Potenciación

Pedro Vicente Esteban Duarte

Presentación

En matemáticas existen operaciones básicas que son fundamentales para la solución de diversos problemas. Una de ellas es la potenciación, que consiste en el producto repetido o multiplicación sucesiva del mismo término.

Geométricamente, cuando un factor se multiplica consigo mismo dos veces, se asocia con el área de un cuadrado; si se multiplica tres veces, se asocia con el volumen de un cubo. De está forma, la potenciación se asocia con diversas situaciones.

En el presente taller se estudian propiedades y operaciones que se realizan con la potenciación.

Este módulo tiene los siguientes objetivos:

Objetivo general

Utilizar la potenciación en la simplificación de expresiones algebraicas.

Objetivos específicos

- Aplicar las propiedades de la potenciación en diferentes expresiones aritméticas y algebraicas.
- Identificar potencias con igual base dentro de una expresión aritmética o algebraica y simplificarla.

Los conceptos expuestos y los ejercicios planteados a continuación son básicos para comprender conceptos fundamentales del Cálculo y de las Matemáticas en general.

El tiempo estimado para la solución del taller es de tres (3) horas.

En su estudio y solución, le deseamos muchos éxitos.

1. La potenciación

La potenciación es la operación matemática aplicada a una base a, que puede ser cualquier número o expresión algebraica, y un exponente n, que puede ser entero. Se representa por a^n y se lee usualmente como "a elevado a n". Si el exponente es 2, a^2 se lee como , "a elevado al cuadrado". Si el exponente es 3, a^3 se lee como "a elevado al cubo". El resultado de realizar la operación se llama la potencia.

En general,

$$a^n = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n - veces}$$

Si n es un entero positivo, indica el número de veces que se debe multiplicar la base por sí misma.

Ejemplos

a. $4^3 = 4 * 4 * 4 = 64$, la base es 4, el exponente es 3 y la potencia es 64.

b. $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3^4}{5^4}$, la base es $\frac{3}{5}$, el exponente es 4 y la potencia es $\frac{81}{625}$.

c. $(x+2)^3 = (x+2)(x+2)(x+2)$, la base es $x+2$, el exponente es 3 y la potencia es $(x+2)^3$. Para encontrar una potencia específica se debe sustituir la x por un valor particular. Por ejemplo, si $x = 2$, $(2+2)^3 = 64$.

d. $(x+y+z)^2 = (x+y+z)(x+y+z)$, la base es $x+y+z$, y el exponente es 2. Al realizar las sustituciones $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$, la potencia es $(1+2+3)^2 = 6^2 = 36$.

e. $7^{-3} = \left(7^{-1}\right)^3 = \left(7^{-1}\right)\left(7^{-1}\right)\left(7^{-1}\right) = \left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{1}{7}\right)^3$, la base es $\frac{1}{7}$, el exponente es 3 y la potencia es $\frac{1}{243}$.

f. $(32)^{\frac{3}{5}} = \left((32)^{\frac{1}{5}}\right)^3 = \left((32)^{\frac{1}{5}}\right)\left((32)^{\frac{1}{5}}\right)\left((32)^{\frac{1}{5}}\right) = 2^3 = 8$, la base es 32, el exponente es $\frac{3}{5}$ y la potencia es 8.

Observaciones

a. Si el exponente es $-n$, y n es un entero positivo, la expresión $-n$ se puede escribir como $(-1)n$. De esta forma $a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

b. Si el exponente es un número racional, de la forma $\frac{n}{m}$, en donde $m \neq 0$, se tiene que $a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = (\sqrt[m]{a})^n$.

Como puede observarse, la potenciación es una forma abreviada de la multiplicación.

Ejercicio

Para 2^{-4}, identifique la base, el exponente y la potencia

a. Base 2, exponente -4 y potencia $\frac{1}{16}$.

b. Base -2, exponente 4 y potencia $\frac{1}{16}$.

c. Base 2, exponente 4 y potencia $-\frac{1}{16}$.

d. Base 2, exponente -4 y potencia 16.

