

# **ANÁLISIS NO LINEAL DE SISTEMAS DE CONTROL DE NIVEL CON ALGORITMO EXPONENCIAL POLINÓMICO**

**GUILLERMO A. NAVARRO BETANCUR**  
**INGENIERO ELECTRÓNICO**

**Y**

**RICARDO POSADA JARAMILLO**  
**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA**

**Trabajo presentado al Departamento de Ciencias Básicas para el cumplimiento de uno de los requisitos para obtener el título de Maestría en Matemáticas Aplicadas**

Director: Fabio Castrillón, MSc.

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS  
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

MEDELLÍN - COLOMBIA

15 DE AGOSTO 2010



Nota de aceptación

---

---

---

---

---

---

Francisco Zuluaga Díaz.  
Coordinador de la Maestría

---

Fabio Castrillón Hernández.  
Director del proyecto

Medellín, Fecha \_\_\_\_\_

# Reconocimientos

---

Agradecemos a:

El Ingeniero Químico Fabio Castrillón H, MSc. por su idea, apoyo y dirección en este trabajo.

La Ingeniera en Control Norha Ligia Posada R. Esp. por brindarnos luz en los momentos de oscuridad.

El Ingeniero Electrónico Oscar Cardona por revisar este trabajo.

El Licenciado en Matemáticas Elmer Ramírez, MSc. por su apoyo en su momento desde la dirección del Centro de Ciencia Básica de la Universidad Pontificia Bolivariana para el desarrollo de este trabajo.

El Ingeniero Electrónico Guillermo López, Esp. por su apoyo en el inicio de la Maestría.

La Universidad Pontificia Bolivariana por su apoyo para la realización de la Maestría en Matemática Aplicada en la Universidad EAFIT.

La Universidad EAFIT por la preparación que nos brindaron sus docentes y la utilización de sus recursos.

Nuestras familias por su apoyo y comprensión por todo el tiempo que les quitamos.

Medellín, agosto 2010

# Dedicatoria

---

María José, muchos momentos de nuestras vidas se caracterizan porque nos absorben el 99.9% de nuestro tiempo con la ingenua ilusión de poder compartir 0.1% del tiempo restante con las personas que nos dan felicidad.

María José, deseo que el sistema que describe tu vida tenga muchos puntos de equilibrio asintóticamente estables, los cuales tengan por coordenadas la felicidad y la responsabilidad. Que estén inmersos dentro de la región de atracción limitada por Dios donde los parámetros que definen tu vida puedan variar con el tiempo y estas variaciones no afectan la estabilidad estructural de tu sistema. Que tu vida no tenga presencia de ciclos límite ni caos.

Te Amo Hija

Guillermo A. Navarro B

A mi familia  
Ricardo Posada J.

# Resumen

---

El objetivo de este trabajo es el análisis de las características no lineales en un sistema de control de nivel mediante el algoritmo exponencial polinómico propuesto por J. P. Shunta. El nivel del fluido en el recipiente -el cual está manipulado por una válvula- debe mantenerse en un valor promedio determinado.

De acuerdo con los medios utilizados, el trabajo fue del tipo documental y computacional. Se aplicaron definiciones y teoremas del análisis matemático y de la teoría de control no lineal. Con esta información se mostró que el sistema tiene un único punto de equilibrio local asintóticamente estable tipo espiral o nodo, no tiene ciclos límite, ni tiempo de escape finito, ni puntos de bifurcación, ni caos. Las simulaciones realizadas en Simulink de MatLab® y en pplane7® corroboraron estos resultados teóricos. También se encontró una función de Lyapunov y comprobar que el sistema es localmente estable entrada estado.

Mediante simulaciones también se hicieron pruebas de robustez al sistema, bajo la influencia de ruido blanco, usando cuatro controladores: el proporcional, el de error cuadrático, el exponencial polinómico y el proporcional integral derivativo. Estas pruebas se hicieron tanto con perturbación como sin ella, variando parámetros como: la constante de tiempo del actuador de la válvula, la ganancia de la válvula, el flujo de salida y la posición del punto de control. El análisis de las simulaciones mostró que, para los diferentes valores relevantes de los parámetros, se garantiza que el sistema es robusto y estructuralmente estable para fines prácticos.

Adicionalmente se compararon, al variar cada parámetro (la posición del punto de control, el flujo de salida, la amplitud de la perturbación y la frecuencia del oleaje), los índices de desempeño del nivel en cada una de las leyes de control propuestas. Estas comparaciones se hicieron para los siguientes índices de desempeño: la medida de la integral del valor absoluto del error, la medida del *offset*, la medida del trabajo sobre la variable manipulada, la medida del máximo pico de altura y la medida del tiempo de asentamiento.

Se encontró que, en general, el sistema con ley de control exponencial polinómica tiene un comportamiento similar al sistema con ley de control proporcional, el cual es comúnmente usado en el control de nivel.

Las simulaciones mostraron que el sistema con ley de control exponencial polinómica supera en algunos índices de desempeño al sistema controlado con cada uno de los otros tres controladores.

Se logra así un mayor conocimiento del funcionamiento del sistema automático de control porque se tiene la información suficiente para determinar en qué aplicaciones de procesos industriales, relacionadas con el control de nivel, puede ser usado este algoritmo en forma adecuada y en cuales otras no.

**PALABRAS CLAVES: CONTROL DE NIVEL; ESTABILIDAD; CARACTERÍSTICAS NO LINEALES; LEY DE CONTROL EXPONENCIAL POLINÓMICA; SIMULACIÓN DE PROCESOS.**

# Contenido

---

<b>Reconocimientos</b> .....	<b>iii</b>
<b>Dedicatoria</b> .....	<b>iv</b>
<b>Resumen</b> .....	<b>v</b>
<b>Contenido</b> .....	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>xi</b>
<b>Lista de Tablas</b> .....	<b>xiii</b>
<b>Lista de Anexos</b> .....	<b>xv</b>
<b>Capítulo 1. Introducción</b> .....	<b>16</b>
1.1 Descripción y formulación del problema .....	17
1.2 Objetivos.....	18
1.2.1 <i>Objetivo general</i> .....	18
1.2.2 <i>Objetivos específicos</i> .....	18
1.3 Justificación .....	19
1.4 Limitaciones de la investigación.....	20
1.5 Hipótesis o preguntas de investigación.....	20
1.6 Planteamiento metodológico.....	21
1.6.1 <i>Tipo de investigación</i> .....	21
1.6.2 <i>Método de investigación</i> .....	21
1.6.3 <i>Técnicas e instrumentos para la recolección de la información</i> .....	22
1.7 Usuarios potenciales.....	22
1.8 Organización del trabajo .....	23
<b>Capítulo 2. Fundamentos Teóricos</b> .....	<b>24</b>
2.1 Introducción .....	24
2.2 Antecedentes.....	24
2.3 Condición de Lipschitz .....	29
2.3.1 <i>Condición de Lipschitz local</i> .....	29

2.3.2	Teorema: condición de suficiencia para ser localmente Lipschitz.....	29
2.3.3	Teorema: condición de suficiencia para el cálculo de la constante de Lipschitz .....	29
2.4	Teorema: existencia y unicidad local de soluciones.....	30
2.5	Derivada de una función $V: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a lo largo de las trayectorias ...	30
2.6	Función de Lyapunov.....	30
2.7	Tipo de funciones crecientes .....	31
2.7.1	Funciones de clase $K$ .....	31
2.7.2	Funciones de clase $KL$ .....	31
2.8	Espacio de estados.....	32
2.9	Sistemas dinámicos.....	32
2.9.1	Autónomos .....	32
2.9.2	No autónomos.....	32
2.10	Punto de equilibrio (PE).....	32
2.10.1	Tipos de estabilidad en los puntos de equilibrio .....	33
2.11	Región de atracción.....	34
2.12	Teorema de Hartman-Großman .....	35
2.13	Clasificación de los puntos de equilibrio en sistemas no lineales.....	35
2.13.1	Tipos de puntos de equilibrio para sistemas de segundo orden .....	36
2.13.2	Teorema: condición suficiente para un punto de equilibrio local asintóticamente estable.....	36
2.13.3	Teorema: Condición suficiente para un punto de equilibrio inestable ...	36
2.13.4	Teorema: Condición suficiente para un punto de equilibrio silla .....	36
2.13.5	Teorema: Punto de equilibrio estable y función de Lyapunov.....	38
2.14	Ciclos límite .....	38
2.14.1	Criterio negativo de Bendixson.....	39
2.15	Tiempo de escape finito.....	39
2.16	Estabilidad estructural.....	39
2.17	Bifurcaciones .....	40
2.17.1	Bifurcaciones típicas en sistemas de dos dimensiones .....	41
2.17.2	Teorema: condición necesaria para una bifurcación .....	42
2.18	Caos .....	42
2.19	Estabilidad entrada-estado (ISS) .....	43
2.19.1	Teorema: condición suficiente para la estabilidad entrada-estado .....	44
2.20	Conjuntos invariantes .....	44
2.20.1	Conjunto Invariante con respecto a $x = f(x)$ .....	44

2.20.2	Conjunto Invariante positivo con respecto a $x = f(x)$ .....	44
2.21	Teorema: principio de invariancia de la salle .....	45
2.22	Glosario de términos.....	45
2.23	Resumen del capitulo .....	47
<b>Capítulo 3.</b>	<b>Resultados teóricos y análisis.....</b>	<b>48</b>
3.1	Introducción .....	48
3.2	Sistema de control de nivel con algoritmo exponencial polinómico.....	48
3.2.1	<i>Ecuaciones matemáticas.....</i>	48
3.2.2	<i>Características de la ley de control dada por <math>m = K_S \epsilon 25^{ \epsilon \eta}</math> .....</i>	49
3.2.3	<i>Características de la ecuación diferencial que describe la válvula .....</i>	49
3.3	Análisis de las características no lineales del sistema dinámico.....	50
3.3.1	<i>Punto de equilibrio.....</i>	50
3.3.2	<i>Comprobación de la condición local de Lipschitz y cálculo de la constante de Lipschitz.....</i>	54
3.3.3	<i>Análisis de existencia y unicidad de una solución local .....</i>	56
3.3.4	<i>Naturaleza del punto de equilibrio .....</i>	56
3.3.5	<i>Función de Lyapunov sobre un dominio que contiene el origen .....</i>	58
3.3.6	<i>Región de trabajo .....</i>	62
3.3.7	<i>Verificación de la característica local asintóticamente estable para el punto de equilibrio .....</i>	63
3.3.8	<i>Análisis de existencia de ciclos límite.....</i>	63
3.3.9	<i>Análisis de presencia de bifurcaciones en el sistema .....</i>	63
3.3.10	<i>Análisis de caos .....</i>	64
3.3.11	<i>Estabilidad entrada-estado.....</i>	64
3.3.12	<i>Análisis de tiempo de escape finito .....</i>	73
3.4	Interpretación de resultados teóricos .....	74
3.5	Resumen del capitulo .....	76
<b>Capítulo 4.</b>	<b>Resultados de las simulaciones y análisis.....</b>	<b>77</b>
4.1	Introducción .....	77
4.2	Elementos básicos de la simulación .....	78
4.2.1	<i>Descripción del problema .....</i>	78
4.2.2	<i>Índices de desempeño .....</i>	78
4.2.3	<i>Lenguaje de programación usado .....</i>	80
4.2.4	<i>Sintonía y elección de controladores.....</i>	80
4.2.5	<i>Modelo matemático del sistema .....</i>	81
4.2.6	<i>Datos y constantes del modelo.....</i>	84

4.2.7	<i>Análisis en estado estacionario</i>	86
4.2.8	<i>Pruebas de robustez</i>	90
4.3	Sistema no perturbado frente a los cuatro controladores	95
4.3.1	<i>Respuesta del sistema frente a los diferentes controladores sin una señal de perturbación</i>	95
4.3.2	<i>Índices de desempeño del sistema sin perturbación</i>	96
4.4	Sistema perturbado frente a los cuatro controladores	101
4.4.1	<i>Respuesta del sistema frente a los diferentes controladores con una señal de perturbación dada por un pulso rectangular</i>	101
4.4.2	<i>Índices de desempeño del sistema con una señal de perturbación dada por un pulso</i>	102
4.4.3	<i>Respuesta del sistema frente a los diferentes controladores con una señal de perturbación dada por un escalón</i>	109
4.4.4	<i>Índices de desempeño del sistema con una señal de perturbación dada por un escalón</i>	110
4.4.5	<i>Efecto del oleaje en el sistema de control de nivel</i>	116
4.4.6	<i>Respuesta del sistema frente a los diferentes controladores con una señal de perturbación dada por una ola</i>	117
4.5	Interpretación de resultados	124
4.6	Resumen del capítulo	126
	<b>Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>128</b>
5.1	Conclusiones	128
5.2	Contribuciones	131
5.2.1	<i>Desde la matemática aplicada</i>	131
5.2.2	<i>Desde sistemas de control</i>	132
5.3	Recomendaciones	133
	<b>Anexos</b>	<b>134</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>159</b>

# Lista de Figuras

Fig. 2.1	Graficas de funciones clase $K$ y $K_\infty$ .....	31
Fig. 3.1	Grafica de la función de Lyapunov asociada al problema .....	59
Fig. 3.2	Gráfica del conjunto dominio $D$ de la función de Lyapunov con $\alpha = 125$ $\beta = 2$ ; $\gamma = 0.2$ ; $\delta = 0.033$ ; $\epsilon_0 = 0.4$ .....	60
Fig. 3.3	Gráfica del conjunto dominio $D$ de la función de Lyapunov con $\alpha = 500$ $\beta = 2$ ; $\gamma = 0.2$ ; $\delta = 0.033$ ; $\epsilon_0 = 0.4$ .....	60
Fig. 3.4	Grafica de la función de Lyapunov y las funciones cotas .....	68
Fig. 3.5	Grafica de la función $\alpha^3$ para los valores de los parámetros: $\alpha = 4$ ; $\beta = 2$ ; $\gamma = 0.2$ ; $\eta = 1.65$ ; $\delta = 0.033$ ; $\epsilon_0 = 0.4$ ; $\mu = 0.05$ .....	72
Fig. 4.1	Área relacionada con el error IAE .....	78
Fig. 4.2	Diagrama de bloques del sistema de control de nivel .....	82
Fig. 4.3	Representación en simulink del controlador exponencial polinómico .....	82
Fig. 4.4	Representación en simulink de la ecuación de la válvula.....	83
Fig. 4.5	Representación en simulink de la planta .....	83
Fig. 4.6	Diagrama de bloques del sistema con ley de control exponencial polinómica.....	83
Fig. 4.7	Diagrama simplificado de instrumentos del problema .....	84
Fig. 4.8	Diagrama de bloques del sistema con los valores dados de las constantes.....	85
Fig. 4.9	Gráfica del nivel del líquido con los valores de las constantes dados en 4.2.6.....	86
Fig. 4.10	Grafica de la función $f_i = (0.5 - h)25^{0.033 0.5-h } - 0.02659$ .....	87
Fig. 4.11	Retrato de fase del sistema con los valores de las constantes dados en 4.2.6.....	89
Fig. 4.12	Retratos de fase del sistema para diferentes valores de las constantes presentadas en la tabla 4.4.....	94

