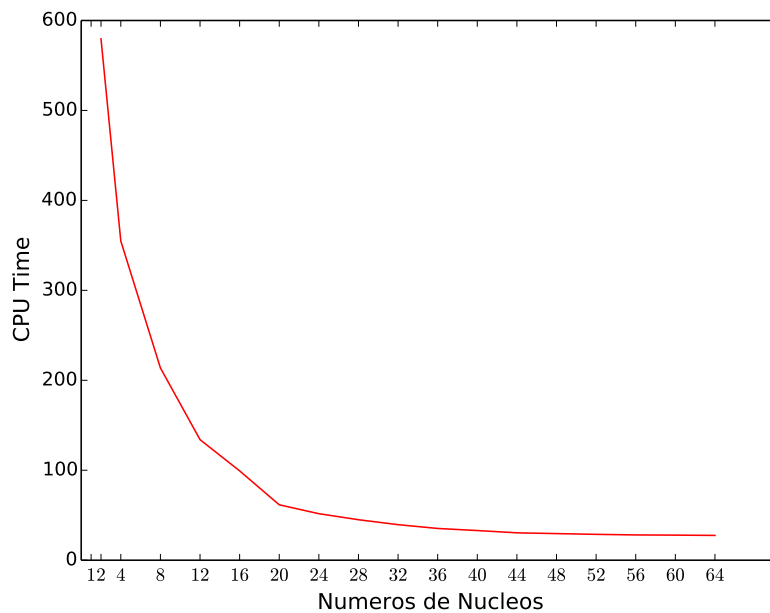


Figura 2.3: Aceleración computacional para una sola iteración con una resolución de malla de 1024^2 .

CAPÍTULO 3

RESULTADOS

Con el fin de estudiar la turbulencia en dos dimensiones se realizaron una serie de simulaciones numéricas de la ecuación de Navier-Stokes, utilizando el método numérico explicado en el capítulo 2. En el presente capítulo se expondrán los resultados obtenidos de dichas simulaciones, primero presentaremos las condiciones iniciales y los parámetros empleados para cada simulación, luego presentaremos la disipación de la energía cinética, ϵ , la disipación de entropía, β , y el intervalo de tiempo necesario para que la disipación alcance las escalas longitudinales disipativas, τ_d ; luego presentaremos la evolución y dependencia al número de Reynolds de los espectros de entropía y energía, seguido por la evolución del campo de vorticidad y por último se presentarán los resultados obtenidos de la evolución y dependencia al número de Reynolds de la función de estructura.

3.1. Condiciones iniciales

Con el fin de estudiar la turbulencia en dos dimensiones se generará un campo de vorticidad aleatorio con condiciones de frontera periódicas en un dominio cuadrado con lados de longitud 2π , como condición inicial para las simulaciones de la ecuación de Navier-Stokes. En esta investigación usaremos las mismas condiciones iniciales utilizadas por San and Staples (2012), con el fin de comparar los resultados obtenidos.

Como condición inicial supondremos un espectro de energía, el cual en el espacio de Fourier esta dado por la siguiente ecuación y se ilustra en la figura 3.1:

$$E(\kappa) = \frac{a_s}{2} \frac{1}{\kappa_p} \left(\frac{\kappa}{\kappa_p} \right)^{2s+1} \exp \left[- \left(s + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\kappa}{\kappa_p} \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

Donde $\kappa = |\mathbf{k}| = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}$. κ_p es el número de onda donde ocurre el máximo valor del espectro de energía inicial, que para este estudio se asumirá de $\kappa_p = 12$. a_s es el coeficiente que normaliza la energía cinética inicial y está dado por:

$$a_s = \frac{(2s+1)^{s+1}}{2^s s!} \quad (3.2)$$

Donde s es un parámetro de forma y en este estudio lo tomaremos como $s = 3$. Ahora debemos sacar la información del campo de vorticidad inicial a partir del espectro de energía que acabamos de asumir. Primero calcularemos la magnitud de los coeficientes de Fourier del campo de vorticidad a partir del espectro de energía inicial, los cuales están dados por:

$$|\tilde{\omega}(\mathbf{k})| = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi} E(\kappa)} \quad (3.3)$$

Luego hallaremos la distribución inicial del campo de vorticidad en el espacio de Fourier, la cual es obtenida al introducir una función de fase aleatoria,

$$\tilde{\omega}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi} E(\kappa)} e^{i\zeta(\mathbf{k})} \quad (3.4)$$

La función de fase aleatoria está dada por $\zeta(\mathbf{k}) = \xi(\mathbf{k}) + \eta(\mathbf{k})$, donde $\xi(\mathbf{k})$ y $\eta(\mathbf{k})$ son valores independientes escogidos en el rango de $[0, 2\pi]$ para cada punto de las coordenadas en el primer cuadrante del plano $\kappa_x - \kappa_y$. Las conjugadas para los demás cuadrantes están dadas por:

$$\begin{aligned} \xi(-\kappa_x, \kappa_y) &= -\xi(\kappa_x, \kappa_y) \\ \xi(-\kappa_x, -\kappa_y) &= -\xi(\kappa_x, \kappa_y) \\ \xi(\kappa_x, -\kappa_y) &= \xi(\kappa_x, \kappa_y) \\ \eta(-\kappa_x, \kappa_y) &= \eta(\kappa_x, \kappa_y) \\ \eta(-\kappa_x, -\kappa_y) &= -\eta(\kappa_x, \kappa_y) \\ \eta(\kappa_x, -\kappa_y) &= -\eta(\kappa_x, \kappa_y) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ahora para obtener el campo de vorticidad en el espacio físico solo debemos aplicar la transformada inversa de Fourier al campo obtenido con la ecuación (3.4). Para cada una de las resoluciones de malla estudiadas se generó un campo aleatorio inicial, el cual se utilizó en todas las simulaciones realizadas para esa resolución de malla.

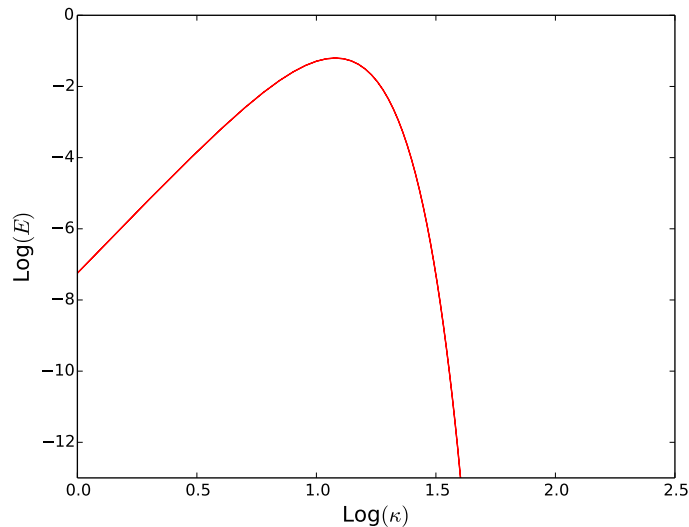


Figura 3.1: Espectro de energía del campo de vorticidad inicial.

3.2. Parámetros para las simulaciones

Con el fin de evaluar la dependencia del número de Reynolds en la turbulencia en dos dimensiones se realizaron simulaciones para tres números de Reynolds diferentes, $R_e = 100$, $R_e = 1000$ y $R_e = 10000$, se escogieron estos valores con el fin de obtener unos resultados a números de Reynolds bajos, medios y altos. Los resultados se presentarán para tiempos de simulación igual a $t = 5$, $t = 10$, $t = 15$ y $t = 20$ con el fin de mostrar la evolución temporal de las estadísticas evaluadas. Adicionalmente se realizaron las mismas simulaciones con diferentes discretizaciones espaciales, con resoluciones de malla de 1024^2 , 2048^2 y 4096^2 con el fin de analizar los resultados a diferentes resoluciones de malla.

Primero calcularemos las escalas disipativas de Kolmogorov y la micro escala de Taylor de los campos de vorticidad inicial con el fin de caracterizar la turbulencia, la tabla 3.1 nos muestra los resultados obtenidos. Para ello en primera instancia debemos calcular la viscosidad cinemática, ν , de los campos de vorticidad iniciales según los números de Reynolds asumidos para las simulaciones. De la ecuación (1.2) despejamos ν asumiendo la longitud característica $l = 1$ y la vorticidad de los campos aleatorios generados en las condiciones iniciales.

Resolución	R_e	ν	η	u_η	λ_f	R_λ	τ_ω
1024 ²	100	3.90E-07	8.95E-02	4.36E-06	0.2495	1.9468	3.52
	1000	3.90E-08	2.83E-02	1.38E-06	0.2495	19.4681	3.52
	10000	3.90E-09	8.95E-03	4.36E-07	0.2495	194.6814	3.52
2048 ²	100	9.72E-08	8.93E-02	1.09E-06	0.2485	1.9433	4.98
	1000	9.72E-09	2.82E-02	3.44E-07	0.2485	19.4335	4.98
	10000	9.72E-10	8.93E-03	1.09E-07	0.2485	194.3357	4.98
4096 ²	100	2.43E-08	8.93E-02	2.72E-07	0.2476	1.9412	7.04
	1000	2.43E-09	2.82E-02	8.61E-08	0.2476	19.4128	7.04
	10000	2.43E-10	8.93E-03	2.72E-08	0.2476	194.1283	7.04

Tabla 3.1: Micro escalas de la turbulencia, ν es la viscosidad cinemática, η es la escala longitudinal de Kolmogorov, u_η es la escala de velocidad de Kolmogorov, λ_f es la micro escala o longitud integral de Taylor, R_λ es el número de Reynolds de malla y τ_ω es el tiempo de rotación de un vórtice inicial.

Como se mencionó anteriormente se realizaron una serie de simulaciones de la ecuación de Navier-Stokes, la tabla 3.2 nos muestra los tiempos de computo de cada simulación en horas, adicionalmente con el fin de mantener una estabilidad numérica en cada simulación se modificó el parámetro Δt con el fin de asegurar la condición de Courant (CFL) y optimizar el tiempo de computo, ya que a mayor discretización espacial se hace necesario escoger un paso de tiempo más pequeño y de esta manera mantener una estabilidad numérica en cada paso del tiempo.

Resolución	1024			2048			4096		
	100	1000	10000	100	1000	10000	100	1000	10000
Δt	0.00009	0.0005	0.001	0.00009	0.0002	0.001	0.00004	0.0002	0.001
CFL	1.49E-8	1.06E-6	3.82E-6	2.12E-6	1.24E-6	1.99E-6	2.87E-5	1.75E-5	1.35E-5
$t = 5$	10.44	2.18	2.37	36.78	16.81	3.40	100.70	28.21	12.22
$t = 10$	23.43	4.26	4.99	72.46	33.33	6.59	201.37	69.56	21.87
$t = 15$	34.84	6.95	6.36	109.05	49.61	10.06	302.09	81.97	31.95
$t = 20$	42.73	8.02	9.34	146.24	66.09	13.15	328.80	104.75	41.24

Tabla 3.2: Tiempo de computo en horas de las simulaciones realizadas, el valor del Δt seleccionado para cada una de ellas con su correspondiente número de Courant a $t = 1$.

3.3. Disipación de energía y entropía

La principal diferencia de la turbulencia en dos dimensiones con la tridimensional es que la entropía decae más rápidamente que la energía. Para altos números de Reynolds la disipación de energía, ϵ , tiende a cero conforme $\nu \rightarrow 0$, mientras que en la turbulencia en tres dimensiones tiene un valor finito, $\epsilon \sim u^3/l$ para altos números de Reynolds. Con el paso del tiempo el espectro de energía será transferido a números de onda menores, mientras por conservación el espectro de entropía es arrastrado a números de onda mayores. Como consecuencia la energía es transferida a escalas longitudinales mayores en el proceso conocido como *cascada inversa de energía*, mientras la entropía es transferida a escalas longitudinales menores por la *cascada directa de entropía*, Davidson (2013).

Con la idea de visualizar cómo se comportan la disipación de la energía cinética, ϵ , y la disipación de la entropía, β , la figura 3.2 nos muestra la evolución en el tiempo de estas entidades en los diferentes números de Reynolds simulados, adicionalmente la figura 3.3 nos muestra la dependencia al número de Reynolds de estas cantidades.

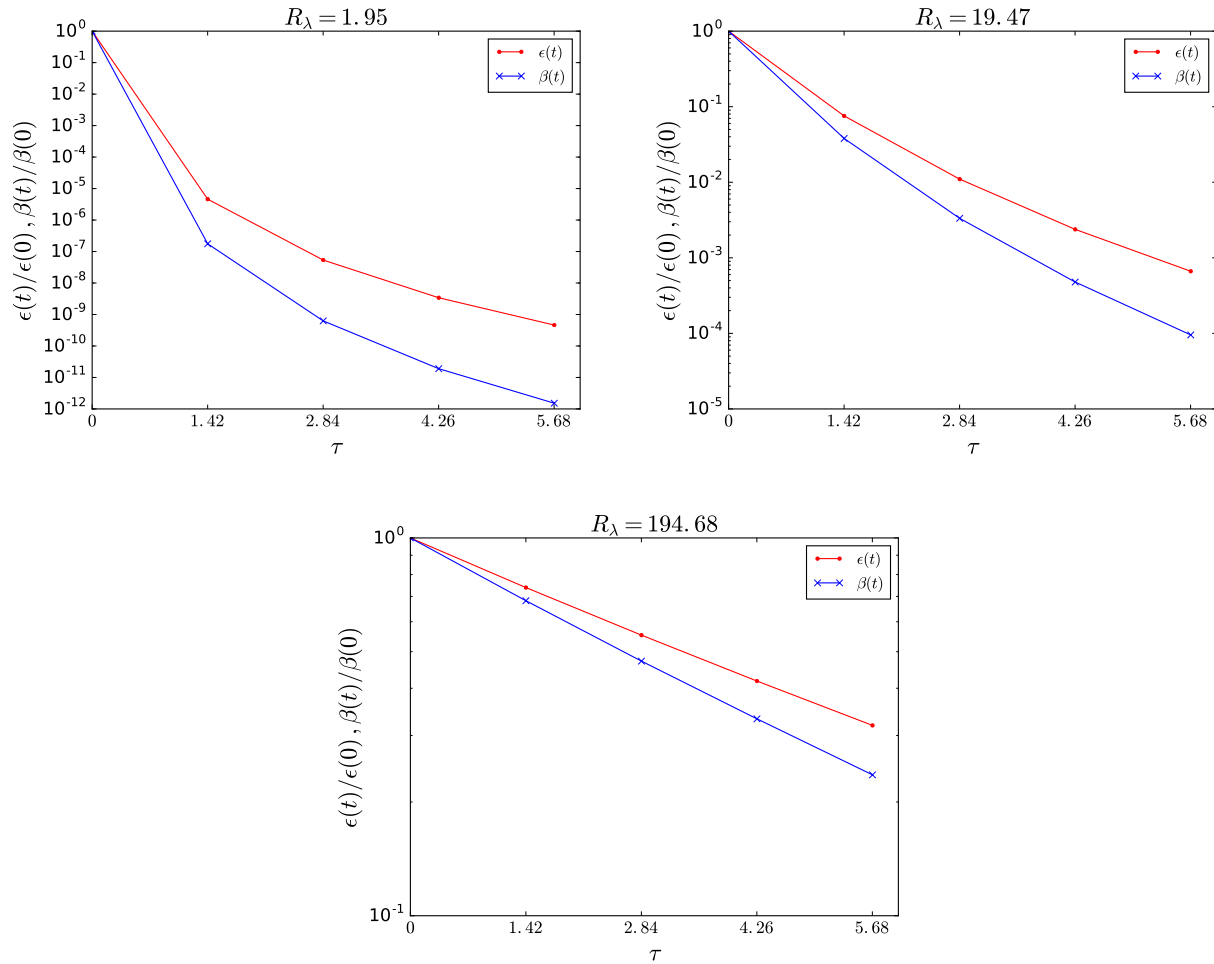


Figura 3.2: Disipación de la energía cinética y la entropía normalizadas por su valor inicial, puede verse como la entropía es disipada más rápidamente que la energía cinética. Nótese que los tiempos se encuentran normalizados con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

Puede evidenciarse como la entropía es disipada más eficientemente que la energía, aun para altos números de Reynolds. Con respecto a la dependencia del número de Reynolds puede comprobarse como $\epsilon \rightarrow 0$ cuando el número de Reynolds tiende a infinito.

