

Productividad y sus efectos sobre el crecimiento económico en Colombia: un análisis de equilibrio general computable integrado con inteligencia artificial

DIEGO FERNANDO MONTAÑEZ HERRERA

*Trabajo de grado presentado para obtener el
Título de Magíster en Economía*

Asesores:

Álvaro Arturo Hurtado Rendón
Jesús Alonso Botero García

Septiembre 2020



Departamento de Economía
Escuela de Economía y Finanzas
Universidad EAFIT

Productividad y sus efectos sobre el crecimiento económico en Colombia: un análisis de equilibrio general computable integrado con inteligencia artificial

Autor: Diego Fernando Montañez Herrera¹
Asesores: Jesús Alonso Botero García² & Álvaro Arturo Hurtado Rendón³

Escuela de Economía y Finanzas - Universidad EAFIT

Resumen

La productividad es la esencia del crecimiento económico de mediano y largo plazo de cualquier economía; velar por su incremento sostenido, sin duda alguna, es uno de los desafíos más relevantes de las autoridades económicas para aliviar la pobreza y satisfacer las aspiraciones crecientes de los ciudadanos del mundo.

En este sentido se cuantifica los efectos en la actividad económica en Colombia del crecimiento de la productividad bajo un marco de equilibrio general computable capaz de incorporar determinantes de sus fuentes de crecimiento de carácter más “endógeno”. Lo anterior, dentro de una economía con firmas heterogéneas y competencia imperfecta bajo el modelo Melitz, cuenta con 12 ramas, 17 productos, 16 socios comerciales, trabajo calificado y no calificado (informal o no), un marco fiscal con Gobierno exógeno y 20 tipos de hogares (la mitad urbanos y la otra rurales) que permite hacer análisis distributivo. Este instrumento analítico y cuantitativo resulta de gran utilidad para los hacedores de política económica en tanto que les permite contemplar un panorama bastante completo de la economía colombiana en términos computacionales y evaluar los distintos escenarios de los efectos del diseño e implementación de políticas económicas orientadas a lograr un crecimiento de la productividad y su impacto en la senda del producto en la próxima década.

Adicionalmente, es uno de los primeros pasos de la integración de modelos de equilibrio general computable con técnicas modernas como las del campo de inteligencia artificial que permite mejorar de forma cuantitativa y analítica la toma de decisiones en la política macroeconómica tan necesaria en tiempos de crisis.

Palabra clave: Productividad, Crecimiento económico, Equilibrio General Computable (CGE), modelo Melitz, Inteligencia Artificial (AI). **JEL:** C68,C45,E24,F12.

¹Estudiante de la Maestría en Economía, Universidad EAFIT. Integrante del "Grupo de Estudios en Economía y Empresa (GEE)".
Email: dfmontaneh@eafit.edu.co

²Docente-investigador de la Universidad EAFIT. Integrante del "Grupo de Estudios en Economía y Empresa (GEE)".
Email: jabotero@eafit.edu.co

³Docente-investigador de la Universidad EAFIT. Integrante del "Grupo de Estudios en Economía y Empresa (GEE)".
Email: ahurtad1@eafit.edu.co

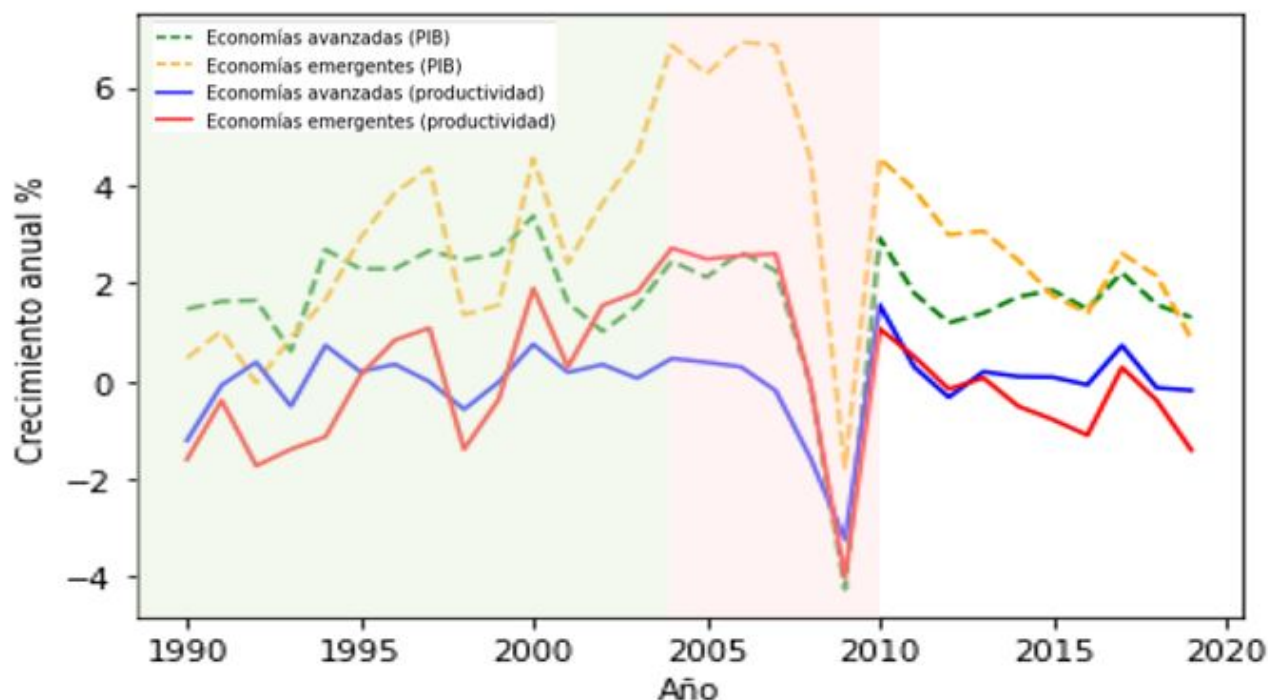
1. Introducción

La productividad es la esencia del crecimiento económico de mediano y largo plazo de cualquier economía; velar por su incremento sostenido, sin duda alguna, es uno de los desafíos más relevantes de las autoridades económicas para aliviar la pobreza y satisfacer las aspiraciones crecientes de los ciudadanos del mundo. Estudios empíricos muestran que el crecimiento de la productividad está estrechamente asociado con el cambio tecnológico (Echavarría-Soto et al., 2019), la innovación (Cirera and Maloney, 2017), crecimiento de las firmas (Grover Goswami et al., 2019) y políticas públicas bien encaminadas (Cusolito and Maloney, 2018). No obstante, sus fuentes de crecimiento siempre han sido objeto de larga discusión e interrogantes por su complejidad distintiva, a pesar de múltiples intentos no ha tenido una respuesta concluyente hasta la actualidad.

A nivel mundial ha resurgido el debate sobre el crecimiento de la productividad, como lo demuestra la reciente presentación del Proyecto de Productividad del Banco Mundial, el cual, ha iniciado con una serie de cumbres, conferencias, foros y se han publicado tres estudios muy interesantes: Grover Goswami et al. (2019); Cirera and Maloney (2017) y el de Cusolito and Maloney (2018); que buscan llevar el pensamiento frontera sobre la medición y los determinantes de la productividad a los responsables políticos globales. William Maloney el economista jefe encargado del proyecto explica que cada conferencia y volumen de la serie explora un aspecto diferente del tema a través del diálogo con académicos y formuladores de políticas, y a través del trabajo empírico patrocinado en países miembros. Lo anterior, teniendo en cuenta que el crecimiento de la productividad a nivel mundial se ha estancado en la última década, tanto en economías desarrolladas como en las emergentes, como se evidencia en la Figura 1, dónde la franja de color rojo muestra un periodo de deterioro por la crisis financiera y la franja de color gris exhibe un periodo de estancamiento. Cabe agregar que en la Figura 1 también se presenta el crecimiento económico, todas las series con frecuencia anual y en un periodo que comprende 1990 hasta al 2019.

Se evidencia que la economía mundial aún no ha podido recuperarse completamente de la crisis financiera del 2008, al menos en lo que se refiere a la productividad, interrumpiéndose periodos de expansión sobresalientes por parte de economías emergentes, llegando a tasas superiores del 2% registradas en el periodo 2004-2007 de forma consecutiva. Es importante destacar que la última década tanto para economías avanzadas como para las emergentes el aporte de la productividad al crecimiento del PIB ha estado en terrenos negativos. en resumen, en el periodo de 1990-2019 el promedio del crecimiento económico fue de 2,95% en las economías emergentes, siendo el aporte de la productividad al crecimiento del PIB del orden del 0,11%; mientras que las economías avanzadas presento registros menores del orden del 1,68% y -0,04% respectivamente. Ahora bien, el panorama cómo se muestra en la Figura 1 es preocupante en el periodo 2009-2019 con un promedio del crecimiento del PIB de 2.17% para las emergentes y de 1.19% para las avanzadas, siendo ambos menores que en el periodo analizado previamente. Haciendo los mismos cálculos para el aporte de la productividad al crecimiento del PIB en la última década se encuentra para las economía emergentes una contracción de -0.59% y un estancamiento para las economías avanzadas registrando un variación de la TFP de -0,09%.

Figura 1: **Contribución de la TFP en el crecimiento económico de economías emergentes⁴ y avanzadas⁵, 1990-2019**



Fuente: Elaboración y cálculos propios con datos del Conference Board en Python.

Ahora bien, desde una perspectiva regional, el estancamiento del crecimiento de la productividad se presenta de forma general y notable en América Latina, aunque con cierta diferenciación regional. Colombia no es la excepción. Es más, según una de las medidas que más se han usado en la literatura para aproximar el nivel de productividad de una economía, la “Productividad Total de los Factores (TFP)”, que permite evaluar el desempeño productivo de un país, a partir de cuánto crecen su producto y sus recursos productivos, en los últimos 40 años se evidencia un estancamiento en términos relativos de la economía colombiana respecto con las principales y similares economías de la región, como lo ilustra la Figura 2.

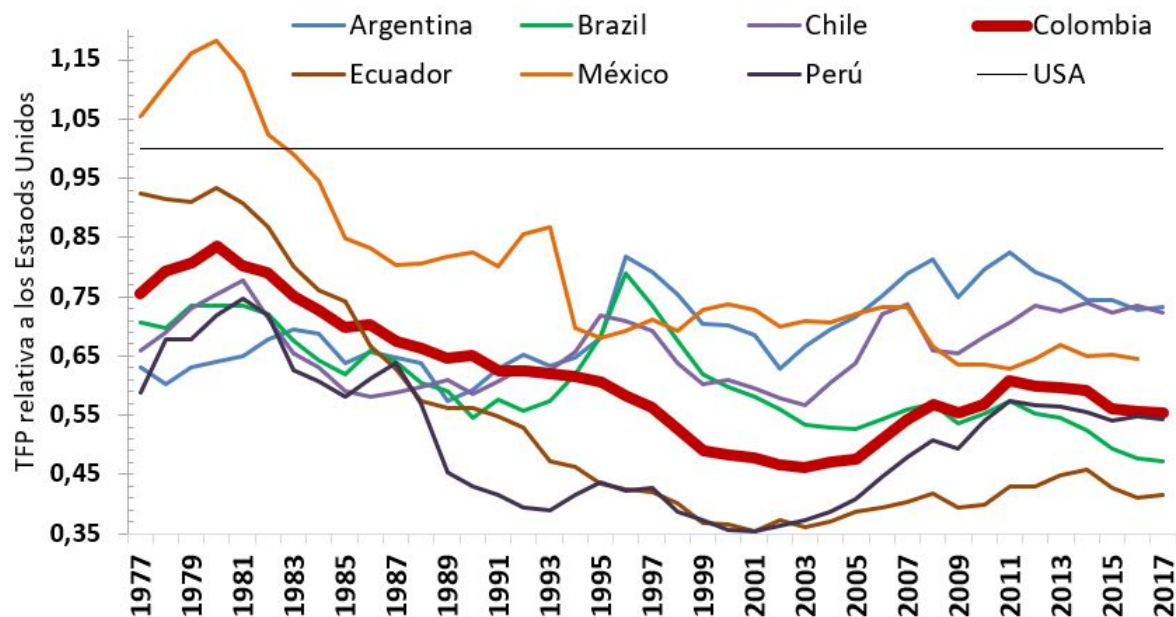
Es importante reconocer que se ha debatido entre los economistas la pertinencia de la TFP como proxy de la productividad, dado que generalmente el proceso de estimación mediante funciones de producción con factores productivos presenta problemas de endogeneidad. Por consiguiente, se han desarrollado métodos para corregir estos problemas, dentro de los cuales se destacan los estudios seminales de [Olley and Pakes \(1992\)](#) y [Levinsohn and Petrin \(1999\)](#), y más recientemente, [Wooldridge \(2009\)](#), [De Loecker \(2011\)](#) y [Akerberg](#)

⁴Siguiendo la clasificación del Fondo Monetario Internacional (FMI) se toma el promedio del crecimiento del PIB y la contribución de la productividad al PIB de un conjunto de países: Algeria, Angola, Egipto y Sudáfrica (Región de Africa); China, Indonesia, Malasya, Filipinas, Corea del Sur, Sri Lanka, Taiwan y Thailandia (Región de Asia); Azerbaijan, Belarus, Bulgaria, Croacia, República Checa, Grecia, Hungría, Kazajistán, Lituania, Polonia, Portugal, Rumania, Russia, Eslovaquia, Turquía y Ucrania (Región europea); Argentina, Brazil, Chile, Colombia, Dominicana, Ecuador, México, Perú, Uruguay y Venezuela (Región Latinoamérica).

⁵Siguiendo al FMI y el Banco Mundial se toma el promedio del crecimiento del PIB y la contribución de la productividad al PIB de las economías de Estados Unidos, Alemania, Japón, United Kingdom y Francia.

et al. (2015). Los autores han desarrollado técnicas para corregir el sesgo, con base en variables relacionadas con el proceso productivo que se usan como proxy de la productividad. Los primeros emplean la demanda de inversión como proxy, mientras que los segundos utilizan la demanda por insumos intermedios. Ambos trabajos establecen técnicas semiparamétricas de estimación, con base en información a nivel de firma, mientras que Wooldridge (2009) muestra como los estimadores semi-paramétricos establecidos en estas metodologías pueden ser implementados usando el método generalizado de los momentos (GMM). Akerberg et al. (2015) amplían el modelo de Olley and Pakes (1992), incorporando la estimación del coeficiente de trabajo de la función de producción a la segunda etapa de estimación con el propósito de eliminar posibles problemas de identificación y multicolinealidad (Echavarría-Soto et al., 2019).

Figura 2: Evolución de la Productividad (TFP) en Colombia y en un conjunto de economías de la región en 1977-2017



Fuente: Elaboración propia con datos del Penn World Table versión 9,1.(2020)

Se evidencia de la Figura 2 un estancamiento en el desempeño de la TFP de la mayoría de los países de la región en los últimos 40 años, respecto a la TFP relativa a los Estados Unidos; un panorama preocupante para la economía colombiana (línea roja), teniendo en cuenta que la productividad es la esencia del crecimiento económico de mediano y largo plazo, la fuerza que permite el progreso y la mejora de ingresos per cápita. Siguiendo la línea del Banco Mundial, la productividad representa la mitad de las diferencias en el PIB per cápita entre países (Cusolito and Maloney, 2018), de esta manera se puede afirmar que en gran parte las divergencias regionales en la evolución del PIB son explicadas por el comportamiento de la TFP presentado en la Figura 2. Cabe agregar que existen trabajos como el de Easterly and Levine (2003), dónde encuentran que la PTF explica cerca del 90 por ciento de las divergencias en el crecimiento del producto per cápita entre países. Este punto es vital, puesto que resalta la importancia de comprender las fuentes de crecimiento de la productividad, que por mencionar algunos trabajos, afirman que está estrechamente asociado con el cambio

tecnológico (Juan José et al., 2006), la innovación (Cirera and Maloney, 2017), el crecimiento de las firmas (Grover Goswami et al., 2019) y políticas públicas (Cusolito and Maloney, 2018). Por consiguiente, se convierte en un compromiso trascendental tanto para Colombia como para la región, aunar esfuerzos para velar por un crecimiento sostenido de la productividad que permita mayores ingresos per cápita para el alivio de la pobreza, satisfacer las aspiraciones crecientes y nacientes de los ciudadanos de la región.

En lo que se refiere propiamente a Colombia, tanto investigadores, como hacedores de política económica y la comunidad académica en general, han intentado explicar los fundamentos de esta última. Teniendo en cuenta la revisión bibliográfica de lo que se ha trabajado en el país, no son muchos los trabajos que se han encontrado, destacándose el de (Echavarría-Soto et al., 2019) que encuentran que las políticas e instituciones que recaen de forma agregada sobre las firmas no explican totalmente que la PTF de Colombia sea la mitad de los Estados Unidos y que el poder oligopólico (alto Herfindahl) afecta negativamente al crecimiento de la productividad total factorial. Otros estudios afirman la relevancia de los factores geográficos y climáticos en economía emergentes (Juan José et al., 2006), pero en su contraparte otros seminales para el país muestran evidencia que estos últimos no tienen una fuerte incidencia para el país (Clavijo and Banco, 2003). Tradicionalmente el análisis del crecimiento de la productividad en Colombia se ha estudiado a partir de metodologías econométricas y rankings internacionales basados en encuestas de percepción, no obstante, se han intentado abordar con una nueva metodología, como el estudio de Echeverry et al. (2005) basado en un trabajo directo con empresarios a través grupos de trabajo (focus groups), encontrando que la baja productividad surge a nivel sectorial. Finalmente, una de las líneas de mayor relevancia en años recientes, tiene que ver con una serie de documentos publicados por el CEDE de la universidad de los Andes como los trabajos de Eslava and Meléndez (2009) y más reciente el trabajo de Eslava and Haltiwanger (2020), que abordan el crecimiento de la productividad desde otro enfoque, en líneas generales expresan que Colombia cuenta con una alta concentración de pequeñas empresas frente a otros países. Siguiendo esta línea encontramos el estudio de Becerra et al. (2019) donde encuentran que una enorme fracción de la actividad productiva colombiana, mucho más que en países desarrollados, se concentra en unidades productivas minúsculas. Los estudios abordan como el crecimiento de las ventas de las empresas menos productivas se ve impulsado por factores externos a éstas, mientras que por el contrario las más productivas enfrentan frenos a su crecimiento. Los autores plantean que, para solucionarlo, Colombia necesitará de políticas públicas que desincentiven la creación de empresas con poca vocación de crecimiento y que, por el contrario, faciliten el crecimiento y formalización de estas, así como dinamicen la capacidad empresarial con medidas como el impulso de las capacidades gerenciales en los colombianos.