<i>Fig. 4.13 Salida del sistema con cada uno de los controladores sin la influencia de una perturbación.....</i>	<i>96</i>
<i>Fig. 4.14 Salida del sistema con cada uno de los controladores al ser perturbado por un pulso rectangular.....</i>	<i>102</i>
<i>Fig. 4.15 Salida del sistema con cada uno de los controladores al ser perturbado por un escalón.....</i>	<i>109</i>
<i>Fig. 4.16 Diagrama de bloques para representar un fenómeno ondulatorio en la superficie del líquido.....</i>	<i>116</i>
<i>Fig. 4.17 Salida del sistema con cada uno de los controladores al ser perturbado por una ola .....</i>	<i>117</i>

# Lista de Tablas

---

Tabla 2.1	Resumen gráfico de diferentes puntos de equilibrio hiperbólicos.....	37
Tabla 3.1	Interpretación de los resultados de las características no lineales analizadas en un sistema de control de nivel con ley de control exponencial polinómica.....	75
Tabla 4.1	Recomendaciones para la decisión de una ley de control.....	80
Tabla 4.2	Valores de los parámetros y las constantes relacionadas con el problema.....	85
Tabla 4.3	Resumen de las características del punto de equilibrio del sistema (3).....	89
Tabla 4.4	Resumen de la variación de parámetros del sistema.....	91
Tabla 4.5	Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes puntos de control y sin la influencia de una perturbación.....	98
Tabla 4.6	Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes fracciones del flujo de salida y sin la influencia de una perturbación.....	100
Tabla 4.7	Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes posiciones del punto de control y perturbado por un pulso.....	104
Tabla 4.8	Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes fracciones del flujo de salida y perturbado por un pulso....	106
Tabla 4.9	Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes valores en la amplitud de la perturbación tipo pulso.....	108
Tabla 4.10	Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes posiciones del punto de control y perturbado por un escalón.....	111

<i>Tabla 4.11</i>	<i>Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes fracciones del flujo de salida y perturbado por un escalón.....</i>	<i>113</i>
<i>Tabla 4.12</i>	<i>Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes valores en la amplitud de la perturbación tipo escalón.....</i>	<i>115</i>
<i>Tabla 4.13</i>	<i>Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes posiciones del punto de control y perturbado por un oleaje .....</i>	<i>119</i>
<i>Tabla 4.14</i>	<i>Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes fracciones del flujo de salida y perturbado por un oleaje ...</i>	<i>121</i>
<i>Tabla 4.15</i>	<i>Índices de desempeño en el sistema para cada controlador perturbado por una ola y con diferentes valores en la frecuencia de la ola .....</i>	<i>123</i>
<i>Tabla 4.16</i>	<i>Resumen de los índices de desempeño para el sistema de control de nivel para cada uno de los cuatro controladores .....</i>	<i>127</i>

# Lista de Anexos

---

Anexo A.	<i>Elementos matemáticos.....</i>	134
Anexo B.	<i>Modelo matemático de la planta y de la válvula.....</i>	135
Anexo C.	<i>Diagrama de bloques del sistema con los 4 controladores Con y sin perturbación.....</i>	141
Anexo D.	<i>Diagrama de bloques del sistema con los 4 controladores con olas.....</i>	142
Anexo E.	<i>Código del programa que lee los errores y grafica la salida del sistema.....</i>	143
Anexo F.	<i>Retratos de fase .....</i>	154

# Capítulo 1. Introducción

---

El problema considerado en este trabajo consiste en analizar las características no lineales en un sistema de control de nivel con algoritmo exponencial polinómico propuesto por J. P. Shunta [44] en 1976, usando herramientas de la teoría de sistemas no lineales para mantener el nivel del fluido en un valor promedio determinado. Las características que se analizan son: existencia de puntos de equilibrio y su estabilidad, bifurcaciones, ciclos límite, tiempo de escape finito y caos. Se logra determinar una función de Lyapunov la cual, según la literatura, es de difícil hallazgo. Se realizan pruebas para determinar la robustez del sistema y simulaciones de este con el algoritmo propuesto para comparar las diferentes respuestas del nivel del líquido al variar los parámetros: la constante de tiempo del actuador de la válvula, la ganancia de la válvula, el flujo de salida y la posición del punto de control.

Adicionalmente se comparan los índices de desempeño al variar cada parámetro (la posición del punto de control, el flujo de salida, la amplitud de la perturbación y la frecuencia del oleaje) en cada una de las leyes de control propuestas para controlar el nivel: la proporcional, la exponencial polinómica, la de error cuadrático y la proporcional integral derivativa. Los índices de desempeño considerados son: la integral del valor absoluto del error, el *offset*, el trabajo sobre la variable manipulada, el máximo pico de altura y el tiempo de asentamiento.

En la literatura consultada se encontró que, para el control de nivel en un tanque, existe un sinnúmero de trabajos que analizan el problema, los cuales cubren, o bien una descripción de componentes y variables fisicoquímicas, o una modelación matemática del sistema del control de nivel, basada en un balance de materia, o trabajos que se centran en simulaciones. En estos trabajos se han propuesto diferentes estrategias de control para enfrentar la regulación del nivel entre los que se pueden mencionar: controladores sólo proporcionales con ganancia unitaria en Shinsky [42], combinación de estrategias retroalimentadas por acción precalculada en Gorostiaga y Busoch [18], manejo de algoritmos proporcionales integrales apropiadamente sintonizados en Friedman [16], algoritmos proporcionales de tres piezas y controladores de amplio rango en Shunta y Fehervari [44], controlador proporcional no lineal tipo rampa en McDonald et al [33], controlador PI con ganancia programada de Wang y Crusca [49], algoritmos de control predictivo generalizado en cascada en Xu y Li [50], algoritmo de error cúbico en Roy y Smith [36], algoritmo de error cuadrático en Castrillón [8], algoritmo genético simple en Teng et al [46], redes neuronales en Hussain y Pei [21], controlador fuzzy en Tunyasrirut y Wangnipparnto [47].

Es poca la literatura en torno al análisis de las características no lineales del control de nivel. En el ámbito industrial y académico la mayoría de los trabajos se centran en resultados obtenidos a partir de

simulaciones y datos experimentales. Si bien esto puede ser suficiente para intereses prácticos, se hace necesario realizar un análisis más profundo sustentado en la teoría de control no lineal porque esto hace que el proceso industrial esté mejor caracterizado y, lo más importante, se obtiene mayor conocimiento del funcionamiento del sistema automático de control explicado.

Se logran resultados del tipo teórico con la metodología documental. La información obtenida de libros, revistas, artículos, monografías y tesis sirvió de soporte para encontrar que el sistema tiene un único punto de equilibrio local asintóticamente estable y, además, se comprueba que en el sistema no presenta tiempo de escape finito, ni ciclos límite, ni puntos de bifurcación, ni caos pero si presenta estabilidad local entrada-estado. Por otra parte se encontró una función de Lyapunov y su dominio.

Se logran resultados del tipo computacional ya que las simulaciones muestran que, a partir de las pruebas de robustez realizadas al sistema, este es robusto y estructuralmente estable tanto con perturbación como sin ella al variar los parámetros ya mencionados. Se encuentra que, en general, el comportamiento del nivel en el sistema con ley de control exponencial polinómica muestra resultados similares al proporcional superando a este en rapidez de respuesta y en exactitud. El sistema con ley de control exponencial polinómica mostró mejores resultados que el sistema con ley de control proporcional integral derivativa en la rapidez de respuesta y en la vida útil de la válvula al variar tanto el flujo de salida como el punto de control o la amplitud de la perturbación o la frecuencia de la ola. En consecuencia esta ley es más adecuada que la ley de control proporcional integral derivativa en aquellos procesos industriales del control de nivel donde sea importante la vida útil del elemento final de control y la rapidez de respuesta.

## 1.1 DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El problema a tratar consiste en un análisis de las características no lineales en un sistema de control de nivel mediante el algoritmo exponencial polinómico de J. P. Shunta, para mantener el nivel del fluido en un valor determinado. El fluido se asume incompresible, de parámetros concentrados, en un tanque de almacenamiento de forma conocida, cuya sección transversal es de área constante, con flujo de salida constante, lo que da al sistema características dinámicas integradoras, mientras que el flujo de entrada es manipulable y la válvula de ingreso se asume lineal. El sensor transmisor es de dinámica despreciable y se asume que no existe ningún tipo de tiempo muerto en el sistema.

En el anexo B se deduce el modelo matemático del sistema al cual se le harán los análisis de las características no lineales, que se formula mediante el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{f}_i = \frac{K_v}{\tau_v F} m(t) - \frac{1}{\tau_v} f_i \\ \dot{h} = \frac{F}{V} (f_i - f_0) \end{cases}$$

Donde

$m(t) = K_S \epsilon 25^{|\epsilon| \eta}$ : Ley de control.

$f_i \left[ \frac{m^3}{min} \right]$ : Fracción del flujo de entrada.

$f_o \left[ \frac{m^3}{min} \right]$ : Fracción del flujo de salida.

$F \left[ \frac{m^3}{min} \right]$ : Flujo máximo con la válvula abierta al 100%.

$h \left[ \frac{m}{m} \right]$ : Nivel en un instante  $t$ .

$h_r \left[ \frac{m}{m} \right]$ : Nivel de referencia.

$V [m^3]$ : Máxima capacidad del tanque.

$K_S \left[ \frac{\%}{\%} \right]$ : Constante de Shunta.

$K_v \left[ \frac{m^3}{\%} \right]$ : Ganancia de la válvula.

$\tau_v [min]$ : Constante de tiempo del actuador de la válvula en minutos.

$\eta$ : Constante del modelo del controlador.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 *Objetivo general*

Analizar las características no lineales de un sistema de control de nivel con ley de control exponencial polinómico.

### 1.2.2 *Objetivos específicos*

- Identificar la razón por la cual el control de nivel en la industria es un problema relevante.
- Identificar las posibles no linealidades del problema.
- Evaluar si existen cambios en la estabilidad para diferentes flujos de salida constantes.
- Simular de forma sencilla el comportamiento del oleaje en la superficie del líquido.

- Determinar los puntos de equilibrio, bifurcaciones y ciclos límite del sistema en caso de existir.
- Interpretar físicamente el significado de los puntos de equilibrio tipo silla en caso de existir.
- Buscar una función de Lyapunov para el sistema en cuestión.
- Encontrar una aproximación de la región de atracción del problema.
- Analizar el comportamiento del sistema bajo la incidencia de perturbaciones.
- Simular el sistema de control de nivel bajo diferentes leyes de control como la exponencial polinómica, la de error cuadrático, la proporcional y la proporcional integral derivativa, para diferentes valores de los parámetros.
- Comparar los índices de desempeño del sistema (la integral del valor absoluto del error IAE, máximo pico de altura MPH, trabajo sobre la variable manipulada TVM, tiempo de asentamiento, *offset*) con los obtenidos por otros controladores como el proporcional, el de error cuadrático y el PID.

### 1.3 JUSTIFICACIÓN

En los últimos años se ha incrementado el interés por el control y el análisis de las características no lineales que se presentan en diferentes fenómenos de la industria. Este interés se hace notable por el aumento de la literatura que aborda el tema, sin embargo la cantidad de trabajos alrededor del análisis de lo teórico es menor que la cantidad de trabajos alrededor de las simulaciones y experimentos debido en gran parte a que los análisis teóricos son más tediosos y difíciles. La cantidad de trabajos en torno al análisis de las simulaciones y la experimentación ha sido impulsada por el desarrollo de herramientas computacionales y sus prácticos resultados.

En este orden de ideas el control de nivel no ha sido ajeno a estos aspectos y se refleja en la literatura ya que en la bibliografía consultada no se encontró un número significativo de análisis teóricos de las características no lineales de un sistema de control de nivel en un recipiente y por ende se pretende con este trabajo complementar los numerosos análisis que existen de simulación o experimentación, aportando con él un análisis teórico al problema del control de nivel corroborado por simulaciones.

La motivación para optimizar el proceso de control de nivel, tanto en lo teórico como en la simulación y la experimentación, está dada por el interés de que este responda cada vez mejor a las necesidades específicas demandadas por la industria. Lo anterior implica que el sistema relacionado con el control de nivel analice con detalle y profundidad todos los fenómenos que lo rodean y lo pueden afectar para lograr así una mejora en la profundización conceptual del modelo.

Aunque existen una gran cantidad de diseños y algoritmos especiales diseñados por compañías que se dedican al control avanzado de procesos se ha querido analizar el algoritmo exponencial polinómico propuesto por J.P Shunta para FOXBORO porque, como dice Acedo [1], los controladores basados en éste tiene ventajas como la ganancia y el tiempo integral que se modifican sólo cuando el nivel se encuentra dentro de los límites establecidos. Agrega que los cambios en el caudal se hacen siempre en

forma continua, nunca bruscamente y, cuando la perturbación oscila en valores positivos y negativos alrededor del estado estacionario, el caudal tiene muy poco movimiento y repercute a su vez en el nivel, de forma que la menor oscilación en el caudal ayuda a que también oscile menos el nivel. Agregan Cheung y Luyben [10] (1978) que otra de las ventajas de esta ley de control es que tiene un alto nivel de filtrado de ruido para la variable controlada.

Este trabajo tiene también un aporte en la matemática aplicada porque se usaron métodos y herramientas de ésta para realizar el análisis no lineal de sistemas de control de nivel, lo que muestra su utilidad al presentar una solución más completa a este problema muy común en la industria de procesos químicos. Se espera que este trabajo sea de interés para las industrias donde el control de nivel tenga un papel importante, porque los análisis que aquí se hicieron, teniendo como herramienta la matemática, harán que el proceso industrial sea mejor comprendido en su comportamiento.

## 1.4 LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

El análisis tanto teórico como de simulación de las características no lineales en un sistema de control de nivel usando el algoritmo exponencial polinómico tiene limitaciones a) *geométricas* al tomar un tanque de almacenamiento vertical de forma conocida, cuya sección transversal es de área constante b) *dinámicas* al asumir el fluido incompresible, de parámetros concentrados y el flujo de entrada es manipulable y se asume que no existe ningún tipo de tiempo muerto en el sistema. c) de *instrumentación* al tomar la válvula lineal y el sensor transmisor de dinámica despreciable.

## 1.5 HIPÓTESIS O PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

- ¿Por qué el control de nivel es un problema relevante?
- ¿Bajo las limitaciones del problema cuáles son las no linealidades del sistema?
- ¿El sistema qué tipo de puntos de equilibrio tiene?
- ¿En caso de existir, cómo se interpreta físicamente los puntos de equilibrio tipo silla?
- ¿Qué tipo de estabilidad tiene el sistema?
- ¿Cómo incide en la estabilidad la condición de que el flujo de salida permanezca constante?
- ¿Será posible encontrar una función de Lyapunov para el problema planteado?
- ¿Se podrá encontrar una aproximación de la región de atracción del problema?
- ¿El sistema presentará puntos de bifurcación?