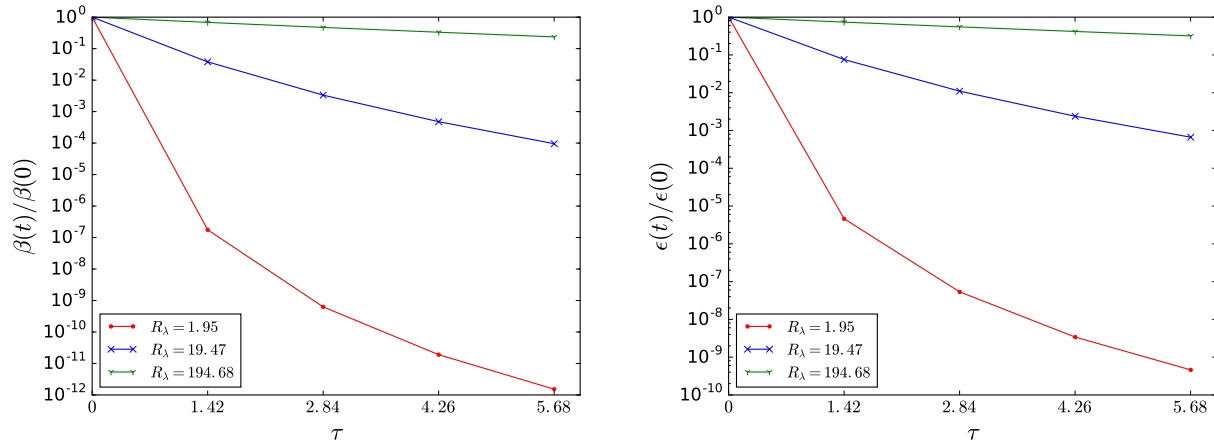


Figura 3.3: Dependencia del número de Reynolds de la disipación de la energía cinética y la entropía. Puede notarse como sus valores tienden a cero conforme la viscosidad tiende a cero. El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

Debido a que $\epsilon \rightarrow 0$ a altos números de Reynolds, para que exista un equilibrio entre las diferentes escalas la energía cinética debe ser transportada de las micro escalas hacia las escalas superiores casi desde los primeros instantes de evolución del flujo Davidson (2013). Por otro lado, la entropía decae con mayor velocidad y por lo tanto para que sea transportada desde las macro escalas hacia las micro escalas es necesario que la turbulencia se desarrolle completamente, es decir, que alcance las escalas disipativas, η . Normalmente ese tiempo es del orden de unas cuantas rotaciones de un vórtice, para la turbulencia en dos dimensiones este tiempo está definido por la ecuación (1.26), McWilliams (1984). La tabla 3.3 nos muestra los tiempos necesarios para que se alcancen las escalas disipativas desde las condiciones iniciales de las simulaciones realizadas.

R_λ	1024^2	2048^2	4096^2
1.95	7.04	9.96	14.08
19.47	10.56	14.94	21.12
194.68	14.08	19.91	28.16

Tabla 3.3: Intervalo de tiempo para la disipación entre escalas, τ_d

Puede comprobarse como $\tau_d \rightarrow \infty$ cuando $R_\lambda \rightarrow \infty$, otra diferencia crucial con la turbulencia tridimensional, ya que en tres dimensiones este tiempo tiende a un valor finito a medida que se incrementa el número de Reynolds McWilliams (1984). Otra observación que se puede hacer es que a medida que se incrementa la resolución de malla el tiempo necesario para que la turbulencia se desarrolle completamente también va aumentando.

3.4. Cascada de energía y entropía

La turbulencia en libre decaimiento es un fenómeno disipativo que a su vez va transmitiendo la energía entre las diferentes escalas que la componen. Como se ha ido mencionando anteriormente, en la turbulencia bidimensional la energía es transferida desde las escalas más pequeñas hacia las grandes, por medio del

fenómeno conocido como cascada inversa de energía. Esto se debe a que la disipación de energía tiende a cero para altos números de Reynolds en el caso bidimensional y para mantener un equilibrio la energía debe ser transportada a escalas cada vez más grandes, caso contrario a la turbulencia en tres dimensiones, donde la energía es transmitida desde escalas superiores donde vórtices de gran tamaño seden su energía a vórtices cada vez más pequeños, hasta que los efectos de la viscosidad se hacen importante y disipan la energía cinética por medio de calor u otras formas de energía.

El objetivo principal de esta investigación es evidenciar la cascada de energía, para ello se calcularon los espectros de energía para cada una de las simulaciones realizadas con el fin de analizar su evolución en el tiempo y su dependencia al número de Reynolds. Para visualizar correctamente la evolución en el tiempo y la dependencia al número de Reynolds del espectro de energía es necesario normalizarlas con las escalas disipativas de la turbulencia, escalas de Kolmogorov, la figura 3.4 nos muestra la evolución en el tiempo del espectro de energía para una resolución de malla de 1024^2 . De la misma manera la figura 3.5 y la figura 3.6 nos muestran la evolución en el tiempo del espectro de energía para unas resoluciones de malla de 2048^2 y 4096^2 respectivamente.

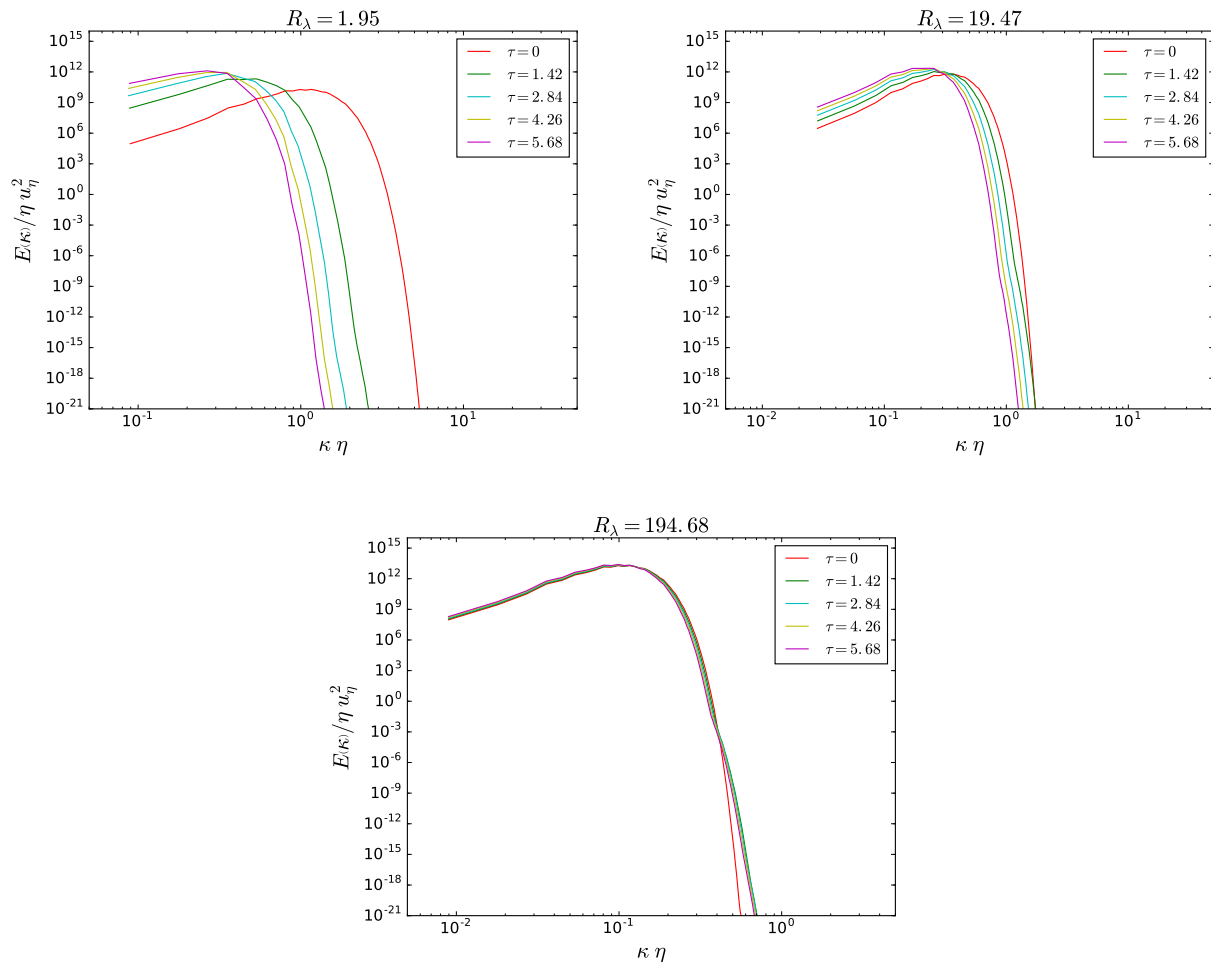


Figura 3.4: Evolución del espectro de energía normalizada con las escalas de Kolmogorov para una resolución de malla de 1024^2 . El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

Como puede observarse el espectro de energía presenta un corrimiento hacia la izquierda para los números de onda más altos, mientras que para los bajos números de onda presenta un aumento en su magnitud a medida que pasa el tiempo, en otras palabras, la energía está siendo transferida desde las micro escalas de la turbulencia hacia las macro escalas en el proceso llamado cascada inversa de energía. Este mismo comportamiento puede observarse para todas las resoluciones de malla simuladas.

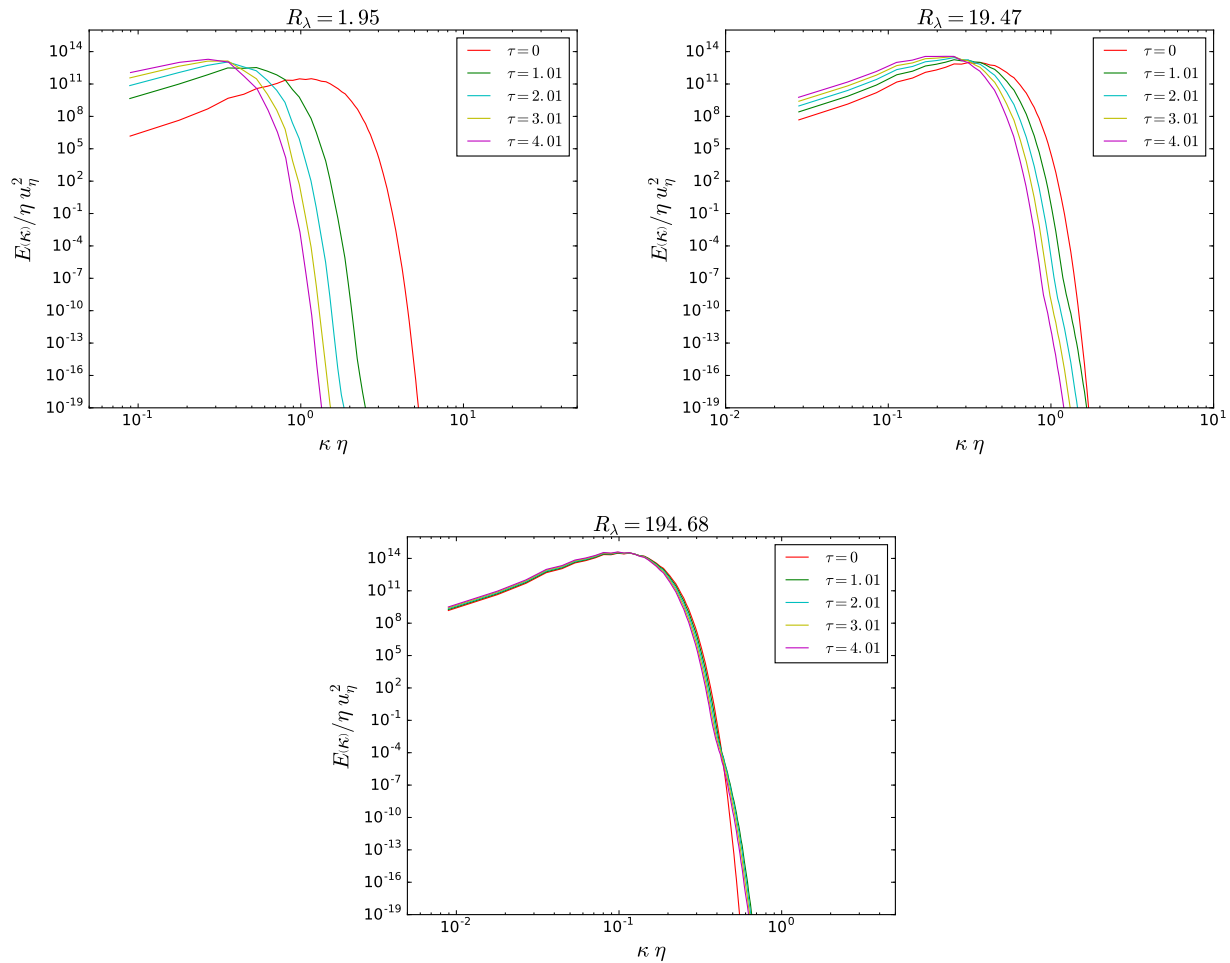


Figura 3.5: Evolución del espectro de energía normalizada con las escalas de Kolmogorov para una resolución de malla de 2048^2 . El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

Con el fin de observar la dependencia al número de Reynolds de los espectros de energía, la figura 3.7 nos muestra los espectros para cada uno de los números de Reynolds simulados. Al normalizar los espectros de energía con las escalas de Kolmogorov podemos observar como a altos números de Reynolds existe una menor transferencia de energía a las escalas superiores desde las escalas más pequeñas, mostrando un pico del espectro de energía a números de onda más altos, es decir, escalas longitudinales menores. También puede observarse como a bajos números de Reynolds se alcanzan mayores magnitudes del espectro, mostrando una mayor transferencia de energía hacia escalas más altas. Este resultado es congruente con lo observado en la evolución en el campo de vorticidad, el cual discutiremos más adelante.