En este orden de ideas, se puede inferir que, para la economía colombiana, se presenta una especie de consenso frente a la importancia de estudiar las fuentes de crecimiento de la productividad, no obstante, existen múltiples formas de abordarlo, en esencia porque es un problema económico interdependiente y complejo, que requiere de un marco analítico de equilibrio general. De esta manera depende de una complejidad de factores, acciones, instituciones y contextos, por lo que es necesario identificar e investigar varios enfoques y sus fuentes. Así pues, este trabajo de investigación pretende presentar una visión de equilibrio general de los

efectos de distintos escenarios del incremento sostenido de la productividad en el crecimiento económico de corto y mediano plazo, teniendo en cuenta las que se consideran son sus fuentes relevantes, buscando servir como generador de políticas para el devenir de la actividad económica en este aspecto, y revertir la lamentable trayectoria presentada en el país de la TFP en los últimos 40 años

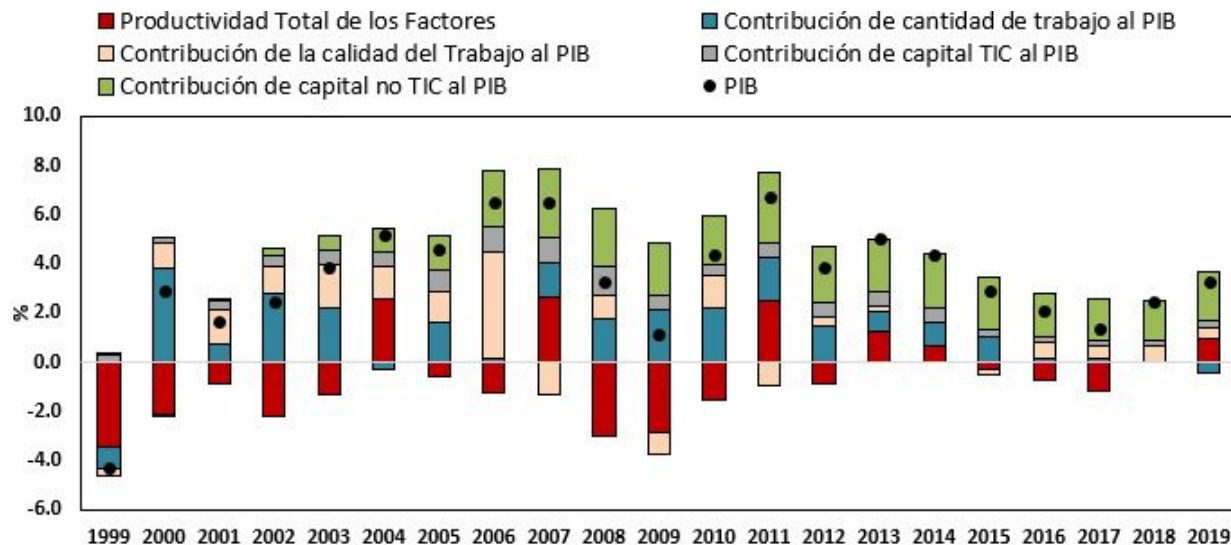
Ahora bien, es claro que una economía progresa cuando logra mejoras sustanciales de la productividad: cuando produce más valor a partir de los recursos de que dispone, bien sea porque usa sus recursos de manera más eficiente, porque genera con ellos una mayor cantidad de bienes y servicios, o porque las bienes y servicios que producen son mejor valorados por los consumidores.

En este sentido, el panorama del crecimiento de la productividad en Colombia es lamentable y vergonzoso. Para evidenciarlo junto a su importancia de este tipo de estudios en el país, se hará uso de los datos de la conocida base “Total Economy Database” del Conference Board que se usa por excelencia en los análisis de productividad a nivel global y país. La novedad distintiva radica en que aporta la visión de la contribución de los principales factores al crecimiento económico de un país, desagregando la contribución de la cantidad de trabajo y calidad de trabajo, la contribución del total del capital, que se desglosa en el capital de Tecnología de Información y de la Comunicación (TIC) y el capital sin TIC, por último, la contribución de la productividad total de los factores (TFP).

La evolución de dichas contribuciones medidas en tasas de crecimiento anual para Colombia en las dos últimas décadas se presenta en la Figura 3. Las barras de color rojo muestran el aporte de la “productividad total de los factores (TFP)” al crecimiento económico del país, mientras que los puntos de color negro representa el crecimiento económico (PIB) de forma anual, que además, de ser compuesto por la TFP, contiene otras cuatro barras que muestran, para la economía colombiana, la contribución al crecimiento, en el periodo comprendido de 1999 hasta 2019, de los factores productivos, clasificados en cuatro grandes categorías: capital con TIC (gris) y sin TIC (verde), cantidad de trabajo (azul) y calidad del trabajo (color claro).

En Colombia, según datos del Conference Board se calcula que la economía ha crecido en promedio 3.3% entre el año 1999 y 2019, no obstante, dicho crecimiento incorpora una reducción del 0.6% de la productividad. Cabe agregar que, haciendo cálculos similares, pero para los últimos diez años, el panorama no mejora de forma significativa, con un crecimiento del PIB en promedio del 3.4% entre los años 2009-2019, y en este caso dicho crecimiento incorpora una reducción del 0.2% de la productividad, a pesar de experimentar periodos de crecimiento del PIB superior en promedio al 5% entre 2010-2013 y que sin duda alguna con la actual crisis provocada por la pandemia se retrocederá aún más.

Figura 3: Contribución de la TFP en el crecimiento económico en Colombia 1999-2019



Fuente: Elaboración propia con datos de la base Total Economy Database, del Conference Board.

Es importante destacar, la situación crítica del aporte de la TFP para el crecimiento de la economía colombiana, desafortunadamente, se puede afirmar que en las dos últimas décadas la productividad se ha encontrado en terreno negativo de forma persistente, solamente exceptuando el año 2004, 2007, 2011, 2013 y 2014. Cabe agregar que, aunque en el último dato publicado su contribución al crecimiento económico tuvo un repunte importante, continua sin alcanzar registros mayores al 1%, lo que implica que en la última década el aporte de la productividad para el crecimiento del PIB ha sido nulo (incluso en varios años se podría considerar negativo).

En síntesis, es un desafío insoslayable el entendimiento, análisis y modelamiento de las fuentes de crecimiento de la productividad para el diseño de políticas de desarrollo, construcción de posibles escenarios y sus implicaciones para el crecimiento económico en tiempos de post-pandemia y para la próxima década. Es importante destacar la transversalidad y nivel de incidencia que tienen en la economía en su conjunto sus fuentes de crecimiento. De ahí la necesidad de abordar esos temas en un marco de equilibrio general, debido a que éste se ocupa de analizar las interrelaciones entre los mercados de bienes y servicios (como en la macroeconomía) a través de agentes económicos que toman sus propias decisiones (como en la microeconomía). Así pues, un modelo de equilibrio general computable (CGE por sus siglas en inglés), capta de forma analítica la problemática, pues representa de forma numérica las condiciones de equilibrio agregado y en cada uno de los mercados de una economía en la cual intervienen productores y consumidores con comportamientos establecidos mediante funciones de producción y utilidad de los consumidores que dependen de los precios relativos. En esencia, representan la estructura teórica del equilibrio general walrasiano en un lenguaje de computación, en nuestro caso, GAMS, utilizando información sobre los diversos mercados con datos de la economía real, y aprovechando algún algoritmo matemático para la búsqueda del equilibrio ante cambios pautados en la política económica.

Su importancia radica en que se pretende “endogenizar” en algún grado el análisis de productividad, con la exploración de módulos mediante modelado CGE que parten de las fuentes de su crecimiento. La novedad distintiva de la investigación radica en la simulación de escenarios que ya incluye los posibles efectos económicos de la pandemia mediante la modelación tipo Melitz que permite endogenizar el crecimiento de la productividad mediante los cambios en los costos de ‘iceberg’, productividad media y el límite de la distribución de Pareto, además, de incluir escenarios que contemplan crecimiento del capital humano que endogeniza el efecto de la productividad en el crecimiento económico del país en la próxima década, con lo anterior, siendo un análisis que va más allá de los tradicionales choques exógenos de la TFP en modelos de equilibrio general y en el análisis de productividad en Colombia.

Cabe agregar que tendrá una naturaleza robusta y consistente, debido a múltiples ventajas como la creación de un módulo que replica la regla fiscal en el país y una inclusión de 20 tipo de hogares que permite cuantificar los efectos distributivos, en un marco analítico de agentes heterogéneos y competencia imperfecta y, por el uso tanto en la calibración de parámetros relevantes (elasticidades de sustitución) como en el entrenamiento de las series de tiempo macro claves que alimentan el modelo CGE y que inciden en el desempeño de las principales variables económicas en el país en la senda futura, mediante las técnicas más avanzadas, en este caso, se recurrirá al campo de la inteligencia artificial, fundamentalmente el Machine Learning, siendo otra de las novedades distintivas de la investigación integrando el campo de la inteligencia artificial con los modelos de equilibrio general computable que he denominado “AICGE”. Todo en conjunto permitirá abordar de la mejor manera el análisis y perspectivas de las fuentes del crecimiento de la productividad que posibilite entender el estancamiento prolongado presentado en las últimas décadas y fuentes de crecimiento de la productividad en la economía.

2. Revisión de la literatura

La productividad, la capacidad de producir valor económico a partir del uso de recursos productivos, es la clave fundamental del desarrollo de las sociedades. Un país progresa cuando logra mejoras sustanciales de la productividad: cuando produce más valor a partir de los recursos de que dispone, bien sea porque usa sus recursos de manera más eficiente, porque genera con ellos una mayor cantidad de bienes y servicios, o porque los bienes y servicios que producen son mejor valorados por los consumidores.

La economía colombiana puede progresar cuando logre mejoras sustanciales de la productividad. Según (Botero García et al., 2005) en una economía y como se presenta en la Figura 4, hay cinco fuentes de crecimiento de la productividad que se pueden agrupar en dos grandes categorías: aquellas que reflejan los esfuerzos que hacen las firmas, para ser más productivas (al interior de las empresas, las de color azul); y aquellas que se refieren a la asignación de recursos en la economía agregada (interacción de los empresarios y la economía en su conjunto, las de color verde). En lo que se refiere a las fuentes al interior de las firmas, consiste fundamentalmente en dos enfoques: i) Mejoras de eficiencias y ii) mejoras en la creación de valor. Cuando se

trata las fuentes de crecimiento de la productividad desde la interacción de los empresarios y la economía en su conjunto, se puede abordar desde tres enfoques: iii) mala asignación de recursos; iv) transformación estructural; y v) el conjunto de acciones de públicas. Todo lo anterior se sintetiza en la Figura 4.

Figura 4: **Enfoque conceptual de la productividad**



Fuente: Elaboración propia de acuerdo con la revisión sistemática de la literatura.

A nivel más detallado, lo que se refiere a las fuentes al interior de las firmas, consiste fundamentalmente en dos enfoques estándar de la literatura: el primero se puede denominar “las mejoras de eficiencia”, que básicamente trata de cómo producir lo mismo, con menores recursos, lo que se logra mediante el uso adecuado de los factores de la producción; y el segundo se puede llamar “mejoras en la creación de valor”, que consiste en cómo producir más valor con los mismos recursos, lo que se logra con la innovación creativa, que genera productos y servicios más valorados por los consumidores (García et al., 2020).

Ahora bien, cuando se trata las fuentes de crecimiento de la productividad desde una perspectiva agregada, se puede abordar desde tres enfoques que se han venido trabajando en la literatura reciente. El primero tiene que ver con la mejor asignación de recursos entre las empresas de un sector, haciendo que las empresas más productivas participen en mayor proporción en el uso de los recursos, lo que se logra mejorando el acceso al crédito o eliminando distorsiones que inhiban el crecimiento de las firmas más productivas, conocido como 'Misallocation', que tiene que ver con muchos empresarios heterogéneos, señales del mercado (Melitz que

será el objeto de investigación) y la destrucción creativa al tipo Shumpeter. El segundo enfoque se apoya en la transformación estructural bajo la idea de la mejor asignación de recursos entre sectores productivos, haciendo que los sectores más eficientes participen más en el producto, lo que se logra fomentando la inversión en sectores de mayor potencial productivo, generalmente asociados a la actividad exportadora, que gira en torno a la complejidad económica (Hidalgo and Hausmann, 2009), estado emprendedor (Mazzucato, 2011) y generadoras de cadenas de valor que se distinguen entre las empresas que las organizan y las que son parte del eslabón de la cadena que permitan la creación de cadenas de valor de alta tecnología (McMillan and Rodrik, 2011).

El último, dentro de la misma categoría consiste en todo el conjunto de acciones públicas para potenciar el desarrollo de la productividad que no están asociadas o internalizadas en las empresas, que también se puede denominar externalidades sociales estudiadas desde hace tiempo en los trabajos de Melo and Robinson (1992) y más recientes en los de De Lucio et al. (2002), y más específicos los que comprenden las externalidades institucionales como el Banks (2015), respeto derechos de propiedad, infraestructura física que incluye también las comunicaciones como políticas de productividad en Duggal et al. (2007).

El primer enfoque está creciendo de forma notable, por mencionar algunos estudios importantes nos encontramos con uno de los trabajos seminales el de Hsieh and Klenow (2009) dónde encuentran que la mala asignación de recursos puede reducir la TFP, con uso de micro datos para China e India frente los Estados Unidos; en el de Banerjee and Moll (2010) agregan una distinción entre la mala asignación en el margen intensivo y extenso, mostrando que el primero debe desaparecer asintóticamente en condiciones generales, mientras que el segundo puede persistir; el trabajo de Restuccia and Rogerson (2013) se centran en la reasignación de factores a través de unidades de producción heterogéneas como una fuente importante de diferencias de TFP medidas entre países, en más recientes estudios se encuentran los de Restuccia and Santaaulalia-Llopis (2017) que consideran un modelo de unidades de producción heterogéneas con inversión que incremente la productividad para evaluar el impacto cuantitativo de las distorsiones de política y los de Bils et al. (2020) estiman brechas en productos marginales con la novedad que explotan cómo el crecimiento de los ingresos es menos sensible al crecimiento de los insumos cuando los productos promedio de una planta son exagerados por error de medición. La corrección reduce las ganancias potenciales de la reasignación para India entre 1985-2013 y para los Estados Unidos 1978-2013.

El segundo enfoque desde una perspectiva agregada tiene que ver con el desarrollo de nuevos sectores productivos, y más innovadores, que contribuyen al crecimiento, permitiendo una mayor diversificación del perfil exportador hacia una economía sofisticada y compleja (cadenas de alto valor agregado), lo que básicamente gira en torno de la innovación disruptiva y creativa (Aghion et al., 2009), que permite crear nuevas formas de atender las necesidades y apetencias de los consumidores. El tercer enfoque dentro de esta segunda categoría se ha trabajado de forma extensa en la literatura, las externalidades sociales (Melo and Robinson, 1992) y (De Lucio et al., 2002), que analizan el marco institucional (Banks, 2015), la infraestructura (García

et al., 2020) y comunicaciones (Duggal et al., 2007).

Ahora bien, los análisis de productividad han avanzado considerablemente a partir de las metodologías de descomposición del crecimiento de la productividad, entre factores internos a las firmas, y asignación de recursos (“Misallocation”) entre otras como se ha mostrado. Entrando de forma detallada los artículos claves en este análisis son Baily et al. (1992); Olley and Pakes (1992); el trabajo seminal de Hsieh and Klenow (2009); McMillan and Rodrik (2011); dónde demuestran las divergencias en la TFP por malas asignaciones en Restuccia and Rogerson (2013) y Melitz and Polanec (2015); con adición de unidades de producción heterogéneas Restuccia and Santaaulalia-Llopis (2017); otros que agregan comercio internacional al análisis como el Berthou et al. (2018); heterogeneidad de los agentes en Sandoz-Dit-Bragard (2018); dónde proponen la solución óptima Shao and Tang (2020); implementado en un modelo de equilibrio general en Baqaee and Farhi (2020) y usando el crecimiento de los ingresos en Bils et al. (2020).

Desde el punto de vista de la modelación, el análisis de la productividad y de la asignación de recursos está vinculado a lo que se denomina la “nueva teoría del comercio”, asociada a los trabajos de Krugman (1980) y de Melitz (2003) que introducen la competencia imperfecta, la entrada y salida de firmas a los mercados, las economías de escala y los costos fijos, y la heterogeneidad de las firmas en los sectores que será fundamental en el modelo para determinar hacia que sectores estratégicos se debe encaminar las políticas públicas que inciden en el crecimiento de la productividad en el país. La integración de esos temas en la modelación de equilibrio general es parte de la agenda corriente de investigación en este tipo de modelado, como lo muestran los trabajos de Zhai (2008) y de Dixon et al. (2016) y más reciente en un trabajo de Dixon et al. (2018) del cuál se fundamentará el análisis matemático descrito en el apéndice, siendo el capítulo titulado “Trade Theory in Computable General Equilibrium Models” publicado en el año 2018 que hace parte de un compendio de artículos que conforman el libro ‘Advances in Applied General Equilibrium Modeling’ que permitirá ampliar sustancialmente los usos posibles del modelo en el análisis de políticas públicas.

En este orden de ideas, el modelo CGE se ha convertido en una herramienta importante utilizada por entidades multilaterales como la Organización Mundial del Comercio (OMC), la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), el Banco Interamericano de Desarrollo (BID) y el Banco Mundial para medir el impacto de los choques o los cambios en las políticas (Meng and Siriwardana, 2017). Este tipo de modelación es capaz de vincular el nivel agregado de la economía con diferentes niveles de desagregación, en particular, regiones específicas, población desagregada y proyectos de inversión. Intentan capturar lo esencial del sistema económico utilizando la estructura matemática y estadística de la Matriz de Contabilidad Social (SAM), en nuestro caso que se alimenta de las más recientes cuentas nacionales (Matriz de Insumo Producto, Cuadro de Oferta y Utilización y las cuentas económicas integradas) publicadas por el DANE para el año 2018.

Existen modelos CGE desarrollados por algunos organismos internacionales, Banco Mundial, OECD, OMC a nivel global, para América Latina se encuentran los manuales del BID de Giordano et al. (2013) y

un poco más aplicados haciendo el caso específico del cambio climático del mismo BID de [Chisari et al. \(2012\)](#); documentos publicados por bancos centrales en el mundo, como el del banco central de Nicaragua de [Gámez \(2018\)](#), sin contar la infinidad de aplicaciones prácticas en diferentes regiones del mundo, por mencionar algunos relevantes en lo que conciernen a la política ambiental y la productividad agrícola como los trabajos de [Pradhan and Ghosh \(2019\)](#); política fiscal los trabajos de [Lora \(1996\)](#), los de [García \(2007\)](#), [García \(2011\)](#) y [Ríos Arredondo \(2016\)](#) para Colombia; sobre comercio internacional de [Dixon et al. \(2016\)](#) y además, integrando y modelando Melitz de [Jafari and Britz \(2018\)](#), mejorando la calibración en [Dixon et al. \(2018\)](#); la economía agrícola y políticas de productividad en [Shikur \(2020\)](#), un análisis de este sector para Colombia de [Perfetti et al. \(2017\)](#); más específicos como el mercado de trabajo de [Botero-García \(2012\)](#) y un estudio de género en productividad mercado laboral de [Zidouemba \(2020\)](#); el diseño de políticas en Colombia de [Suescún et al. \(2017\)](#); firmas heterogéneas de [Bekkers and Francois \(2018\)](#); la infraestructura de [Montaud et al. \(2020\)](#); un análisis para disminuir la dependencia del petróleo de [Peter Mgeni et al. \(2019\)](#); la Inversión Extranjera Directa de la [Latorre et al. \(2018\)](#); crecimiento de la productividad a nivel regional y contaminación de [Cui et al. \(2017\)](#); turismo y políticas de [Meng and Siriwardana \(2017\)](#); entre otros; pero que en líneas generales, muestran como la complejidad y calibración han mejorado sustancialmente, que permite un mejor análisis de la economía real y sus impactos con resultados cuantificables cada vez más confiables.