- ¿El sistema presentará ciclos límite?
- ¿El sistema presentará caos?
- ¿Cómo incide en el controlador el comportamiento ondulatorio en la superficie del líquido?
- ¿Cuáles son las ventajas y desventajas que tiene el algoritmo exponencial polinómico al compararlo bajo diferentes índices de desempeño como la integral del valor absoluto del error IAE, máximo pico de altura MPH, trabajo sobre la variable manipulada TVM, tiempo de asentamiento  $t_s$ , offset, con otros controladores como el proporcional, el de error cuadrático y el PID?
- ¿Cómo se comporta el sistema bajo la incidencia de perturbaciones?
- ¿Cómo se comporta el sistema con el algoritmo de control exponencial polinómico con diferentes valores de los parámetros?

## 1.6 PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO

### 1.6.1 Tipo de investigación

De acuerdo con los medios utilizados la investigación se puede clasificar en la categoría de documental y computacional ya que la información se obtuvo de libros, revistas, artículos, monografías, tesis y simulaciones.

### 1.6.2 Método de investigación

El desarrollo de la investigación tuvo diferentes fases:

- Ubicación del estado del arte relacionado con sistemas de control de nivel no lineal.
- Comprensión del marco teórico relacionado con sistemas dinámicos no lineales según la teoría de Lyapunov.
- Modelamiento del sistema bajo las limitaciones del problema.
- Análisis teórico de las características no lineales del modelo de control de nivel con el algoritmo exponencial polinómico.
- Simulación del sistema de control de nivel con ley de control exponencial polinómica con diferentes valores de los parámetros.
- Simulación del sistema de control de nivel con ley de control proporcional con diferentes valores de los parámetros.
- Simulación del sistema de control de nivel con ley de control error cuadrático con diferentes valores de los parámetros.

- Simulación del sistema de control de nivel con ley de control proporcional integral derivativo PID, con diferentes valores de los parámetros.
- Comparación de los índices de desempeño (integral del valor absoluto del error IAE, trabajo sobre la variable manipulada TVM, tiempo de asentamiento  $t_s$ , *offset absoluto*, porcentaje de máximo pico de altura %MPH) obtenidos en el sistema con diferentes leyes de control (la proporcional, la de error cuadrático, la exponencial polinómica y la proporcional integral derivativa PID).
- Obtención de resultados y conclusiones.

### 1.6.3 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

- Libros, revistas, artículos, monografías, tesis relacionados con sistemas dinámicos no lineales y control de nivel.
- Simulink: Herramienta computacional de MatLab ®<sup>1</sup> para la simulación de sistemas dinámicos.
- pplane<sup>2</sup>®: Programa que corre sobre MatLab ® para simular sistemas dinámicos de segundo orden.

## 1.7 USUARIOS POTENCIALES

Aquellas personas relacionadas con el área de las Ingenierías de Control, Química y de Procesos Industriales encontrarán en este trabajo una estrategia de análisis que podrán usar en procesos relacionados con el control de nivel con el fin de que éste sea mejor caracterizado y comprendido. Para lograr con esto una mejora en la profundización conceptual del modelo.

Además el análisis se podría extrapolar a otros procesos que no necesariamente sean de control de nivel ya que la ingeniería en general trabaja con procesos duales. Es así, por ejemplo, que podría tener como usuarios potenciales a personas que quieran analizar fenómenos de capacitancia con una ley de control no lineal.

---

<sup>1</sup> [www.mathworks.com/](http://www.mathworks.com/)

<sup>2</sup> Desarrollo basado en Matlab, por los investigadores en control no lineal del Lunds Tekniska Hogskolan, LTH (Instituto de Tecnología de Lund).

## **1.8 ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO**

En el Capítulo 1 consta de la introducción.

En el Capítulo 2 se explican los fundamentos teóricos fundamentales para abordar el problema.

En el Capítulo 3 se muestran los resultados teóricos y sus análisis.

En el Capítulo 4 trata de los resultados de las simulaciones y sus análisis.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones, contribuciones y recomendaciones.

# Capítulo 2. Fundamentos Teóricos

---

## 2.1 INTRODUCCIÓN

El estudio de los sistemas dinámicos se puede realizar desde dos enfoques, uno desde la obtención de expresiones analíticas para conseguir sus soluciones usando métodos de integración, otro, desde la comprensión del problema descrito por  $\dot{x} = f(x, t)$ , que corresponde al modelo matemático de un sistema físico. En el primero se trabajan los métodos aproximados y los de computación numérica de soluciones particulares. En el segundo se obtienen los puntos de equilibrio y su clasificación y se estudia su estabilidad local y global, el análisis de la presencia de ciclos límite, tiempo de escape finito, puntos de bifurcación y caos, se busca una función de Lyapunov y analizar la estabilidad entrada estado del sistema.

En este capítulo se presentan las definiciones y propiedades fundamentales de las características no lineales que afectan al sistema estudiado. La información se obtuvo de libros clásicos de sistemas no lineales, artículos de revistas y tesis doctorales. El objetivo es presentar la teoría esencial que será usada en el capítulo siguiente para el análisis de las características no lineales en un sistema de control de nivel mediante el algoritmo exponencial polinómico para mantener el nivel del fluido en un valor determinado.

## 2.2 ANTECEDENTES

Como dicen Luyben y Luyben [30], algunas leyes de control se han desarrollado en este campo como producto de muchos años de experiencia. Ley 1: el mejor sistema de control es el más simple que haga el trabajo. Ley 2: entienda el proceso antes que el control. Ley 3: el nivel de líquidos debe ser siempre controlado. Respecto a la tercera ley explican que las estructuras de sistemas de control deben garantizar que el nivel de líquidos en tanques o columnas se mantenga en un valor entre su máximo y mínimo.

El control de nivel es un problema relevante porque cubre una amplia gama de aplicaciones en distintos procesos que se encuentran en campos como la industria química, alimentaria y petroquímica, además el

control de nivel permite cerrar un balance de materia en equipos de proceso. Es por estas aplicaciones que actualmente se busca que los controladores de nivel mejoren su desempeño cada día disminuyendo los posibles escollos que pueda tener en cada aplicación.

Como dicen Castrillón [8] y Kravaris [3] la medición del nivel en un tanque puede ser problemática por la presencia de olas, espuma, meniscos, líquidos espesos o debido a salpicaduras y turbulencias provenientes de un flujo de entrada. Además la superficie de un líquido tiende a producir una señal periódica superpuesta a la altura promedio. Muchos tanques con controles de nivel están destinados como tanques de almacenamiento, en estas aplicaciones una banda proporcional amplia con reset (wide proportional band with reset) es el control sugerido. Pero el controlador no lineal es, de hecho, ideal para esta aplicación por dos razones:

1. Fluctuaciones pequeñas en amplitud en el nivel del líquido o de corta duración no son transmitidas a la válvula proporcionando así la entrega de un flujo suave.
2. Fluctuaciones con amplitud grande son controladas mediante una acción correctiva fuerte. Este requerimiento es a menudo referenciado en la literatura como control de nivel promedio (averaging level control), porque se desea que el flujo manipulado siga al nivel promedio en el tanque. La acción promediante es realmente un proceso dinámico y puede lograrse con un adecuado desfase pero se reduciría la rapidez de respuesta. Una ley de control no lineal puede obtener este mismo efecto sin sacrificar rapidez.

En este punto es apropiado preguntar ¿qué análisis se han hecho en torno al control de nivel? Muy unido a la respuesta está en conocer cómo se ha controlado el nivel en el pasado. La literatura es moderadamente "pobre" en este tópico. Una razón podría ser que se han desarrollado soluciones a un problema específico y pueden no ser fácilmente generalizadas.

Se han propuesto diferentes estrategias de control para enfrentar la regulación del nivel, en la bibliografía consultada se encontró que

Marroquin y Luyben [31] (1972) estudiaron cuatro configuraciones de un sistema de control de temperatura en cascada para un reactor batch, donde la ganancia del controlador está en función del valor absoluto de error, logrando mejores resultados que los obtenidos mediante un controlador lineal, particularmente bajo amplias variaciones en las condiciones de la carga.

Un ejemplo común donde la ganancia es función del error es el control de nivel en un tanque donde el objetivo es mantener el flujo de salida constante ante cambios en la tasa de flujo de entrada, teniendo como limitación el nivel mínimo y máximo del tanque, Kravaris (1997). En esta situación la ganancia del controlador es pequeña cuando el nivel está cerca del punto de control y cuando el error aumenta la ganancia aumenta. Es frecuente escoger la ganancia como una función del valor absoluto del error.

$$K_c = K_{co}(1 + a|e(t)|)$$

Una alternativa para mejorar el control es hacer la ganancia del controlador como una función por tramos (algunas veces llamado controlador "GAP"),

$$k_c = \begin{cases} k_{c_1} & \text{si } e < e_1 \\ k_{c_0} & \text{si } e_1 < e < e_u \\ k_{c_u} & \text{si } e > e_u \end{cases}$$

Donde a menudo  $k_{c_u} = k_{c_1}$

Shunta y Fehervari [44] (1976) reportan un "controlador de amplio rango" desarrollado para FOXBORO que satisface objetivos específicos para el control de nivel; donde la salida de la parte proporcional de este controlador es

$$u(t) = k_{c_0} e(t) 25^{k|e(t)|}$$

Shunta y Fehervari también mostraron cómo un controlador estándar PI con bajo y alto nivel de rechazo puede proporcionar respuestas similares a un controlador PI no lineal.

Cheung [9] en su trabajo de tesis en 1978 verifica experimentalmente el controlador de amplio rango de Shunta y Fehervari.

Cheung y Luyben [10] en 1980 realizaron simulaciones con el controlador de amplio rango de Shunta y Fehervari en tanques de almacenamiento y encontraron que es difícil de sintonizar, lo que motiva el uso de la teoría de sistemas no lineales, y las respuestas son difíciles de predecir. Advirtieron que los resultados de las simulaciones fueron coincidentes con los de la experimentación.

McDonald et al. [33] en 1986 obtienen varios controladores que aplican políticas de control de nivel óptimo, con el objetivo de minimizar la tasa de cambio del flujo de salida sujeta a las limitaciones máxima y mínima del nivel. Desarrollaron dos controladores de nivel basándose en leyes de control promedio para un sistema de tanques de almacenamiento, lo que logra minimizar la máxima tasa de cambio del flujo de salida para el máximo pico de altura (MPH). El primero es conocido como controlador rampa y tiene la forma de un controlador proporcional no lineal, que relaciona el nivel del tanque con la tasa del flujo de salida. Compararon el controlador rampa con siete esquemas de controladores de nivel promedio propuestos por Cheung y Luyben y mostraron que el controlador rampa produce significativamente mejoras en el desempeño y que su sintonía era mucho más simple. El segundo es conocido como un controlador predictivo óptimo con realimentación hacia adelante y hacia atrás y se entiende como una extensión de una ley de control óptima.

Buckley [6] en 1986 analiza la teoría y desempeño de los dos controladores propuestos por McDonald et al a partir de pruebas de ensayo y error. Él comparó la ganancia de los controladores no lineales con el correspondiente controlador lineal y el mismo valor particular del error. Mostró que para valores pequeños del error la respuesta del sistema no lineal es más subamortiguada que la respuesta del sistema lineal y para valores grandes del error la respuesta del sistema no lineal es más subreamortiguada que la respuesta del sistema lineal.

Rugh [38] en 1987 desarrolló una estrategia de control programado para controlar el nivel en el tercer tanque de tres en serie y encontró que tiene mejor desempeño para grandes cambios en el punto de consigna que un controlador PI tradicional.

Roy [37] en 1988 comparó mediante simulaciones la sintonía de varios controladores realimentados para el control promedio; entre ellos está el controlador no lineal con algoritmo de error cúbico.

Jutan [23] en 1989 desarrolló un controlador PI(D) no lineal donde la ganancia del controlador está en función de la magnitud del error y de las tendencias anteriores en la salida del proceso. Este controlador mostró una pequeña mejora en el índice de desempeño ITAE en comparación con el clásico PID de primer orden.

Marlín [32] en 1995 comparó un controlador lineal con ganancia por tramos con un control PI lineal para un problema de control de nivel y demostró que el control lineal por tramos da respuestas favorables en el flujo de salida a perturbaciones senoidales en el flujo de entrada. Advierte que el control de nivel parece ser la aplicación más común en donde el ajuste de los parámetros está en función del error.

C.Thanomsat, C.W. Taft, A.M. Annaswamy [45] en 1998 analizaron mediante simulaciones el control de nivel de un alimentador de calor horizontal cerrado en una planta generadora de energía. Proponen una estrategia avanzada de control que toma en cuenta las no linealidades inherentes al sistema y demuestran su capacidad para regular el nivel de calefacción arbitraria ante la presencia de varias perturbaciones.

Gorostiaga, L. Y Busoch, C. [18] en 1998 combinan estrategias retroalimentadas por acción precalculada para el control de nivel, este tipo de control usa la medición de una perturbación entrando al proceso como información adicional para mejorar el rendimiento o índice de funcionamiento de un controlador de lazo simple. Este tipo de medida provee una “temprana advertencia” de una perturbación que causará problemas en algún momento en la variable controlada en el futuro. Con esta advertencia el controlador por acción precalculada tiene la oportunidad para ajustar la variable manipulada antes que la variable controlada se desvíe de la referencia.

Kothare et al [26] en el 2000 investigaron el problema de controlar el nivel del agua en un generador de vapor mediante una extensión del modelo lineal estándar del algoritmo de control predictivo a un sistema lineal de variación de parámetros.

Kow Liang Wu et al [27] en el 2001 presentaron un control de nivel con dos grados de libertad, los resultados de las simulaciones muestran que este controlador se comporta como un controlador proporcional ante las perturbaciones y como un proporcional integral ante los cambios de carga y posee mejores propiedades de robustez que el control proporcional con retardo PL (por sus siglas en inglés proportional-lag).

Miao Wang y Francesco Crusca [49] en el 2002 diseñaron un controlador PI con ganancia programada, para un sistema no lineal de control de nivel de agua en un tanque, en el cual los parámetros del controlador se ajustan ante cambios de la planta, de manera que el comportamiento en lazo cerrado conserva las características deseadas del sistema. Además presentan un enfoque novedoso de determinar puntos de funcionamiento en términos de interpolación del error. El controlador es ejecutado en LABVIEW<sup>3</sup> en el laboratorio. Los resultados de ensayos de campo de la respuesta del sistema en diferentes condiciones de funcionamiento ilustran claramente un mejor desempeño del controlador.

---

<sup>3</sup> [www.ni.com/labview/](http://www.ni.com/labview/)

Haizhou Pan et al [19] en el 2003 estudiaron el problema de diseño de control no lineal de nivel de un líquido para un estado de acoplamiento de dos tanques. Desarrollaron un conjunto de técnicas no lineales buscando obtener un control preciso de nivel de líquido.