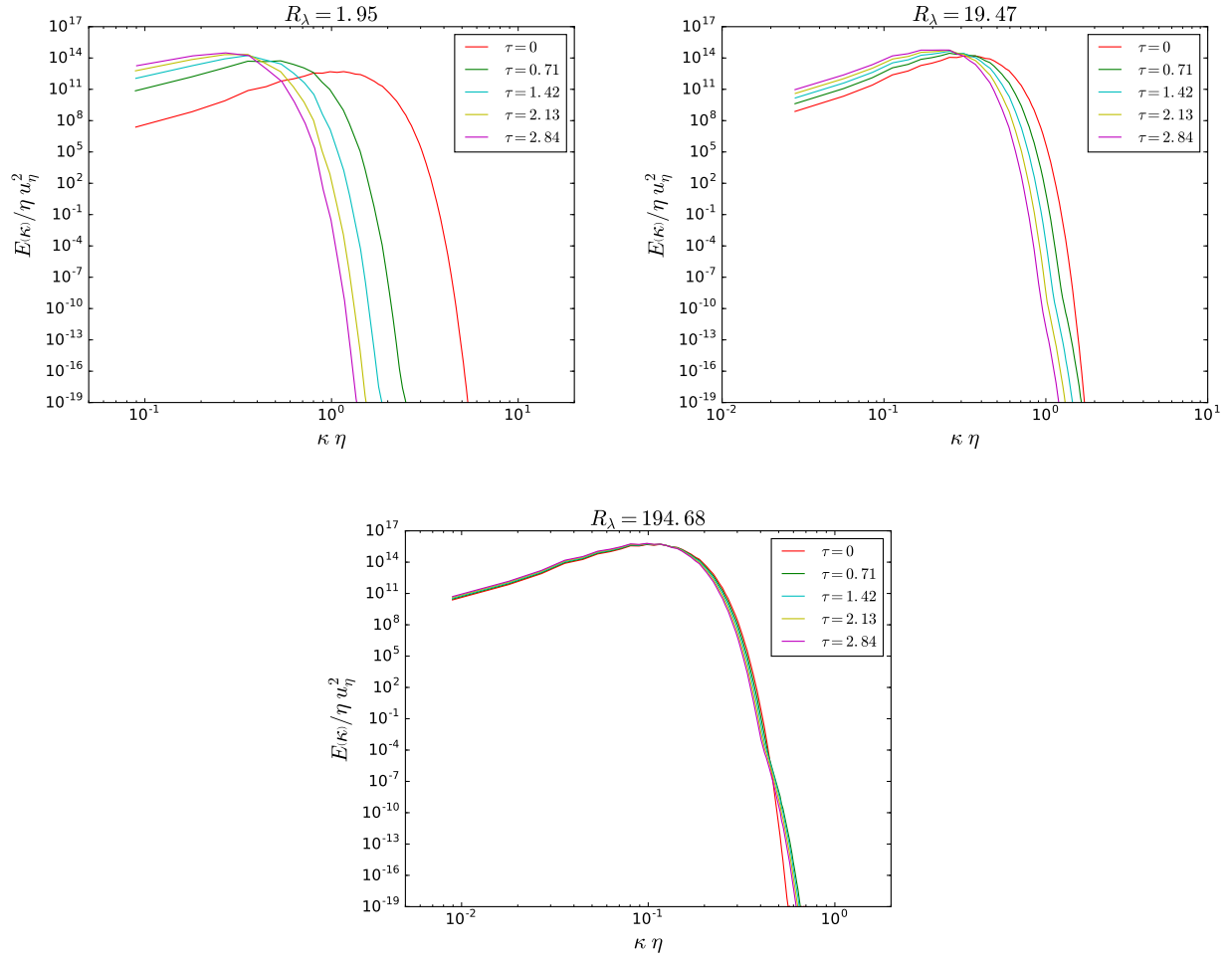


Figura 3.6: Evolución del espectro de energía normalizada con las escalas de Kolmogorov para una resolución de malla de 4096^2 . El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

De los análisis de la evolución y dependencia al R_e del espectro de energía podemos concluir que la energía es transportada por el proceso de la cascada inversa desde longitudes de onda altas a longitudes de onda más bajas, es decir, de las micro escalas de la turbulencia donde se realizan los efectos disipativos gracias a la viscosidad hacia las macro escalas de la turbulencia. También podemos concluir que la energía es transportada más rápidamente a las escalas superiores a bajos números de Reynolds. Como veremos más adelante la cascada inversa de energía da como consecuencia el fenómeno conocido como convergencia de vórtices, debido a que la energía es transportada a escalas cada vez más grandes, la evolución del campo de vorticidad debe mostrar la convergencia de pequeños vórtices en vórtices cada vez más grandes con el paso del tiempo.

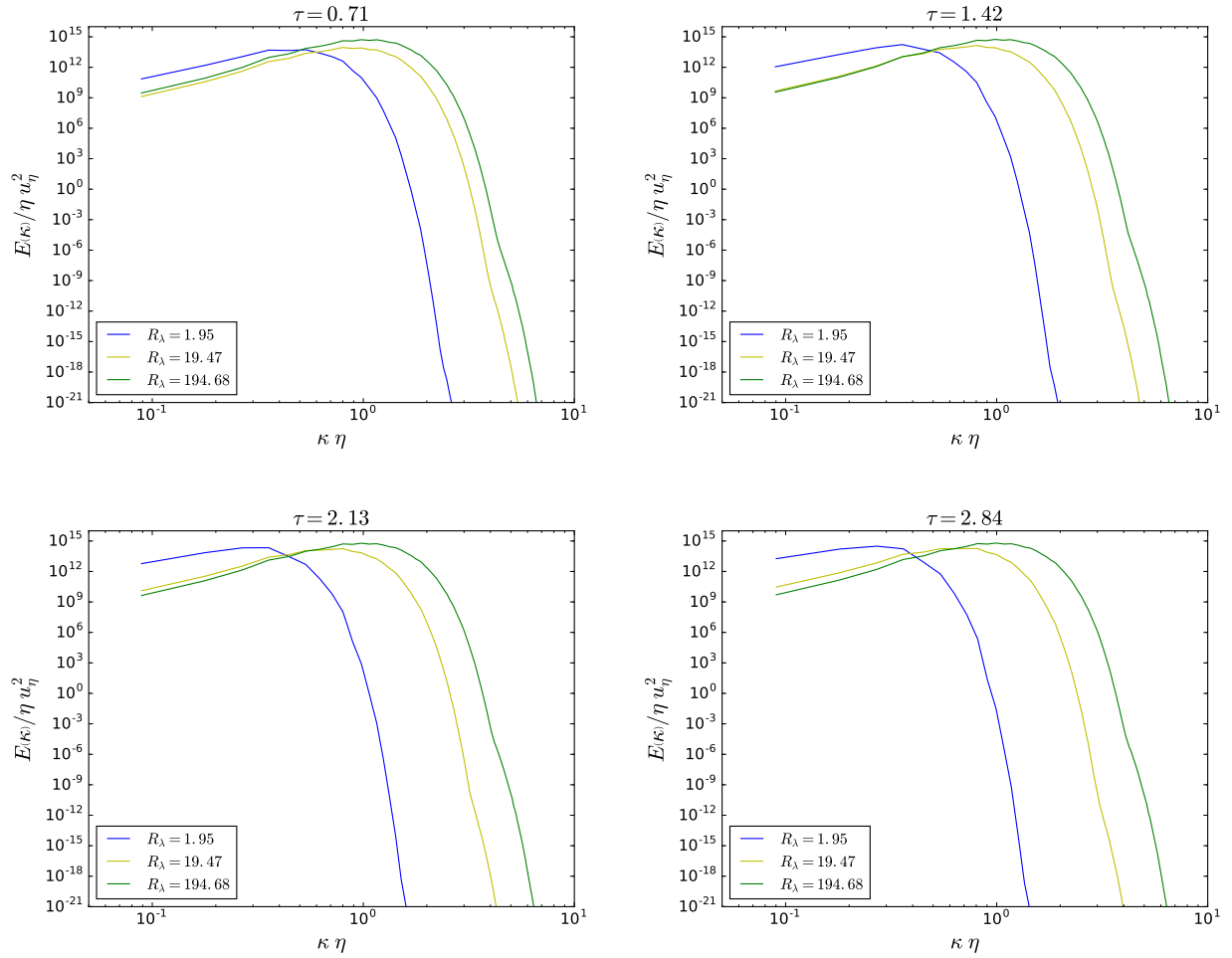


Figura 3.7: Dependencia al número de Reynolds del espectro de energía para los tiempos simulados normalizados con τ_ω , con una resolución de malla de 4096^2 .

Ahora presentaremos los resultados de la evolución y dependencia al número de Reynolds del espectro de entropía. Como se mencionó en la sección 3.3 para que la cascada directa de entropía se dé, es necesario que la turbulencia se encuentre totalmente desarrollada, en dicha sección se muestran los resultados obtenidos para los tiempos necesarios para que se encuentre las escalas disipativas. Puede observarse como para casi todas las simulaciones los tiempos requeridos para que se desarrolle la turbulencia son casi iguales o superiores al máximo tiempo de simulación, por lo tanto, para obtener una correcta visualización del fenómeno es necesario la realización de simulaciones más largas.

A pesar de lo mencionado anteriormente se presentan los resultados obtenidos para el espectro de entropía. La figura 3.8 nos muestra la evolución en el tiempo del espectro de entropía normalizado con la viscosidad cinemática, ν , y la disipación de la entropía, β , para una resolución de malla de 4096^2 . Los resultados obtenidos para las resoluciones de malla de 1024^2 y 2048^2 no se reportan ya que se obtuvieron los mismos resultados, tal y como puede observarse de manera análoga en la evolución en el tiempo del espectro de energía, donde no se ve una diferencia significativa entre los resultados obtenidos para las diferentes resoluciones espaciales.

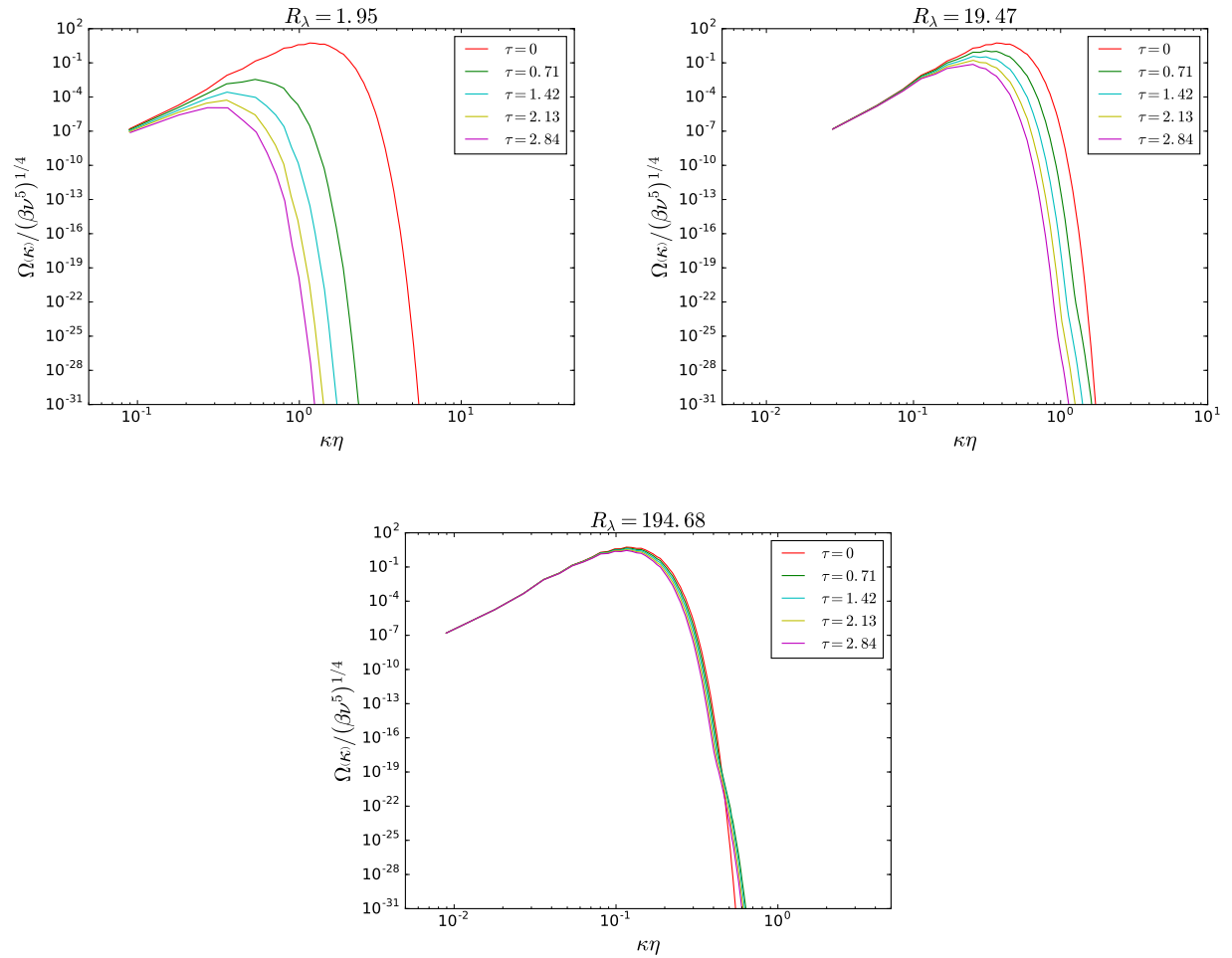


Figura 3.8: Evolución del espectro de entropía para una resolución de malla de 4096^2 . El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

De los resultados obtenidos de la evolución del espectro de entropía podemos observar como existe un mayor decaimiento en el espectro a medida que pasa el tiempo. Este decaimiento del espectro es mayor a bajos números de Reynolds ya que la viscosidad es mayor, cuando se incrementa el número de Reynolds o la viscosidad del fluido tiende a cero el decaimiento del espectro de entropía también tiende a cero. Como se comentó anteriormente no es posible dar una conclusión acerca de la cascada de entropía ya que los tiempos simulados no son lo suficientemente largos como para que la turbulencia se desarrolle por completo y los efectos disipativos sean lo suficiente como para que comience la transferencia de entropía desde las escalas más grandes hacia las más pequeñas.