En la actualidad ha resurgido con mayor fuerza lo que se ha denominado la nueva generación de los modelos CGE a nivel mundial teniendo en cuenta el enorme crecimiento, permitiendo el tránsito hacia los más modernos que son considerablemente superiores frente a los tradicionales ORANI (modelo genérico para un país) y los publicados por GTAP, como por ejemplo los que involucran calibración bayesiana ([Go et al., 2015](#)), behavior economics ([Ahmed et al., 2018](#)), calibración avanzada de Melitz ([Dixon et al., 2018](#)), que integran micro simulaciones como se presenta en varios trabajos del reciente libro publicado a finales del 2018 titulado “The New Generation of Computable General Equilibrium Models: Modeling the Economy” editado por [Perali and Scandizzo \(2018\)](#). Es importante destacar el enorme crecimiento de la inteligencia artificial que tomará mayor fuerza en economía en los próximos años cuando se integre y complemente este tipo de modelado, de ahí la importancia de iniciar a crear nexos como se intentará hacer en el documento. Recapitulando, todo este revuelo CGE se debe a la multiplicidad de ventajas frente al modelado económico existente, en términos simples, son modelos flexibles, versátiles, prácticos y de fácil entendimiento que permiten sintetizar la economía real en términos computacionales.

Luego de este resumido y apasionante recorrido por modelado CGE, se presenta los aspectos más relevantes de cómo se ha abordado conceptualmente el análisis de productividad en la literatura y su respectiva integración con el modelado de equilibrio general. En primer lugar, desde la perspectiva del enfoque que se refiere a la productividad vista desde la entrada y salida de empresas, según el proyecto de productividad del Banco Mundial tiene que ver con “la entrada de empresas más productivas y la salida de empresas menos productivas en un período de la actividad económica normal es un contribuyente importante al crecimiento de la productividad”, y es un enfoque que ha ganado popularidad en los años recientes. El trabajo pionero titulado

“Productivity Dynamics in Manufacturing Plants” de [Baily et al. \(1992\)](#) que tiene como base la premisa de una estructura de mercado oligopolista, que explica en gran parte la brecha de productividad entre las empresas desde una mirada netamente estática, aunque también se suele identificar el trabajo seminal titulado “The dynamics of productivity in the telecommunications equipment industry” de [Olley and Pakes \(1992\)](#) que analiza la productividad del nivel de planta en un sector específico. Tuvieron que pasar varios años hasta el trabajo de [Levinsohn and Petrin \(1999\)](#) que involucra un estudio de la dinámica de la productividad, incursionando en técnicas metodológicas modernas y la parte dinámica, ahora bien, siguiendo el estudio de productividad de Olley el trabajo de ([Melitz and Polanec, 2015](#)) realizan una extensión de la descomposición de la productividad. Finalmente es importante destacar en años recientes el proyecto sobre productividad como misión del Banco Mundial, dónde se han publicado dos manuales de los autores [Grover Goswami et al. \(2019\)](#) y [Cusolito and Maloney \(2018\)](#) que incorporan la experiencia de las economías desarrolladas y algunas emergentes en lo que concierne a combatir el fenómeno del estancamiento de la productividad a nivel mundial y las nuevas tendencias y sus fuentes. Preliminarmente, este es el enfoque más atractivo para analizar la productividad desde la firma y para lograr “endogenizar” dicha variable en un contexto de CGE con competencia imperfecta y firmas heterogéneas, es decir, la incorporación del modelo Melitz a nuestro CGE.

En segundo lugar, lo que tiene que ver con la productividad agregada, los primeros trabajos que intentan aproximarse a una definición conceptual son los de [Foster et al. \(2001\)](#), posteriormente, se presentan desarrollos teóricos más recientes como los de [Nübler \(2014\)](#). Ahora bien, es importante insistir que en la actualidad se observa la ralentización del crecimiento de la productividad cómo se evidencio en la Figura 1, 2 y 3. Siendo un fenómeno a nivel mundial, en años recientes el Banco Mundial ha aunado esfuerzos y han publicado trabajos que, bien por su forma de análisis transversal de productividad como el trabajo de [Cusolito and Maloney \(2018\)](#) o por el análisis de la productividad agregada desde el punto vista de la innovación con el trabajo de [Cirera and Maloney \(2017\)](#) amplian el entendimiento de la problemática acompañado de un análisis de la innovación de países emergentes.

Teniendo en cuenta los trabajos que involucran CGE, se han realizado artículos incorporando competencia imperfecta del mercado laboral y la relación con el factor específico de la productividad laboral en el trabajo de [Flaig et al. \(2013\)](#), y siguiendo con la línea del mercado trabajo en CGE pero incorporando el comercio exterior a través de políticas comerciales para entender el comportamiento de la productividad salarial mediante simulación, está el trabajo de [Ciuriak and Xiao \(2016\)](#). También se han realizados trabajos desde la perspectiva de capital humano, donde se trata, con base en la transformación productiva, el aspecto del conocimiento y sus ámbitos específicamente en el artículo desarrollado por [Balduzzi and Rostan \(2016\)](#). Finalmente, y teniendo en cuenta análisis recientes, se encuentran los CGE desarrollados con metodologías como la micro simulación, como el de [Pradhan and Ghosh \(2019\)](#) para una economía que ha presentado un promedio alto de crecimiento en la última década. Otro tipo de metodología que se está usando aunque aún no se ha incursionado en el análisis de productividad tiene que ver con un método heurístico ([Yamazaki et al., 2018](#)). De aquí la importancia de realizar un modelo con estas características integradas para una economía emergente como Colombia, de gran

interés en la agenda económica en tiempos post-pandemia y para definir el rumbo de la actividad económica en la próxima década.

Ahora bien, desde la perspectiva de la productividad entre las firmas, el trabajo seminal se titula: ORANI, a multisectorial model of the Australian economy de [Dixon \(1982\)](#), siendo una contribución significativa para la economía. Los modelos ORANI han sido ampliamente utilizados en lo referente a la productividad. Posteriormente, aparece el trabajo de [Challies and Murray \(2006\)](#) que desagrega el análisis con un comparativo de la transformación productiva pero desde una perspectiva regional. En años recientes la investigación sobre productividad sectorial ha aumentado considerablemente con los trabajos de [Sun and Anwar \(2019\)](#) dónde se analiza la industria del acero. Lo importante en este trabajo consiste en analizar los efectos de la IED y rentabilidades en la productividad entre firmas teniendo en cuenta la investigación y desarrollo. Trabajos como el de [Yamazaki et al. \(2018\)](#) incorporan cálculos de elasticidades de forma recursiva, planeando adicionalmente un modelo dinámico que sería de gran ayuda para pronósticos de políticas para más años, combinando en cierta medida el enfoque de entrada y salida de firmas. Finalmente, el trabajo de [Boratyński et al. \(2019\)](#) que incorpora un CGE que analiza efectos de costes de salario y mejora en la productividad agregada en países (Polonia, Rumania, República Checa y Hungría) teniendo como eje el modelo de bienes transables y no transables. Sin duda alguna, se ha avanzado de forma considerable, especialmente en los últimos años, por la creciente importancia en estudios sectoriales y en específico de productividad en cada sector.

Por último, en lo que se refiere a política de productividad en Colombia en la literatura no existe un trabajo semilla, puesto que, en general son aplicaciones de políticas en diferentes regiones que pretenden estimular la productividad en los ejes explicados anteriormente. Lo más relevantes tienen que ver con el de [Suescún et al. \(2017\)](#) que usan un CGE para entender la política económica, también los trabajos de [Maldonado and Sánchez \(2012\)](#) y [Vargas \(2010\)](#), del Banco de la República ([Juan José et al. \(2006\)](#) y [Echavarría-Soto et al. \(2019\)](#)), los documentos del CEDE cómo los de [Echeverry et al. \(2005\)](#), [Becerra et al. \(2019\)](#) Y [Eslava and Haltiwanger \(2020\)](#) que tienen que ver con casos de transformación productiva en política pública desarrollada en Colombia. Ante la insuficiente literatura al respecto este documento va contribuir con la construcción de escenarios de crecimiento de la productividad mediante modelado de CGE endogenizando con el modelo Melitz.

Finalmente, y este es otro punto al que pretendía llegar, el modelado CGE requiere grandes cantidades de datos detallados a nivel sectorial y de productos para simular una economía. Aunque las tablas que se alimenta la SAM proporcionan una gran cantidad de datos para el modelado CGE, también se necesitan otros datos. Por ejemplo, un modelo CGE necesita numerosos parámetros de comportamiento como elasticidades de sustitución, elasticidades de gasto, elasticidades de demanda y exportación, y varios valores de participación, series de tiempo macro (precios del petróleo, carbón) para la proyección económica de las principales variables. La recopilación de datos para un modelo CGE es una tarea que requiere mucha mano de obra y aumenta el costo de modelado. Los amplios requisitos de datos del modelado CGE aumentan tanto el costo del modelado como la posibilidad de tener que hacer suposiciones, por consiguiente, la necesidad de introducir en la calibración

técnicas modernas aprovechando el impresionante crecimiento del “Big Data” y de modelos de aprendizaje automático.

En este orden de ideas, en la literatura más moderna, la inteligencia artificial está creciendo a pasos agigantados, en gran parte por el avance computacional de la última década, y cada vez es más difícil aislarse de esta realidad en el análisis macroeconómico. Uno de los trabajos recientes que está provocando un punto de inflexión en macroeconomía es la publicación de tres economistas sobre las implicaciones de la inteligencia artificial titulado “Prediction Machines: The Simple Economics of Artificial Intelligence” de [Agrawal et al. \(2018\)](#), dónde analizan y desarrollan las ventajas de las máquinas y desarrollo computacional para corregir sesgos (juicios) de los economistas; uno de los fragmentos que puede abarcar y sintetizar el objeto del documento y que ha ganado popularidad tiene que ver con la famosa frase “Las máquinas no hacen juicios, los humanos sí”; otro trabajo interesante y de alta popularidad que contribuye al debate sobre el atraso de la macroeconomía en usar herramientas de la Inteligencia Artificial como complemento en los modelos es el titulado “How is Machine Learning Useful for Macroeconomic Forecasting?” de [Coulombe et al. \(2020\)](#), su tesis gira en torno a la crítica hacia los economistas en pronósticos de variables macroeconómicas y su insistencia en seguir con modelos tradicionales, como los modelos de Equilibrio General Dinámicos Estocásticos (DSGE) y los Vectoriales Autorregresivos (VAR) que no fueron efectivos en la predicción de la crisis financiera del 2008, fundamentalmente por los cambios disruptivos, los autores afirman que la predicción está en el corazón de la toma de decisiones bajo incertidumbre, pero sin desconocer la importancia del economista: “A medida que las máquinas de predicción hacen que los pronósticos sean cada vez mejores, más rápidos y baratos, el valor del juicio humano aumentará porque necesitaremos más” ([Coulombe et al., 2020](#)).

En este sentido, en la literatura naciente, está creciendo el interés por integrar este tipo de técnicas para disminuir de forma significativa los errores de predicción, calibración de modelos grandes como nuestro CGE que permite cerrar en parte los rezagos de la publicación de la información macro, aprovechando los altos volúmenes de datos “Big Data”, en esta línea de predicción inmediata está poniendo todos sus esfuerzos los trabajos del Fondo Monetario Internacional (FMI) como los de [Bolhuis and Rayner \(2020\)](#), los de [Tiffin \(2016\)](#), también la Reserva Federal de Atlanta con su GDPNOW, la Reserva Federal de New York con su Nowcasting Report, y en el caso colombiano, entidades como Bancolombia y el Grupo Coyuntura de la Universidad EAFIT con sus técnicas NowCast, el primero partir de transferencias bancarias diarias y el segundo con más de 80 predictores, y el Banco de la República a partir del registro de pago de frecuencia diaria, todos con el objeto de predecir variables económicas de la forma más oportuna y de esta forma obtener resultados más confiables de las series de tiempo exógenas que alimentan el modelo CGE.

2.1. Últimos hallazgos

En la sección anterior se han abarcado en gran parte los principales trabajos que se han desarrollado para entender el crecimiento de la productividad, por una parte, y los modelos de equilibrio general computable por la otra. Por consiguiente, en este apartado se presentará los aspectos más relevantes de la revisión sistemática

de la literatura más reciente de crecimiento de la productividad que integren modelos de equilibrio general computable (CGE) más modernos.

En esta aproximación de revisión bibliográfica detallada que se ha presentado, es importante agregar un análisis de la frontera del conocimiento respecto a los modelos tipo CGE. Uno de los artículos más recientes y de interés para la investigación tiene que ver con un estudio titulado “Production and Productive Sectors: Simulations in a CGE Model for Haiti” de [Cicowiez and Filippo \(2018\)](#). Es un documento que proviene de un modelo minuciosamente explicado y presenta exclusivamente simulación de escenarios, lo interesante es que lo hace con un nivel alto de detalle de la metodología, así que fue de las referencias del modelo CGE con análisis de productividad, mediante ejercicios de simulación de escenarios. El conocimiento más frontera que se están desarrollando, es precisamente integrar CGE a los últimos de GTAP aprovechando las mejoras computacionales ([Li et al., 2019](#)), por ejemplo el estudio de los impactos del cambio climático usando un modelo GTAP multi regional, multi sector, específicamente en la autosuficiencia del arroz en China, lo interesante tiene que ver con la separación y explicación en 3 escenarios que lo denominan el primero el SRGE (Single Equilibrio general regional) y los otros dos MRGE (Multi Regional General Equilibrio uno con un choque de China y otro con un choque Global). La integración consiste en un modelo SRGE que altera el modelo GTAP a un modelo CGE de un solo país de China que permite identificar el mecanismo de impacto del cambio climático a través de un cambio interno si solo se experimenta un shock en la productividad de la tierra en China del arroz con “cáscara”. Específicamente, el SRGE permite analizar cómo se daría la exportación a China e importar productos con el mercado global, mientras que el MRGE C solo impacta la productividad doméstica de arroz con cáscara de China, pero emplea el cierre estándar GTAP que permite que los precios de los productos básicos cambiarán con las exportaciones e importaciones de China ([Li et al., 2019](#)).

Otro de los trabajos más frontera, consiste en un CGE con productividad y crecimiento económico sostenible desde el punto de vista energético, trata de un análisis del auge de la minería y crecimiento económico sostenible en Mongolia ([Lkhagva et al., 2019](#)), dónde hacen uso de un modelo CGE dinámico recursivo, para examinar los efectos de largo plazo en la economía de 3 escenarios, con un horizonte de tiempo importante hasta 2040, el primer escenario tiene que ver con auge moderado de la productividad de los sectores agricultura, manufactura, minería y el carbón (fundamentado en el total factor productivity con un incremento del 10%), un segundo escenario que examina una caída los precios internacionales del carbón y el metal, y el tercero combina los previos, se hacen los escenarios para 2020, 2030 y 2040, y encuentran que deberían volcarse las inversiones en los sectores agrícola y manufacturero, es decir, transitar hacia un modelo económico sostenible en ese país.

Dentro de la nueva generación de CGE, se encuentra en la literatura un trabajo para una economía africana titulado “A CGE Model for Productivity and Investment in Kenya” de [Scandizzo et al. \(2018\)](#), dónde desarrollan un modelo para el sector agrícola evaluando los impactos en crecimiento económico, la sostenibilidad y la seguridad alimentaria en esa región; el estudio de [Kilimani et al. \(2018\)](#) aplican choques de

productividad a las industrias agrícolas, luego de lo cual se obtienen los impactos resultantes en el resto de los sectores de la economía y el de [Das \(2019\)](#) implementa un CGE para evaluar los derrames de la productividad.

En síntesis, teniendo en cuenta la interesante versatilidad del tipo de modelado CGE, el objetivo fundamental se refiere a la exploración y simulación de algunas de las fuentes de crecimiento de la productividad, específicamente lo que tiene que ver con firmas heterogéneas mediante el modelo de Melitz⁶ que involucra las fuentes de mejoras de eficiencia y en la creación de valor, además de ser parte del enfoque de la mala asignación de recursos; no serán objeto de investigación las otras fuentes de crecimiento como las externalidades, puesto que, la discusión y evaluación para el país de la infraestructura, asociaciones pública-privadas y productividad se encuentran de forma amplia en nuestro trabajo de [García et al. \(2020\)](#); ni tampoco la transformación estructural que incluya la complejidad económica pues sobrepasa el alcance de la investigación, pero se incorpora un breve módulo de capital humano. El análisis de productividad es una de las temáticas más relevantes en la agenda económica del país y del mundo, y en las últimas décadas se ha estancado tanto en las economías avanzadas como en las economías emergentes (ver Figura 1). En el caso regional, como lo hemos visto, se ha estancado en los últimos 40 años (ver Figura 2), y en el país su aporte ha sido prácticamente nulo en el crecimiento económico (ver Figura 3), por consiguiente, es fundamental diseñar y analizar políticas públicas de desarrollo que impulsen la productividad de forma sostenida, que permitan el incremento de los ingresos per cápita para el alivio de la pobreza en parte, y para un mejor desempeño económico del país y mucho más en tiempos de crisis.

3. Descripción del modelo CGE

3.1. Estructura general

El modelo CGE⁷ se ha convertido en una herramienta importante utilizada por entidades multilaterales como la Organización Mundial del Comercio (OMC), la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y el Banco Mundial para medir el impacto de los choques o los cambios en las políticas ([Meng and Siriwardana, 2016](#)). Un CGE⁸ es un tipo de modelo económico que puede revelar información sobre toda la economía y sobre industrias detalladas. Una simulación CGE generalmente comienza con una situación de equilibrio general. Se introduce un shock (Fuentes de crecimiento de la productividad) y el modelo CGE puede generar una nueva situación de equilibrio.