T. K. Teng et al [46] en el 2003 presentan un algoritmo genético simple aplicado en un experimento en tiempo real en un sistema de control de nivel de un líquido para el ajuste automático de los parámetros en línea de un controlador proporcional integral derivativo. El método propuesto elige automáticamente los mejores parámetros del controlador. Los resultados experimentales demuestran la eficacia y utilidad del ajuste de los parámetros del controlador en línea.

Mohd Azlan Hussain; Pei Yee Ho [21] en el 2004 proponen usar el modelo de redes neuronales en sistemas no lineales, lo que permite así tener una mejor ganancia para el sistema y una mejor descripción de la planta. El rendimiento del controlador se muestra a través de estudios de simulación sobre un sistema no lineal para controlar dos niveles en dos tanques en cascada bajo continua agitación del líquido.

M. Khalid Khan y Sarah K. Spurgeon [25] en el 2005 presentan un algoritmo de control de segundo orden como una clase de sistema no lineal MIMO en forma de entrada y salida. Este algoritmo ha sido aplicado al nivel de líquidos para control robusto en tanques interconectados. El controlador se implementó en un laboratorio y los resultados presentados validan la teoría propuesta. Los resultados muestran robustez en la variación de parámetros tales como el área del tanque, el coeficiente de entrada de varias pipas, escape en el tanque e incertidumbre en la dinámica de la bomba.

Min Xu et al [50] en el 2005 proponen un modelo para controlar el nivel en una caldera mediante el empleo de estructuras generalizadas de control predictivo. Los resultados de la simulación muestran que el control predictivo generalizado en cascada tiene mejor rendimiento que el controlador PID en cascada.

Daniel Sbarbaro y Romeo Ortega[1] en el 2007 proponen un controlador de nivel promediante de alto desempeño aplicado a varios tanques de almacenamiento con dinámicas no lineales y con restricciones de estado basado en balance de masa.

Satean Tunyasirirut y Santi Wangnipparnto [47] en el 2007 muestran que un PID y un controlador *fuzzy* son utilizados para construir un controlador en cascada a fin de controlar el nivel en un depósito horizontal. Mediante simulaciones encuentran que la velocidad de las respuestas del sistema de control de nivel con y sin carga interrumpida en el tanque es rápida y que el controlador en cascada y el *fuzzy* manejan un error en estado estable muy pequeño.

Castrillón et al [7] en el 2007 aplican la teoría de estabilidad de Lyapunov para puntos de equilibrio y relaciones Entrada–Estado en el análisis de un sistema típico de regulación promediante de nivel de líquido con algoritmo de error cuadrático. Los resultados obtenidos en cuanto a la naturaleza de los puntos de equilibrio, región de atracción y comportamiento frente a perturbaciones resultan de gran interés práctico para la industria de procesos.

A continuación se presentan los principales temas de la teoría de control no lineal que son necesarios para realizar el análisis de las características no lineales del sistema de control de nivel con ley exponencial polinómica.

## 2.3 CONDICIÓN DE LIPSCHITZ

Si  $M$  y  $N$  son espacios métricos, la función  $f: M \rightarrow N$  se dice que cumple la condición de Lipschitz si  $\exists L \in \mathbb{R}; L > 0$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \forall x, y \in M$ , siendo  $d$  una métrica definida en  $M$  y  $N$ ,  $L$  es llamada constante de Lipschitz de la función  $f$ .

La condición de Lipschitz en una función no depende de la elección de la norma y por ende de la métrica inducida en  $M$  y  $N$ , ésta solo afecta el valor de la constante de Lipschitz.

### 2.3.1 Condición de Lipschitz local

Dados  $M, N$  espacios métricos, se dice que una función  $f: M \rightarrow N$  es localmente Lipschitz si para todo punto de  $M$  existe una vecindad donde la función cumple la condición de Lipschitz.

### 2.3.2 Teorema: condición de suficiencia para ser localmente Lipschitz

Sea  $f: [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  y  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  continua en  $[a, b] \times D$  entonces  $f$  es localmente Lipschitz en  $x$  en  $[a, b] \times D$ .

### 2.3.3 Teorema: condición de suficiencia para el cálculo de la constante de Lipschitz

Este teorema asegura que bajo ciertas hipótesis la cota de  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  sirve de constante de Lipschitz.

Sea  $f: [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función continua,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , si  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  existe y es continua en  $[a, b] \times D$  y si existe una constante  $L \geq 0$  en algún subconjunto convexo de  $D$  tal que  $\left\| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right\| \leq L$  en  $D$  entonces:  
$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall t \in [a, b], x, y \in W.$$

El siguiente teorema permitirá conocer las condiciones de suficiencia para determinar cuando un sistema tiene solución y si la solución del problema de valor inicial es única.

## 2.4 TEOREMA: EXISTENCIA Y UNICIDAD LOCAL DE SOLUCIONES

Sea el sistema  $\dot{x} = f(t, x)$  con condición inicial  $x(t_0) = x_0$  donde  $f: [t_0, t_1] \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  es continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz, entonces existe una vecindad  $V(t_0, \delta)$  con  $\delta > 0$  tal que  $\dot{x} = f(t, x)$  tiene una única solución.

A continuación se define uno de los conceptos importantes en el método directo de Lyapunov, el cual corresponde con la derivada de una función a lo largo de trayectorias. Este tema se encuentra implícito en temas como función de Lyapunov y estabilidad entrada-estado.

## 2.5 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN $V: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ A LO LARGO DE LAS TRAYECTORIAS

Sea  $V: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función real continuamente diferenciable, la derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias de  $\dot{x} = f(x)$  se define y denota por

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \quad (1)$$

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \quad (2)$$

A continuación se define el concepto de función de Lyapunov el cual soporta temas como región de atracción, estabilidad entrada-estado que se definen más adelante.

## 2.6 FUNCIÓN DE LYAPUNOV

Sea  $V: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función real continuamente diferenciable tal que

$$\begin{aligned} V(\mathbf{0}) &= 0 \\ V(x) &> 0 \text{ para } \forall x \in A - \{\mathbf{0}\} \\ \dot{V}(x) &\leq 0; \forall x \in A \end{aligned} \quad (3)$$

La superficie definida por  $V(x) = c$  es llamada superficie de Lyapunov.

A continuación se definen las funciones clase  $K$  y  $K\mathcal{L}$  que tienen un papel relevante en el análisis de sistemas en la estabilidad entrada-estado.

## 2.7 TIPO DE FUNCIONES CRECIENTES

Define Khalil [24]

### 2.7.1 Funciones de clase $K$

Una función continua  $\alpha: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  pertenece a la clase  $K$  si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ . Se dice que pertenece a la clase  $K_\infty$  si  $a = \infty$  y  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

La Figura 2.1 ilustra las graficas de dos funciones una clase  $K$  y otra de clase  $K_\infty$  se observa que toda función de clase  $K_\infty$  también es de clase  $K$ .

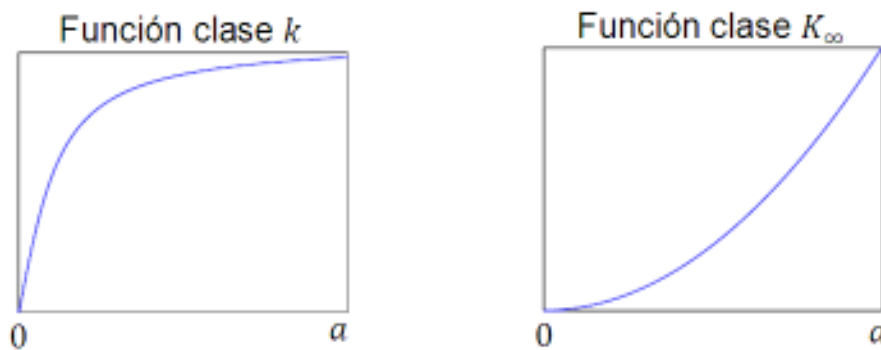


Fig. 2.1 Graficas de funciones clase  $K$  y  $K_\infty$

### 2.7.2 Funciones de clase $K\mathcal{L}$

Una función continua  $\beta: [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  pertenece a la clase  $K\mathcal{L}$  si para cada  $s$  fijo, la función  $\beta(r, s)$  es clase  $K$  con respecto a  $r$  y para cada  $r$  fijo, la función  $\beta(r, s)$  es decreciente con respecto a  $s$  y  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .

## 2.8 ESPACIO DE ESTADOS

Es el espacio de  $n$  dimensiones cuyos ejes coordenados están formados por las variables que representan al sistema dinámico completo en un tiempo cualquiera, llamadas variables de estados, estas deben ser linealmente independientes[13].

## 2.9 SISTEMAS DINÁMICOS

### 2.9.1 *Autónomos*

Un sistema dinámico de  $n$  ecuaciones diferenciables es llamado autónomo cuando sus características no varían en el tiempo y se representa por  $\dot{x} = f(x)$  donde  $f:W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , llamado vector de estados.

Este sistema no contiene ningún estímulo externo.

### 2.9.2 *No autónomos*

Un sistema dinámico de  $n$  ecuaciones diferenciables es no autónomo cuando las características del mismo varían en el tiempo y se representa por  $\dot{x} = f(x, t)$  donde  $f:W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

## 2.10 PUNTO DE EQUILIBRIO (PE)

El conocimiento de los puntos para los cuales ocurre el estado estacionario es importante para los análisis de sistemas no lineales ya que corresponde a soluciones constantes o soluciones de equilibrio.

Sea el sistema representado por

$$\dot{x} = f(x) \quad (4)$$

con  $f:W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente Lipschitz. El sistema estacionario definido por (4) tiene un PE en  $x = x_o$ , si  $x_o \in W$  y  $f(x_o) = \mathbf{0}$ , donde  $\mathbf{0}$  es el origen de  $\mathbb{R}^n$ , en tal caso  $x_o$  se llama PE del sistema.

Sin pérdida de generalidad se ubica el PE en el origen. Esto no cambia las características del sistema (4) ya que si  $x_o \neq \mathbf{0}$  se puede convertir en el origen mediante un desplazamiento de coordenadas al origen.

Como dice Vélchez Lobato [48] el estudio de los PE está estrechamente relacionado con el de la estabilidad de las trayectorias del sistema (4). En ciertos casos los PE pueden ser atractivos y en tal caso atraer a las trayectorias con valores iniciales próximos al PE, haciendo que se mantengan cerca unas de

otras. Por lo anterior será de interés determinar la estabilidad de las soluciones de un sistema dinámico como (4) lo que puede hacerse mediante los métodos debidos a Lyapunov, uno de los cuales se basa en el estudio de la estabilidad de soluciones del sistema lineal asociado a (4) y el otro, conocido como el método directo de Lyapunov, garantiza la estabilidad bajo la existencia de una función que cumple ciertas condiciones y que es conocida como función de Lyapunov. En la práctica no es fácil encontrarla, a pesar de que sí se pueda garantizar su existencia usando ciertos teoremas. Ésta es la falencia del segundo método, por lo cual en la práctica normalmente se usa el primer método, que se basa en linealizar el sistema (4) descrito como

$$\dot{x} = Ax + F_{NL}(x) \quad (5)$$

donde  $A$  es la matriz Jacobiana de  $f$  evaluada en el PE, sin embargo se traslada al origen y en tal caso  $A = Jf(\mathbf{0})$  está asociada a la parte lineal del sistema dinámico original. Una aproximación lineal del sistema (4) esta expresada por:

$$\dot{x} = Ax \quad (6)$$

En (5)  $F_{NL}$  es una función que representa la parte no lineal, este término se puede despreciar en una vecindad del PE porque el retrato de fase de (6) es topológicamente equivalente a (4) (es decir que las trayectorias se pueden deformar continuamente unas en otras). Ésta última afirmación está basada en el teorema de Hartman-Großman que se detalla más adelante.

En conclusión, el comportamiento de un sistema no lineal en una vecindad de un PE es cualitativamente similar al del sistema lineal asociado.

### 2.10.1 Tipos de estabilidad en los puntos de equilibrio

La estabilidad en un punto de equilibrio puede ser del tipo:

- Estable

Si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta = \delta(\epsilon)$  tal que  $\|X(\mathbf{0})\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < \epsilon$

Con base en la teoría de Lyapunov, la estabilidad se puede interpretar geoméricamente como: dado cualquier  $\epsilon$ , un número positivo muy pequeño, se puede encontrar un  $\delta$ , un número positivo muy pequeño que puede depender de  $\epsilon$ , tal que si la condición inicial está a una distancia menor que un  $\delta$  del PE, entonces la trayectoria permanece a una distancia menor que un  $\epsilon$  del PE, es decir, que las trayectorias que inician muy cerca del PE, así permanecen cuando  $t \rightarrow \infty$ .

El punto de equilibrio que no sea estable en el sentido de Lyapunov se llamará punto de equilibrio inestable, en los PE inestables no significa que las trayectorias tiendan a infinito, cuando  $t \rightarrow \infty$ . Lo único que significa es que se alejan del PE, pudiendo entonces aproximarse a otros PE o a ciclos límite, que se definirán más adelante.

- Punto de Equilibrio Asintóticamente Estable (PEAE)

Si  $x_0$  es estable en el sentido de Lyapunov y  $\|x(\mathbf{0})\| < \delta$  entonces se cumple que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

La estabilidad asintótica es más restrictiva que la estabilidad en sentido de Lyapunov, este tipo de estabilidad impone la condición de que las trayectorias converjan al PE.

Los PE estables tienen la característica de que alrededor de ellos se puede definir una región donde toda trayectoria que inicia en un punto de ésta tiende a este en el transcurso del tiempo. El interés práctico de esta región es conocer el espacio de estado donde el sistema tiene una operación segura, a ésta región se le llama región de atracción y se define a continuación.

## 2.11 REGIÓN DE ATRACCIÓN

Sea el origen  $x = \mathbf{0}$  un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema no lineal  $\dot{x} = f(x)$  donde  $f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene el origen. Sea  $\varphi(t, x)$  una solución de  $\dot{x} = f(x)$  que comienza en el estado inicial  $x$  en  $t = 0$ . La región de atracción para el PE  $x = \mathbf{0}$  se denota y define por:

$$\Omega_A = \left\{ x \in D \mid \varphi(t, x), t \geq 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = 0 \right\} \quad (7)$$

La región de atracción es todo  $\mathbb{R}^n$  si para cualquier estado inicial  $x(t)$ , la trayectoria  $\varphi(t, x)$  se aproxima a  $\mathbf{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Aquellos PE asintóticamente estables que tengan como región de atracción todo  $\mathbb{R}^n$  se llaman global y asintóticamente estables.