Ejercicio

Al expandir y simplificar $(16)^{\frac{3}{2}}$, se obtiene

a. 64

b. 16

c. 8

d. 4

Ejercicio

Al expandir y simplificar 2^5, se obtiene

a. 2

b. 8

c. 16

d. 32

Ejercicio

Al escribir como potencias la expresión $5*7*7*5*7*5*7$, se obtiene

a. 5^3*7^3

b. 5^2*7^4

c. 5^3*7^4

d. $25*49$

La potenciación es una operación básica en matemáticas. La solución de diversos problemas depende de la aplicación correcta de sus propiedades. Algunas de ellas se presentan a continuación.

1.1. Propiedades de la potenciación

Las propiedades de la potenciación son reglas que permiten operar y simplificar expresiones aritméticas o algebraicas en las que intervienen las potencias.

1. **Base elevada a la 0 (cero):** si $a \neq 0$, $a^0 = 1$, en palabras, a elevado a la 0 (cero) es igual a 1.

   Ejemplos

   a. $9^0 = 1$
   b. $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$
   c. $(x+y)^0 = 1$

2. **Base elevada a la 1 (uno):** $a^1 = a$, en palabras, a elevado a la 1 (uno) es igual a a.

   Ejemplos

   a. $9^1 = 9$
   b. $\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}$
   c. $(x+y)^1 = x+y$

Ejercicio

Al realizar las siguientes operaciones: $(x+2)^0$, $(3+7)^1$ se obtiene, respectivamente

a. $x+2$, 7

b. 1, 10

c. 0 y 3

d. $x+2$, 1

3. **Multiplicación de pontencias iguales:** $a^m * a^n = a^{m+n}$, en palabras, al multiplicar potencias con bases iguales se escribe la misma base y se suman los exponentes.

   Ejemplos

   a. $9^3 * 9^4 = 9^7$

b. $\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^5=\left(\frac{3}{4}\right)^{2+5}=\left(\frac{3}{4}\right)^7$

c. $(x+y)^{\frac{1}{2}}(x+y)^{\frac{2}{3}}=(x+y)^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}=(x+y)^{\frac{7}{6}}$

d. $5^{\frac{3}{2}}5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=5^2$

Ejercicio

Al simplificar $6^3*6^0*6^5$, se obtiene

a. 6^7

b. 6^9

c. 6^8

d. 6^5

Ejercicio

Al simplificar $(x+y)^2(x+y)^1(x+y)^3$, se obtiene

a. $(x+y)^6$

b. $(x+y)^8$

c. $(x+y)^7$

d. x^9+y^9

4. **Multiplicación de bases elevadas al mismo exponente:** $(a*b)^n=a^n*b^n$, en palabras, al multiplicar bases diferentes elevadas al mismo exponente, se eleva cada base al exponente indicado y se realiza la multiplicación resultante.

Ejemplos

a. $(9*5)^3=9^3*5^3$

b. $\left(\frac{7}{3}*\frac{5}{4}\right)^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2*\left(\frac{5}{4}\right)^2$

c. $((x+3)(y+2))^{\frac{5}{3}}=(x+3)^{\frac{5}{3}}(y+2)^{\frac{5}{3}}$

d. $\left(\frac{x+y}{x-y}*\frac{5}{4}\right)^5=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^5\left(\frac{5}{4}\right)^5$

Ejercicio

Al expandir $(2bc)^3$, se obtiene

a. $8b^3c^3$

b. $4bc^3$

c. $8b^3c$

d. $2b^3c^3$

Ejercicio

La expresión $((x+1)(x-y)(4+y))^3$, es igual a

a. $(x+1)(x-y)(4+y)^3$

b. $(x+1)^3(x-y)^3(4+y)^3$

c. $(x+1)^3(x-y)(4+y)^3$

d. $(x+1)^3(x-y)(4+y)^2$

5. **División de potencias con la misma base:** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, en palabras, la division de dos potencias de igual base a y exponente n en el numerador y m en el denominador, es igual a la base a elevada al exponente $n-m$.