La estructura del modelo CGE es en realidad un sistema de ecuaciones que imitan la interconexión económica en una economía real. Una base de datos CGE incluye todos los datos que se deben alimentar a la estructura del modelo CGE para obtener resultados de simulación ([Meng and Siriwardana, 2017](#)). Por la

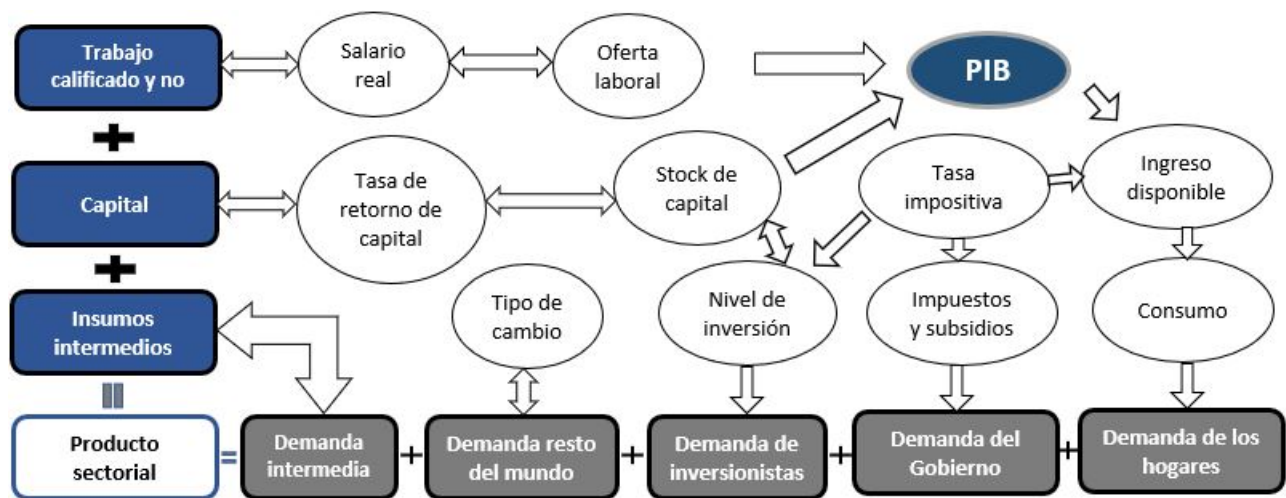
⁶La referencia básica de este tipo de modelación, que puede denominarse de “agentes heterogéneos”, es [Krugman \(1980\)](#), [Melitz \(2003\)](#) y [Zhai \(2008\)](#).

⁷El término ‘computable’ en el modelado CGE indica que es capaz de cuantificar el efecto de un shock, allí radica la importancia de su uso en nuestro análisis particular ([Hosoe et al., 2010](#))

⁸El término ‘computable’ también implica que una computadora está involucrada en el modelado CGE, en este caso se hará uso del programa GAMS (General Algebraic Modeling System) de lo más usados en la literatura empírica.

versatilidad y las distintas maneras en qué se puede abordar los temas en los modelos CGE, se han realizado aplicaciones que trascienden temas exclusivamente macro, por ejemplo, el caso que involucra temas de política competitiva, el referente básico sigue siendo (Devarajan and Rodrik, 1991). Cabe destacar que aún perdura el interés de la integración con los temas de complejidad económica, tal y como han sido abordados por (Hidalgo and Hausmann, 2009); cabe agregar que existen libros dedicados exclusivamente en ello, por excelencia el realizado por Hosoe et al. (2010) titulado “Textbook of computable general equilibrium modeling: programming and simulations”, incluso cuenta con una segunda versión del año 2016, y con un mayor nivel de detalle en un compendio de Dixon and Jorgenson (2012), desarrollado por un trabajo conjunto en los dos volúmenes. A continuación la Figura 5 recoge la esencia de un CGE.

Figura 5: Una ilustración del sistema económico en un modelo CGE



Fuente: Elaboración propia adaptada de Hosoe et al. (2010) y Dixon and Jorgenson (2012).

Los tres elementos clave a la izquierda de la Figura 5, es decir, mano de obra calificada y no calificada, capital e insumos intermedios, son los recursos (o insumos) para producir un bien o servicio (es decir, producto). En un equilibrio, este bien o servicio debe ser comprado por diferentes usuarios (demandas), por ejemplo, la demanda intermedia, la demanda del resto del mundo, la demanda de los inversores, la demanda del gobierno y la demanda de los hogares. Estos diferentes usuarios (demandas) son los elementos clave del sistema económico. El sistema representa el flujo circular de la economía.

Así pues, se revisará y actualizará el modelo del grupo de modelación EAFIT de equilibrio general, en el cual las investigaciones recientes que han abordado permitieron refinar su calibración, generando la posibilidad de usar el modelo para simulaciones de mediano y largo plazo, además de los tradicionales ejercicios de estática comparativa, para los que ya había sido habilitado. El modelo sirvió para evaluar políticas tendientes a fomentar la bioeconomía, en simulaciones con un horizonte temporal de 15 años. También para evaluar la informalidad laboral en Colombia en Botero-García (2012) por ello no se profundiza en este punto. Un ejemplo de estática comparativa, por su parte, es el uso del modelo para abordar la evaluación de la política de

protección agropecuaria, en [Perfetti et al. \(2017\)](#). Actualmente, es usado para la evaluación del programa de vías 4G mediante un modelo dinámico recursivo, que explicita con detalle el funcionamiento de la economía colombiana, incorporando 12 ramas productivas⁹, 17 tipos básicos de productos¹⁰, 16 aliados comerciales también bajo modelado tipo Melitz, es decir, con empresas heterogéneas y competencia monopolística y tres tipos de recursos productivos: trabajo calificado, trabajo no calificado (trabajo formal y trabajo informal) y capital que se especifica en [García et al. \(2020\)](#). El modelo considera mercados formales e informales, atendiendo a una característica fundamental de la economía colombiana [García \(2011\)](#), y una de sus novedades distintiva radica en la inclusión de 20 tipos de hogares que permite hacer análisis distributivos. Por todo lo anterior, el CGE presenta la estructura de la economía real de Colombia en términos computacionales. Ahora bien, el reto consiste en adaptarlo a las necesidades del análisis de los temas relacionados con las fuentes de crecimiento de la productividad, fundamentalmente la que tiene que ver con la mala asignación de recursos mediante el uso del modelo de Melitz para firmas heterogéneas y su efecto en el crecimiento de la economía colombiana en la próxima década junto a su también novedosa implementación de la regla fiscal, acompañado de una calibración y estimación de las series de tiempo exógenas mediante el aprendizaje automático que brinda mayor confiabilidad a sus resultados.

Así pues, nuestro modelo de equilibrio general computable, en síntesis, presenta la estructura de la economía colombiana en términos computacionales. Es un modelo dinámico recursivo (la dinámica se logra a través de la simulación período por período, en nuestro caso año a año a partir de la SAM calibrada al 2018), con 20 tipo de hogares, trabajo formal e informal (calificado y no calificado) y capital como factores productivos, el comercio exterior modelado a lo tipo Melitz¹¹ que se detalla su desarrollo matemático en el Anexo1, cuenta con un sistema casi ideal de demanda propuesto por [Deaton and Muellbauer \(1980\)](#) conocido como el AIDS que se especifica su desarrollo matemático en el Anexo2 y finalmente con Gobierno Nacional Central. La dinámica del capital es una de las fuerzas impulsoras clave en el modelo. Lo anterior y la amplia base de datos utilizada, lo vuelve un modelo que incluye información detallada a nivel micro de una industria, como se detallan en las ecuaciones del modelo en el Anexo 3 del apéndice matemático.

Nuestro modelo dinámico recursivo que se calibra con inteligencia artificial como la otra novedad distintiva a partir de la matriz de contabilidad social (SAM) 2018. Ahora bien, los elementos de programación del modelo en el lenguaje GAMS se separan en tres grandes grupos. En primer lugar, un código que resuelve el modelo correspondiente al intra-período, es decir, este aglomerado de códigos conforma la versión estática del modelo en el año 2018. En segundo lugar, se muestran los códigos del módulo inter-período que agregan al anterior la actualización de la SAM 2018 para estimar el modelo hasta el año más actual (2020) teniendo

⁹Las 12 ramas productivas estándar de la clasificación en las cuentas nacionales DANE.

¹⁰Agrícola, minero, petróleo, alimentos, livianos, pesados, energía, inter, construcción, comercio, transportes, tics, finanzas, inmobiliario, servicios gobierno, salud y el resto de servicios.

¹¹El modelo de “a la Melitz” supone condiciones de competencia monopólica en las cuales las empresas producen una variedad de bienes y extraen su productividad de una función de distribución de probabilidad fija. Hay costos de producción fijos y costos de entrada fijos y variables en los mercados de exportación, por lo tanto, la productividad de la empresa y la probabilidad esperada de entrar en el mercado extranjero están relacionadas positivamente. Ver [Melitz \(2003\)](#).

en cuenta un choque exógeno cómo es tomado el nuevo corona virus y los fuertes estragos en las cuentas fiscales. Finalmente, el tercer código hace las proyecciones partiendo del módulo inter-período para conformar la dinámica del modelo hasta el año 2040, aunque nuestro interés sólo será hasta el 2030.

La estructura de nuestro modelo CGE es en realidad un sistema de ecuaciones que imitan la interconexión económica en una economía real. El modelo utiliza combinaciones de funciones como lo muestra la Figura 7 que pueden ser tipo CES (Elasticidad de sustitución constante), CET (Elasticidad de transformación constante), Cobb-Douglas, Leontief, que describen la tecnología para productores y las preferencias para los consumidores, y las demandas de insumos y de consumo se derivan del proceso de optimización.

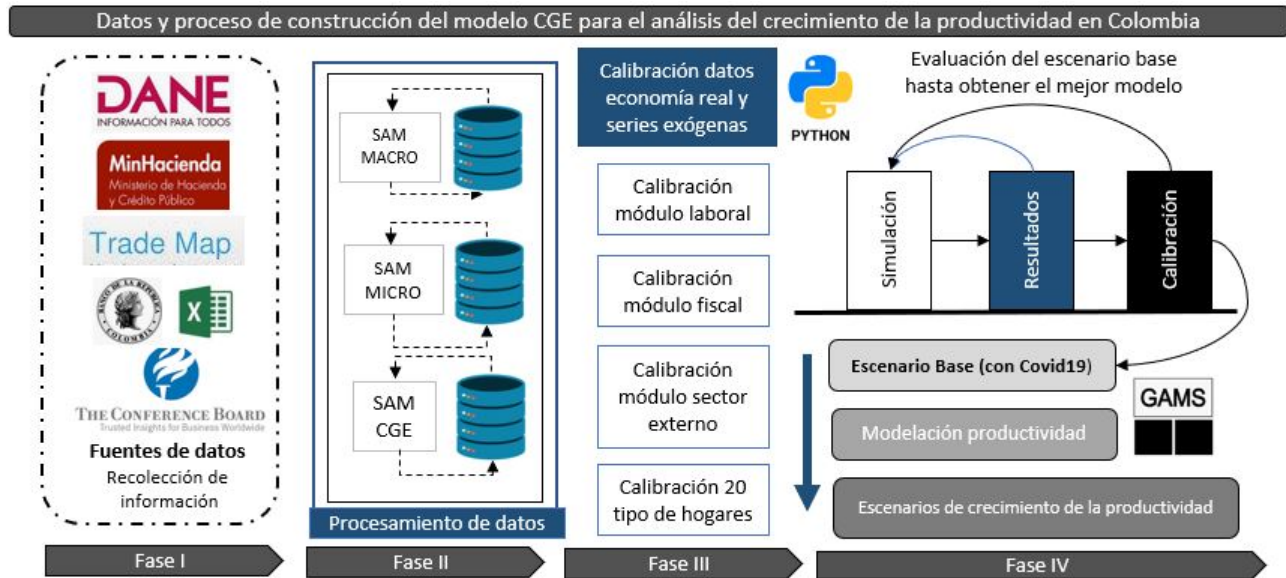
3.2. Datos para el Modelo CGE

La base de datos para un modelo CGE consta de dos partes: valores de parámetros y flujos de ingresos y gastos en una economía, como lo ilustra la Figura 6. Para la calibración, se procede en primera instancia a la recolección de datos de las cuentas nacionales, provenientes fundamentalmente, de la Matriz de Oferta (Insumo Producto), Cuadro de Utilización, Cuentas Económicas Integradas (CEI), y series del PIB, tanto desde el punto de vista de la oferta como de la demanda, todas publicadas por el DANE.

En segunda instancia, para el comercio exterior son importantes los datos de la Balanza de Pagos y de los términos de intercambio, publicados por el Banco de la República. Dado que se cuenta con un módulo tipo Melitz (Competencia monopolística, productividad diferenciada y agentes heterogéneos), es necesario descargar los vínculos comerciales del país con el resto del mundo, consignados en la plataforma TRADE MAP, que se obtiene a un nivel desagregado de 4 dígitos, y se compactan para los principales 16 socios comerciales.

Adicionalmente, para analizar la intervención del Gobierno Nacional y más en tiempos de pandemia, conociendo el esfuerzo fiscal bastante importante en programas sociales es necesario recolectar cifras del Ministerio de Hacienda, tanto del Gobierno Nacional Central (GNC) y el Marco Fiscal de Mediano Plazo. Finalmente, el último insumo es la Gran Encuesta Integrada de Hogares (GEIH), para modelar el mercado laboral, tanto calificado y como no calificado, el empleo asalariado y no asalariado, y los indicadores laborales para 20 tipo de hogares en Colombia, que permite realizar análisis distributivos acompañado de escenarios contra-factuales. El proceso se sintetiza en la Figura 6 desde la recolección de datos de la economía real hasta llegar a las simulaciones con el escenario base que incluye lo que considero los efectos cuantitativos de la Covid-19 y con el choque endógeno de productividad dado por el modelo Melitz que arrojará resultados para todas las variables detalladas hasta el año 2030.

Figura 6: Esquema simplificado de la construcción del CGE



Fuente: Elaboración propia.

En síntesis, es un modelo dinámico recursivo (la dinámica se logra a través de la simulación secuencial año a año, actualizando los saldos relevantes de las variables de stock en el modelo a partir, en nuestro caso de la SAM calibrada al 2018), con 20 tipo de hogares, el comercio exterior modelado “a la Melitz”, el consumo modelado mediante un sistema lineal de gasto y los gastos del Gobierno Nacional Central (GNC) y del resto del gobierno fijados exógenamente. Todo lo anterior, sumado a la amplia base de datos utilizadas, lo hace un modelo adecuado para analizar en detalle el funcionamiento a nivel micro de las ramas productivas consideradas.

En este orden de ideas, el modelo CGE cuenta con modelación tipo Melitz como piedra angular del análisis de productividad, contando con los principales 16 socios comerciales de la economía colombiana: Estados Unidos, Unión Europea, Reino Unido, Alianza del Pacífico, Australia, Canadá, Nueva Zelanda, Singapur, Resto ASEAN, China, Japón, Corea del Sur, Mercosur, Panamá, Turquía y resto del mundo a un nivel de detalle de 4 dígitos gracias a TradeMap (Map, 2017). Lo que implica que es un modelo de economía abierta, que se puede analizar desde Melitz y Armington. Es importante destacar que contiene competencia monopolística al estilo Dixit-Stiglitz lo que permite encontrar funciones de distribución de la productividad siendo el corazón de nuestro análisis, con la agricultura el único sector que no se modela mediante Mark up. En este caso se asume competencia perfecta, por lo que sus precios son perfectamente flexibles.

Lo que se refiere al mercado de trabajo, que es uno de los factores productivos, es desagregado entre trabajo formal y trabajo informal y este último entre trabajo calificado y no calificado. Éste último es pagado con ingreso mixto, presenta una baja intensidad de capital, poca productividad y en él no aplican las regulaciones de salario mínimo (Botero-García, 2012) y (García, 2011). Así mismo, la oferta de trabajo se distribuye entre los mercados asalariado e informal, siendo el primero un mercado de precio rígido y, el segundo, un

mercado de precio flexible. En el cierre del modelo se tiene en cuenta el excedente del resto del mundo y el ahorro de los hogares.

Tanto la teoría como la aplicación del modelado CGE han crecido rápidamente, en parte como consecuencia del avance del conocimiento en los campos de la contabilidad social, la programación matemática y el desarrollo del poder computacional (Meng and Siriwardana, 2017). Con la creciente implementación de este tipo de modelación, se han producido muchos trabajos recientes que, en líneas generales, muestran como la complejidad y calibración han mejorado sustancialmente, lo que permite un mejor análisis de la economía real y sus impactos con resultados cuantificables cada vez más confiables.

3.3. Modelado CGE para el análisis del crecimiento de la productividad

Un modelo CGE también se puede etiquetar de acuerdo con un área de investigación, en nuestro caso, es un modelo CGE para el análisis de la productividad. Se esquematiza su esencia de forma simplificada junto con su respectiva función de comportamiento matemática en la figura 7.

Figura 7: Esquema simplificado del CGE para el análisis de productividad en Colombia



Fuente: Elaboración del autor con base en Perfetti et al. (2017) y García et al. (2020).

El cierre del modelo consiste en elegir un conjunto particular de variables exógenas de una manera que permita un conjunto consistente y posiblemente único de soluciones. Debido a que puede surgir un problema de sobre determinación cuando el número de ecuaciones implicadas por el modelo excede el número de variables endógenas, en la literatura se maneja cuatro reglas básicas de cierre: el neoclásico, el keynesiano, el Johansen y

el nekeynesiano [Scandizzo et al. \(2018\)](#) la opción seleccionada en nuestro modelo es guiado por la inversión, fundamentalmente por el índice de capacidad instalada. Finalmente, el modelado CGE necesita una amplia gama de datos detallados a nivel sectorial y de productos básicos para simular una economía. Aunque se cuenta con un conjunto de información considerable descrito en la Figura 6, en ocasiones es fundamental series de tiempo exógenas que influyen en el desempeño económico, además que se requiere de un gran número parámetros de comportamiento como elasticidades de sustitución, elasticidades de gasto, elasticidades de demanda y exportación. En este sentido, la recopilación de datos para un modelo CGE es una tarea que requiere mucha mano de obra y aumenta el costo de modelado. Los amplios requisitos de datos del modelado CGE aumentan tanto el costo del modelado como la posibilidad de tener que hacer supuestos. De ahí radica la importancia de calibrar tanto las series de tiempo clave como las elasticidades de sustitución mediante inteligencia artificial que permita refinar los resultados aún más y disminuir los costos de modelado.

En este orden de ideas, el aporte de la inteligencia artificial tiene que ver con la calibración de parámetros relevantes (elasticidades de sustitución), entrenamiento y mejora en la capacidad predictiva de las series de tiempo de variables macro-financieras claves en la evolución de la actividad económica en la próxima década, como el precio y cantidades producidas de petróleo Brent, el precio y cantidades producidas de carbón, las remesas, la inversión extranjera directa, que robustecen los resultados del modelo de equilibrio general computable, recordando que en este tipo de modelado los agentes económicos actúan de forma miope, es decir, que el Machine Learning se usa como un complemento ideal para solucionar esta problemática, pero no como un sustituto, aprovechando que este campo está creciendo a pasos agigantados en la mejora de proyecciones macroeconómicas compitiendo con los modelos econométricos tradicionales AR, MA, ARIMA, VAR, etc.