Generalmente no es fácil encontrar la región de atracción pero estimar un subconjunto de ésta será útil para los diferentes análisis y entre más se aproxime el conjunto a la región de atracción, mejor. Es decir, se desea encontrar el mayor subconjunto  $\Omega_{est}$  tal que  $\Omega_{est} \subset \Omega_A$  y así si una trayectoria parte de un punto de  $\Omega_{est}$  se tendrá la seguridad de que no se sale de la región de atracción. La región de atracción se suele llamar también dominio de atracción o cuenca de atracción.

Dependiendo del tipo de equilibrio, el comportamiento cualitativo de un sistema no lineal alrededor de un PE es similar al del sistema linealizado, esta afirmación se soporta en el teorema de Hartman-Grobman que se escribe a continuación.

## 2.12 TEOREMA DE HARTMAN-GROßMAN

Sea el sistema no lineal (4) y  $f$  suave, con  $x_0$  un PE, si  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}$  no tiene valores propios nulos o imaginarios puros entonces existe un homeomorfismo  $h$ , que lleva las trayectorias del sistema no lineal (4) sobre las del sistema linealizado (6). En particular  $h(x_0) = 0$ .

La hipótesis de que la matriz  $A$  no tenga valores propios nulos o imaginarios puros garantiza que se pueda linealizar el sistema y en tal caso los sistemas (4) y (6) son localmente equivalentes en una vecindad del PE. Cuando la hipótesis del teorema de Hartman-Grobman no se cumpla se deben incluir más términos en el desarrollo de Taylor en la expresión (5).

Según Etchechoury [15] el teorema de Hartman-Grobman afirma que es posible deformar de manera continua todas las trayectorias del sistema no lineal alrededor del PE en las trayectorias del sistema linealizado, usando el homeomorfismo  $h$ . En general es difícil encontrar el homeomorfismo  $h$ , sin embargo el teorema indica que el comportamiento cualitativo de un sistema no lineal alrededor de un PE es similar al del sistema linealizado.

El tipo de punto equilibrio queda completamente especificado por la ubicación de los valores propios de  $A$  en algún subconjunto de su espectro. A continuación se presentan las diferentes clasificaciones de los PE.

## 2.13 CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO EN SISTEMAS NO LINEALES

Según el teorema de Hartman-Grobman la estabilidad de un PE en un sistema no lineal se examina linealizando el sistema alrededor de un PE. Es así que se necesita evaluar la matriz Jacobiana de  $f$  en el PE representada por  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}$ , que por comodidad se toma en el origen, y serán los valores propios de la matriz  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$  los que determinan la estabilidad en los puntos de equilibrio.

Advierte Pagano [22] que el conjunto de valores propios de  $A$ , llamado espectro de  $A$  y denotado por  $\sigma(A)$  se puede representar por la unión de los siguientes tres conjuntos

$$\begin{aligned}\sigma_s(A) &= \{\lambda \in \sigma(A): \mathbb{R}(\lambda) < 0\} \\ \sigma_c(A) &= \{\lambda \in \sigma(A): \mathbb{R}(\lambda) = 0\} \\ \sigma_u(A) &= \{\lambda \in \sigma(A): \mathbb{R}(\lambda) > 0\}\end{aligned}\tag{8}$$

donde

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_u(A)\tag{9}$$

Cada uno de estos conjuntos genera los subespacios  $E_s, E_c, E_u$  y se cumple que:

$$E_s \oplus E_c \oplus E_u = \mathbb{R}^n \quad (10)$$

### 2.13.1 Tipos de puntos de equilibrio para sistemas de segundo orden

Los puntos de equilibrio de un sistema de segundo orden se clasifican como:

**Nodo estable:** Los dos valores propios de  $A$  tienen parte real estrictamente negativa.

**Nodo inestable:** Los dos valores propios de  $A$  tienen parte real positiva.

**Punto silla:** Un valor propio tiene parte real negativa, y el otro tiene parte real positiva.

**Foco o espiral estable:** Los dos valores propios de  $A$  tienen parte imaginaria (distinta de cero), y ambos poseen parte real negativa.

**Foco o espiral inestable:** Los dos valores propios de  $A$  tienen parte imaginaria (distinta de cero), y ambos poseen parte real positiva.

**Centro:** Los dos valores propios de  $A$  tienen solo parte imaginaria.

### 2.13.2 Teorema: condición suficiente para un punto de equilibrio local asintóticamente estable

Si  $x = \mathbf{0}$  es un PE de (4) con  $f: V(\mathbf{0}, \delta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable en  $V(\mathbf{0}, \delta)$  y todos los valores propios de  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\mathbf{0}}$  pertenecen a  $\sigma_s(A)$  entonces el origen es local asintóticamente estable.

### 2.13.3 Teorema: condición suficiente para un punto de equilibrio inestable

Si  $x = \mathbf{0}$  es un PE de (4) con  $f: V(\mathbf{0}, \delta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable en  $V(\mathbf{0}, \delta)$  y si al menos un valor propio de  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\mathbf{0}}$  pertenece a  $\sigma_u(A)$  entonces el origen es localmente inestable.

### 2.13.4 Teorema: condición suficiente para un punto de equilibrio silla


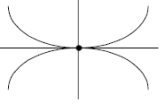
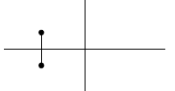


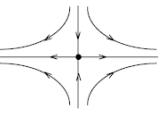
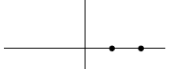
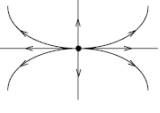
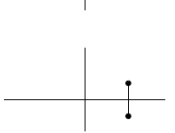

Si  $x = \mathbf{0}$  es un PE de (4) con  $f: V(\mathbf{0}, \delta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable en  $V(\mathbf{0}, \delta)$  y algunos valores propios de  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\mathbf{0}}$  pertenecen a  $\sigma_u(A)$  y todos los demás pertenecen a  $\sigma_s(A)$  el PE inestable es llamado punto de silla.

Si en la matriz  $A$ ,  $n_N$  es el número de valores propios con parte real negativa,  $n_0$  es el número de valores propios con partes real nula y  $n_P$  es el número de valores propios con parte real positiva de la matriz  $A$ , un

PE es llamado hiperbólico si  $n_0 = 0$ , es decir un PE se dice hiperbólico, si la parte real de todos los valores propios de  $A$ , en ese punto, es diferente de cero, y el PE hiperbólico es llamado silla si  $n_N \neq 0$  y  $n_P \neq 0$ . En caso contrario donde  $n_0 \neq 0$ , el punto se llama no hiperbólico.

La tabla 2.1 muestra un resumen gráfico de los diferentes PE hiperbólicos.

**Tabla 2.1 Resumen gráfico de diferentes puntos de equilibrio hiperbólicos<sup>4</sup>**

$n_P$	$n_N$	Valores propios	Retrato de Fase		Estabilidad
0	2			Nodo	Estable
				Foco	
1	1			Silla	Inestable
2	0			Nodo	Inestable
				Foco	

<sup>4</sup> Tomada de <http://www.docentes.unal.edu.co/atovarp/docs/IGB/02Introducci%F3n%20a%20las%20bifuraciones.pdf>.06/03/2009

### 2.13.5 Teorema: punto de equilibrio estable y función de Lyapunov

Si  $x_o = \mathbf{0}$  es un PE de (4) y  $x_o \in A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Lyapunov entonces  $x_o = \mathbf{0}$  es un PE estable.

#### Corolario

Si  $x_o = \mathbf{0}$  es un PE de (4)  $x_o \in A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Lyapunov tal que  $\dot{V}(x) < 0$ ;  $\forall x \in A - \{\mathbf{0}\}$  entonces  $x_o = \mathbf{0}$  es un PE asintóticamente estable.

Afirma Khalil [24] que si  $\dot{V}(x) \leq 0$  implica que cuando una trayectoria entra a la superficie de Lyapunov  $V(x) = c$ , ésta se mueve dentro de un sólido  $\Omega_c$  y nunca puede salir de él, donde  $\Omega_c$  está definido por:

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) \leq c\} \quad (11)$$

Si la condición es  $\dot{V}(x) < 0$  la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra con un  $c$  menor. A medida que  $c$  decrece la superficie de Lyapunov  $V(x) = c$  se vuelve cada vez más pequeña cuando  $t \rightarrow \infty$ , esta superficie se transforma en el origen.

En ocasiones las trayectorias de un sistema tienden a ser cerradas, este tipo de comportamiento es propio de sistemas no lineales, cuando esto sucede se dice que existe un ciclo límite que a continuación se definirá.

## 2.14 CICLOS LÍMITE

Define Khalil [24] es una trayectoria cerrada o la imagen de una solución periódica en el retrato de fase que oscila con amplitud y frecuencia fija sin importar el estado inicial.

Cuando las trayectorias del sistema tienden a formar una órbita cerrada se dice que existe un ciclo límite estable y si se da el caso en el que las trayectorias se desprenden de una órbita cerrada se dice que existe un ciclo límite inestable.

La definición de estabilidad para un ciclo límite es análoga a la de un PE, un ciclo límite es asintóticamente estable si todas las trayectorias que empiezan cerca al ciclo límite se acercan a este con el transcurso del tiempo.

### 2.14.1 Criterio negativo de Bendixson

Define Khalil [24] sea  $W$  una región simplemente conexa del plano, sea  $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$  una función continuamente diferenciable en  $W$ . Si  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  no es idénticamente cero y no cambia de signo entonces el sistema autónomo  $\dot{x} = f(x_1, x_2)$  no tiene orbitas periódicas o ciclos límite en  $W$ .

Algunos sistemas dinámicos no lineales tienen trayectorias que tienden a infinito cuando el tiempo se aproxima a un valor real haciendo que el sistema pierda estabilidad en los alrededores de este tiempo, este concepto es el de tiempo de escape finito que se define a continuación.

## 2.15 TIEMPO DE ESCAPE FINITO

Afirma Khalil [24] que se presenta en sistemas que tienen trayectorias que tienden a infinito cuando el tiempo se acerca a un valor finito determinado. En el dominio del tiempo la solución no está definida para todo  $t \geq 0$ , es decir existe un  $t_0 > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$ .

En el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos no lineales es importante determinar el comportamiento del mismo al hacer pequeños cambios en los valores de los parámetros sin que cambien las características del retrato de fase. Aquellos sistemas que preservan las características de estabilidad a pesar de estos cambios cumplen con el concepto de estabilidad estructural que continuación se define.

## 2.16 ESTABILIDAD ESTRUCTURAL

La estabilidad estructural es la propiedad que posee un sistema dinámico de conservar el mismo retrato topológico cuando se modifica la función que describe el sistema dinámico con términos suficientemente pequeños en valor numérico.

Según Espinoza [14] en un sistema estructuralmente estable, cuando un parámetro se hace variar, el retrato topológico varía poco si el parámetro varía poco, pero puede suceder que para ciertos valores del parámetro una nueva solución aparezca y la solución no conserve las mismas características del retrato de fase original cuando el parámetro continúa variando.

Anota Khalil [24] que los puntos nodo, foco y ensilladura son estructuralmente estables porque mantienen su comportamiento cualitativo frente a perturbaciones infinitesimalmente pequeñas, mientras que el centro no lo es. La diferencia entre ambos casos es debida a la ubicación de los valores propios de

$A(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0}$  que están sobre el eje imaginario y son vulnerables a perturbaciones. Complementa San Martin Moreno et al [39] que cuando  $A$  no tiene valores propios nulos o imaginarios puros y si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  tal que  $\Re(\lambda) \neq 0$ , bien sea positiva o negativa, una pequeña perturbación de  $\lambda$  seguirá conservando el signo y las características del retrato de fase. Si  $\Re(\lambda) = 0$ , es decir  $\lambda = j\omega$ , las soluciones del sistema son oscilantes y de amplitud constante y aquí una pequeña perturbación cambiará la  $\Re(\lambda) = 0$  a  $\Re(\lambda) = \varepsilon \neq 0$ , y la solución crecerá o decrecerá exponencialmente con el tiempo bien sea para  $\varepsilon > 0$  o  $\varepsilon < 0$  respectivamente generando inestabilidad.

Cuando en un sistema dinámico se varía uno o más parámetros y este sufre cambios cualitativos en el retrato de fase, este concepto es una bifurcación y se define a continuación.

## 2.17 BIFURCACIONES

Define Pagano [22] que son los cambios cualitativos en las características de un sistema dinámico al variar uno o más parámetros del sistema. Estos cambios se pueden apreciar al variar la cantidad de PE o en la estabilidad de éstos o en la aparición de órbitas cerradas, cambiando el retrato de fase del sistema dinámico en su estructura topológica cuando uno o más parámetros varían. El valor de un parámetro para el cual ocurre una bifurcación es llamado valor de bifurcación. Las bifurcaciones pueden ser locales o globales; se llama bifurcación local si está relacionada con un cambio cualitativo en una vecindad de un PE. Las bifurcaciones que están relacionadas únicamente con PE se llaman estacionarias, pero si involucran tanto a PE como ciclos límite se llaman bifurcaciones Hopf.

La teoría de bifurcaciones permite analizar los atractores de un sistema no lineal determinando las situaciones en que existe pérdida de estabilidad causada al variar un conjunto de parámetros determinado. La aplicación de la teoría de las bifurcaciones permite determinar qué parámetro es sensible en el sistema en lo referente a la estabilidad.

El estudio de las bifurcaciones está estrechamente relacionado con el estudio de la estabilidad estructural del sistema dinámico.

Si en vecindad de un PE del sistema (4) existe un valor de bifurcación  $\mu$  este se representa por:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{12}$$

### 2.17.1 Bifurcaciones típicas en sistemas de dos dimensiones

San Martín Moreno et al [39] afirman que existen diferentes tipos de bifurcaciones conocidas para los sistemas de dos dimensiones que se pueden identificar mediante ciertas configuraciones. En general en dos dimensiones se definen las siguientes tres formas normales en función del parámetro de bifurcación  $\mu$ .

#### Bifurcación nodo-silla

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = \mu - x_2^2 \end{cases} \quad (13)$$

#### Bifurcación Transcrítica

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = \mu x_2 - x_2^2 \end{cases} \quad (14)$$

#### Bifurcación en horca

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = \mu x_2 - x_2^3 \end{cases} \quad (15)$$

Las bifurcaciones anteriores también se dan para  $\mu = 0$ . Así los sistemas anteriores en el caso  $\mu = 0$ , se pueden escribir como:

#### Bifurcación nodo-silla

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

#### Bifurcación Transcrítica

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

#### Bifurcación en horca

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2^3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Todas tienen un valor propio  $\lambda_1 \neq 0$  y otro  $\lambda_2 = 0$ .

Las formas normales de puntos no hiperbólicos para el sistema dado por (12) ocurren en el punto  $(x, \mu) = (x_0, \mu_0)$  siempre que:

$$\dot{x} = f(x_0, \mu_0) = 0 \quad (19)$$

y existen  $\lambda_i, \lambda_k$  valores propios de  $A$ , tal que

$$\lambda_i \in \sigma_c(A) \text{ y } \lambda_k \in \sigma_s(A) \text{ para todo } k \neq i \quad (20)$$

donde  $\sigma_c(A)$  es el conjunto de valores propios con parte real nula y  $\sigma_s(A)$  es el conjunto de valores propios con parte real negativa.