Ejemplos

a. $\frac{8^4}{8^3} = 8^{4-3} = 8^1 = 8$

b. $\frac{(x+5)^5}{(x+5)^3} = (x+5)^{5-3} = (x+5)^2$

Ejercicio

Al simplificar $\frac{3^2 3^3 3^4}{3^3 3^2}$, se obtiene

a. 3^2

b. 3^5

c. 3^3

d. 3^4

Ejercicio

Al simplificar $\frac{(x+1)^3(x+1)^4}{(x+1)^5}$, se obtiene

a. $(x+1)^3$

b. $(x+1)^2$

c. $(x+1)^{-2}$

d. $(x+1)^4$

6. **Potencia de un cociente:** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$, en palabras, la potencia de un cociente es igual al cociente de cada uno de los números elevado al mismo exponente.

   Ejemplos

   a. $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5}$

   b. $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3 = \frac{(x-y)^3}{(x+y)^3}$

Ejercicio

Al escribir las potencias $\frac{5^2}{6^2}$ y $\frac{a^4}{(a-b)^4}$ con un solo exponente, se obtiene, respectivamente

a. $\left(\frac{5}{6}\right)^4$, $\left(\frac{a}{a-b}\right)^2$

b. $\left(\frac{5}{6}\right)^3$, $\left(\frac{a}{a-b}\right)^3$

c. $\left(\frac{5}{6}\right)^2$, $\left(\frac{a}{a-b}\right)^4$

7. **Potencia de un número distinto de 0 (cero) elevado a una potencia negativa:** si $a \neq 0$ y el exponente es un número entero negativo.

   a. $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

   b. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

   c. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

   Ejemplos

   a. $5^{-1} = \frac{1}{5}$

   b. $9^{-4} = \frac{1}{9^4}$

c. $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^9}{\left(\frac{3}{2}\right)^{11}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{9-11} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Ejercicio

Al efectuar las potencias 5^{-1} y $\frac{1}{4^{-2}}$, se obtiene, respectivamente

a. $\frac{1}{5}$, 16

b. $\frac{1}{5^{-1}}$, 16

c. $\frac{1}{25}$, 4^{-1}

d. $\frac{1}{25}$, 4^{-2}

8. **Potencia de un número negativo:**

a. Si n es un entero par, $(-a)^n = a^n$.
b. Si n es un entero impar, $(-a)^n = -(a^n)$.

Ejemplos

a. $(-8)^4 = (-8)(-8)(-8)(-8) = 8^4$.
b. $(-7)^3 = (-7)(-7)(-7) = -\left(7^3\right)$.

Ejercicio

Al efectuar las potencias $(-2)^2$ y $(-2)^3$, se obtiene, respectivamente

a. -4, 8

b. 4, -8

c. -4, -8

d. 4, 8

Ejercicio

Al efectuar las potencias $(-2)^2$ y -2^2, se obtiene, respectivamente

a. $-4, -4$

b. $4, 4$

c. $-4, 4$

d. $4, -4$

9. **Potencia de una potencia:** $(a^m)^n = a^{m*n}$, en palabras, la potencia de una potencia de base a es igual a la base a elevada a la multiplicacion de sus exponentes.

Ejemplos

a. $\left(4^2\right)^3 = 4^{2*3} = 4^6$

b. $\left((x+7)^3\right)^{-2} = (x+7)^{3*(-2)} = (x+7)^{-6} = \frac{1}{(x+7)^6}$

Ejercicio

Al simplificar $\left(4^2\right)^3$, se obtiene

a. 4^2

b. 4^3

c. 4^6

d. 4^4

Ejercicio

Al simplificar $\left((a+b)^5\right)^4$, se obtiene

a. $(a+b)^4$

b. $(a+b)^5$

c. $(a+b)^{10}$

d. $(a+b)^{20}$

10. **Exponente racional:** Si a es un número real positivo y n y m enteros con $n \neq 0$:

a. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

b. $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Ejercicio

Al efectuar $(64)^{\frac{2}{3}}$, se obtiene

a. 64

b. 4

c. 16

d. 8

Ejemplos

a. $(16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

b. $(81)^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{3^4}\right)^3 = 3^3 = 27$.