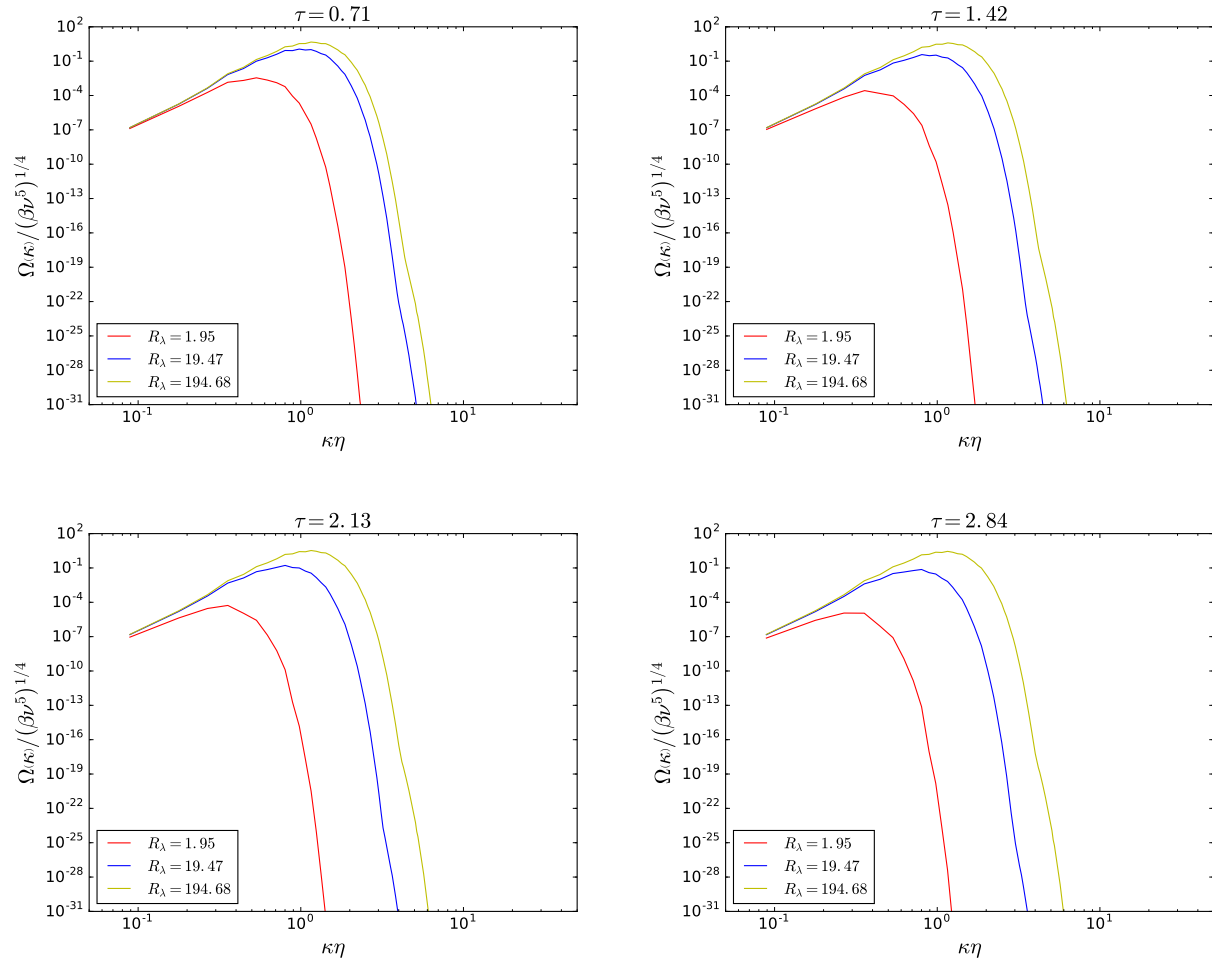


Figura 3.9: Dependencia al número de Reynolds del espectro de entropía para los tiempos simulados normalizados con τ_ω , con una resolución de malla de 4096^2 .

Otra estadística que nos ayuda a corroborar la cascada inversa de energía es la evolución temporal de la escala integral de Taylor, λ_f , la cual debe presentar un incremento a medida que pasa el tiempo indicando como la energía es transferida a escalas cada vez más grandes, Davidson (2013). La figura 3.10 nos muestra la evolución de la escala integral de Taylor para cada una de los R_λ simulados y la figura 3.11 nos muestra la evolución de la escala integral a diferentes resoluciones de malla.

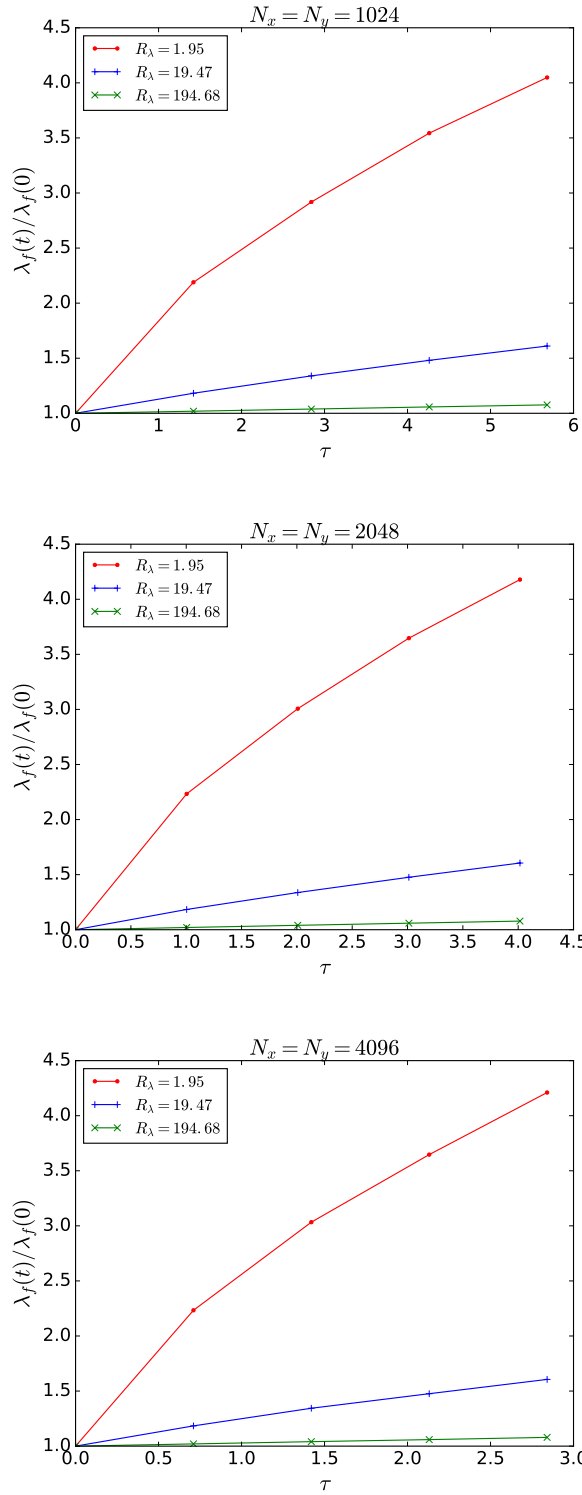


Figura 3.10: Evolución de la escala integral de Taylor y su dependencia al número de Reynolds, normalizada por su valor inicial, para las resoluciones de malla 1024^2 , 2048^2 , 4096^2 . El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

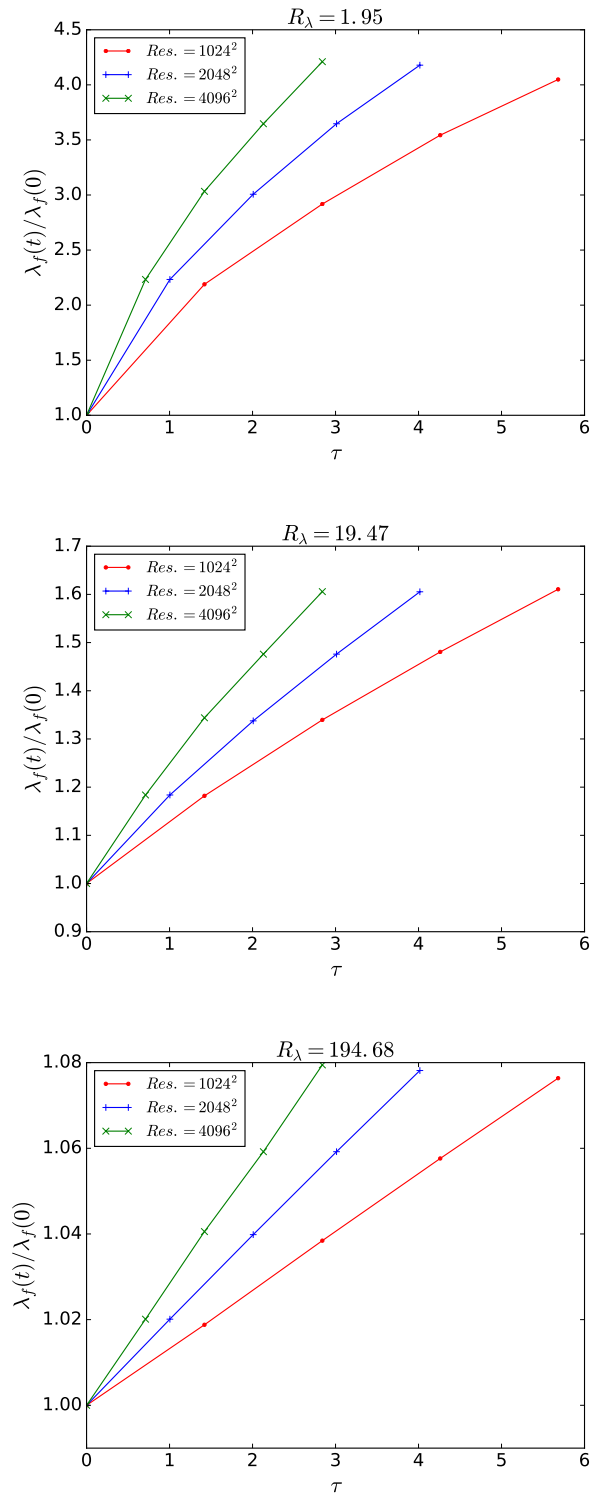


Figura 3.11: Evolución de la escala integral de Taylor y su dependencia a las resoluciones de malla para cada uno de los R_λ simulados. El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

Los resultados obtenidos de la evolución de la longitud integral de Taylor son congruentes con la teoría, ya que presenta un incremento a medida que el tiempo transcurre. También puede notarse como este incremento es acelerado a bajos números de Reynolds y se realiza más lentamente a altos números de Reynolds, lo cual confirma de alguna manera los resultados obtenidos en la evolución del espectro de energía y su cascada inversa. Con respecto a las diferentes resoluciones de malla puede notarse que a mayor resolución de malla, λ_f se incrementa más rápidamente para todos los números de Reynolds.

3.5. Campo de Vorticidad

En la presente sección se expondrá la evolución del campo de vorticidad. En la turbulencia en dos dimensiones en libre decaimiento, como lo es nuestro caso de estudio, se espera una convergencia de vórtices tal y como se explicó en la sección 1.5, dando paso al aumento en la intermitencia de la ω , representada en el aumento del área entre vórtices y a su vez el ensanchamiento de estos. Como se explicó anteriormente una de las maneras de visualizar este comportamiento es por medio de la función de densidad de probabilidad (PDF) y la curtosis.

Como se indicó anteriormente para cada resolución de malla analizada se generó un campo de vorticidad inicial, bajo los parámetros indicados en la sección 3.1, y se simuló la ecuación de Navier-Stokes para cada uno de estos campos iniciales con los números de Reynolds $R_\lambda = 1,95$, $R_\lambda = 19,47$ y $R_\lambda = 194,68$. En esta sección nos concentraremos en el estudio del campo de ω , su evolución y su dependencia al número de Reynolds. Es de tener en cuenta que el proceso de cascada inversa de energía analizado en la sección anterior da como consecuencia el proceso de convergencia de vórtices como puede observarse con la evolución del campo de vorticidad. A continuación se presenta la evolución del campo de ω para las condiciones simuladas, la figura 3.12 nos muestra el campo de ω para los tiempos simulados con una resolución de malla de 1024^2 y un $R_\lambda = 1,95$, la figura 3.13 y la figura 3.14 nos muestran la evolución del campo de ω para $R_\lambda = 19,47$ y $R_\lambda = 194,68$ respectivamente.