El sistema (19) asegura que la solución encontrada es un PE del sistema bidimensional y (20) asegura que el PE es no hiperbólico.

Según Pagano [22] estas condiciones son necesarias en sistemas con bifurcaciones pero no son suficientes y dan origen al siguiente teorema.

### **2.17.2 Teorema: condición necesaria para una bifurcación**

Según San Martín Moreno et al [39] dado un sistema dinámico no lineal  $\dot{x} = f(x, \mu)$  de dos dimensiones en el cual se varía un solo parámetro  $\mu$  y  $x$  es el vector de estados y el sistema tiene un valor de bifurcación en  $\mu_0$ , entonces la matriz  $A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$  tiene al menos un valor propio cuya parte real es nula y el resto de valores propios tiene parte real diferente de cero.

El anterior teorema tiene un resultado interesante a partir de su forma contrarrecíproca, que se puede enunciar como:

Si la matriz  $A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$  de un sistema dinámico no lineal  $\dot{x} = f(x, \mu)$  de dos dimensiones no tiene valores propios cuya parte real sea nula entonces el sistema no tiene un valor de bifurcación.

A continuación se desarrolla el concepto de caos que es una noción importante en la estabilidad de sistemas no lineales.

## **2.18 CAOS**

El caos en un sistema dinámico se caracteriza porque las trayectorias no se ajustan a un punto fijo u órbita periódica o cuasi periódica cuando  $t \rightarrow \infty$ , sino que comienzan cerca del PE y se separan de éste en forma exponencial mostrando un comportamiento impredecible por lo que toda perturbación infinitesimal sobre la trayectoria con el tiempo tiende a aumentar sin límite, razón por la cual es imposible realizar predicciones a largo plazo. Éste fenómeno se presenta solamente en sistemas no lineales.

Un sistema caótico manifiesta simultáneamente comportamientos de sistemas estables e inestables. Por el lado estable, existe un atractor por el que las trayectorias del sistema se ven atraídas, sin embargo por el lado inestable, existen trayectorias forzadas a alejarse de éste. El resultado es que el sistema permanece en una región de su espacio de estados, pero sin tender a un atractor fijo.

Dice Duarte [12] que existen algunos sistemas no lineales en los que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales desencadenan comportamientos muy diferentes; tales sistemas se denominan caóticos. Una de las principales características de un sistema caótico es la de ser sensible a las condiciones iniciales, lo que significa que dos puntos infinitesimalmente cercanos pueden moverse por trayectorias muy diferentes en su espacio de estado. La sensibilidad a las condiciones iniciales está relacionada con los exponentes de Lyapunov, que son una medida de la distancia de separación entre dos trayectorias infinitesimalmente cercanas.

En 1996 Gottlib concluyó que el sistema autónomo más simple que presenta caos debe ser de orden tres llamado sistema caótico de tirón y es también mencionado por Loaiza Ramírez [28] y con base en esto concluye Peña [35] que el caos no se presenta en sistemas continuos y autónomos con una o dos variables de estado.

Otro concepto importante es determinar si el estado  $x(t)$  preserva la condición de estar o no acotado ante una entrada acotada  $u(t)$ . Lo anterior se estudia con el concepto de estabilidad entrada estado.

## 2.19 ESTABILIDAD ENTRADA-ESTADO (ISS)

Define Khalil [24] si  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ ,  $E_u = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\| < r_u\}$ , tal que  $x = \mathbf{0} \in D$  y  $u \in E_u$  donde  $u$  es una función acotada y continua a tramos para todo  $t \in [0, \infty)$  y representa las señales externas que pueden ser perturbaciones o de control.  $f: [0, \infty) \times D \times E_u \rightarrow \mathbb{R}^n$ , una función continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  y  $u$ .

El sistema con entrada  $u$ , representado por:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (21)$$

Se dice que es localmente estable entrada estado si existe una función  $\beta$  de clase  $KL$  y una función  $\gamma$  de clase  $K$  y constantes positivas  $k_1, k_2$  tales que para cualquier estado inicial  $x(t_0)$  se cumpla que

$$\|x(t_0)\| < k_1 \quad (22)$$

y para cualquier entrada  $u(t)$  se cumpla

$$\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\| < k_2 \quad (23)$$

La solución  $x(t)$  existe para todo  $t \geq t_0$  y satisface

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right) \quad (24)$$

La desigualdad (24) garantiza que para una entrada acotada  $u(t)$  el estado  $x(t)$  estará acotado.

Cuando  $D = \mathbb{R}^n$ ,  $E_u = \mathbb{R}^m$  y la desigualdad (24) se satisface para cualquier estado inicial  $x(t_0)$  y cualquier entrada acotada  $u(t)$ , simplemente se dirá que el sistema es estable entrada estado, más aún cuando  $t$  aumenta el estado  $x(t)$  va a estar acotado y si además  $u(t)$  converge a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  también lo hace  $x(t)$ .

El siguiente teorema presenta las condiciones que se deben revisar en un sistema para determinar si es ISS ante una entrada acotada.

### 2.19.1 Teorema: condición suficiente para la estabilidad entrada-estado

Define Khalil [24] si  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ ,  $E_u = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\| < r_u\}$ ,  $f: [0, \infty) \times D \times E_u \rightarrow \mathbb{R}^n$ , una función continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  y  $u$ .

Sea  $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ , una función continuamente diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (25)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|) \quad \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0 \quad (26)$$

$\forall (t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times E_u$  donde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho$  son funciones de clase  $K$  entonces (21) es localmente estable entrada-estado (ISS).

## 2.20 CONJUNTOS INVARIANTES

### 2.20.1 Conjunto Invariante con respecto a $\dot{x} = f(x)$

Define Khalil [24] que un conjunto  $M$  es un conjunto invariante con respecto a  $\dot{x} = f(x)$  si  $x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Esto es, si una solución pertenece a  $M$  en algún instante  $t$ , entonces pertenece a  $M$  en todo tiempo pasado y futuro.

### 2.20.2 Conjunto Invariante positivo con respecto a $\dot{x} = f(x)$

Define Khalil [24] que un conjunto  $M$  es un conjunto invariante positivo si  $x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M$  para  $t \geq 0$ . Esto es, si una solución pertenece a  $M$  en algún instante  $t$ , entonces pertenece a  $M$  en todo futuro.

El PE y el ciclo límite son conjuntos invariantes porque toda solución que comience sobre ellos se queda allí para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

El conjunto  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) \leq 0$ . Para todo  $x \in \Omega$  es un conjunto invariante positivo.

El siguiente teorema tipo Lyapunov permite probar que un PE es asintóticamente estable mediante una función continuamente diferenciable que verifica ciertas condiciones en un conjunto compacto.

## 2.21 TEOREMA: PRINCIPIO DE INVARIANCIA DE LA SALLE

Sea  $\Omega \subset D$  un conjunto compacto que es invariante positivo con respecto a  $\dot{x} = f(x)$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ . Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos de  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) = 0$ . Sea  $M$  el mayor conjunto invariante en  $E$  entonces toda solución que comienza en  $\Omega$  tiende a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.22 GLOSARIO DE TÉRMINOS

**Algoritmo genético simple.** Se inspiran en la evolución biológica y su base genético-molecular. Estos algoritmos hacen evolucionar una población de individuos sometiéndola a acciones aleatorias.

**Atractor.** A partir de un estado inicial el sistema evoluciona a través de una única trayectoria y después de un cierto periodo la trayectoria tiende hacia un punto o conjunto llamado atractor.

**Control de nivel promediante.** El objetivo es estabilizar el caudal de entrada o salida en un recipiente, permitiendo que el nivel varíe dentro de cierto rango alrededor del punto de consigna, aquí lo importante es cerrar el balance de materia a mediano o largo plazo, es decir que el estado estacionario se consigue al cabo de cierto tiempo.

**Control de nivel óptimo.** Técnica matemática usada para resolver problemas de optimización en sistemas que evolucionan en el tiempo y que pueden estar influenciados por perturbaciones. La formulación de un problema de control óptimo requiere en general definir el modelo matemático del sistema controlado, especificar el criterio de optimalidad, especificar las condiciones de contorno para el estado, describir las restricciones sobre el estado y los controles y describir cuales variables del problema están libres.

**Control predictivo.** El control predictivo tiene como objetivo resolver de forma efectiva, problemas de control y automatización de procesos industriales que se caractericen por presentar un comportamiento dinámico complicado, multivariable e inestable. La estrategia de control en que se basa este tipo de control, utiliza el modelo matemático del proceso a controlar para predecir el comportamiento futuro de dicho sistema, y en base a este comportamiento futuro puede predecir la señal de control futura.

**Control programado.** Dispositivo de control electrónico basado en microprocesadores o plc, diseñado para el control en tiempo real de procesos secuenciales.

**Estrictamente creciente.**  $f$  es estrictamente creciente si  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$  y  $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$ .

**Homeomorfismo.** Aplicación continua y con inversa continua, definida en una vecindad  $V(x_o, \delta)$ , tal que  $V(x_o, \delta) \subset \mathbb{R}^2$  donde  $h: V(x_o, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Métrica.** Es una función real del tipo  $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica las siguientes propiedades para  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  a)  $d(x, y) \geq 0$  y  $d(x, y) = 0$  si  $x = y$  b)  $d(x, y) = d(y, x)$  c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

**Métrica inducida.** Es la métrica asociada a un producto interno. Para el caso de  $\mathbb{R}^n$  la métrica inducida es  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

**Parámetro de bifurcación.** Es el valor del parámetro que determina la bifurcación dentro de un sistema.

**Redes neuronales.** Es un modelo computacional con un conjunto de propiedades específicas, como son la habilidad de adaptarse o aprender, generalizar u organizar la información, todo ello basado en un procesamiento eminentemente paralelo.

**Región conexa.** Es una región en la cual cualquier par de puntos en ella se pueden conectar por un pedazo de línea continua y la cual debe quedar incluida en el conjunto.

**Región simplemente conexa.** Una región simplemente conexa  $U$ , del plano  $xy$  es una región conexa tal que toda curva cerrada simple en  $U$  encierra solamente puntos pertenecientes a  $U$ . Intuitivamente es una región que no tiene hoyos y no consta de partes separadas.

**Retrato de fase.** También llamado plano de fase, es la familia de todas las trayectorias o curvas solución de un sistema en dos dimensiones.

**Retrato topológico.** Naturaleza de las singularidades y de los sectores que las rodean, existencia de ciclos límites, bifurcaciones, tiempo de escape finito, etc.

**Sistema estacionario.** Estado de una variable cuando los cambios experimentados durante un cierto periodo de tiempo están comprendidos dentro de unos límites muy pequeños.

**Solución periódica.** Un sistema tiene una solución periódica, si se cumple que:  $x(t + T) = x(t)$ ,  $t > 0$ , para algún  $T > 0$ .

**Suma directa.** Sea  $U, W$  dos sub espacios la suma directa  $\oplus$  se define  $U \oplus W = \{x | x = x_1 + x_2 \text{ con } x_1 \in U \wedge x_2 \in W \text{ unicos para cada } x\}$ .

**Trayectoria.** Es la representación grafica de una curva suave  $\varphi(x, t)$ , que es solución del sistema  $\dot{x} = f(x)$ .

**Vecindad  $V(t_0, \delta)$ .** La vecindad con centro en  $x_0$  y radio  $\delta$  representa un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  se denota y define por:

$$V(x_0, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| \leq \delta; \delta > 0\}$$

### Símbolos

$\oplus$ : suma directa de subespacios.

$V(t_0, \delta)$ : Vecindad.

$\Re(\lambda)$ : parte real del complejo  $\lambda$ .

$\mu$ : parámetro de bifurcación.

$L$ : constante de Lipschitz.

$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = Jf(x)$ : matriz Jacobiana de la función  $f$

### Siglas.

PE: punto de equilibrio.

PEAE: punto de equilibrio asintóticamente estable

ISS: input to state stability, estabilidad entrada-estado.

## 2.23 RESUMEN DEL CAPITULO

En este capítulo se presentaron algunas definiciones y propiedades fundamentales de sistemas no lineales, en particular aquellas que están relacionadas con fenómenos como existencia de puntos de equilibrio y su clasificación, ciclos límite, tiempo de escape finito, puntos de bifurcación y caos. Se definió la función de Lyapunov y su dominio la cual sirve para determinar la estabilidad entrada estado. Se definieron conceptos como estabilidad, estabilidad entrada-estado, conjunto invariante, conjunto invariante positivo y principio de invariancia de Lasalle.

# Capítulo 3. Resultados teóricos y análisis

---

## 3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describirá el sistema dinámico de segundo orden para el control de nivel en un tanque de almacenamiento con flujo de entrada manipulable y flujo de salida constante. Sobre este modelo se estudiarán las características no lineales como punto de equilibrio, su naturaleza y estabilidad, el cumplimiento de la condición local de Lipschitz, el hallazgo de una función de Lyapunov y su dominio, el análisis de presencia de ciclos límite, de bifurcaciones, de caos y de tiempo de escape finito. Se analizará si el sistema es estable según el criterio estabilidad entrada estado.

## 3.2 SISTEMA DE CONTROL DE NIVEL CON ALGORITMO EXPONENCIAL POLINÓMICO

### 3.2.1 Ecuaciones matemáticas

En el anexo B se presenta la deducción del modelo matemático del problema descrito en 1.1, el cual se representa por el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \dot{f}_i = \frac{K_v}{\tau_v F} m(t) - \frac{1}{\tau_v} f_i \\ \dot{h} = \frac{F}{V} (f_i - f_0) \end{cases} \quad (1)$$

Donde  $m(t)$  es la ley de control. El sistema (1) tiene por estados el nivel  $h$  y el flujo de entrada  $f_i$  y sus parámetros son:

De *diseño y operación* entre los que están el flujo de salida constante  $f_0$ , el volumen de recipiente  $V$ , el flujo máximo  $F$  y el punto de referencia  $h_r$ .

De *instrumentación* entre los que están la ganancia de la válvula  $K_v$  y la constante de tiempo del actuador de la válvula  $\tau_v$ .

### 3.2.2 Características de la ley de control dada por $m = K_S \epsilon 25^{|\epsilon|\eta}$

La ganancia de estado estacionario del controlador con ley de control dada por el algoritmo

$$m(t) = K_S \epsilon 25^{|\epsilon|\eta} \quad (2)$$

Es

$$G_c = \frac{dm}{d\epsilon} \quad (3)$$

Así, derivando (2) se llega a:

$$G_c = K_S 25^{|\epsilon|\eta} (1 + |\epsilon|\eta \ln 25) \quad (4)$$

La función exponencial polinómica, en la variable  $\epsilon$ , definida por (2) es una función:

*Continua* en su dominio y monótona creciente debido a que la derivada siempre es positiva en el dominio, como así lo garantiza (4).