2. Ejercicios sobre potenciación

1. La expresión $(-2)^5$ es igual a

   a. 32
   b. -32
   c. $\frac{1}{32}$
   d. $\frac{-1}{32}$

2. La expresión $-(-2)^5$ es igual a

   a. 32
   b. -32
   c. $\frac{1}{32}$
   d. $\frac{-1}{32}$

3. La expresión $(-2)^3 \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^1$ es igual a

   a. 64
   b. -64

c. 32
d. $\frac{1}{64}$

4. La expresión $(\frac{-a}{2})^2 \cdot (\frac{-a}{2})^3 \cdot (\frac{-a}{2})^{-7}$ es igual a

a. $(\frac{a}{2})^2$
b. $-(\frac{a}{2})^2$
c. $-(\frac{2}{a})^2$
d. $(\frac{2}{a})^2$

5. La expresión $\frac{(-2)^3 \cdot (-2)^1}{(-2)^6}$ es igual a

a. 4
b. -4
c. $\frac{1}{4}$
d. $\frac{-1}{4}$

6. La expresión $\left(\left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 \right]^{-2} \right)^4$ es igual a

a. $(2)^{-24}$
b. $(2)^{24}$
c. $(2)^5$
d. $(2)^{-5}$

7. La expresión $(a+b)^3 \div (a+b)^5$ es igual a

a. $(a+b)^2$
b. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$
c. $\frac{1}{(a+b)^2}$
d. $a^2 + b^2$

8. Las primeras cinco potencias de -2 son

a. $1,\ 2,\ -4,\ 8,\ -12$
b. $-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ 32$
c. $-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32$
d. $2,\ -4,\ 8,\ -16,\ 32$

9. Las primeras cinco potencias de -1 son

a. $-1,\ -1\ -1,\ -1,\ -1$
b. $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$
c. $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1$
d. $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1$

10. Las primeras cinco potencias de -3 son

a. $-3,\ -3\ -3,\ -3,\ -3$
b. $1,\ -3,\ 9,\ -27,\ 81$
c. $-3,\ 9,\ -27,\ 81,\ -243$
d. $-1,\ 3,\ -9,\ 27,\ -81$

11. La expresión $(-2)^{-3}$ es

a. $\frac{-1}{8}$
b. $\frac{1}{8}$
c. 8
d. -8

12. La expresión $(-3)^{-3}$ es

a. $\frac{1}{27}$
b. $\frac{-1}{27}$
c. 9
d. -27

13. La expresión $(\frac{-2}{5})^{-3}$ es igual a

a. $(\frac{5}{2})^{-3}$
b. $-(\frac{2}{5})^{3}$
c. $-(\frac{5}{2})^{3}$
d. $(\frac{5}{2})^{3}$

14. La expresión $(\frac{-a}{b})^{-5}$ es igual a

a. $(\frac{b}{a})^{-5}$
b. $-(\frac{a}{b})^{5}$
c. $-(\frac{b}{a})^{5}$
d. $(\frac{b}{a})^{5}$

15. La expresión $(2^3 \cdot 3^4 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3})^2$ es igual a

    a. $\frac{1}{3}$
    b. 3
    c. $\frac{1}{9}$
    d. 9

16. La expresión $(x^3 \cdot y^4 \cdot x^{-3} \cdot y^{-3})^2$ es igual a

    a. $\frac{1}{y}$
    b. y
    c. $\frac{1}{y^2}$
    d. y^2

17. La expresión $(x^3 \cdot y^4 \cdot x^{-2} \cdot y^{-6})^2$ es igual a

    a. $\frac{x}{y^2}$
    b. $\frac{x^4}{y^2}$
    c. $\frac{x^2}{y^4}$
    d. $\frac{1}{y^2}$