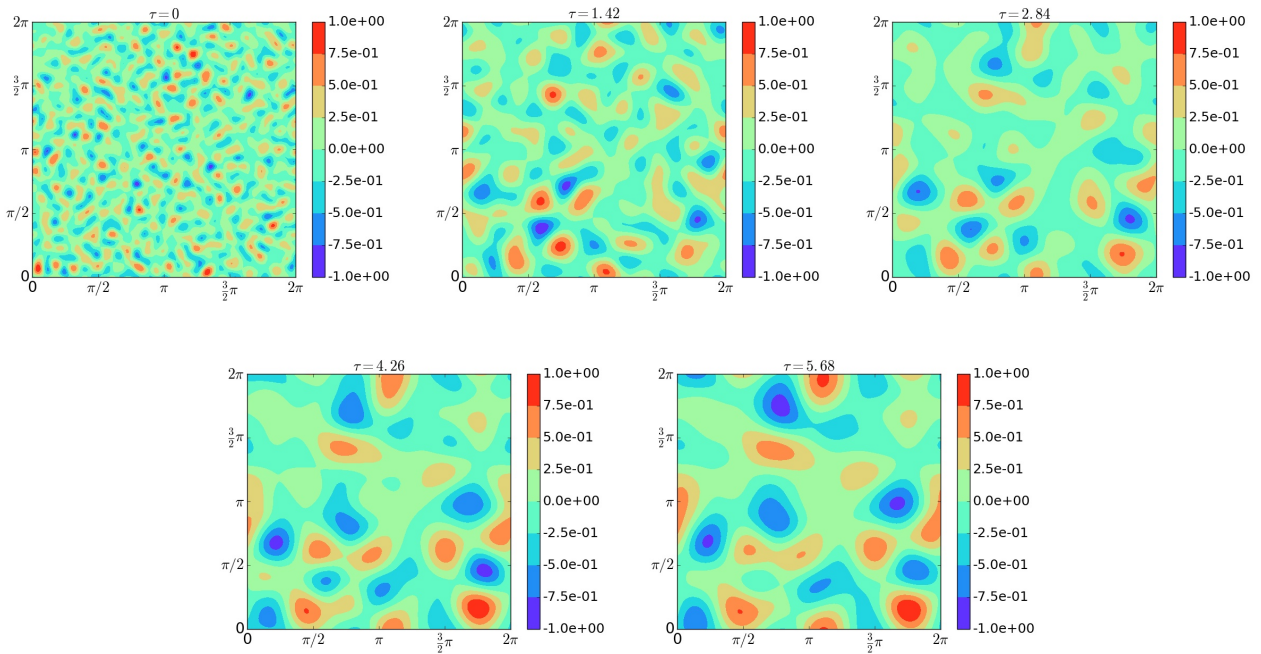


Figura 3.12: Evolución del campo de vorticidad para una resolución de 1024^2 , $R_\lambda = 1,95$. El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

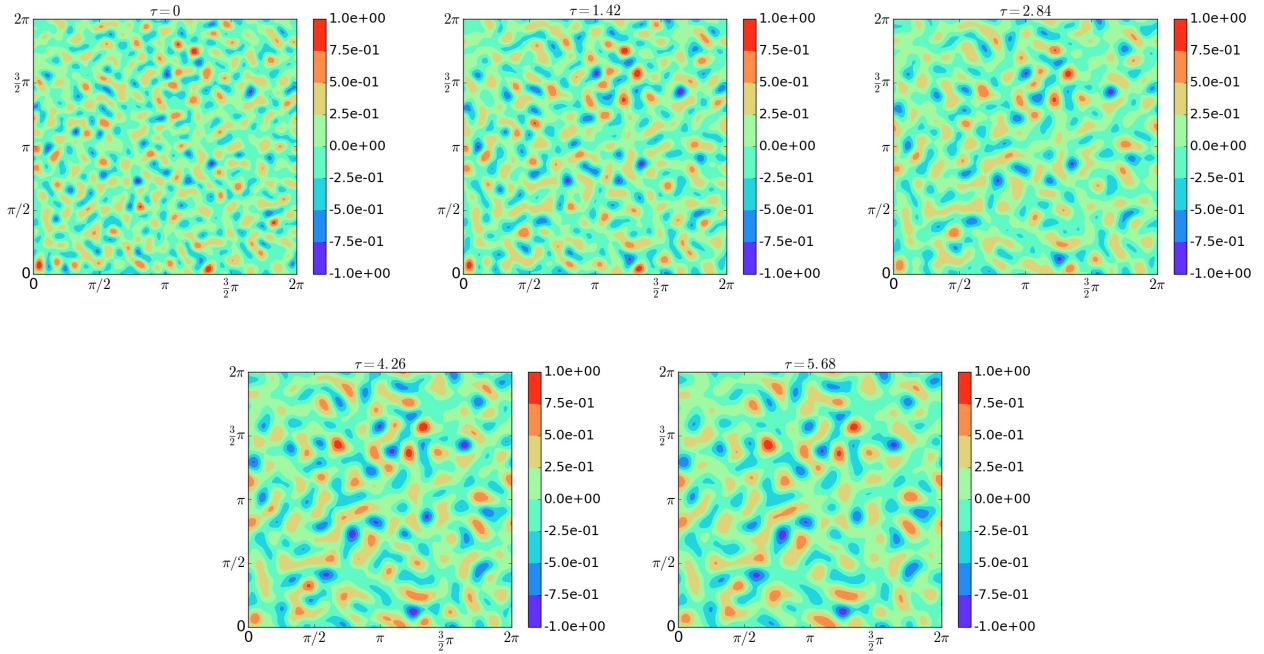


Figura 3.13: Evolución del campo de vorticidad para una resolución de 1024^2 , $R_\lambda = 19,47$. El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

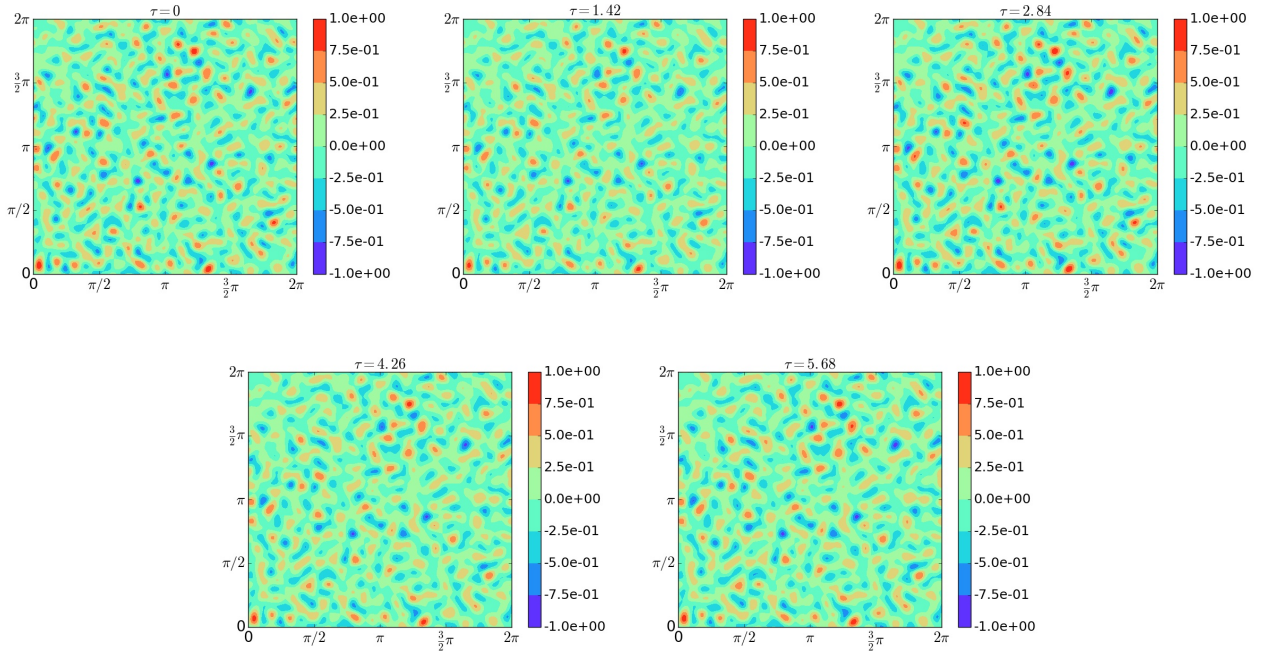


Figura 3.14: Evolución del campo de vorticidad para una resolución de 1024^2 , $R_\lambda = 194,68$. El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

Todos los campos de ω fueron escalados con su parte exponencial, por ejemplo, el campo inicial para la resolución de 1024^2 presenta un rango de $\pm 2e^{-04}$, dicho campo fue escalado por este factor para que su rango nos quedara de ± 1 , cada campo fue escalado de esta manera de modo que todas las gráficas estuvieran en el mismo rango y de esta manera poder visualizar la convergencia de vórtices de una manera normalizada y sin tener en cuenta el decaimiento del campo de ω debido a la disipación de energía cinética provocada por la viscosidad.

En las gráficas anteriores puede observarse el proceso de convergencia de vórtices, donde a medida que el tiempo pasa estos se van conglomerando, haciéndose cada vez más grandes y aumentando el área entre estos. La evolución más drástica puede observarse en la figura 3.12 donde un bajo número de Reynolds, es decir una alta viscosidad y por lo tanto una ϵ más eficiente, acelera el proceso de cascada de energía desde las escalas pequeñas hacia las grandes, dando como consecuencia una convergencia de vórtices más eficiente. Por otro lado, puede notarse que a altos números de Reynolds donde tanto ν como ϵ tienden a cero, y por lo tanto la transferencia de energía desde las micro escalas a las escalas superiores se realiza más lentamente, la convergencia de vórtices se realiza análogamente, presentando un incremento muy leve en el tamaño de los vórtices y una disminución en su población menos significativa que para bajos números de Reynolds.

Con la idea de ilustrar la evolución del campo de ω con mayores resoluciones de malla, la figura 3.15, la figura 3.16 y la figura 3.17 nos muestran los resultados obtenidos para una resolución de malla de 2048^2 para cada uno de los números de Reynolds simulados, de la misma manera la figura 3.18 nos muestra la evolución del campo de vorticidad para una resolución de malla de 4096^2 .

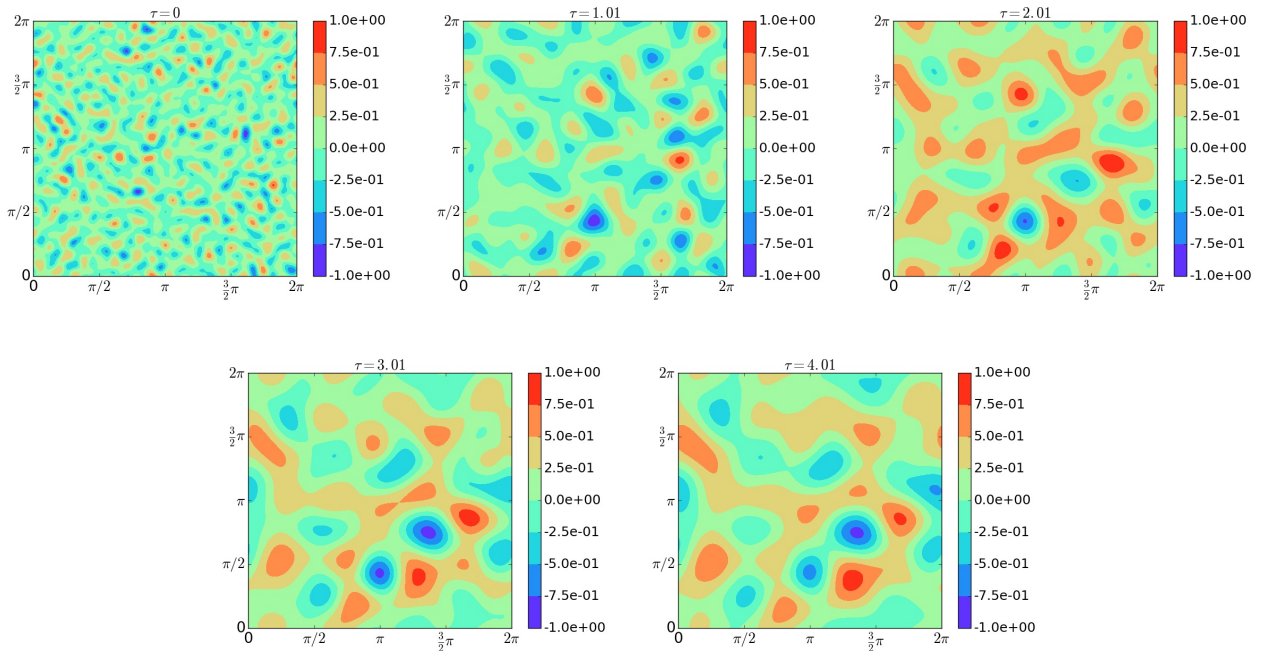


Figura 3.15: Evolución del campo de vorticidad para una resolución de 2048^2 , $R_\lambda = 1,95$. El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

De la visualización de la evolución del campo de ω también puede evidenciarse como al pasar el tiempo los vórtices van adoptando una forma casi circular y de larga duración, característicos de la turbulencia bidimensional. También podemos ver como al acercarse dos vórtices lo suficiente estos se deforman mostrando el proceso de filamentación, debido a los esfuerzos de cizallamiento provocados por el campo de velocidad, terminando en la convergencia de los vórtices cuando la polaridad de rotación es la misma o en la separación de estos cuando su polaridad es opuesta.

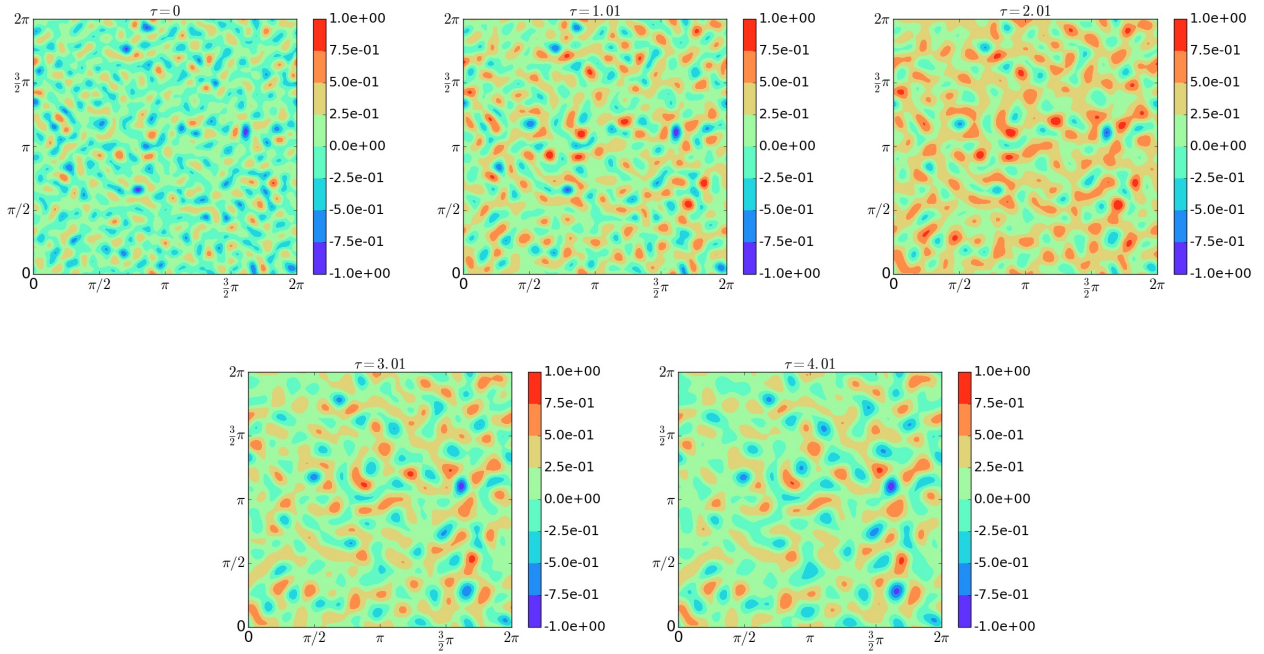


Figura 3.16: Evolución del campo de vorticidad para una resolución de 2048^2 , $R_\lambda = 19,47$. El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