*Diferenciable* debido a que nunca  $\epsilon$  es nulo porque se realiza control promediante, garantizando la diferenciabilidad del valor absoluto y la función (4) que define la derivada es continua en su dominio, haciendo que la curva definida por (2) sea suave.

### 3.2.3 Características de la ecuación diferencial que describe la válvula

En el anexo B se deduce el modelo matemático de la válvula el cual está dado por:

$$\dot{f}_i = \frac{K_S K_v}{\tau_v F} \epsilon 25^{0.02|\epsilon|\eta} - \frac{1}{\tau_v} f_i \quad (5)$$

La ecuación definida en (5) es una ecuación diferencial lineal de primer orden, en  $f_i$ , función continuamente diferenciable en el tiempo.

A continuación se presentan los análisis de las características no lineales del sistema (1) en los que se deduce la existencia de un único punto de equilibrio, su naturaleza y estabilidad. Se comprueba que el sistema cumple la condición local de Lipschitz y por lo tanto se pueden aplicar los diferentes teoremas tipo Lyapunov que argumentan los respectivos estudios de las características no lineales del problema. Se logra vencer una de las grandes dificultades en el método directo de Lyapunov, que es la de encontrar una función de Lyapunov que servirá para aplicar este método el método directo y justificar que el sistema es

estable según el criterio estabilidad entrada estado. Se justifica la no existencia de ciclos límite, bifurcaciones, caos y tiempo de escape finito.

### 3.3 ANÁLISIS DE LAS CARACTERÍSTICAS NO LINEALES DEL SISTEMA DINÁMICO

Si en (1) se denota:

$$\alpha = \frac{K_S K_v}{\tau_v F}, \beta = \frac{1}{\tau_v}, \gamma = \frac{F}{V}, \delta = 0.02\eta, \epsilon = h_r - h \quad (6)$$

entonces reemplazando en (1) se tiene

$$\begin{cases} \dot{f}_i = \alpha \epsilon 25^{\delta|\epsilon|} - \beta f_i \\ \dot{h} = \gamma(f_i - f_0) \end{cases} \quad (7)$$

#### 3.3.1 Punto de equilibrio

A continuación se encuentra el punto de equilibrio del sistema y se prueba analítica y geoméricamente que es único.

En el PE se cumple

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_i \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \epsilon 25^{\delta|\epsilon|} - \beta f_i \\ \gamma(f_i - f_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

de (8) se llega a

$$\begin{cases} \alpha \epsilon 25^{\delta|\epsilon|} = \beta f_i \\ f_i = f_0 \end{cases} \quad (9)$$

Combinando (8) y (9) se tiene

$$\alpha \epsilon 25^{\delta|\epsilon|} = \beta f_0 \quad (10)$$

(10) no tiene una solución analítica pero ésta se puede estimar si se usa una serie de potencia para  $25^{\delta|\epsilon|}$ .

Usando el hecho de que

$$25^{\delta|\epsilon|} = e^{\delta|\epsilon|\ln(25)} \quad (11)$$

La representación en serie de potencia centrada en  $x = a$  para la función exponencial es:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \quad (12)$$

Interesa expresar la serie de potencias para (11) centrada en  $a = h_r$  usando (12).

$$25^{\delta|\epsilon|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta\ln(25)|\epsilon| - h_r)^n}{n!} \quad (13)$$

Sustituyendo (13) en (10)

$$\alpha\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta\ln(25)|\epsilon| - h_r)^n}{n!} = \beta f_0 \quad (14)$$

Se expande (14) hasta el tercer término

$$\alpha\epsilon \left[ 1 + (\delta\ln(25)|\epsilon| - h_r) + \frac{(\delta\ln(25)|\epsilon| - h_r)^2}{2} \right] = \beta f_0 \quad (15)$$

Operando en (15) y simplificando se llega a:

$$a\epsilon^3 + b\epsilon|\epsilon| + c\epsilon + d = 0 \quad (16)$$

Donde

$$a = \frac{\alpha}{2} \delta^2 (\ln 25)^2 \quad (17)$$

$$b = \alpha \delta (\ln 25) (1 - h_r) \quad (18)$$

$$c = \alpha (1 - h_r) + \frac{\alpha}{2} h_r^2 \quad (19)$$

$$d = -\beta f_0 \quad (20)$$

La expansión hasta el tercer término según (15) aporta dos elementos fundamentales en este desarrollo. El primero es que se genera una ecuación de tercer grado, que describe con más precisión el problema, que una de segundo grado, que pudiera obtenerse con una expansión hasta el segundo término. El otro elemento importante es que existen algoritmos para conocer la solución analítica de una ecuación de tercer grado, relativamente menos complejos que otros algoritmos que resuelven analíticamente ecuaciones de grados superiores.

Para  $\epsilon > 0$ , la medida esta por debajo de la referencia, o sea que exista un error por defecto, en tal caso se tiene

$$a\epsilon^3 + b\epsilon^2 + c\epsilon + d = 0; a \neq 0 \quad (21)$$

Una expresión equivalente es:

$$\epsilon^3 + \frac{b}{a}\epsilon^2 + \frac{c}{a}\epsilon + \frac{d}{a} = 0 \quad (22)$$

Si se hace lo que sugieren Bronshtein y Semendiaev [5], se tiene que

$$\epsilon = y - \frac{b}{3a} \quad (23)$$

Se llega a

$$y^3 + py + q = 0 \quad (24)$$

donde

$$3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad (25)$$

$$2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \quad (26)$$

y así:

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \quad (27)$$

Para que la ecuación (27) tenga única solución se debe cumplir que:

$$q^2 + p^3 > 0 \quad (28)$$

Un análisis similar al anterior se realiza para  $\epsilon < 0$ , es decir que la medida esté por encima de la referencia, o sea que exista un error por exceso.

Reemplazando la única solución real de (24) en (23) se puede conocer una estimación de  $\epsilon$ , tanto por exceso como por defecto.

Se denota a esta única solución por

$$\epsilon = \epsilon_0 \quad (29)$$

Por consiguiente las coordenadas del único PE del sistema definido por (8) son:

$$(f_i, \epsilon) = (f_0, \epsilon_0) \quad (30)$$

La existencia de un único PE en forma complementaria también se puede justificar desde un análisis geométrico, el sistema (9) puede escribirse como:

$$\begin{cases} f_i = \frac{\alpha}{\beta} \epsilon 25^{\delta|\epsilon|} \\ f_i = f_0 \end{cases} \quad (31)$$

Geoméricamente en el plano  $f_i - \epsilon$  corresponde con el corte de la curva

$$f_i = \frac{\alpha}{\beta} \epsilon 25^{\delta|\epsilon|} \quad (32)$$

con la recta de pendiente nula

$$f_i = f_0 \quad (33)$$

(32) es monótona creciente y cóncava hacia arriba ya que  $\dot{f}_i > 0$  y  $\ddot{f}_i > 0$  debido a que

$$\dot{f}_i = \frac{\alpha}{\beta} 25^{\delta|\epsilon|} (\delta \text{Ln}(25) |\epsilon| + 1) > 0 \quad (34)$$

y

$$\ddot{f}_i = \frac{\alpha}{\beta} 25^{\delta|\epsilon|} (\delta \text{Ln}(25) \frac{\epsilon}{|\epsilon|}) (1 + \text{Ln}(25) |\epsilon| + 1) > 0 \quad (35)$$

Con (34) se garantiza que  $f_i$  es creciente y con (35) se garantiza que  $f_i$  es cóncava hacia arriba.

Entonces el corte de la curva monótona creciente y cóncava hacia arriba con la recta sería un único punto.

Para simplificar el análisis, se traslada el punto (30) en el plano  $f_i - \epsilon$ , al origen del sistema  $x_1 - x_2$  usando el cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_i - f_0 \\ x_2 &= \epsilon - \epsilon_0 \end{aligned} \quad (36)$$

para que el origen del plano  $x_1 - x_2$  sea el nuevo PE.

Reemplazando (36) en (7) se llega a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 + \epsilon_0) 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|} - \beta(x_1 + f_0) \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_1 \end{cases} \quad (37)$$

Se define la función

$$G(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \alpha(x_2 + \epsilon_0) 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|} - \beta(x_1 + f_0) \\ -\gamma x_1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

El origen  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  es el PE de (38) ya que usando (10) se comprueba que  $G(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

A continuación se demuestra que el sistema definido por (38) cumple la condición de Lipschitz condición que servirá luego para justificar que existe localmente una única solución.

### 3.3.2 Comprobación de la condición local de Lipschitz y cálculo de la constante de Lipschitz

El teorema 2.3.2 del capítulo 2 asegura que si  $G: W \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}$  son continuas en  $W$  entonces  $G$  es localmente Lipschitz en  $x$  sobre  $W$ .

Para el sistema descrito por (38) se define el conjunto  $W$  por:

$$W = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / |x_1| < |\epsilon_0| \wedge |x_2| < \frac{|\epsilon_0|}{2} \right\} \quad (39)$$

donde  $\epsilon_0$  solución de (10) y en tal caso:

$G(x_1, x_2) = (\alpha(x_2 + \epsilon_0)25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} - \beta(x_1 + f_0), -\gamma x_1)$  es una función continua en  $W$ .

Ahora la matriz Jacobiana de la función  $G$ , representada por  $\frac{\partial G(x)}{\partial x}$  es:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} = JG(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\beta & \alpha 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} (\delta \text{Ln}(25)|x_2 + \epsilon_0| + 1) \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Como todas las componentes de  $\frac{\partial G(x)}{\partial x}$  son funciones continuas en  $W$ , por tanto  $\frac{\partial G(x)}{\partial x}$  es continua en  $W$  entonces  $G$  es diferenciable en  $W$  y por lo tanto es continua entonces  $G$  es localmente Lipschitz en  $x = (x_1, x_2)$  sobre  $W$ .

Para calcular el valor de la constante de Lipschitz se recurre al teorema 2.3.3 del capítulo 2 el cual asegura que bajo ciertas hipótesis la cota de  $\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}$  sirve de constante de Lipschitz.

Ya se probó que  $G: W \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\frac{\partial G(x)}{\partial x}$  son funciones continuas en  $W \subset \mathbb{R}^2$  ahora se acotará  $\frac{\partial G(x)}{\partial x}$  aplicando la norma infinita  $\|\cdot\|_\infty$  en (40) (ver anexo A) entonces:

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_\infty = \max\{ |-\beta| + |\alpha 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} (\delta \text{Ln}(25)|x_2 + \epsilon_0| + 1)|; |\gamma| + |0| \} \quad (41)$$

Como los términos  $\beta$ ,  $\alpha 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|}$ ,  $\gamma$  son positivos se puede evaluar el valor absoluto y usando (39) se puede acotar la expresión  $|x_2 + \epsilon_0|$  usando desigualdad triangular así:

$$|x_2 + \epsilon_0| \leq |x_2| + |\epsilon_0| < \frac{|\epsilon_0|}{2} + |\epsilon_0| \Rightarrow |x_2 + \epsilon_0| < \frac{3|\epsilon_0|}{2}$$

Aplicando lo anterior en (41) se llega a:

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\infty} = \text{máx} \left\{ \beta + \alpha 25^{\delta \frac{3}{2} \epsilon_0} \left( \delta \text{Ln}(25) \frac{3|\epsilon_0|}{2} + 1 \right); \gamma \right\} \quad (42)$$

Ya que se debe cumplir que la constante de tiempo del actuador de la válvula,  $\tau_v$ , debe ser menor que el tiempo reset o integral,  $\tau_i$ , pues de no ser así la válvula no tendría ninguna acción oportuna en el sistema automático de control, y como  $\tau_i$  se define como:

$$\tau_i = \frac{V}{F} \quad (43)$$

Se tiene entonces que:

$$\tau_v < \tau_i \quad (44)$$

Donde

$$\frac{1}{\tau_i} < \frac{1}{\tau_v} \quad (45)$$

reemplazando (43) en (45)

$$\frac{F}{V} < \frac{1}{\tau_v} \quad (46)$$

y usando (6)

$$\gamma < \beta \quad (47)$$

Con base en (47) se puede concluir que:

$$\text{máx} \left\{ \beta + \alpha 25^{\delta \frac{3}{2} \epsilon_0} \left( \delta \text{Ln}(25) \frac{3|\epsilon_0|}{2} + 1 \right); \gamma \right\} = \beta + \alpha 25^{\delta \frac{3}{2} \epsilon_0} \left( \delta \text{Ln}(25) \frac{3|\epsilon_0|}{2} + 1 \right) \quad (48)$$

se puede afirmar que

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\infty} = \beta + \alpha 25^{\delta \frac{3}{2} \epsilon_0} \left( \delta \text{Ln}(25) \frac{3|\epsilon_0|}{2} + 1 \right) \quad (49)$$

y por ende el valor de la constante de Lipschitz es:

$$L = \beta + \alpha 25^{\delta \frac{3}{2} \epsilon_0} \left( \delta \text{Ln}(25) \frac{3|\epsilon_0|}{2} + 1 \right) \geq 0 \quad (50)$$

y por lo tanto según 2.3.3 se puede concluir que:

$$\|G(x_1) - G(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$$

### 3.3.3 Análisis de existencia y unicidad de una solución local

Según el teorema 2.4 del capítulo 2, el sistema  $\dot{x} = G(x)$  con condición inicial  $x(t_0) = x_0$  define una función continua a tramos en  $t$  por ser un sistema autónomo y localmente Lipschitz en  $x$  como se mostró en 3.3.2, entonces el sistema tiene una única solución en  $W$ .

### 3.3.4 Naturaleza del punto de equilibrio

A continuación se justifica que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable y que este es del tipo espiral o nodo. Para clasificarlo se requiere calcular la matriz Jacobiana  $A = \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{(x_1, x_2) = (0, 0)}$  y encontrar los valores propios de esta y con base en esto poder clasificarlo de acuerdo a la teoría dada en la sección 2.13.1 y el teorema 2.13.2.

De acuerdo con la ecuación (40) se tiene que:

$$A = \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{(x_1, x_2) = (0, 0)} = \begin{bmatrix} -\beta & \alpha 25^{\delta|\epsilon_0|} (\delta \text{Ln}(25)|\epsilon_0| + 1) \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

El polinomio característico definido por  $A$ , está dado por:

$$p_A(\lambda) = \det[A - \lambda I_2] \quad (52)$$

Donde  $I_2$  representa la matriz identidad de orden 2

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\beta - \lambda & \alpha 25^{\delta|\epsilon_0|} (\delta \text{Ln}(25)|\epsilon_0| + 1) \\ -\gamma & -\lambda \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \beta\lambda + \alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|} (\delta \text{Ln}(25)|\epsilon_0| + 1) \quad (54)$$

Los valores propios de  $A$ , son los ceros del polinomio característico,  $p_A(\lambda)$ .

$$\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|} (\delta \text{Ln}(25)|\epsilon_0| + 1) = 0 \quad (55)$$

Donde

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( -\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|} (\delta \text{Ln}(25)|\epsilon_0| + 1)} \right) \quad (56)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( -\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|} (\delta \text{Ln}(25)|\epsilon_0| + 1)} \right) \quad (57)$$

Para determinar la naturaleza del punto de equilibrio se debe fijar el signo de las partes reales:  $\mathcal{R}_e(\lambda_1)$ ,  $\mathcal{R}_e(\lambda_2)$ , este análisis requiere revisar todas las posibilidades que se pueden presentar:

$\lambda_1, \lambda_2$  son números complejos con parte imaginaria diferente de cero.