18. La expresión $\left(\frac{x^2 \cdot y^4}{x^4 \cdot y}\right)^{-2}$ en forma simplificada es igual a

    a. $\frac{y^6}{x^4}$
    b. $\frac{x^2}{y^3}$
    c. $\frac{x^4}{y^6}$
    d. $\frac{y^3}{x^2}$

19. La expresión $(2)^{\frac{3}{5}}$, en forma simplificada, es igual a

    a. $\sqrt[3]{2^5}$
    b. $\sqrt[5]{8}$
    c. $\sqrt[3]{64}$
    d. $\sqrt[5]{16}$

20. La expresión $(3)^{\frac{5}{3}}$, en forma simplificada, es igual a

a. $3 \cdot \sqrt[3]{9}$
b. $\frac{1}{5}$
c. $9 \cdot \sqrt[3]{3}$
d. $3 \cdot \sqrt[3]{27}$

21. La expresión $(2)^3 \cdot (2)^{\frac{5}{2}}$, en forma simplificada, es igual a

a. $8 \cdot \sqrt[2]{32}$
b. $32 \cdot \sqrt{2}$
c. $8 \cdot \sqrt[5]{32}$
d. $64 \cdot \sqrt{2}$

22. La expresión $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{8}$, en forma simplificada. es igual a

a. $8 \cdot \sqrt[2]{2}$
b. $\sqrt[3]{128}$
c. $2 \cdot \sqrt[3]{16}$
d. $4 \cdot \sqrt[3]{2}$

23. La expresión $\sqrt{10^2 + 6^2}$, en forma simplificada, es igual a

a. 16
b. $2 \cdot \sqrt{68}$
c. $2 \cdot \sqrt{34}$
d. $\sqrt{136}$

24. En la expresión $(\frac{-3}{5})^4 \cdot (\frac{-3}{5})^5 \cdot (\frac{-3}{5})^x = (\frac{-3}{5})$, el valor de x es igual a

a. 9
b. -9
c. 8
d. -8

25. En la expresión $(\frac{-3}{5})^4 \cdot (\frac{-3}{5})^5 \cdot (\frac{-3}{5})^x = (\frac{-5}{3})$, el valor de x es igual a

a. 9
b. -9
c. -10
d. 10

26. En la expresión $\frac{(-5)^7 \cdot (-5)^x}{(-5)^2} = (-5)^4$, el valor de x es igual a

    a. 1
    b. -1
    c. 5
    d. -5

27. En la expresión $\frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{3^x} = \frac{1}{3^{10}}$, el valor de x igual a

    a. 2
    b. -2
    c. 3
    d. -3

28. En la expresión $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^x} = 1$, el valor de x es igual a

    a. 2
    b. -2
    c. 7
    d. -7

29. En la expresión $2^8 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^x} = 1$, el valor de x es igual a

    a. 3
    b. -3
    c. 2
    d. -2

30. En la expresión $[(5)^x]^2 = (5)^{-6}$, el valor de x es igual a

    a. 3
    b. -3
    c. 2
    d. -2

3. Bibliografía

1. Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2008). Precálculo con avances de cálculo. McGraw-Hill Interamericana.

2. James, S., Redlin, L., Watson, S., Vidaurri, H., Alfaro, A., Anzures, M. B. J., & Fragoso Sánchez, F. (2007). Precálculo: matemáticas para el cálculo. México: Thomson Learning, 847.

3. Leithold, L., & González, F. M. (1998). Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica: con ejercicios para calculadora y graficadora. Oxford University Press.

4. Sullivan, M. (1998). Precálculo. Pearson Educación.