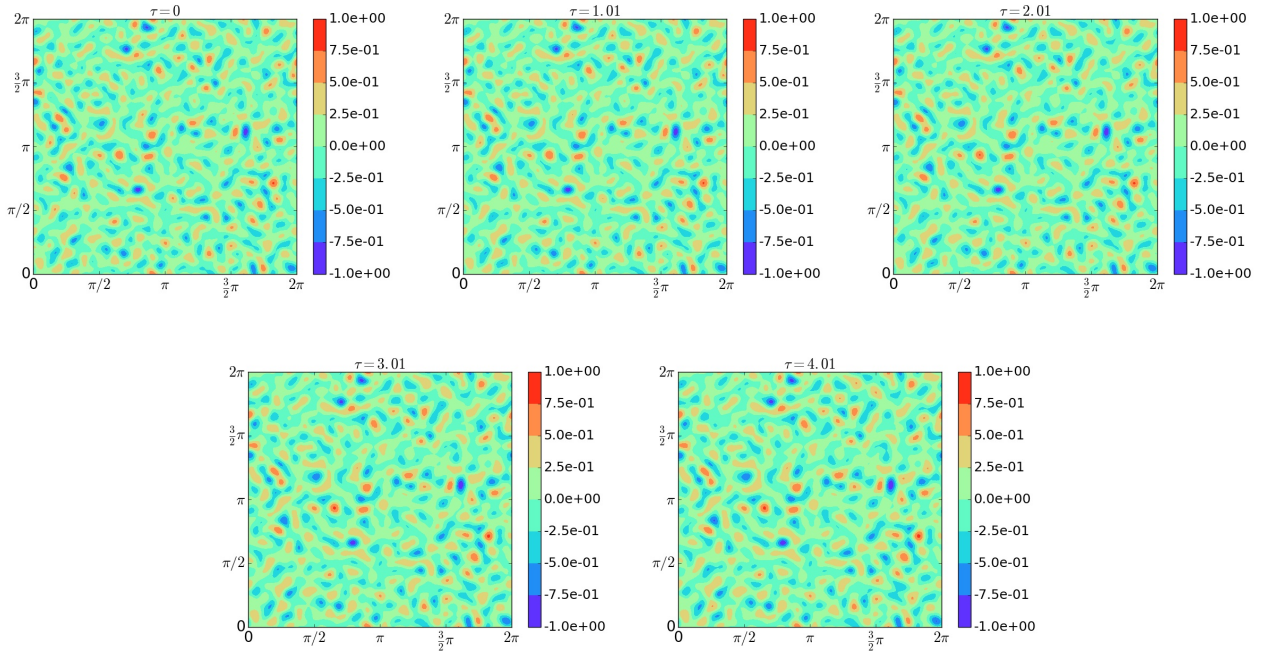


Figura 3.17: Evolución del campo de vorticidad para una resolución de 2048^2 , $R_\lambda = 19,48$. El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

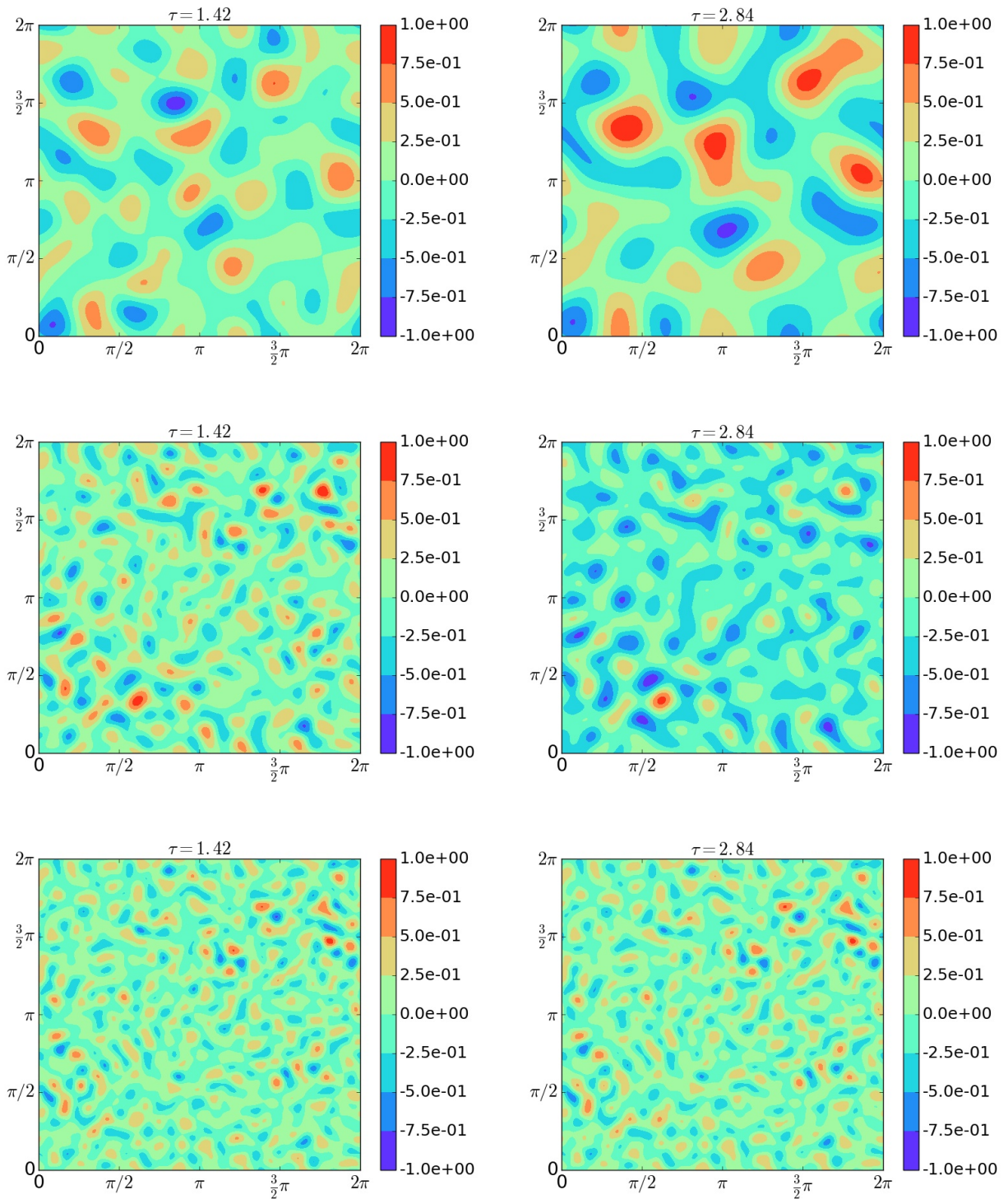


Figura 3.18: Campos de vorticidad a los tiempos normalizados $\tau = 1,42$ y $\tau = 2,84$ para una resolución de malla de 4096^2 , la fila superior representa los resultados para $R_\lambda = 1,95$, la fila del medio para $R_\lambda = 19,47$ y la fila inferior para $R_\lambda = 194,68$. El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

Otra manera de evidenciar la convergencia de vórtices es a través de la curtosis del campo de ω , esta comienza a crecer cuando $t > \tau_d$, lo cual indica un incremento en la intermitencia espacial. Esta evolución de la curtosis nos indica que el campo de ω está siendo dominado por vórtices coherentes y como consecuencia la expansión del área entre estos donde la intensidad de la ω es baja, McWilliams (1984).

La figura 3.19 nos muestra la evolución de la curtosis para una resolución de malla de 1024^2 , puede notarse un incremento acelerado para los números de Reynolds bajos mientras que para altos números de Reynolds esta tiende a permanecer constante. Como es de esperarse la curtosis no presentará un aumento significativo en su valor para tiempos de simulación inferiores a τ_d , puede notarse como para $R_\lambda = 1,95$ se presenta un incremento constante ya que τ_d es menor a los tiempos representados en la gráfica, mientras que para $R_\lambda = 19,47$ puede apreciarse un incremento significativo de la curtosis para tiempos de simulación mayores a $t = 10$ lo cual es consistente con la teoría. Con respecto a la evolución de la curtosis para $R_\lambda = 194,68$ no se ve algún incremento considerable, esta permanece casi constante, de nuevo debido a que los tiempos reportados son menores a τ_d .

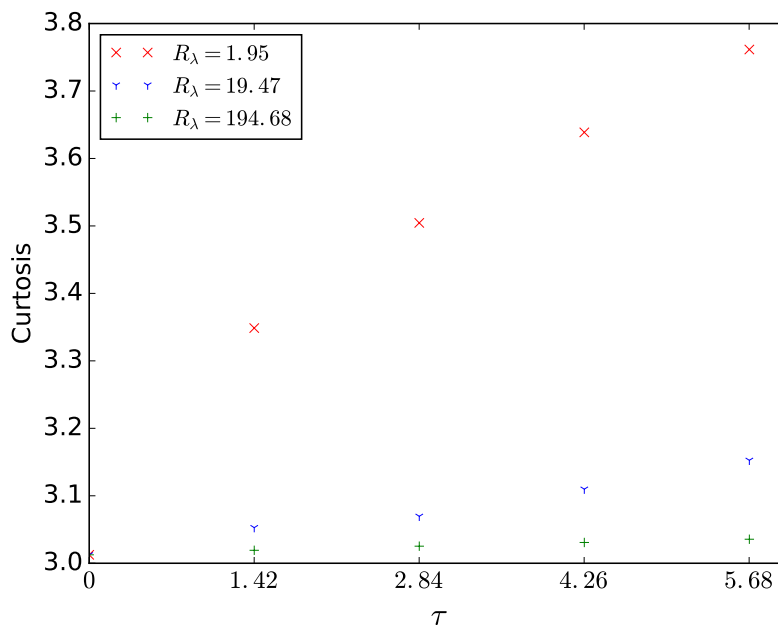


Figura 3.19: Evolución de la curtosis para una resolución de malla de 1024^2 . El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

La figura 3.20 nos muestra la evolución de la curtosis para una resolución de malla de 2048^2 . Para esta resolución de malla puede notarse la misma tendencia de incremento en su valor para números de Reynolds bajos, pero para el $R_\lambda = 19,47$ puede observarse como tiende a bajar y luego sube después de $t = 10$, este comportamiento es de esperarse debido a que para esta resolución de malla y número de Reynolds el $\tau_d = 14,94$, por lo tanto después de este tiempo la curtosis comenzará a presentar un incremento en su valor, tal y como lo describe McWilliams (1984) en su artículo.

Como se comentó anteriormente para una resolución de malla de 4096^2 encontramos un comportamiento diferente para la evolución de los vórtices a partir de la curtosis, aunque la tendencia a la convergencia de vórtices puede evidenciarse en las gráficas de los campos de ω , la curtosis en especial para bajos números de Reynolds tiende a disminuir, esto es debido a que los tiempos simulados son inferiores a τ_d . Para esta resolución de malla es necesario realizar simulaciones más largas con el fin de dar el tiempo necesario a que la turbulencia se desarrolle y observemos el comportamiento esperado. De los resultados obtenidos del análisis de la evolución de la curtosis puede evidenciarse como existe un incremento de esta estadística, mostrándonos un aumento en la intermitencia de la ω y por lo tanto la convergencia de vórtices.

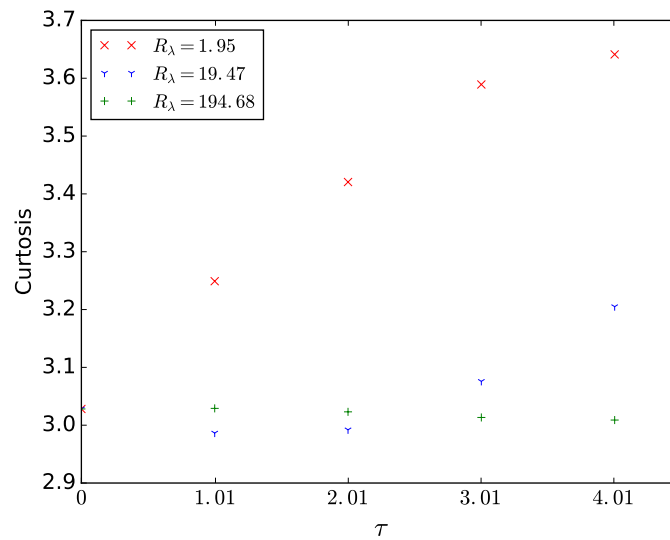


Figura 3.20: Evolución de la curtosis para una resolución de malla de 2048^2 . El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

Para cuantificar de otra manera la convergencia de los vórtices en la evolución del campo de vorticidad y verificar los resultados obtenidos por medio de la curtosis se calculó el PDF de los campos de vorticidad estudiados. Como se mencionó en la sección 1.5, al incrementarse el área entre vórtices debido a la convergencia de estos en la evolución del PDF deben evidenciarse picos donde se encuentra la mayor concentración. La distribución de la vorticidad es Gaussiana para el campo de vorticidad inicial, la figura 3.22 nos muestra la evolución del PDF para una resolución de 1024^2 .