3.4. Algunos inconvenientes de los modelos CGE: Inteligencia artificial al rescate AICGE?

Los modelos CGE a veces son criticados como demasiado largos para construir y demasiado complicados de usar, cuestión que se ha venido solucionando por la mejora computacional en los últimos años. Otra limitación del modelado CGE es que se necesita un número considerable de supuestos. Por ejemplo, para presentar la economía, un modelo CGE debe hacer suposiciones con respecto al entorno económico, las funciones de producción y las funciones de utilidad. Es posible que estos supuestos no describan con precisión el comportamiento de los agentes económicos, por consiguiente, es necesario implementar un sistema casi ideal de demanda y modelación de competencia imperfecta para enfrentar este punto como nuestro modelo incorpora.

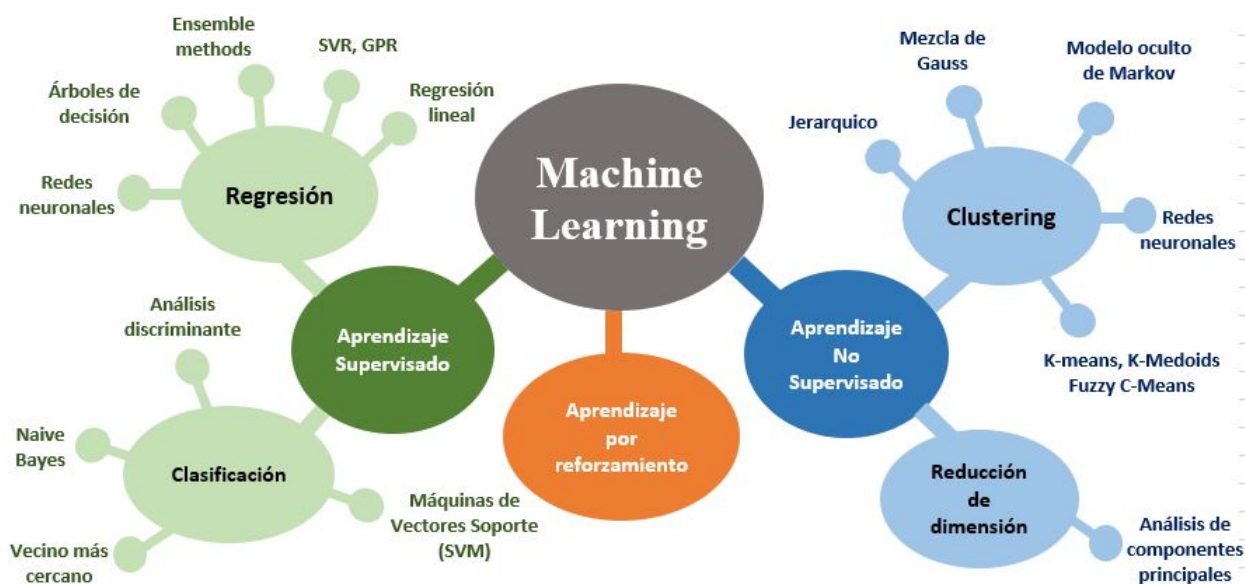
Otro aspecto es que para reducir la complejidad del modelo y minimizar así el costo de modelado, un modelo CGE puede hacer suposiciones simplificadas (como la competencia perfecta y los rendimientos constantes a escala). No obstante, la mayoría de los supuestos en los modelos CGE se basan en teorías microeconómicas (por ejemplo, funciones de producción y funciones de consumo) y estudios empíricos (por ejemplo, elasticidades de la demanda). Estas aproximaciones razonables hacen que el problema de medición sea manejable, y se mejora con la construcción de un modelo tipo Melitz de competencia monopolística y/o EASI (Ver [Pendakur \(2009\)](#)).

La Inteligencia Artificial ha evolucionado hacia los temas de Machine Learning y Deep Learning durante la última década, siendo sin duda alguna uno de las temáticas más populares hoy en día ([Agrawal et al., 2018](#)). El Machine Learning lo podemos definir siguiendo a Lee de Silicon Valley como “un método analítico que automatiza la especificación de los modelos de predicción; son modelos que “aprenden”. En términos simples, estos modelos copian la conducta del cerebro humano con unas variables entrada que suministran información a múltiples capas como lo hacen unas “redes neuronales” sólo que hace por medio de unos pesos que se asignen en la función de activación que es más conocida como neurona artificial que finalmente da como output los valores de salida.

En la Figura 8, se presenta una visión general de la inteligencia artificial, fundamentalmente el Machine Learning, donde se puede notar una gama amplia de posibilidades, no obstante, las redes neuronales surgen en economía en dos frentes: la predicción (pronósticos) y la clasificación. Siendo el de perceptrón multicapa de los más usados. Los modelos de redes neuronales pueden ser supervisados o no supervisados como se muestra en la figura 8, el aprendizaje no supervisado se usa cuando se pretende explorar datos y desea entrenar un modelo para localizar una buena representación interna como la división de datos en clúster ([Goodfellow et al., 2016](#)), mientras que los supervisados, permite la interacción o agregación de variables ya sea en el tiempo pasado o teniendo información futura, se elige si se necesita entrenar un modelo para realizar una predicción.

En esta línea los pronósticos ahora se basan en una gran cantidad de técnicas de aprendizaje automático, que se cubren teórica-conceptual ampliamente en [Hastie et al. \(2009\)](#) un libro estándar titulado “The elements of statistical learning: data mining, inference and prediction”, y más reciente para el aprendizaje profundo (Deep Learning) con el mismo nivel de detalle el libro de [Goodfellow et al. \(2016\)](#). Lo que tiene ver con la programación, Python cuenta con una librería muy completa para el aprendizaje automático llamada “Scikit-learn” de [Pedregosa et al. \(2011\)](#) que cuenta con múltiples ejemplos para cada uno de los modelos tanto supervisados como los no supervisados. El aprendizaje supervisado será el interés analítico del documento.

Figura 8: Esquema generalizado sobre las técnicas de Inteligencia Artificial (AI)



Fuente: Elaboración propia con información de [Hastie et al. \(2009\)](#) y [Pedregosa et al. \(2011\)](#).

Por consiguiente, este trabajo incorpora especialmente el aprendizaje supervisado para la calibración de parámetros y proyección de las principales variables macroeconómicas que afectan significativamente el desempeño de la economía en el corto y mediano plazo, por la intrínseca vulnerabilidad a los mercados internacionales. Variables tales como el precio petróleo, la cantidad de barriles exportados, el precio del carbón, el gasto del gobierno en pensiones, remesas, la inversión extranjera y las elasticidades de sustitución del mercado externo. En nuestro caso, se usará un modelo sencillo de redes neuronales que permiten identificar los posibles patrones teniendo en cuenta el marco de equilibrio general. El modelo computable se apoyará de una combinación de técnicas de Nowcasting y Machine Learning, que en la literatura se han trabajado de forma independiente. La importancia de incluir estas técnicas tiene que ver con la mejora de la precisión de los resultados del modelo CGE de la senda del PIB en la próxima década, que ayuda identificar los ingresos y la oferta agregada de la economía colombiana en el corto, mediano y largo plazo.

Por lo tanto, el rumbo que puede tomar la actividad económica es fundamental para hacedores de política, autoridades económicas, los agentes privados y para el gobierno, y los modelos de pronóstico tipo now-casting¹², siendo esto una combinación entre el presente (now) y el futuro (forecasting) ([Bańbura et al., 2013](#)) se combinan con la incorporación del Machine Learning para obtener los pronósticos de las variables mencionadas, logrando sofisticar la capacidad predictiva de las variables exógenas, siendo una de las novedades distintivas de la investigación integrar el campo de la inteligencia artificial con los modelos de equilibrio general computable de forma conjunta “AICGE”.

¹²La previsión de la actividad económica en el pasado reciente, el presente y el futuro cercano ([Bańbura et al., 2013](#)), o simplemente como la “predicción inmediata”.

La idea intuitiva de pronóstico del aprendizaje supervisado, fundamentalmente las redes neuronales, consiste en estimar especificaciones a través de regresión en las que la variable dependiente es una función de sus propios rezagos, así como de los valores contemporáneos y rezagados de las variables independientes que se construyen a partir de un conjunto de indicadores diarios, mensuales y/o trimestrales. Formalmente, denotemos Y_t^Q : La serie de tiempo a proyectar, por ejemplo, precio del petróleo, precio del carbón, gasto público en pensiones, remesas, IED, entre otras, que inciden de forma significativa en el desempeño de la actividad económica en la próxima década.

IM_t : conjunto de indicadores y variables macro de alta frecuencia que inciden en la variable Y (en ocasiones se hace con la misma variable rezagada). Dónde el superíndice Q se refiere a variables mensuales y el subíndice t se refiere al tiempo (día, meses, trimestres). Se pretende estimar la proyección de la serie de tiempo anual, por consiguiente, se estima la proyección lineal de Y dado el conjunto de información IM_t .

$$Proy \left[\frac{Y_t^Q}{IM_t^Q} \right]$$

Para el caso de la economía colombiana, el conjunto de indicadores macro está compuesto por n variables, IM_{it/c_j}^Q , donde $i = 1, \dots, n$ identifica las series de tiempo individuales hasta el último dato publicado, y $t = 1, \dots, T_{c_j}$ denota el tiempo, el cual cambia entre series c_j de acuerdo a su calendario de publicación. Así, las proyecciones de las series de tiempo económicas son calculadas como el valor esperado de la variable condicionado a la información disponible y el modelo subyacente, ω , bajo el cual se calcula la esperanza condicional:

$$Y_t^Q = E[Y_t^Q / \widehat{IM}_{c_j}^Q; \omega]$$

Regularmente, se utiliza un modelo lineal en donde los regresores son las variables del conjunto de información (o los factores principales) y la variable dependiente es el crecimiento de la Y mensual. La incertidumbre (varianza) asociada a esta proyección es:

$$Var_{Y_t^Q/c_j} = E[(\widehat{Y}_t^Q/c_j - Y_t^Q)^2 / IM_{c_j}^Q; \omega]$$

Ahora bien, el modelo denotado " ω " puede ser cualquiera de los 4 tipos de modelos. Debido a que el número de datos observados va creciendo con el tiempo, la varianza del error va disminuyendo, es decir:

$$Var_{Y_t^Q/c_j} \leq Var_{Y_t^Q/c_{j-1}}$$

Así pues, se aplicará este procedimiento para cada una de las series claves que permita resultados más precisos, consistentes y confiables para la senda de la economía colombiana.

4. Resultados

En esta sección se presenta los resultados a partir de una variedad de simulaciones que son realizadas con el modelo de equilibrio general computado dinámico recursivo para la totalidad de variables y ecuaciones en cuestión, y que se relacionan con aspectos de cómo se incrementa la productividad y sus efectos sobre la senda del producto en la próxima década. En primer lugar, se simula un escenario base que presenta la estructura de la economía real de Colombia de forma detallada y organizada en términos computacionales, que considera la Covid-19 como un shock transitorio de oferta que desencadena efectos de demanda y se construye el impacto anual a partir de choques del índice de capacidad instalada teniendo en cuenta el tiempo de aislamiento social que experimentó el país. A ello se suma de forma simultánea el shock petrolero en el precio (caída anual precio del petróleo Brent 53.14% según la EIA) y cantidades (caída anual de producción de barriles en 8.6% según Corficolombia), la caída esperada tanto en la Inversión Extranjera Directa (IED) (del 10% según nuestro modelo ML), las remesas (del 20% según Banco mundial) y el incremento del gasto público (un aumento exógeno de 23 billones según el MFMP2020) desembolsado en las medidas implementadas por el Gobierno para mitigar y recuperar la actividad económica y social de los efectos de la pandemia. A continuación, en la tabla 1 se presentan los resultados de lo que ahora en adelante llamaremos el escenario base que nos indica una caída del -7,68% del PIB en el 2020 y réplica el año 2019, además, se muestran dos variables que serán relevantes ante los fuertes estragos en el mercado laboral y la suspensión de la regla fiscal en el país.

Tabla 1: Escenario base de la economía colombiana en tiempos de pandemia

Variable	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028
Crecimiento del PIB	3.30%	-7.68%	4.71%	3.66%	3.47%	3.39%	3.46%	3.49%	3.42%	3.38%
Tasa de desempleo	9.21%	15.78%	12.15%	12.23%	12.21%	12.20%	12.12%	12.05%	11.99%	11.92%
Déficit fiscal	-2.52%	-6.71%	-4.63%	-3.94%	-3.62%	-3.27%	-2.80%	-2.35%	-1.93%	-1.54%

Fuente: Cálculos con el modelo CGE en GAMS.

La narrativa que apoya el cálculo del escenario base es la siguiente: la propagación del nuevo corona virus afecta la gestión de las empresas, que se ven obligadas a tomar medidas precautelativas para evitar los contagios de sus empleados, y experimentan por ello reducciones en su producción que se ven reforzadas por eventuales rupturas de cadenas de abastecimiento. Dado que, en principio, la capacidad productiva teórica se mantiene, la mejor forma de entender el fenómeno es asimilarlo a un shock del índice de capacidad instalada del -12% y cerrando el modelo con la inversión. Esos efectos se exageran por las medidas de distanciamiento social y aislamiento que se tomaron para contener el virus, en la medida en que ellas limitan la movilidad de las personas, imponiendo restricciones adicionales a la gestión empresarial. Esas medidas tienen costos en sí mismas y por ello, deben ir acompañadas de medidas de mitigación de impacto, que hagan llevadera la carga para las personas, y de reparación, que impidan la destrucción del aparato productivo que se reflejan en el

desborde del déficit fiscal en el modelo acompañado de una caída anual de la tasa impositiva del 20%. En consonancia con ello, todo en conjunto forman el escenario base para el análisis de productividad.

En esencia la trayectoria de una economía puede cambiar de cuatro formas por temas de productividad en nuestro CGE: iniciando con la más obvia es que el TFP mejore, que en nuestro modelo es un parámetro de escala llamado (BV)¹³ de valor agregado de la función de producción. Para el análisis se crean tres conjuntos que afectan de forma exógena la TFP en el modelo así: sector primario¹⁴, secundario¹⁵ y terciario¹⁶ con las 12 ramas del DANE. En este sentido se simula un incremento exógeno de la TFP por sector del 1% en la economía colombiana (ver Figura 9). El escenario planteado consiste en evaluar que pasaría si somos capaces de dejar de decrecer del orden del -0.6% que ha sido el promedio de las últimas dos décadas según los datos del Conference Board. La narrativa de estos cálculos, radica en el diseño e implementación de políticas públicas encaminadas a que cada empresario logre mejoras de productividad, es decir, con los mecanismos de escuela de productividad y el Estado que permita brindar herramientas modernas que tanto han crecido en los últimos años a nivel mundial (Mazzucato, 2011). En este orden de ideas la segunda forma sería con políticas públicas de desarrollo que permitan una transformación estructural y crecimiento de la productividad que como se explico anteriormente no será objeto de análisis. El tercero sin duda alguna sería el capital humano para impulsar la productividad, mayor inversión en educación, trabajo calificado y calculando cuanto cuesta educar a las personas (ver Figura 12). El cuarto mecanismo se puede agrupar en el enfoque de la mala asignación de recursos, siendo el primero el de mis-allocation, es decir, las empresas todas son muy distintas y pueden ganar participación de mercado, pero si el Estado protege los malos, los recursos no fluyen hacia dónde deberían fluir, y el análisis se realiza creando funciones de distribución. Por ejemplo, pueden existir distorsiones en los aranceles, los impuestos, los costos de comercialización y/o los costos de capital, siendo medibles cada una de las fuentes, no obstante, en la práctica se miden e identifican tres que son capaces de calcular mis-allocation. Ahora bien, la segunda dentro de este enfoque es el modelado Melitz que será nuestro principal objeto de análisis (ver Figura 11) y se presentará más adelante.

En consecuencia, siendo la TFP un parámetro de escala en la función de producción en nuestro modelo para cada sector, se incrementa el BV y se compara los resultados en la Figura 9 con el escenario base que incluye los impactos esperados del nuevo corona virus en la economía colombiana, por ello, el choque se realiza a partir del año 2021. El incremento es del 1% de la productividad por sector, en la Figura 9 se sintetiza los efectos en la futura senda del crecimiento económico de cada uno de los choques. Se evidencia en primer lugar la mejora de los tres escenarios contra-factuales respecto al base, siendo el crecimiento de la TFP de forma exógena, dónde en promedio en el escenario base entre el año 2021-2030 se experimenta un crecimiento del PIB del orden del 3,57% y en orden de importancia haciendo los mismos cálculos se mejora con el aumento de la TFP del sector terciario en un orden del 4,21% sigue el secundario con 3,84% y finaliza el primario con

¹³Ver Anexo 3 con la descripción de las ecuaciones centrales del modelo

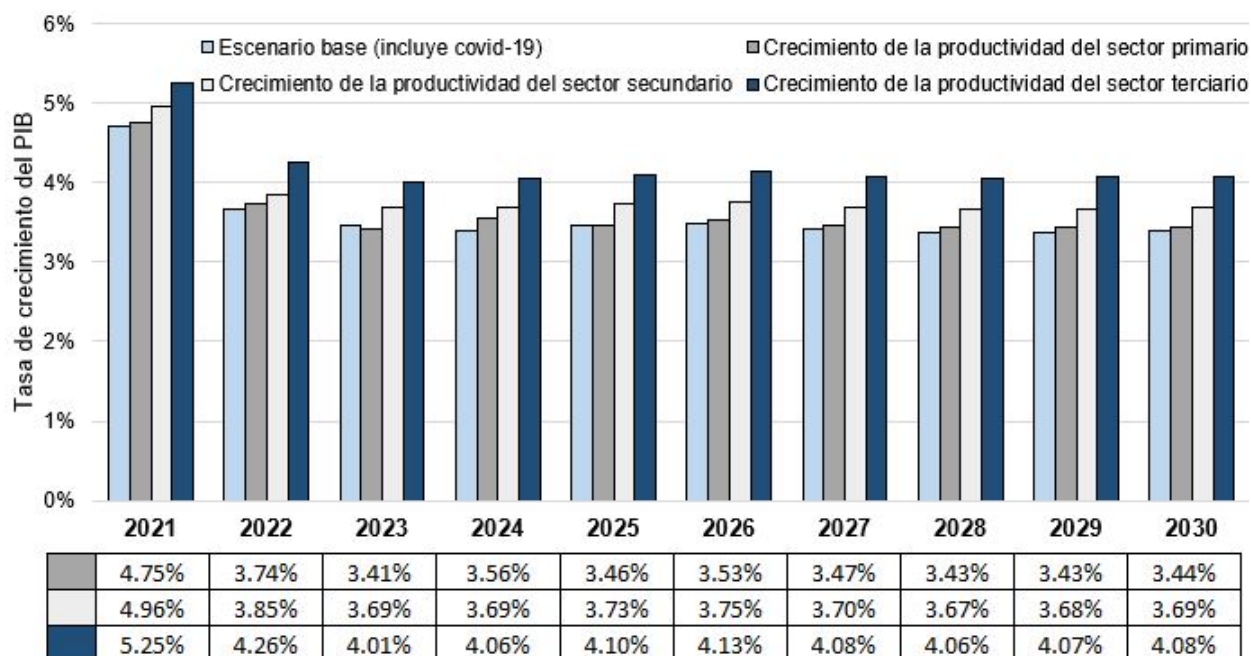
¹⁴Agricultura

¹⁵Industria, minería, construcción y electricidad gas y agua.