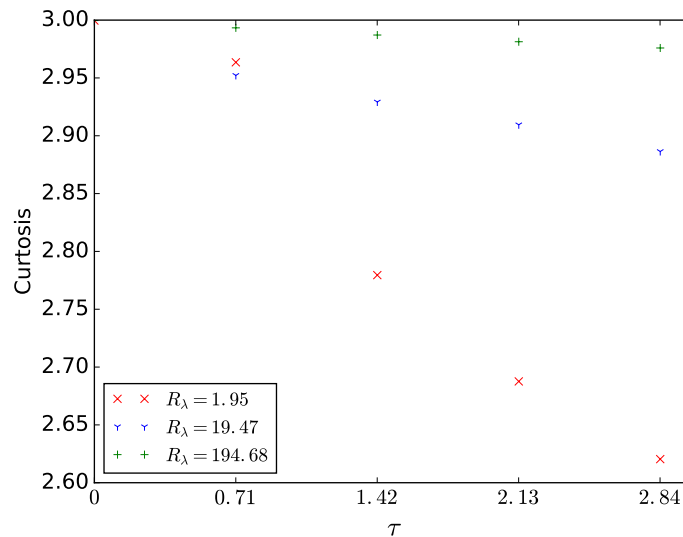


Figura 3.21: Evolución de la curtosis para una resolución de malla de 4096^2 . El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

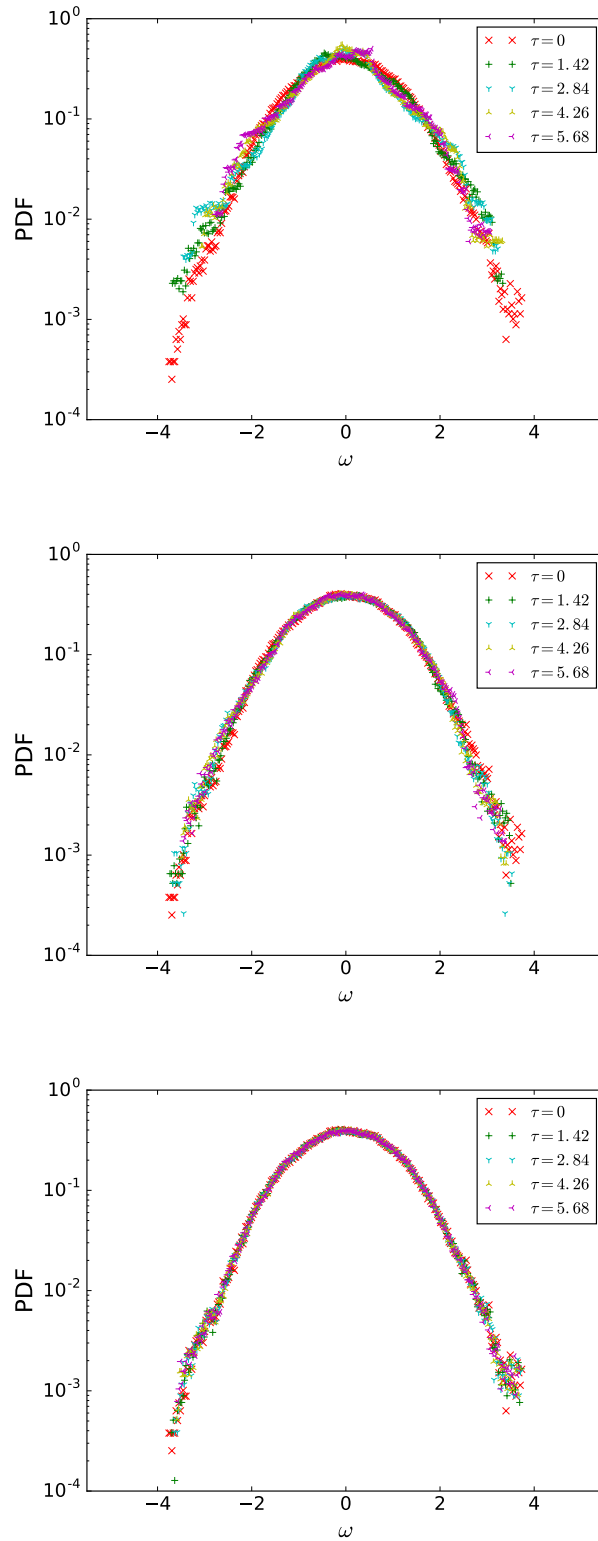


Figura 3.22: Evolución del PDF de la ω normalizada con la $\omega r.m.s$ en una resolución de malla de 1024^2 , La figura superior corresponde a $R_\lambda = 1,95$, en el medio $R_\lambda = 19,47$ y en la parte inferior $R_\lambda = 194,68$. El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

De las gráficas de la evolución del PDF puede evidenciarse la aparición de picos en las zonas de mayor concentración de la vorticidad, lo que indica un aumento en la intermitencia de la misma en el campo, esto quiere decir que el área entre vórtices se incrementa con el paso del tiempo debido a la convergencia de los vórtices. Aunque estos picos son pequeños dan indicios del comportamiento esperado. Es necesario realizar simulaciones más largas para que tanto los resultados obtenidos por la evolución de la curtosis, como los obtenidos con los PDF den una visualización más concreta del fenómeno, aunque los resultados obtenidos evidencian el comportamiento esperado en la evolución de los vórtices de la turbulencia en dos dimensiones.

Del análisis de la evolución del campo de vorticidad y del espectro de energía puede concluirse como la transferencia de energía desde las micro escalas hacia las grandes escalas de la turbulencia provoca la convergencia de vórtices en la evolución del campo de ω , donde vórtices de pequeño tamaño seden su energía a vórtices cada vez más grandes. Esto puede comprobarse en la visualización de la evolución de los campos de vorticidad, donde a medida que pasa el tiempo, la población de pequeños vórtices va disminuyendo mientras estos convergen en vórtices de mayor tamaño y de larga vida. Al observar la evolución del espectro de energía a bajos números de Reynolds y comparándola con la evolución del campo de vorticidad al mismo número de Reynolds, podemos verificar como una transferencia de energía a las escalas más grandes de una manera más eficiente nos da como resultado unos vórtices de mayor tamaño, mientras que a números de Reynolds altos la transferencia de energía es menos eficiente y por lo tanto obtenemos vórtices no tan grandes como en el caso anterior.

3.6. Función de estructura

Una de las maneras de hacer un diagnóstico estadístico en el espacio real de la turbulencia en dos dimensiones, es por medio de las funciones de estructura. Estas normalmente son usadas para estimar la distribución de la energía contenida escala a escala a través de la gama de tamaños de los vórtices, también es utilizada para comprobar la estructura de las finas escalas de la turbulencia Davidson (2013).

Como puede observarse en la figura 3.23 la función de estructura experimenta un decaimiento entre el valor inicial y los tiempos subsiguientes reportados, esto debido a las fuerzas viscosas que van disipando la energía. Adicionalmente, la función de estructura nos aporta información acerca de la distribución de la energía entre las escalas, en la figura 3.23 puede notarse como a medida que pasa el tiempo la función de estructura de segundo orden se normaliza a separaciones más grandes, indicándonos la energía contenida en los remolinos más grandes que r , lo cual comprueba por otro medio la convergencia de vórtices, indicando que con el paso del tiempo encontramos remolinos cada vez más grandes.

Para el caso de la turbulencia isotrópica $\langle u_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \mathbf{u}^2 \rangle$, y por lo tanto $\frac{3}{4} \langle (\delta u)^2 \rangle \rightarrow \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle$, entonces podemos decir que para la turbulencia isotrópica se puede interpretar $\frac{3}{4} \langle (\delta u)^2 \rangle$ como la energía contenida en todos los remolinos de tamaño menor a r , Davidson (2013). En la figura 3.23 Puede notarse como a altos números de Reynolds y cuando la turbulencia se encuentra desarrollada el valor máximo de la función de estructura tiende a un valor cercano a los $3/4$, siendo congruente con la teoría.

Ahora con el objetivo de analizar la dependencia al número de Reynolds de la función de estructura se presentan los siguientes resultados. La figura 3.24 nos muestra la dependencia al número de Reynolds de la función de estructura de segundo orden para una resolución de 2048^2 para el tiempo $\tau = 4,01$ correspondiente al tiempo de simulación $t = 20$, Las demás resoluciones no se reportan debido a que se presenta el mismo comportamiento. Puede observarse como a bajos números de Reynolds existe un mayor decaimiento de la función de estructura, lo cual es de esperarse ya que la energía es disipada más eficientemente a mayor viscosidad. Por otro lado, a altos números de Reynolds puede evidenciarse como la disipación de energía es poco eficiente y por lo tanto la función de estructura presenta un decaimiento muy leve.

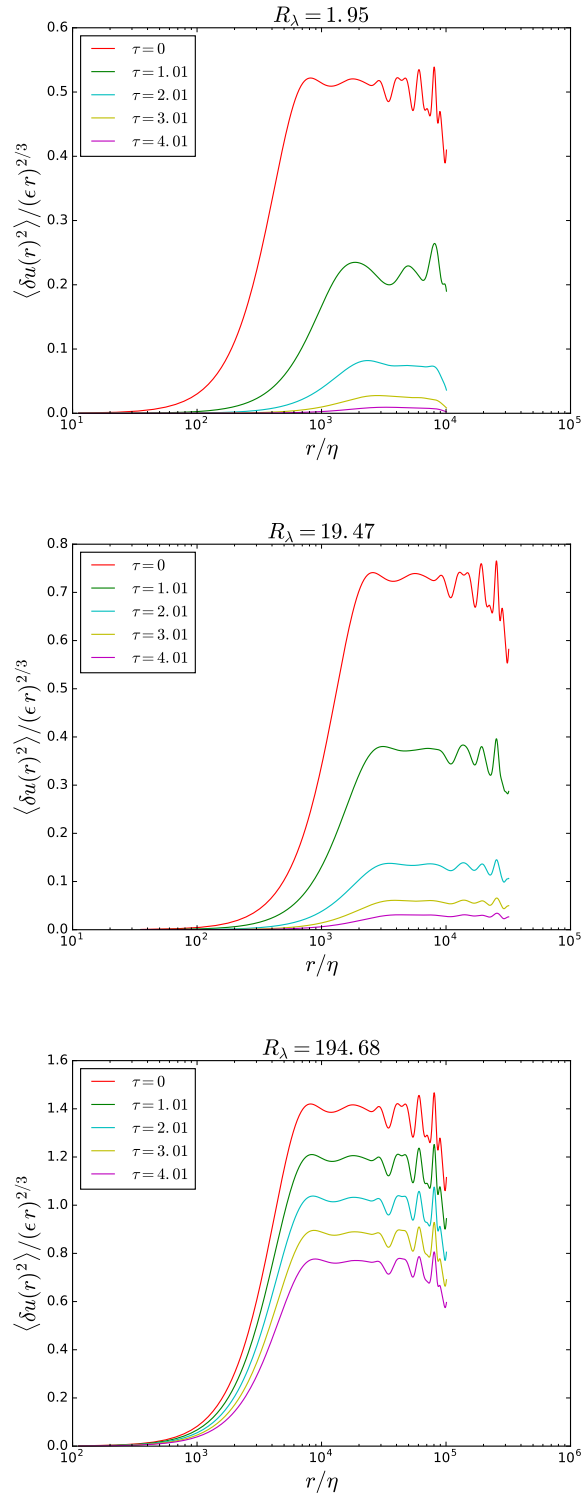


Figura 3.23: Evolución de la función de estructura de segundo orden del campo de u , para una resolución de malla de 2048^2 y para los números de Reynolds $R_\lambda = 1,95$ arriba, $R_\lambda = 19,47$ en el medio y $R_\lambda = 194,68$ en la parte inferior. El tiempo se encuentra normalizado con el tiempo inicial de rotación de un vórtice τ_ω .

Otra observación que se puede obtener de la dependencia al R_λ de la función de estructura de segundo orden es que a bajos números de Reynolds la función de estructura alcanza su pico a separaciones más grandes, cuando $r \approx \infty$, si comparamos este resultado con los obtenidos de la visualización del campo de vorticidad, podemos comprobar que para bajos números de Reynolds los vórtices generados son de un tamaño mayor que para altos números de Reynolds, esto indica como r al ser aproximadamente igual o menor al tamaño de los vórtices más grandes sobre el campo no hay un aporte de energía entre las diferentes escalas y por lo tanto la función de estructura se normaliza.

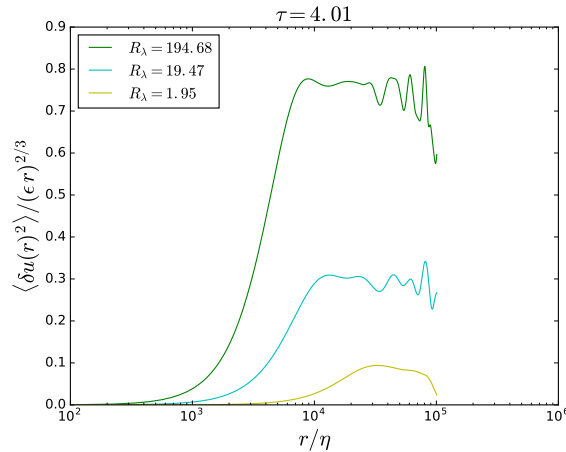


Figura 3.24: Dependencia al número de Reynolds de la función de estructura de segundo orden para el tiempo de simulación $\tau = 4,01$ correspondiente a $t = 20$. Con una resolución de malla de 2048^2 .

La función de estructura nos brinda información no solo del sentido del flujo de la energía, transferencia de energía cinética de escalas pequeñas hacia las grandes, sino que además nos brinda información acerca de la evolución del campo de vorticidad, comprobando por otro medio la tendencia de los vórtices a converger formando vórtices de un mayor tamaño y por lo tanto la cascada inversa de energía.

Deben realizarse simulaciones más largas, de tal manera que la turbulencia se desarrolle completamente en altas resoluciones de malla y altos números de Reynolds, para de esta manera verificar la regla de los 4/5 de Kolmogorov, similar a lo descrito por Davidson (2013) de los 3/4. De los resultados obtenidos, puede observarse como a una resolución de malla de 2048^2 , la constante universal de Kolmogorov C_2 va tendiendo a un valor cercano a la ley de los 4/5 a medida que la turbulencia se va desarrollando, para el momento de la simulación esta constante alcanza un valor cercano a $C_2 \approx 0,8$, pero como puede verse en la figura 3.23, su tendencia es a seguir decayendo, sería conveniente saber que tanto y si se sigue cumpliendo lo descrito por Kolmogorov.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

Antes de exponer los resultados más relevantes sobre esta investigación, cabe recalcar algunas de las conclusiones obtenidas tras la puesta en ejecución de las simulaciones realizadas y de la computación paralela. Como se ha visto a lo largo de este documento se utilizó computación paralela para la simulación de la ecuación de Navier-Stokes, ya que, para estudiar la turbulencia, ya sea bidimensional o tridimensional, se hace necesario altas resoluciones de malla con el fin de obtener la información de todas las escalas longitudinales, ya que la turbulencia es un fenómeno multi-escala y son necesarias altas resoluciones para una mejor comprensión de los fenómenos que en esta se desenvuelven. Adicionalmente cuando se posee una mayor resolución de malla, no solo se debe disminuir el paso del tiempo en la integración temporal debido a la condición del CFL o número de Courant, además el tiempo requerido para que se desarrolle la turbulencia y alcance las escalas disipativas, τ_d , aumenta conforme aumenta la resolución de malla, como se pudo comprobar en la sección 3.3, acarreado un mayor costo computacional.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, es posible que al utilizar computación paralela alcancemos una excelente aceleración computacional por iteración, pero si se desean realizar simulaciones dependientes del tiempo nos encontramos que el Δt debe ser mucho más bajo debido a la resolución espacial empleada, y por lo tanto para simular determinado tiempo se deben realizar muchas más iteraciones que a bajas resoluciones de malla, lo cual termina en un costo computacional adicional el cual no se puede evitar. Por lo tanto, buscar el rendimiento óptimo de un código a ejecutar se hace vital cuando nos enfrentamos a estos casos de computación científica, donde las altas resoluciones de malla y la discretización temporal fina son el común.

La implementación de la computación en paralelo es totalmente necesaria para el estudio de fenómenos como lo es la turbulencia, debido a su alto costo computacional. Dicha paralelización puede ser realizada por los métodos como OpenMP, la cual distribuye la memoria dentro de un procesador y todos sus núcleos, por MPI la cual me permite la comunicación entre varios procesadores y acceder de esta manera a una mayor cantidad de núcleos o una paralelización híbrida empleando los dos métodos, pero todo esto debe estar acompañado con buenas prácticas de programación, ya que la computación en paralelo por sí sola no garantiza una optimización en el tiempo de cómputo. Por ejemplo, los ciclos son costos computacionalmente y deben ser evitados siempre que sea posible, la impresión en pantalla del estado de la simulación es altamente costosa computacionalmente hablando y puede afectar directamente el performance de la simulación, la impresión de los datos, además de no permitir paralelización debido a la sincronización entre núcleos por el acceso a la ubicación de memoria del archivo, es altamente costoso y puede ocupar grandes volúmenes de disco, aunque esto último puede disminuirse al imprimirse en archivos sin formato o binarios; poner condicionales dentro de un ciclo altera completamente el performance de la simulación. Todas estas condiciones deben evitarse siempre que sea posible y en ocasiones en las que no es posible debe tenerse en cuenta dicho costo computacional.

Otra variable que debe tenerse en cuenta al realizar simulaciones con altas resoluciones de malla es el manejo de los arreglos de datos dentro del código y su manipulación para el control de uso de memoria en la computación. Debe tenerse control sobre todas las variables tanto locales como de entorno que se están tomando para el desarrollo del problema y además estimar la cantidad necesaria de memoria para su ejecución, ya que a altas resoluciones de malla si se está trabajando con reales de doble precisión los arreglos de datos pueden llegar a pesar gigas, y en ocasiones pueden llegar a consumir toda la memoria RAM del equipo. Cuando esto ocurre se empieza a utilizar el disco duro para el procesamiento de los datos y es allí donde todo performance termina, el tiempo de computo será incluso más prolongado que si se hubiera computado en serie. Para evitarse esta condición debe implementarse una memoria dinámica, asignando variables cuando sean de utilidad y eliminándolas cuando ya no sean necesarias, reasignar variables con el fin de no cargar mucho la memoria con diferentes variables temporales y de esta manera mantener un consumo de memoria más estable. Por ejemplo la tabla 4.1 nos muestra la memoria total necesaria para las simulaciones realizadas en esta investigación y para resoluciones de malla hasta 32768^2 , para su cálculo se tuvo en cuenta que cada real de doble precisión en un computador de 64 bits pesa 8 Bytes, por lo tanto un arreglo de 1024×1024 debe pesar 8,4 MB, luego sumando todos los arreglos de datos involucrados en el algoritmo generado y todos los enteros se llega a los resultados obtenidos.

Malla	Memoria en GB
1024	0.25
2048	1.10
4096	4.03
8192	16.11
16384	64.43
32768	257.70

Tabla 4.1: Memoria necesaria para la ejecución de las simulaciones en GB.

Nótese que para resoluciones de malla de 16384^2 nodos y superiores se requieren equipos con más de 64 Gb de RAM o crear memorias dinámicas dentro del código de manera que se optimice el uso de memoria del equipo, pero existen ocasiones en los que entran tantas variables a interactuar entre sí que por más que deseamos optimizar el uso de memoria no es posible, es por esta razón que se debe tener conciencia de la cantidad de memoria necesaria para la simulación del problema que deseamos resolver.

Ahora después de haber expuesto las conclusiones obtenidas de la implementación del código y los aspectos relevantes que deben de tenerse en cuenta a la hora de hacer computación científica, entraremos en la discusión de la turbulencia en dos dimensiones, exponiendo un resumen de los resultados más relevantes encontrados en esta investigación.

Como puede observarse en la sección 3.5, el campo de ω evoluciona mostrándonos una convergencia de los vórtices a medida que el tiempo pasa. En la turbulencia bidimensional con libre decaimiento los vórtices se van desplazando por el campo y cuando dos de la misma polaridad se acercan lo suficiente estos se unen para formar cada vez vórtices más grandes, dando como consecuencia una disminución en la población de vórtices y un aumento en el área entre estos, lo que se interpreta como un aumento de la intermitencia de la ω . Puede notarse en las gráficas del campo de vorticidad como a bajos números de Reynolds el proceso de convergencia se da de una manera más acelerada que para altos números de Reynolds, dando como resultado vórtices de gran tamaño con apariencia casi circular y de una larga vida.

Lo anterior puede comprobarse con los resultados obtenidos de la evolución del PDF y la curtosis del campo ω , podemos corroborar la convergencia de vórtices, ya que a medida que el tiempo transcurre se evidencia un aumento en la curtosis y la aparición de picos en el PDF en las zonas de mayor concentración, lo que nos indica un aumento en el área entre vórtices donde la vorticidad es aproximadamente cero. Para resoluciones mayores a 4096^2 se hace necesario realizar simulaciones más largas que las realizadas en esta investigación, ya que como se muestra en la sección 3.3, el intervalo de tiempo necesario para que se dé la disipación entre escalas, τ_d , es mayor que las analizadas en esta investigación y por lo tanto no se dará un incremento en la curtosis, corroborando lo descrito por McWilliams (1984) en su artículo. Por otro lado, aunque el PDF nos muestra

concentraciones en los valores de ω , especialmente para bajos números de Reynolds, sería bueno corroborar los resultados obtenidos con simulaciones más largas.

Con respecto a la evolución del espectro de energía puede comprobarse una transferencia desde las micro escalas hacia las escalas superiores, evidenciando de esta manera la cascada inversa de energía para la turbulencia en dos dimensiones. De los resultados obtenidos podemos ver como a medida que pasa el tiempo la energía contenida en los números de onda menores va aumentando mientras que a altos números de onda se presenta un corrimiento del espectro hacia la izquierda, mostrando la transferencia de energía desde vórtices más pequeños hacia vórtices de gran tamaño, resultado coherente con la convergencia de vórtices. También podemos concluir que a bajos números de Reynolds esta cascada de energía se realiza más rápidamente que a altos números de Reynolds, esto debido a que a bajos números de Reynolds la alta viscosidad hace que la disipación de energía cinética, ϵ , sea más eficiente, activando de esta manera el proceso de cascada, pasando la energía desde vórtices pequeños a vórtices cada vez más grandes. Este mismo comportamiento puede observarse en la evolución de los campos de vorticidad, donde a bajos números de Reynolds la alta viscosidad favorece la convergencia de vórtices y su decaimiento en magnitud, mientras que a altos números de Reynolds la viscosidad tiende a cero y por lo tanto no existe un mecanismo que active la transferencia de energía entre escalas, por lo tanto cuando el número de Reynolds tiende a infinito la disipación de la energía tiende a cero y por lo tanto la transferencia de energía entre escalas pierde eficiencia.

De los resultados obtenidos de los espectros de entropía podemos concluir que existe un decaimiento con el paso del tiempo, debido a que la disipación de entropía, β , se realiza más eficientemente que la disipación de energía y puede evidenciarse en la evolución de su espectro. Con respecto a la cascada de Entropía no se encontraron resultados concluyentes, ya que los tiempos simulados no fueron lo suficientes para que se desarrollara la turbulencia completamente desde su condición inicial, de modo que la disipación alcanzara las micro escalas, η , y se desarrolle el proceso de cascada. Por lo tanto, para una visualización del fenómeno es necesario simulaciones más largas y con mayor resolución espacial, en orden de asegurar que la turbulencia se desarrolle por completo y obtener más información desde las micro escalas.

La función de estructura de segundo orden es una excelente estadística para caracterizar la turbulencia en dos dimensiones en el espacio físico, ya que no solo nos brinda información sobre la covarianza de la velocidad en el campo, sino que además nos brinda información de cómo se está transmitiendo la energía entre las diferentes escalas de la turbulencia. En los resultados obtenidos podemos observar como a mayor separación entre nodos, mayor r , existe un incremento en el valor de la función de estructura, lo que se traduce como un incremento en la energía contenida entre las diferentes escalas. Su evolución en el tiempo nos da un indicativo del decaimiento de la energía cinética de la turbulencia y de cómo a medida que pasa el tiempo los vórtices van convergiendo, esto puede verificarse al observar la magnitud de r en el punto en el que la función de estructura alcanza su máximo, punto donde la separación, r , es igual o inferior al tamaño máximo de los vórtices y por lo tanto no hay más transferencia de energía hacia escalas superiores. De su dependencia al número de Reynolds podemos observar el mismo comportamiento que el espectro de energía, a Reynolds bajos existe un mayor decaimiento que para altos números de Reynolds.

Puede comprobarse como los campos simulados y el algoritmo generado son consistentes con la literatura existente sobre la turbulencia en dos dimensiones. Pudo comprobarse como la disipación de energía cinética tiende a cero conforme el número de Reynolds tiende a infinito y como la disipación de la entropía se realiza más eficientemente. Pudo comprobarse que la escala integral de Taylor presenta un incremento con el tiempo, dando otra evidencia de la cascada inversa de energía Davidson (2013). También pudo comprobarse la veracidad del intervalo de tiempo requerido para que la turbulencia se desarrolle, τ_d , gracias a los resultados obtenidos de la evolución de la curtosis del campo ω , mostrando resultados congruentes con lo encontrado en la literatura, McWilliams (1984).

Debido a que las resoluciones de malla simuladas solo distan una de otra en un factor de 2 en cada coordenada espacial, los resultados obtenidos para todas las resoluciones de malla son similares. Para encontrar una diferencia significativa en los resultados entre una resolución y otra, o la evidencia de otros fenómenos, como por ejemplo la cascada de entropía, es necesario incrementar mucho más la resolución de malla con el fin de obtener más información desde las micro escalas. Existen reportes para resoluciones de malla de 16384^2 donde se evidencian la cascada inversa de energía y entropía para la turbulencia en dos dimensiones, Boffetta (2007).

Teniendo en cuenta todos los resultados obtenidos en esta investigación podemos verificar que son consistentes con los resultados obtenidos por Boffetta (2007), San and Staples (2012), McWilliams (1984), Fox and Davidson (2010) y Eyink (2006), Paret and Tabeling (1997), Chen (2006) mostrando una caracterización de la turbulencia en dos dimensiones en decaimiento libre, evidenciando la cascada inversa de energía y por lo tanto la convergencia de vórtices.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batchelor, G. (1969). Computation of the energy spectrum in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids Suppl.*, II(12):236–239.
- Batchelor, G. K. (1953). *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press.
- Boffeta, G. and Ecke, R. E. (2012). Two-dimensional turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, (44):427–451.
- Boffeta (2007). Energy and enstrophy fluxes in the double cascade of two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mechanics*, 589:253–60.
- Boffeta and Musacchio (2010). Evidence for the double cascade scenario in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev.*, 82.
- Canuto (2006). Spectral methods: Fundamentals in single domains.
- Charney (1971). Geostrophic turbulence. *Atmos. Sci.*, (28):1087–95.
- Chen, Ecke, E. R. W. X. (2006). Physical mechanism of the two-dimensional inverse energy cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 96.
- Chomaz (2001). The dynamics of a viscous soap film with soluble surfactant. *J. Fluid Mechanics*, 442:387–409.
- Couder, Chomaz, and Rabaud (1989). On the hydrodynamics of soap films. *J. Fluid Mechanics*, 37:384–405.
- Davidson, P. A. (2013). *TURBULENCE IN ROTATING, STRATIFIED AND ELECTRICALLY CONDUCTING FLUIDS*. Cambridge University Press.
- Durrant, D. R. (2010). *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer Science+Business Media, 2 edition.
- EAFIT, U. (2017). Especificaciones técnicas de apolo. url <http://www.eafit.edu.co/centros/apolo/Paginas/technical-specification.aspx>.
- Çengel, Y. A. and Cimbala, J. M. (2012). *Mecánica de Fluidos fundamentos y aplicaciones*. McGraw-Hill, 2 edition.
- Eyink (2006). A turbulent constitutive law for the two-dimensional inverse energy cascade. *J. Fluid Mechanics*, 549:191–214.
- FFTW.org (2017a). Fast fourier transform western. url www.fftw.org.
- FFTW.org (2017b). Fft accuracy benchmark comments. url <http://www.fftw.org/accuracy/comments.html>.
- Fox and Davidson (2010). Freely decaying two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mechanics*, 659:351–364.

-
- H, C. and van Heijst G. (2009). Two-dimensional navier–stokes turbulence in bounded domains. *Appl Mech*, (62):020802.
- Kolmogorov, A. N. (1941). Local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid at very large reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 31(6):538–541.
- Kraichnan, R. H. (1967). Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 10:1417.
- Kuznetsov E., Naulin V., N. A. J. R. J. (2010). Sharp vorticity gradients in two-dimensional turbulence and the energy spectrum. *Theor Comput Fluid Dynam*, 24(1):253–268.
- Lilly (1969). Numerical simulation of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids.*, 12:II:240–249.
- Maltrud M, V. G. (1991). Energy spectra and coherent structures in forced two-dimensional and beta-plane turbulence. *J. Fluid Mechanics*, 228:321–342.
- McWilliams, J. C. (1984). The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 146:21–43.
- NASA (2015). Navier-stokes equation. url <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/nseqs.html>.
- NASA, JPL-Caltech, S. M. G. E. S. D. (2017). Jupiter’s clouds of many colors. url <https://www.nasa.gov/image-feature/jpl/pia21392/jupiter-s-clouds-of-many-colors>.
- Orszag (1970). Analytical theories of turbulence. *J. Fluid Mechanics*, 41:363–386.
- Paret and Tabeling (1997). Experimental observation of the two-dimensional inverse energy cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 79:4162–65.
- Physlink (2017). Aliasing. url <http://www.physlink.com/education/askexperts/ae490.cfm>.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- Reynolds, O. (1883). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the royal society of London*, 35(224-226):84–99.
- Richardson, L. F. (1922). *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press.
- Rivera and Wu (2002). Homogeneity and the inertial range in driven two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids.*, 14:3098–108.
- San, O. and Staples, A. E. (2012). High-order methods for decaying two-dimensional homogeneous isotropic turbulence. *ELSEVIER*, (63):105–127.
- Smith, Y. (1993). Bose condensation and small-scale structure generation in a random force driven 2d turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 71:352–55.
- Taylor, G. I. (1935). Statistical theory of turbulence. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 151, pages 421–444. The Royal Society.
- Tennekes, H. and Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. MIT press.
- Tsinober, A. (2009). *An Informal Conceptual Introduction to Turbulence*. Springer Science+Business Media, 2 edition.
- van Mourik, T. (2005). Fortran 90/95 programming manual. *University College Of London*.
- Wikipedia (2017a). Computacion paralela. url <https://es.wikipedia.org/wiki/Computacionparalela>.
- Wikipedia (2017b). Curtosis. url <https://es.wikipedia.org/wiki/Curtosis>.
- Wikipedia (2017c). Pdf. url <https://es.wikipedia.org/wiki/Funciondedensidaddeprobabilidad>.