¹⁶Inmobiliario, servicios, administración, financiero, entretenimiento, comercio y transporte.

3,62%, todas tasas de crecimiento promedio entre 2021-2030. Lo que nos sugiere al menos en términos de crecimiento del PIB hacia que sectores se debe coordinar los esfuerzos de política pública de productividad.

Figura 9: Escenarios de crecimiento de la productividad (TFP) por sector en la economía colombiana 2019-2030



Fuente: Cálculos con el modelo CGE en GAMS.

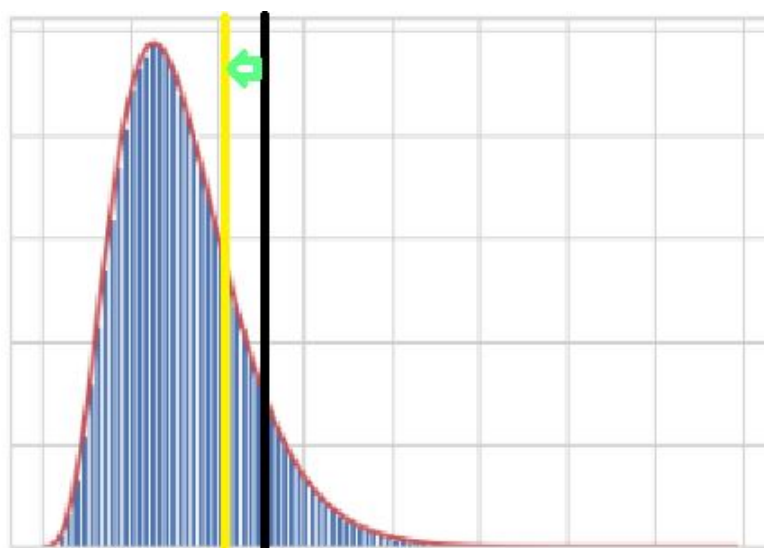
Ahora bien, teniendo en cuenta que el objetivo del artículo es presentar al menos una simulación que presente el crecimiento de la productividad con naturaleza más 'endógeno' se hará uso en este apartado del modelo de Melitz (2003) con adaptaciones en lo que se refiere al modelado de Dixon et al. (2016) y Dixon et al. (2018) descrita de forma amplia en el Anexo 1. En síntesis, el modelo de Melitz incorporado en nuestro CGE supone condiciones de competencia monopolística en las cuales las empresas producen una variedad de bienes y extraen su productividad de una distribución fija. Hay costos de producción fijos y costos de entrada fijos y variables en los mercados de exportación, por consiguiente, la productividad de la empresa y la probabilidad esperada de entrar en el mercado extranjero están relacionadas positivamente¹⁰. La versión Melitz se basa en la especificación de Pareto siendo está la distribución de las productividades. Nuestras empresas de Melitz se enfrentan a un costo fijo para cada mercado en el que venden. En consecuencia, pueden vender en algunos mercados pero no otros, dependiendo de si pueden o no encontrar un combinación precio/cantidad que genera un margen suficiente sobre los costos variables para cubrir los costos fijos específicos del mercado (ver Figura 10). Para algunas empresas puede no haber mercados en el que pueden cubrir los costos fijos específicos del mercado (Dixon et al., 2018).

¹⁰Para mayor detalle acompañado de la descripción de las variables en el anexo matemático se encuentra detallado el modelo en la sección 1 del apéndice matemático al final del documento.

En este orden de ideas se realizará tres simulaciones que endogenizan la productividad para la economía colombiana usando en primer instancia los costos de 'iceberg' o costos de comercialización, la productividad media de la distribución de productividad de Pareto y el límite inferior de dicha distribución para evaluar los estados contrafactuales respecto al escenario base para la actividad económica en los próximos años.

La narrativa del primer choque se explica así, una reducción de los costos iceberg del modelo Melitz, lo que significa, que comercializar en Colombia cueste (1%, 3% o 5%) menos y comercializar en cualquier destino cueste (1%, 3% o 5%) menos. En la Figura 11 se evidencia que aumenta el crecimiento económico en cada una de sus variaciones, lo importante aquí es que está siendo un fenómeno exclusivamente por el crecimiento de la productividad mediante el modelo de Melitz, puesto que, la productividad de la empresa y la probabilidad esperada de entrar en el mercado extranjero están relacionadas positivamente. En otras palabras, la caída del (1%, 3% o 5%) lo que permite es que nuevas empresas buenas (productivas) ingresen al mercado al caer los costos de comercialización en la función de distribución Pareto (para mayor detalle en el Anexo 1 se presentan de la estructura matemática y definición de empresa productiva). Para brindar una idea gráfica que permita mayor ilustración se presenta la Figura 10, así pues, existe el famoso costo llamado 'costo de iceberg' que limita la entrada (la línea roja) y sólo pueden exportar las empresas después de la línea negra, es decir, en los mercados domésticos participan todas las empresas de la distribución, pero en el mercado externo sólo participan las empresas más productivas después de la línea roja. En este caso se logra que ingresarán al mercado empresas productivas al sector externo lo que genera un cambio de productividad endógeno.

Figura 10: **Distribución de probabilidad Pareto de las empresas productivas modelo Melitz**



Fuente: Elaboración propia adaptada de [Melitz \(2003\)](#).

En resumen, lo que se está haciendo en el modelo es pasar de la línea negra a la línea amarilla, con la caída del costo de iceberg, por consiguiente, todas las empresas que se encuentran en la flecha de color verde van a poder exportar, esto implica que se tiene un efecto de productividad en el país, pero en el bloque de producción total

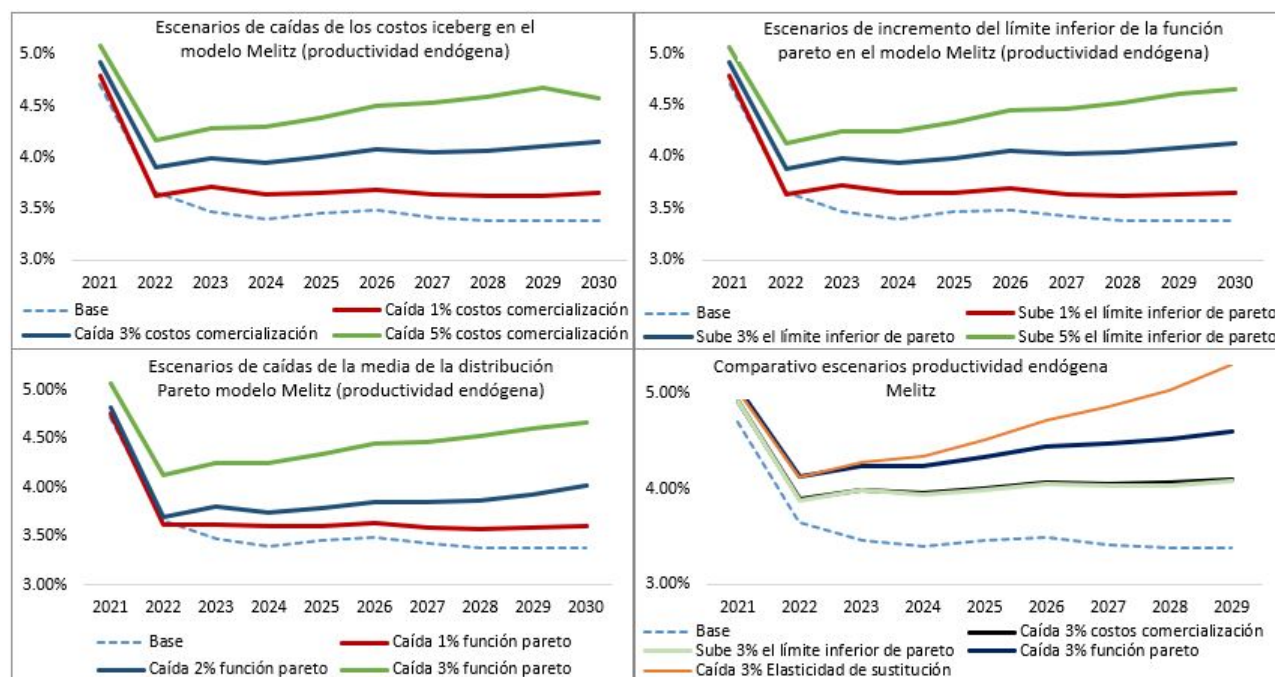
están ganando participación las empresas (entre línea amarilla y negra), lo que en el modelo nos estaría dando un efecto de productividad endógeno, en consecuencia, se experimenta un mayor crecimiento económico para cada una de sus variaciones respecto al escenario base que se presentan en la Figura 11, al abrirse mercados a las empresas buenas, con la caída del umbral de costos de los comercialización y así la productividad agregada mejora. Es importante anotar que en nuestro CGE el sector externo incorpora la nueva teoría del comercio internacional, es decir, que sólo venden en el exterior los buenos teniendo cómo conjunto de elección los 16 socios comerciales descritos (puede ser por trámites más rápidos, disminución de trabas administrativas y/o la instalación de una oficina en los 16 socios comerciales del modelo que representan a los colombianos mejorando procesos), abriendo los mercados a los más productivos por su naturaleza de competencia imperfecta.

Siguiendo con esta línea, otros parámetros relevantes de la distribución de la Figura 10 tiene que ver con la media de la distribución Pareto que se modifica también en (1%, 3% o 5%) que aunque tiene efecto endógeno y positivo en la productividad son un menores que el primer escenario y el tercer escenario dónde se incrementa el límite inferior de la distribución Pareto en (1%, 2% o 3%) sacando a las firmas malas y reasignando recursos a las firmas más buenas en la distribución hacia la cola derecha generando también un efecto endógeno de crecimiento de la productividad. Para poder hacer el análisis comparativo de los escenarios y sus variaciones usando la modelación Melitz y el marco del modelo de equilibrio general computable se presenta la Figura 11 que muestra cada una de las trayectorias del PIB teniendo cada una de las variaciones en los tres escenarios descritos además de presentar un gráfico comparando en el mismo nivel (3%) agregando la elasticidad de sustitución para ver cuál podría generar mayor crecimiento. Es importante recordar en este punto que incluye calibración de series de tiempo clave con aprendizaje automático y los efectos de la pandemia para el año 2020, por esta última razón se presenta los resultados a partir del año 2021.

La productividad de las firmas viene dado por la distribución de Pareto. Como se evidencia en cada uno los escenarios obtenidos en la Figura 11, dicho crecimiento de la productividad de carácter endógeno con base en la SAM 2018 en nuestro modelo CGE en cada una de sus variaciones de forma anual para los parámetros costos de comercialización (τ) y el límite inferior de la distribución (AH) en mayor medida y para la productividad media (BH) en menor, manteniendo relativamente estables variables tales como la IED, petróleo y remesas, tiene efectos de cambio técnico e innovación que permite aumentar la brecha de crecimiento del PIB con el escenario base del modelo, hasta el año 2030, lo interesante, tiene que ver con la estabilidad del crecimiento de la productividad a partir de dicho de periodo la brecha sigue siendo positiva y considerable. En síntesis, en el periodo 2021-2030 se pasa de un promedio del crecimiento real del PIB del 3,57% en el escenario base a unas tasas crecimiento de la economía en términos reales del 3,77% en el primer escenario (τ), 3,72% en el segundo escenario (AH) y finalmente 3,76% en el tercer escenario (BH), en términos económicos significa que al permitir la entrada de las empresas colombianas que aún no lograban exportar evitando trabas en los costos tiene un efecto endógeno en la productividad del país, puesto que, permite la inserción en el mercado internacional en sectores con mayores rentabilidad y tecnología, de forma similar el tercer escenario implica que se sube el umbral de las empresas colombianas más malas permitiendo

la reasignación de recursos a las firmas domésticas más productivas, así pues, lo que nos sugiere hacia dónde se deben destinar los esfuerzos de política económica. La Figura 11 sintetiza los escenarios de productividad.

Figura 11: Escenarios de caída de los costos iceberg, media de la distribución Pareto y el incremento de su límite inferior en el modelo Melitz (productividad endógena) en la senda del PIB Colombia 2021-2030

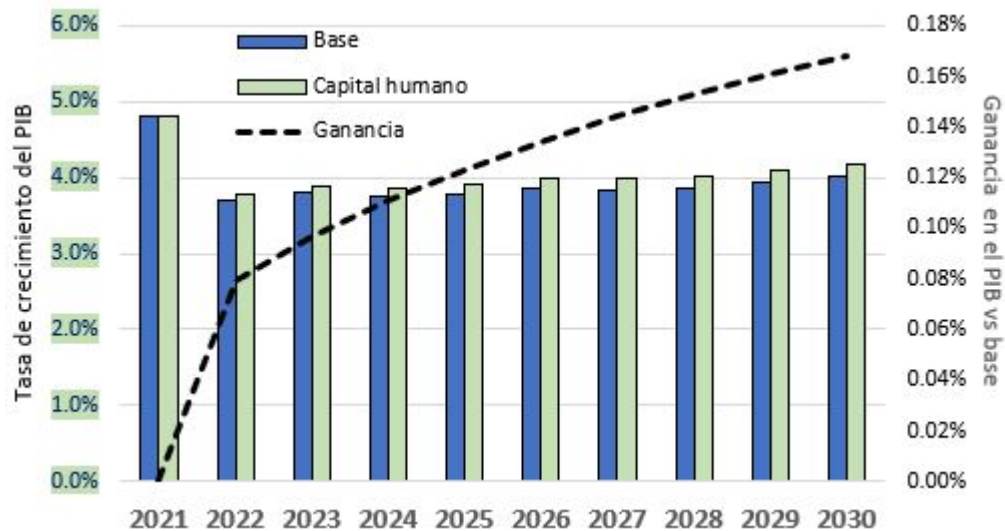


Fuente: Cálculos con modelo CGE incorporando Melitz en GAMS.

Se evidencia de los resultados de cada uno de los tres escenarios con sus respectivas variaciones, cómo el efecto del incremento endógeno de la productividad sobre el crecimiento económico en Colombia en la próxima década no es lineal, sino que el aporte es mayor teniendo en cuenta la magnitud del choque, generando una senda creciente y sostenida del PIB. En particular, en el gráfico comparativo se incluye el choque de la elasticidad de sustitución a los tres escenarios previos en el mismo orden de magnitud, siendo el de mayor aporte al PIB, debido a que si se dirige una política comercial en el país cambiando a bienes de mayor valor agregado y de rentabilidades más altas en el comercio internacional permite una mejora del aparato productivo. Es importante anotar que cada uno de los escenarios generaría un crecimiento económico creciente y sostenido para Colombia.

Finalmente, aprovechando la desagregación del modelo en trabajo calificado y no, se realiza un escenario para el capital humano que permite impulsar la productividad, este último se puede lograr con mayor inversión en educación y generando trabajo calificado. En este orden ideas, pondremos como meta de política pública en el periodo 2021-2030 educar 500 mil nuevos tecnólogos colombianos como trabajadores calificados en nuestro modelo a partir del año 2021 que permita suplir los fuertes estragos en el mercado laboral de las medidas implementadas para la propagación del nuevo corona virus en el país como se presentó en la Tabla 1, los resultados del shock de capital humano y del escenario base se presentan en la Figura 12.

Figura 12: Incrementos de capital humano en la economía colombiana 2021-2030



Fuente: Cálculos con modelo CGE en GAMS.

Se encuentra que la economía colombiana pasaría a tener unas tasas de crecimiento del orden del 3,69% en promedio entre 2021-2030. Lo importante a destacar en esta simulación es cómo el capital humano va generando una brecha positiva en el tiempo (línea negra punteada) respecto al escenario base, por lo cual, los 500 mil colombianos calificados conllevarían a un crecimiento económico creciente y sostenido. Es importante aclarar que aunque esta política tiene costos para el país, la educación es uno de los motores de la productividad, y el crecimiento de la productividad es la esencia del crecimiento económico.

5. Conclusiones

La productividad en Colombia y a nivel mundial se ha estancado en las últimas décadas. Es un fenómeno que no parece presentar señales de cambios disruptivos crecientes y que se avizora por los efectos económicos y sociales de la pandemia, que pone de manifiesto el papel de las autoridades económicas junto al sector empresarial. Para generar el ansiado repunte del crecimiento de la productividad, se requiere de un conjunto de acciones coordinadas y permanentes que involucren al gobierno nacional, sector privado y la comunidad científica y académica. Es un compromiso que cuenta con sustento en el largo plazo, cuando todos los agentes involucrados vayan encaminados al fin mismo del crecimiento de la productividad, teniendo siempre en el horizonte que es la esencia del crecimiento económico sostenido de cualquier economía y conlleva mejoras para todos. Al ser un fenómeno tan complejo, no es tan fácil abordarlo desde una sola perspectiva, por consiguiente, en este documento se brindó una visión más global y pertinente para la consecución del objetivo y los análisis de escenarios, considerando desafíos actuales y futuros, y propuestas, que estuvieron inspiradas en su mayor parte, en un marco de agentes heterogéneos y competencia imperfecta.

Una de las primeras reflexiones, es que aunque aún falta bastante por entender de una forma más completa los determinantes de la productividad en Colombia, este documento sirve para llenar en parte dicho vacío, y es concluyente que es más importante aunar esfuerzos en los retos que se tienen en competitividad en un contexto de post-pandemia y no debemos desaprovechar esta oportunidad única en la historia que marcará a toda nuestra generación, para los cambios importantes como la disminución gradual de la informalidad laboral, la diversificación productiva del perfil exportador hacia productos y servicios con alto valor agregado y de mayor crecimiento y rentabilidad para su sostenibilidad, con cadenas de valor sofisticadas, que permitan una mayor encadenamientos productivos y aunando esfuerzos por una redirección de recursos a la educación como el soporte de cualquier transformación productiva, puesto que, finalmente el conocimiento es la tecnología, la generación de conocimiento es la base del crecimiento de la innovación y de la productividad.

Se encontró que en cada uno los escenarios, el crecimiento de la productividad de carácter endógeno generado en el modelo CGE con el uso de Melitz con sus respectivas variaciones de forma anual para los costos de comercialización, el límite inferior de la distribución en mayor medida y para la media de la distribución Pareto en menor, manteniendo relativamente estables las variables exógenas claves, tienen efectos de cambio técnico e innovación que permite aumentar el crecimiento del PIB hasta el año 2030, lo interesante bajo los escenarios obtenidos, tiene que ver con la senda creciente y sostenida del producto para la economía colombiana.

En síntesis, en el periodo 2021-2030 se pasa de un promedio del crecimiento real del PIB del 3,57% en el escenario base a unas tasas crecimiento de la economía en términos reales del 3,77% en el primer escenario (tau), 3,72% en el segundo escenario (AH) y finalmente 3,76% en el tercer escenario (BH), en términos económicos significa que al permitir la entrada de las empresas colombianas que aún no lograban exportar evitando trabas en los costos tiene un efecto endógeno en la productividad del país, puesto que, permite la inserción en el mercado internacional en sectores con mayores rentabilidad y tecnología, de forma similar

el tercer escenario implica que se sube el umbral de las empresas colombianas más malas permitiendo la reasignación de recursos a las firmas domésticas más productivas, así pues, lo que nos sugiere hacia dónde se deben destinar los esfuerzos de política pública de productividad en la próxima década cómo tema principal en la agenda país.

Otro punto a destacar es que el modelo CGE mejora significativamente con la calibración en los parámetros y las series macro exógenas intregrando con Machine Learning, lo que sugiere que las técnicas de aprendizaje automático podrían ser una parte importante del conjunto de herramientas de pronóstico macro de países emergentes y un excelente complemento de los modelos computables.

Referencias

- Akerberg, D. A., Caves, K., and Frazer, G. (2015). Identification properties of recent production function estimators. *Econometrica*, 83(6):2411–2451.
- Aghion, P., Blundell, R., Griffith, R., Howitt, P., and Prantl, S. (2009). The effects of entry on incumbent innovation and productivity. *The Review of Economics and Statistics*, 91(1):20–32.
- Agrawal, A., Gans, J., and Goldfarb, A. (2018). *Prediction machines: the simple economics of artificial intelligence*. Harvard Business Press.
- Ahmed, I., Socci, C., Severini, F., Yasser, Q. R., and Pretaroli, R. (2018). Forecasting investment and consumption behavior of economic agents through dynamic computable general equilibrium model. *Financial Innovation*, 4(1):7.
- Baily, M. N., Hulten, C., Campbell, D., Bresnahan, T., and Caves, R. E. (1992). Productivity dynamics in manufacturing plants. *Brookings papers on economic activity. Microeconomics*, 1992:187–267.
- Balduzzi, G. and Rostan, M. (2016). Organizing the ‘productive transformation of knowledge’: linking university and industry in traditional manufacturing areas. *Tertiary education and management*, 22(1):19–35.
- Bañbura, M., Giannone, D., Modugno, M., and Reichlin, L. (2013). Now-casting and the real-time data flow. In *Handbook of economic forecasting*, volume 2, pages 195–237. Elsevier.
- Banerjee, A. V. and Moll, B. (2010). Why does misallocation persist? *American Economic Journal: Macroeconomics*, 2(1):189–206.
- Banks, G. (2015). Institutions to promote pro-productivity policies: Logic and lessons.
- Baqae, D. R. and Farhi, E. (2020). Productivity and misallocation in general equilibrium. *The Quarterly Journal of Economics*, 135(1):105–163.
- Becerra, O., Caicedo, S., Eslava, M., Hofstetter, M., López, J. I., Pérez Reyna, D., Perry, G., Urrutia, M., Wills, D., et al. (2019). El déficit de productividad en colombia.

- Bekkers, E. and Francois, J. (2018). A parsimonious approach to incorporate firm heterogeneity in cge-models. *Journal of Global Economic Analysis*, 3(2):1–68.
- Berthou, A., Chung, J. J., Manova, K., and Bragard, C. S. D. (2018). Productivity,(mis) allocation and trade. *August*, 17:2018.
- Bils, M., Klenow, P. J., and Ruane, C. (2020). Misallocation or mismeasurement? Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Bolhuis, M. and Rayner, B. (2020). Deus ex machina? a framework for macro forecasting with machine learning.
- Boratyński, J., Borowski, J., Czerniak, A., and Rosati, D. (2019). Sectoral decomposition of the balassa-samuelson effect in cee countries: A cge analysis. *Eastern European Economics*, 57(2):153–177.
- Botero García, J. et al. (2005). Los cambios en la productividad: medidas alternativas aplicadas a colombia.
- Botero-García, J. A. (2012). Desempleo e informalidad en colombia: un análisis de equilibrio general computable. *Capítulo 19. Desempleo e informalidad en Colombia: un análisis de equilibrio general computable. Pág.: 795-839.*
- Challies, E. R. and Murray, W. E. (2006). Productive transformations and bilateralism in the semi-periphery: A comparative political economy of the dairy complexes of new zealand and chile. *Asia Pacific Viewpoint*, 47(3):351–365.
- Chisari, O. O., Maquieyra, J., and Miller, S. (2012). Manual sobre modelos de equilibrio general computado para economías de lac con énfasis en el análisis económico del cambio climático. *Nota Técnica IDB-TN*, 445.
- Cicowiez, M. and Filippo, A. (2018). A computable general equilibrium analysis for haiti. *Project Document, Inter-American Development Bank.*
- Cirera, X. and Maloney, W. F. (2017). *The innovation paradox: Developing-country capabilities and the unrealized promise of technological catch-up.* The World Bank.
- Ciuriak, D. and Xiao, J. (2016). Calibrating wage-productivity responses in cge model simulations of trade policy impacts. *Available at SSRN 2839624.*
- Clavijo, S. and Banco, M. d. l. J. D. (2003). Crecimiento, productividad y la ‘nueva economía’: Implicaciones para colombia. *Borradores de Economía*, 228:1–37.
- Coulombe, P. G., Leroux, M., Stevanovic, D., and Surprenant, S. (2020). How is machine learning useful for macroeconomic forecasting? *arXiv preprint arXiv:2008.12477.*
- Cui, C. X., Hanley, N., McGregor, P., Swales, K., Turner, K., and Yin, Y. P. (2017). Impacts of regional productivity growth, decoupling and pollution leakage. *Regional Studies*, 51(9):1324–1335.

- Cusolito, A. P. and Maloney, W. F. (2018). *Productivity revisited: Shifting paradigms in analysis and policy*. The World Bank.
- Das, G. G. (2019). Ability-biased technical change and productivity bonus in a nested production structure: A theoretical model with endogenous hicks-neutral technology spillover. *Scientific Annals of Economics and Business*, 66(3):415–450.
- De Loecker, J. (2011). Product differentiation, multiproduct firms, and estimating the impact of trade liberalization on productivity. *Econometrica*, 79(5):1407–1451.
- De Lucio, J. J., Herce, J. A., and Goicolea, A. (2002). The effects of externalities on productivity growth in spanish industry. *Regional Science and Urban Economics*, 32(2):241–258.
- Deaton, A. and Muellbauer, J. (1980). An almost ideal demand system. *The American economic review*, 70(3):312–326.
- Devarajan, S. and Rodrik, D. (1991). Pro-competitive effects of trade reform: results from a cge model of cameroon. *European Economic Review*, 35(5):1157–1184.
- Dixon, P., Jerie, M., and Rimmer, M. (2016). Modern trade theory for cge modelling: the armington, krugman and melitz models. *Journal of Global Economic Analysis*, 1(1):1–110.
- Dixon, P. B. (1982). *Orani, a multisectoral model of the Australian economy*, volume 142. North Holland.
- Dixon, P. B., Jerie, M., and Rimmer, M. (2018). *Trade Theory in Computable General Equilibrium Models*. Springer.
- Dixon, P. B. and Jorgenson, D. (2012). *Handbook of computable general equilibrium modeling*, volume 1. Newnes.
- Duggal, V. G., Saltzman, C., and Klein, L. R. (2007). Infrastructure and productivity: An extension to private infrastructure and it productivity. *Journal of Econometrics*, 140(2):485–502.
- Easterly, W. and Levine, R. (2003). Tropics, germs, and crops: how endowments influence economic development. *Journal of monetary economics*, 50(1):3–39.
- Echavarría-Soto, J. J., Giraldo, I., and Jaramillo, F. (2019). Protección y productividad en la industria colombiana, 1993-2011. *Borradores de Economía; No. 1082*.
- Echeverry, J. C., Hernández, M., et al. (2005). Posibilidades y limitantes de un cambio en la productividad de los sectores colombianos: Textiles-confecciones, avícola-porcícola, siderurgica-metalmecanica y galleteria-confitería-chocolateria. Technical report, Universidad de los Andes-CEDE.
- Eslava, M. and Haltiwanger, J. C. (2020). The life-cycle growth of plants: The role of productivity, demand and wedges. Technical report, National Bureau of Economic Research.

- Eslava, M. and Meléndez, M. (2009). Politics, policies and the dynamics of aggregate productivity in colombia.
- Flaig, D., Grethe, H., and McDonald, S. (2013). Imperfect labour mobility in a cge model: Does factor specific productivity matter?
- Foster, L., Haltiwanger, J. C., and Krizan, C. J. (2001). Aggregate productivity growth: lessons from micro-economic evidence. In *New developments in productivity analysis*, pages 303–372. University of Chicago Press.
- Gámez, O. (2018). Modelo de equilibrio general computable para nicaragua. *Foro de Investigadores de Bancos Centrales del Consejo Monetario Centroamericano*.
- García, J. A. B., Hurtado Rendon, A., Gonzalez, H. F., Morales, M. A., and Herrera, D. F. M. (2020). Fiscal sustainability, public expense and growth: A computable general equilibrium analysis for the colombian case.
- García, J. B. (2007). *Crecimiento, pobreza y distribución del ingreso un análisis de equilibrio general computable*. DNP.
- García, J. B. (2011). Impuestos al capital y al trabajo en colombia: un análisis mediante equilibrio general computable. *Ecos de Economía: A Latin American Journal of Applied Economics*, 15(33):49–69.
- Giordano, P., Watanuki, M., and Gavagnin, O. (2013). Modelo de equilibrio general computable bid-int: Marco teórico y aplicaciones. *Nota Técnica IDBTN-505. Washington, DC: Banco Interamericano de Desarrollo*.
- Go, D. S., Lofgren, H., Ramos, F. M., and Robinson, S. (2015). *Estimating parameters and structural change in CGE models using a Bayesian cross-entropy estimation approach*. The World Bank.
- Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A., and Bengio, Y. (2016). *Deep learning*, volume 1. MIT press Cambridge.
- Grover Goswami, A., Medvedev, D., and Olafsen, E. (2019). *High-growth firms: Facts, fiction, and policy options for emerging economies*. The World Bank.
- Hastie, T., Tibshirani, R., and Friedman, J. (2009). *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. Springer Science & Business Media.
- Hidalgo, C. A. and Hausmann, R. (2009). The building blocks of economic complexity. *Proceedings of the national academy of sciences*, 106(26):10570–10575.
- Hosoe, N., Gasawa, K., and Hashimoto, H. (2010). *Textbook of computable general equilibrium modeling: programming and simulations*. Springer.
- Hsieh, C.-T. and Klenow, P. J. (2009). Misallocation and manufacturing tfp in china and india. *The Quarterly journal of economics*, 124(4):1403–1448.

- Jafari, Y. and Britz, W. (2018). Modelling heterogeneous firms and non-tariff measures in free trade agreements using computable general equilibrium. *Economic Modelling*, 73:279–294.
- Juan José, E., María Angélica, A., and María Fernanda, R. (2006). La productividad y sus determinantes: el caso de la industria colombiana. *Revista desarrollo y sociedad*, (57):77–122.
- Kilimani, N., Van Heerden, J., Bohlmann, H., and Roos, L. (2018). Economy-wide impact of drought induced productivity losses. *Disaster Prevention and Management: An International Journal*.
- Krugman, P. (1980). Scale economies, product differentiation, and the pattern of trade. *The American Economic Review*, 70(5):950–959.
- Latorre, M. C., Yonezawa, H., and Zhou, J. (2018). A general equilibrium analysis of fdi growth in chinese services sectors. *China Economic Review*, 47:172–188.
- Levinsohn, J. and Petrin, A. (1999). When industries become more productive, do firms? Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Li, W., Lu, C., and Zhang, Y.-W. (2019). Prospective exploration of future renewable portfolio standard schemes in china via a multi-sector cge model. *Energy Policy*, 128:45–56.
- Lkhagva, D., Wang, Z., and Liu, C. (2019). Mining booms and sustainable economic growth in mongolia—empirical result from recursive dynamic cge model. *Economies*, 7(2):51.
- Lora, E. (1996). Los modelos de equilibrio general computable en análisis de incidencia fiscal.
- Maldonado, N. and Sánchez, E. (2012). Rutas de transformación productiva. *Cuadernos de Economía*, 31(SPE57):113–145.
- Map, T. (2017). Trade statistics for international business development. URL: <https://www.trademap.org> [in Eng.].
- Mazzucato, M. (2011). The entrepreneurial state. *Soundings*, 49(49):131–142.
- McMillan, M. S. and Rodrik, D. (2011). Globalization, structural change and productivity growth. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Melitz, M. J. (2003). The impact of trade on intra-industry reallocations and aggregate industry productivity. *econometrica*, 71(6):1695–1725.
- Melitz, M. J. and Polanec, S. (2015). Dynamic olley-pakes productivity decomposition with entry and exit. *The Rand journal of economics*, 46(2):362–375.
- Melo, J. d. and Robinson, S. (1992). Productivity and externalities: models of export-led growth. *Journal of International Trade & Economic Development*, 1(1):41–68.

- Meng, S. and Siriwardana, M. (2016). *Assessing the Economic Impact of Tourism: A Computable General Equilibrium Modelling Approach*. Springer.
- Meng, S. and Siriwardana, M. (2017). Constructing a tourism cge model. In *Assessing the Economic Impact of Tourism*, pages 131–210. Springer.
- Montaud, J.-M., Dávalos, J., and Pécastaing, N. (2020). Potential effects of scaling-up infrastructure in peru: a general equilibrium model-based analysis. *Applied Economics*, 52(27):2895–2912.
- Nübler, I. (2014). A theory of capabilities for productive transformation: Learning to catch up. *Transforming Economies*, page 113.
- Olley, G. S. and Pakes, A. (1992). The dynamics of productivity in the telecommunications equipment industry. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Pedregosa, F., Varoquaux, G., Gramfort, A., Michel, V., Thirion, B., Grisel, O., Blondel, M., Prettenhofer, P., Weiss, R., Dubourg, V., et al. (2011). Scikit-learn: Machine learning in python. *the Journal of machine Learning research*, 12:2825–2830.
- Pendakur, K. (2009). Chapter 7 easi made easier. *Quantifying Consumer Preferences*, pages 179–206.
- Perali, F. and Scandizzo, P. L. (2018). *The New Generation of Computable General Equilibrium Models: Modeling the Economy*. Springer.
- Perfetti, J. J., Botero, J., Oviedo, S., Forero, D., Higuera, S., Correa, M., García, J., et al. (2017). Política comercial agrícola: nivel, costos y efectos de la protección en colombia.
- Peter Mgeni, C., Müller, K., and Sieber, S. (2019). Reducing edible oil import dependency in tanzania: A computable general equilibrium cge approach. *Sustainability*, 11(16):4480.
- Pradhan, B. K. and Ghosh, J. (2019). Climate policy vs. agricultural productivity shocks in a dynamic computable general equilibrium (cge) modeling framework: The case of a developing economy. *Economic Modelling*, 77:55–69.
- Restuccia, D. and Rogerson, R. (2013). Misallocation and productivity.
- Restuccia, D. and Santaaulalia-Llopis, R. (2017). Land misallocation and productivity. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Ríos Arredondo, P. A. (2016). El efecto de la deuda pública sobre la inversión privada, un modelo de equilibrio general computable para colombia.
- Sandoz-Dit-Bragard, C. (2018). *Essays in international economics: firm heterogeneity, aggregate productivity and misallocation*. PhD thesis, Paris 1.

- Scandizzo, P. L., Pierleoni, M. R., and Cufari, D. (2018). A cge model for productivity and investment in kenya. In *The New Generation of Computable General Equilibrium Models*, pages 119–143. Springer.
- Shao, L. and Tang, R. (2020). Optimal allocation, input-output linkages, and aggregate productivity growth.
- Shikur, Z. H. (2020). Agricultural policies, agricultural production and rural households' welfare in ethiopia. *Journal of Economic Structures*, 9(1):1–21.
- Suescún, R., Steiner, R., et al. (2017). Un modelo de equilibrio general dinámico para la evaluación de la política económica en colombia.
- Sun, S. and Anwar, S. (2019). R&d activities and fdi in china's iron ore mining industry. *Economic Analysis and Policy*, 62:47–56.
- Tiffin, A. (2016). Seeing in the dark: a machine-learning approach to nowcasting in lebanon.
- Vargas, H. A. (2010). Elementos del proceso de transformación productiva y una mirada a los clusters. *Revista EAN*, (68):170–174.
- Wooldridge, J. M. (2009). On estimating firm-level production functions using proxy variables to control for unobservables. *Economics letters*, 104(3):112–114.
- Yamazaki, M., Koike, A., and Sone, Y. (2018). A heuristic approach to the estimation of key parameters for a monthly, recursive, dynamic cge model. *Economics of Disasters and Climate Change*, 2(3):283–301.
- Zhai, F. (2008). Armington meets melitz: Introducing firm heterogeneity in a global cge model of trade. *Journal of Economic Integration*, pages 575–604.
- Zidouemba, P. R. (2020). Macroeconomic impacts of female labour productivity shock in agriculture: evidence from a cge model applied to a sub-saharan african country. *Applied Economics Letters*, 27(12):1016–1021.

6. Anexo matemático: Especificación del modelo CGE

Este apéndice proporciona los detalles matemáticos necesarios para comprender el modelo de equilibrio general computable (CGE).

6.1. Anexo 1: Módulo Melitz (MM)

Asumimos cuando es conveniente que los posibles valores de productividad de las empresas son continuos, en lugar de discretos. Siguiendo la convención CGE de [Dixon et al. \(2016\)](#) y [Dixon et al. \(2018\)](#), asumimos que los valores de productividad en la economía colombiana forman una distribución de Pareto:

$$g_s(\Phi) = \alpha\Phi^{-\alpha-1}; \Phi \geq 1 \quad (1)$$

Donde α es un parámetro positivo. En (1), suponemos que el valor de productividad potencial más bajo es 1. Esta suposición puede hacerse sin pérdida de generalidad a través de una elección adecuada de unidades para la mano de obra. De (1) se obtiene:

$$\int_{\Phi_{min}}^{\infty} g_s(\Phi) d(\Phi) = (\Phi)_{min}^{-\alpha} \quad (2)$$

(2) Significa que la proporción de valores de productividad en los países que son mayores que cualquier nivel dado, Φ_{min} , es $(\Phi_{min}^{-\alpha})$. Por lo tanto, la proporción de empresas en el país s con una productividad de al menos $\Phi_{min(s,d)}$, es decir, la proporción de empresas $(\frac{N_{sd}}{N_s})$ que operan en el enlace es $(\Phi_{min(s,d)}^{-\alpha})$.

La siguiente ecuación justifica la versión Melitz, siendo $S(s,d) = \{k | \Phi_k \geq \Phi_{min(s,d)}\}$: Todas las firmas.

$$N_{sd} = N_s * \Phi_{min(s,d)}^{-\alpha}; (0)$$

Además, es fundamental definir la productividad de cada firma de la forma a lo Dixit-Stiglitz, lo que implica competencia monopolística:

$$\Phi_{s,d} = \left[\sum_{k \in S(s,d)} \Phi_k^{\sigma-1} \frac{N_s g_s(\Phi_k)}{N_{sd}} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}; (a)$$

A continuación, aplicamos (1) y (0) en una versión continua de (a). Se obtiene:

$$\Phi_{s,d}^{\sigma-1} = \int_{\Phi_{min(s,d)}^{\alpha}}^{\infty} \alpha \Phi^{-\alpha-1} \Phi^{\sigma-1} d(\Phi) \quad (3)$$

Simplificando:

$$\Phi_{s,d}^{\sigma-1} = \left(\frac{\alpha}{\alpha - (\sigma - 1)} \right) \Phi_{min(s,d)}^{\sigma-1} \quad (4)$$

Derivando, se asume la siguiente condición:

$$\alpha > (\sigma - 1) \quad (5)$$

Esto no tiene ninguna interpretación económica obvia. Sin embargo, sin ella, la integral de la ecuación (3) no tiene límites. De (4), obtenemos:

$$\Phi_{s,d} = \beta \Phi_{min(s,d)} \quad (6)$$

Siendo:

$$\beta = \left(\frac{\alpha}{\alpha - (\sigma - 1)} \right)^{1/(\sigma-1)} \quad (7)$$

De esta manera se procede a la derivación de la versión propiamente Melitz. De la versión AKME de (T2.1), podemos ver que la relación de precios para cualquiera de las dos empresas es la relación de sus productividades elevadas a la potencia 1. Aplicando esta idea en la versión AKME (Armington, Krugman y Melitz como casos especiales de una Envolvente):

$$\rho_d^{1-\sigma} = \sum_s \sum_{k \in S(s,d)} N_s \alpha \Phi_k^{-\alpha-1} \delta_{\sigma}^{s,d} \rho_{s,d}^{1-\sigma} \left(\frac{\Phi_k}{\Phi_{s,d}} \right)^{\sigma-1} \quad (8)$$

Que puede reescribirse en formato continuo como:

$$\rho_d^{1-\sigma} = \sum_s (N_s \alpha \Phi_{sd}^{1-\sigma}) \delta_{\sigma}^{s,d} \rho_{s,d}^{1-\sigma} \int_{\Phi_{\min(s,d)}^{\alpha}}^{\infty} \alpha \Phi^{-\alpha-1} \Phi^{\sigma-1} d(\Phi) \quad (9)$$

Aplicando (3) se tiene:

$$\rho_d^{1-\sigma} = \sum_s (N_s \alpha \Phi_{sd}^{1-\sigma} \rho_{sd}^{1-\sigma} \delta_{sd}^{\sigma} \Phi_{\min(s,d)}^{\sigma-1} \Phi_{s,d}^{\sigma-1}) \quad (10)$$

A través de la versión Melitz de (0), (10) se reduce a:

$$\rho_d^{1-\sigma} = \sum_s (N_s \alpha \rho_{sd}^{1-\sigma} \delta_{sd}^{\sigma}) \quad (11)$$

Lo que lleva a la versión Melitz original. El punto de partida para derivar la versión Melitz es la versión AKME.

Con γ_{ksd} igual a 1, escribimos esto como:

$$Q_{sd}^{(\sigma-1)/\sigma} = \sum_s (N_s g_s (\Phi_k Q_{ksd}^{(\sigma-1)/\sigma})) \quad (12)$$

Luego continuar asumiendo que $\gamma_{ksd} = 1$, utilizamos las versiones AKME junto con (1) para obtener:

$$Q_{sd}^{(\sigma-1)/\sigma} = \sum_{k \in S(s,d)} N_s \alpha (\Phi_k^{-\alpha-1}) \left(\frac{\Phi_k}{\Phi_{s,d}} \right)^{\sigma-1} Q_{sd}^{(\sigma-1)/\sigma} \quad (13)$$

Es decir,

$$Q_{sd}^{(\sigma-1)/\sigma} = N_s \Phi_{\min(s,d)}^{-\sigma} Q_{sd}^{(\sigma-1)/\sigma} \Phi_{s,d}^{(\sigma-1)/\sigma} \sum_{k \in S(s,d)} \Phi_{\min(s,d)}^{\alpha} \alpha \Phi_k^{-\alpha-1} \Phi^{\sigma-1} \quad (14)$$

Integrando (3) y (4) se simplifica a:

$$Q_{sd}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = N_s \Phi_{\min(s,d)}^{-\sigma} Q_{s,d}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \quad (15)$$

La versión [Melitz \(2003\)](#) ofrece una simplificación adicional, lo que lleva a la versión general de Melitz. Para derivar la versión general de Melitz, comenzamos adoptando el supuesto de Krugman / Melitz de que es igual a . Luego, utilizando las versiones AKME junto con (1), (2) y (0) obtenemos:

$$\pi_{total_s} = \frac{1}{\sigma} \sum_d \sum_{k \in S(s,d)} N_s \alpha \Phi_k^{-\alpha-1} \left(\frac{\rho_{ksd}}{T_{ksd}} \right) Q_{ksd} - \sum_d N_{sd} F_{sd} W_s - N_{sd} F_{sd} W_s - N_s H_s W_s \quad (16)$$

A través de las versiones AKME y (6) se convierte en:

$$\pi_{total_s} = \frac{1}{\sigma} \sum_d \sum_{k \in S(s,d)} N_s \alpha \Phi_{sd}^{1-\sigma} \Phi_k^{\alpha-1} \Phi_k^{-\alpha-1} \left(\frac{\rho_{ksd}}{T_{ksd}} \right) Q_{ksd} - \sum_d N_{sd} F_{sd} W_s - N_{sd} F_{sd} W_s - N_s H_s W_s \quad (17)$$

Aplicando (3) y (0), simplificamos (17) a:

$$\pi_{total_s} = \frac{1}{\sigma} \sum_d N_{sd} \left(\frac{\rho_{sd}}{T_{sd}} \right) Q_{sd} - \sum_d N_{sd} F_{sd} W_s - N_{sd} F_{sd} W_s - N_s H_s W_s \quad (18)$$

La tarea final para justificar la eliminación de la dimensión firme de las ecuaciones de Melitz es derivar la versión de Melitz general. Aplicar (3) y (1) en el primer término en la versión AKME y simplificar el segundo término finalmente se encuentra:

$$L_s = \sum_s \sum_{k \in \mathcal{S}(s,d)} \alpha \Phi_k^{-\alpha-1} \Phi^{\sigma-1} N_{sd} \left(\frac{Q_{sd}}{\Phi_{sd}} \right)^\sigma + \sum_d N_{sd} F_{sd} - N_s H_s \quad (19)$$

Luego, a través de (3) y (0), (19) se reduce a la versión Melitz (2003) del tipo Dixon et al. (2018).

6.2. Anexo 2: Sistema casi ideal de demanda (AIDS)

Siguiendo a Deaton and Muellbauer (1980), específicamente, la función a estimar es un sistema de ecuaciones, resumido en la siguiente expresión:

$$wsi_{it} = \alpha si_i + \sum_{j=1}^N \gamma si_{ij} \ln p_{ij} + \beta si_i \ln \left(\frac{Xsi_t}{Psi_t} \right) + e_{ij}; \text{Para } i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

Donde wsi_{it} son las participaciones de los diferentes bienes en el gasto total, Psi_t son los precios de los bienes dentro de la canasta de consumo, $\left(\frac{Xsi_t}{Psi_t} \right)$ es el gasto total real de los consumidores, βsi_i son los coeficientes asociados al gasto, γsi_{ij} son los coeficientes de los precios, ij son los efectos individuales asignados a cada participación y ξ_{ij} son las perturbaciones estocásticas. Además Psi_t es un índice de precios que es función del precio de los bienes analizados y se expresa como:

$$\ln P_t = \alpha si_0 + \sum_{j=1}^N a_j \ln p_j + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N b_{lj} \ln p_l \ln p_j \quad (21)$$

Para simplificar la expresión, Deaton and Muellbauer (1980) proponen aproximar P_t a partir del índice de precios de Stone (Stone, 1953)¹¹ :

$$\ln P_t^s = \sum_{i=1}^N wsi_{it} \ln p_{ij} \quad (22)$$

6.3. Anexo 3: Ecuaciones centrales del modelo

Bloque del mercado laboral Agregación trabajos no calificado

$$TTA_{II} = TNCA_{II} + TC_{II} \quad (23)$$

Senda de agregación del trabajo:

$$\frac{TNCA_{II}}{TC_{II}} = K_{TT} * \left(\frac{WC_{II} * \delta_{AII}}{WNCA_{II} * (1 - \delta_{AII})} \right)^{\sigma_{AII}} \quad (24)$$

¹¹Esta metodología se conoce como el modelo LA-AIDS puesto que calcula, previamente a la estimación, el índice de precios a partir de una aproximación lineal del modelo AIDS.

Precio promedio del mercado formal:

$$TTA_{II} * WA_{II} = TNCA_{II} * WNCA_{II} + TC_{II} * WC_{II} \quad (25)$$

Agregación del trabajo y capital:

$$VA_{II} = \left(\frac{k_{tp}}{k_{po}} \right)^{\varepsilon_{kp}} BVA_{II} * \left[(\delta_{VA(II)} * TTA_{II})^{\frac{\delta_{VA(II)} - 1}{\delta_{VA(II)}}} + (1 - \delta_{VA(II)}) * K_{II}^{\frac{\delta_{VA(II)} - 1}{\delta_{VA(II)}}} \right]^{\frac{\delta_{VA(II)}}{\delta_{VA(II)} - 1}} \quad (26)$$

Senda de expansión del valor agregado:

$$g_s(\Phi) = \alpha \Phi^{-\alpha - 1}; \Phi \geq 1 \frac{TT_{II}}{K_{II}} = KCT_{II} * \left(\frac{R_{II} * \delta_{VA(II)}}{W_{VA(II)} * (1 - \delta_{VA(II)})} \right)^{\sigma_{VA(II)}} \quad (27)$$

Identificando del valor agregado:

$$PVAA_{II} * VAA_{II} = TTA_{II} * WA_{II} + K_{II} * R_{II} \quad (28)$$

Bloque del sector informal

Informal sector:

$$VAI_{II} = KVAI_{II} * TNCI_{II} \quad (29)$$

Valor agregado total:

$$PVAA_{II} * VAA_{II} = TTA_{II} * WA_{II} + K_{II} * R_{II} \quad (30)$$

Modelando la competencia monopolística:

$$\lambda * A_{ICM} * Y_{ICM} = RPUA_{ICM} * K_{ICM} + WA_{ICM} * TTA_{ICM} + YA_{ICM} * \sum_{i=1}^n IO_{ICM} * PXC_i \quad (31)$$

Producción total independiente:

$$PYA_{ICM} = (1 + MARKUPA_{ICM}) \lambda A_{ICM} \quad (32)$$

Beneficio de capital unitario:

$$GANAI_{ICM} = PYA_{ICM} - \lambda_{ICM} * YA_{ICM} \quad (33)$$

Remuneración capital básica:

$$RCMA_{ICM} = \frac{GANAI_{ICM}}{K_{ICM}} \quad (34)$$

Ganancias de capital:

$$R_{ICM} = RCMA_{ICM} + RPUA_{ICM} \quad (35)$$

Bloque de competencia imperfecta

Producción de los sectores con competencia monopolística:

$$PYA_{INCM} * YA_{INCM} = PVAA_{INCM} * VAA_{INCM} + \sum_{i=1}^n PXC * YA_{INCM} * IO_{INCM,I} \quad (36)$$

Demanda de insumos intermedios:

$$VAA_{II} = YA_{II} * \left(1 - \sum_{i=1}^n IO_{II}\right) \quad (37)$$

Demanda de insumos intermedios:

$$VAI_{II} = YI_{II} * \left(1 - \sum_{i=1}^n IO_{II}\right) \quad (38)$$

Valor de producción:

$$PYI_{INCM} * YI_{INCM} = PVAI_{INCM} * VAI_{INCM} + \sum_{i=1}^n PXC * YI_{INCM} * IO_{INCM,I} \quad (39)$$

Producción de agregación formal e informal:

$$YIMP_{II} = YIMPA_{II} + YI_{II} \quad (40)$$

Senda de expansión:

$$\frac{YI_{II}}{YIMPA_{II}} = \left(\frac{PYIMPA_{II} * \delta_{DII}}{PYI_{II} * (1 - \delta_{DII})} \right)^{\sigma_{DII}} \quad (41)$$

Valor agregado:

$$PYPIMP_{II} * YIMP_{II} = PYI_{II} * YI_{II} + PYIMPA_{II} * YIMPA_{II} \quad (42)$$

Total de exportaciones y demanda:

$$C_I + G_I + INV_I + V_I + ZINV_I = (M_I + D_I) * (1 + IVA_1) \quad (43)$$

Senda de expansión de las exportaciones-importaciones:

$$\frac{M_{IM}}{D_{IM}} = FEM * \left(PD_{IM} * \frac{\delta_{IM}}{(PM_{IM} * (1 + AVE_{IM}))^{(1 - \delta_{IM})}} \right)^{\sigma_{MMI}} \quad (44)$$

Senda expansión:

$$\frac{M_{INM}}{D_{INM}} = .FEM * MDEXO_{INM} \quad (45)$$

Identidad walrasiana:

$$PXC_I * (C_I + G_I + INV_I + V_I + ZINV_I) = (1 + IVA_I) * (PM_I * M_I + PD_I * D_I) \quad (46)$$

Exportaciones tipo CET:

$$YP_{INE} = \sum_{i=1}^n SE, X_{INE,SE} + D_{INE} \quad (47)$$

Precio de las exportaciones:

$$PWX_{INEX,SE} = PWXEXO_{INEX,SE} \quad (48)$$

Frontera de Posibilidades de producción:

$$\frac{X_{INEE,SE}}{D_{INEE}} = \delta_{CINEE} * \left(\frac{PD_{INEE}}{PX_{INEE,SE}} \right)^{\sigma_{CINEE}} \quad (49)$$

Valor de producción:

$$PP_{INE} * YP_{INE} = \sum_{i=1}^n SE, PX * X_{INE,SE} + PD_{INE} * D_{INE} \quad (50)$$

Block foreign markets

Exportaciones globales:

$$XXT_{INE,SE} = X_{INE,SE} + XT_{INE,SE} \quad (51)$$

Cantidades exportadas:

$$X_{INEX,SE} = XEXO_{INEX,SE} \quad (52)$$

Demanda de exportaciones totales:

$$XXT_{IE,SE} = X_{IE,SE} + XT_{IE,SE} \quad (53)$$

Senda de expansión exportaciones:

$$\frac{X_{IE,SE}}{XT_{IE,SE}} = \left(\frac{PW_{IE,SE} * \delta_{E(IE,SE)}}{PWX_{IE,SE} * (1 - \delta_{E(IE,SE)})} \right)^{\sigma_{E(IE,SE)}} \quad (54)$$

Agregación de trabajos:

$$TNC_{II} = TNCA_{II} * TNCI_{II} \quad (55)$$

Identidad del trabajo:

$$TNC_{II} * WNC_{II} = TNCA_{II} * WNCA_{II} + TNCI_{II} * WNCI_{II} \quad (56)$$

Bloque de ingresos

Ingresos factoriales empresarial:

$$YFAC_{EMP} = SHARE_{KI} * \sum_{i=1}^n K_{II} * R_{II} \quad (57)$$

Ingreso factorial gobierno:

$$YFAC_{gob} = SHARE_{gI} * \sum_{i=1}^n K_{II} * R_{II} \quad (58)$$

Ingreso factorial resto del mundo:

$$YFAC_{rm} = SHARE_{rm} * (\sum_{i=1}^n K_{II} * R_{II}) / ER \quad (59)$$

Ingreso factorial GNCT:

$$YFAC_{gnc} = SHARE_{gnc} * (\sum_{i=1}^n K_{II} * R_{II}) \quad (60)$$

Impuestos de empresas:

$$IMPUES_{EMP} = TIMP_{EMP} * (YFAC_{EMP} * (1 - TINT_{EMP} - TINT_{RM})) \quad (61)$$

Saving capital:

$$SAVE_{RM} = FK * ER \quad (62)$$

Consumo por sector:

$$CS_{IS} = \alpha si_i + \sum_{j=1}^N \gamma si_{ij} \ln p_{ij} + \beta si_i \ln \left(\frac{X si_t}{P si_t} \right) * (1 - MSAVE / PXCS); Para i = 1, 2, ..N \quad (63)$$

Gasto público por sector:

$$G_I = SHARE_{GI} * GPX_{GNC} + GPX_{GOB} \quad (64)$$

Inversión por sector:

$$INV_I = SHARE_{II} * INVT_I + INVGNC + INVAPP \quad (65)$$

Otras demandas sectoriales:

$$ZINV_I = TZINV_I * (C_I + G_I + INV_I + V_I) \quad (66)$$

Intermedio:

$$V_I = \sum_{i=1}^n (YA_{II} + YI_{II}) * IO_{II,I} \quad (67)$$

Precios externos:

$$PM_I = PWM_I * (1 + ARAN_I) * ER \quad (68)$$

Precios de las exportaciones:

$$PX_{I,SE} = PWX_{I,SE} * ER \quad (69)$$

Equilibrio en el mercado laboral:

$$TSC * (1 - DESEMC) = \sum_{i=1}^n TC_{II,I} \quad (70)$$

Equilibrio mercado:

$$DESEMA = (TSNCA - \sum_{i=1}^n TNCA_{II,I}) / TSNCA \quad (71)$$

Equilibrio laboral:

$$TSNCI = \sum_{i=1}^n TNCI_{II,I} \quad (72)$$

Escala de salario:

$$WNCA_{II} = WDISTNCA_{II} * WMNCAX_{II} \quad (73)$$

Cantidad de informales:

$$WNCI_{II} = WDISTNCI_{II} * WMNCI_{II} \quad (74)$$

Calificado independiente:

$$WC_{II} = WDISTC_{II} * WMC_{II} \quad (75)$$

Balance de ahorro-inversión:

$$\sum_{i=1}^n INST, SAVE_{INST} = \sum_{i=1}^n INV_I + ZINV_I * PXC_I \quad (76)$$

índice de precios:

$$P = IPC \quad (77)$$

Producto total:

$$YP_I = \sum_{i=1}^n MP_{I,II} * YIMP_{II} \quad (78)$$

Ley de Walras:

$$YP_{I,j} = \sum_{i=1}^n MP_{II,II} * YIMP_{II} \quad (79)$$

Impuestos de producción:

$$YIMPA_{II} = YA_{II} * (1 + IMPRA_{II}) \quad (80)$$

Impuestos de precios:

$$YIMPA_{II} * PYIMPA_{II} = YA_{II} * PYA_{II} * (1 + IMPRA_{II}) \quad (81)$$

Capacidad instalada:

$$IUSO = KIUSO \quad (82)$$

Inversión:

$$INV_T = K * INV_T \quad (83)$$

Interés de la deuda pública:

$$INTEE = RME * DEUDAEXT * ER \quad (84)$$

Intereses del Gobierno:

$$INTEI = RMI * DEUDAINI \quad (85)$$

Intereses:

$$RME = RMFR + * (K_{deuda} * DPIB)^{\alpha_{deuda}} \quad (86)$$

Tasa de interés:

$$RMI = RME * RMEI \quad (87)$$

Función objetivo:

$$VAT = \sum_{i=1}^n VAA_{II} * VAI_{II} \quad (88)$$