En tal caso se debe cumplir que para que  $\lambda_1, \lambda_2$  sean números complejos entonces el discriminante de (57) debe cumplir que:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1) < 0 \quad (58)$$

Donde

$$\mathcal{R}_e(\lambda_1) = \mathcal{R}(\lambda_2) = -\frac{\beta}{2} < 0 \quad (59)$$

Por lo tanto cuando  $\lambda_1, \lambda_2$  son complejos con parte imaginaria diferente de cero y parte real negativa y según clasificación dada en la sección 2.13.1 y el teorema 2.13.2, el punto de equilibrio  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  es un punto asintóticamente estable tipo espiral.

$\lambda_1, \lambda_2$  son números reales (parte imaginaria nula).

En tal caso se debe cumplir que:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1) > 0 \quad (60)$$

Entonces

$$\mathcal{R}(\lambda_1) = \frac{1}{2} \left( -\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1)} \right) < 0 \quad (61)$$

ya que  $\mathcal{R}(\lambda_1)$  es la suma de dos números negativos.

Ahora se demuestra que bajo la condición (60) la  $\mathcal{R}(\lambda_2) < 0$ , es decir que:

$$\mathcal{R}(\lambda_2) = \frac{1}{2} \left( -\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1)} \right) < 0 \quad (62)$$

Se parte inicialmente de:

$$\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1) > 0 \quad (63)$$

Afirmación que es cierta por ser una expresión que incluye sumas y productos de términos positivos.

Multiplicando (63) por  $-4$  se tiene:

$$-4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1) < 0 \quad (64)$$

sumando  $\beta^2$  a ambos lados de (64) se llega:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1) < \beta^2 \quad (65)$$

bajo la condición (60) se llega a:

$$\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1)} < \beta \quad (66)$$

Aplicando propiedades de desigualdades en (66) se puede escribir

$$-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1)} < 0 \quad (67)$$

Multiplicando (67) por  $\frac{1}{2}$  se llega:

$$\frac{1}{2} \left( -\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1)} \right) < 0 \quad (68)$$

Entonces

$$\mathcal{R}(\lambda_2) = \frac{1}{2} \left( -\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1)} \right) < 0 \quad (69)$$

Por lo tanto  $\lambda_1, \lambda_2$  son reales negativos según (61) y (69), el punto de equilibrio  $(x_1, x_2) = (0,0)$  es un punto asintóticamente estable tipo nodo de acuerdo a la clasificación dada en la sección 2.13.1 y el teorema 2.13.2.

En resumen el único PE del sistema no lineal dado por (38), definido por la función  $G: V(x_0, r) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , continuamente diferenciable en la vecindad  $V(x_0, r)$  y cuya matriz jacobiana (51) tiene todos sus valores propios con parte real negativa es local asintóticamente estable tipo espiral o nodo.

Khalil [24] advierte que un sistema es estable si su energía es una función positiva continuamente decreciente hasta que el sistema alcanza su estado de equilibrio. A. M. Lyapunov demostró que otras funciones aparte de la función energía pueden ser usadas para la determinar la estabilidad del punto de equilibrio de un sistema y son llamadas de Lyapunov.

Este método es una herramienta de análisis muy poderosa, pero no existe un método sistemático sencillo para construir o encontrar una función de Lyapunov y en general es complicado encontrarla.

A continuación se presenta una función de Lyapunov para el sistema dinámico de estudio. Se llegó a esta función después de obtener resultados adversos al aplicar las diferentes estrategias sugeridas en la literatura como los métodos: del gradiente variable, de Krasovskii y se optó como último recurso el método de ensayo y error.

### 3.3.5 Función de Lyapunov sobre un dominio que contiene el origen

A continuación se presenta la función de Lyapunov encontrada para el sistema (1) sobre un dominio que contiene el origen. En primer lugar se presenta la función  $V$  definida en un conjunto  $D$ ; en segundo lugar se muestra la grafica de  $V$  y  $D$  para diferentes valores de los parámetros y por último se demuestra que esta función cumple los requerimientos para ser función de Lyapunov.

La literatura concuerda en que encontrar una función de Lyapunov no es un proceso fácil, porque dependiendo del sistema los métodos analíticos que existen para determinarla conllevan procesos matemáticos muy complejos o imposibles de desarrollar. Esta relativa frustración conlleva a que algunas veces se llegue a usar el método de prueba y error para tratar de encontrar la función que justifique la estabilidad de cierto punto de equilibrio en un sistema dinámico. Al emplear este método se escogió como

técnica involucrar términos del sistema dinámico relacionado con el problema y partes de otras funciones que fallaron para ser de Lyapunov, pero que relacionaban expresiones que servirían para demostrar la condición  $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ . La función que se plantea en (70) es el resultado de este largo proceso y representa uno de los mayores aportes de este trabajo.

Sea  $V: D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|}} \quad (70)$$

En el conjunto dominio

$$D = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: \left[ [-2\gamma x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + 2\beta f_0 x_2 - 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} (2\alpha x_2^2 + 2\alpha \epsilon_0 x_2 \pm \delta\gamma \ln 25 x_2 + 2\gamma)] \leq 0 \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 > 0 \right] \vee (0,0) \right\} \quad (71)$$

La Figura 3.1 ilustra una función de Lyapunov para  $\delta=0.033$  y  $\epsilon_0 = 0.5$  sobre un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .

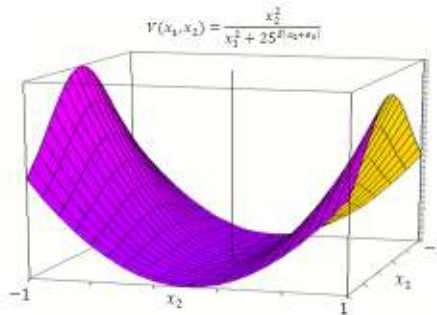


Fig. 3.1 Grafica de la función de Lyapunov asociada al problema

Las Figuras 3.2 y 3.3 muestran la región  $D$  descrita en (71) para diferentes valores de los parámetros y donde se observa que  $D$  puede cubrir el primer cuadrante de  $\mathbb{R}^2$ , manipulando el parámetro  $\alpha$  ubicado en el término  $2\alpha x_2 \epsilon_0 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|}$  del conjunto  $D$ , este término está relacionado con la ganancia del controlador, la ganancia de la válvula, la constante de tiempo del actuador de la válvula y el flujo máximo de salida.

$$D = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: \left[ [-2\gamma x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + 2\beta f_0 x_2 - 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} (2\alpha x_2^2 + 2\alpha \epsilon_0 x_2 \pm \delta\gamma \ln 25 x_2 + 2\gamma)] \leq 0 \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 > 0 \right] \vee (0,0) \right\}$$

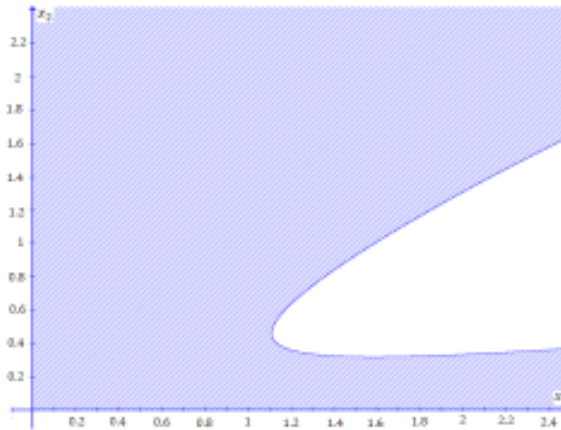


Fig. 3.2 Gráfica del conjunto dominio  $D$  de la función de Lyapunov con  $\alpha = 125$   $\beta = 2$ ;  $\gamma = 0.2$ ;  $\delta = 0.033$ ;  $\epsilon_0 = 0.4$ .

$$D = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: \left[ [-2\gamma x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + 2\beta f_0 x_2 - 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} (2\alpha x_2^2 + 2\alpha\epsilon_0 x_2 \pm \delta\gamma \ln 25 x_2 + 2\gamma)] \leq 0 \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 > 0 \right] \vee (0,0) \right\}$$

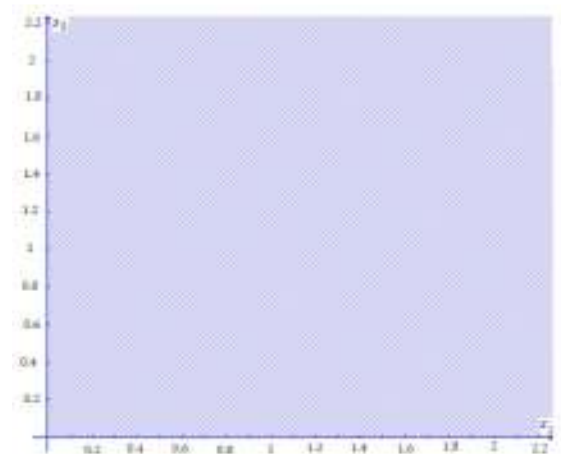


Fig. 3.3 Gráfica del conjunto dominio  $D$  de la función de Lyapunov con  $\alpha = 500$   $\beta = 2$ ;  $\gamma = 0.2$ ;  $\delta = 0.033$ ;  $\epsilon_0 = 0.4$ .

La función presentada en (70) verifica las condiciones de la definición 2.6 del capítulo 2. A continuación se justifica en primer lugar que  $V(0,0) = 0$ ; en segundo lugar que

$$V(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \in D - \{(0,0)\} \text{ y en tercer lugar que } \dot{V}(x_1, x_2) \leq 0.$$

Primero: es claro que  $V(0,0) = 0$ .

Segundo:  $V(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \in D - \{(0,0)\}$  porque sobre este conjunto sólo existen términos positivos en  $V$ . Note que en puntos de la forma  $(x_1, 0)$ , se verifica  $V(x_1, x_2) = 0$  (lo que llevaría a pensar que la función es semidefinida positiva) pero  $(x_1, 0) \notin D - \{(0,0)\}$  ya que en  $D - \{(0,0)\}$  se cumple que  $x_2 > 0$  (es decir, la función es definida positiva sobre  $D - \{(0,0)\}$  como lo exige el teorema)

No es necesario considerar en el conjunto  $D$  los puntos del tipo  $(x_1, 0)$  porque, como se mostrará a continuación, estos siempre llevan a una contradicción en el modelo matemático del sistema:

Supóngase que Si  $x_1 \neq 0$  y  $x_2 = 0$

Como  $x_2 = 0$  implica  $\dot{x}_2 = 0$  que reemplazado en la segunda ecuación de (1) lleva a que  $\dot{x}_2 = -\gamma x_1 = 0$ ; como  $\gamma \neq 0$  implica que  $x_1 = 0$  lo que contradice el supuesto inicial de que  $x_1 \neq 0$ .

Desde otro punto de vista: como  $x_1 \neq 0$  y  $x_1 = f_i - f_0$  se tiene que  $f_i \neq f_0$ . Como  $x_2 = 0$  y dado que  $x_2 = \epsilon - \epsilon_0$ , entonces  $\epsilon = \epsilon_0$ . Ahora, puesto que  $\epsilon = h_r - h$  entonces, con la condición anterior, queda que  $h = h_r - \epsilon_0$ , pero como  $h_r$  y  $\epsilon_0$  son constantes, lo que implica que  $h$  es constante. En conclusión, se caería en puntos donde el flujo de entrada es distinto al de salida y el nivel permanece constante...evento que no es posible físicamente ya que, como la fracción flujo de entrada es diferente a la fracción flujo de salida, el nivel debe estar variando lo que no ocurre si  $h$  es constante.

Tercero:  $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$  ya que usando (1) del capítulo 2 para encontrar la derivada de  $V$  en (70) se obtiene:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})2x_2\dot{x}_2 - x_2^2(2x_1\dot{x}_1 + Ln25 \frac{\delta(x_2 + \epsilon_0)}{|x_2 + \epsilon_0|} \dot{x}_2 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \quad (72)$$

Remplazando en (72) los valores de  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  dados en (37) se llega a:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) = & \frac{-(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})2x_2\gamma x_1 - x_2^2(2x_1)[\alpha(x_2 + \epsilon_0)25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} - \beta(x_1 + f_0)]}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \\ & \mp \frac{x_2^2 \delta \ln 25 (\gamma x_1) 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|}}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \end{aligned} \quad (73)$$

Reorganizando términos en (73)

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{-2\gamma x_1^3 x_2 + 2\beta x_1 x_2^2 (x_1 + f_0) - 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} (2\alpha x_1 x_2^2 (x_2 + \epsilon_0) \pm \delta \gamma \ln 25 x_1 x_2^2 + 2\gamma x_1 x_2)}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \quad (74)$$

Sacando factor común  $x_1 x_2$  y organizando términos

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1 x_2 \frac{-2\gamma x_1^2 + 2\beta x_2(x_1 + f_0) - 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|}(2\alpha x_2(x_2 + \epsilon_0) \pm \delta\gamma \ln 25 x_2 + 2\gamma)}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \quad (75)$$

Multiplicando y organizando términos se tiene que

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1 x_2 \frac{(-2\gamma x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + 2\beta f_0 x_2) - 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|}(2\alpha x_2^2 + 2\alpha \epsilon_0 x_2 \pm \delta\gamma \ln(25)x_2 + 2\gamma)}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \quad (76)$$

Según (76) se puede afirmar que  $V$  es una función continuamente diferenciable sobre el conjunto  $D$  definido en (71). Usando (71) se puede afirmar que:

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0 \quad (77)$$

Según la definición 2.6 del capítulo 2, la función definida en (70) sobre el conjunto  $D$  definido en (71) es una función de Lyapunov y  $D$  es una aproximación a la región de trabajo.

### 3.3.6 Región de trabajo

La región de trabajo es el conjunto de valores donde las variables del modelo pueden tomar valores de acuerdo con una realidad física que describa un fenómeno de un sistema físico, en el caso del control de nivel las variables están limitadas a una región del plano  $f_i - h$  que se define por el conjunto  $R_T$ :

$$R_T = \{(f_i, h) \in \mathbb{R}^2 \mid (f_{\min} \leq f_i \leq f_{\max}) \wedge (h_{\min} \leq h \leq h_{\max})\}$$

donde:

$$f_{\min}: \text{Flujo mínimo} \frac{\left[\frac{m^3}{\min}\right]}{\left[\frac{m^3}{\min}\right]}$$

$$f_{\max}: \text{Flujo máximo} \frac{\left[\frac{m^3}{\min}\right]}{\left[\frac{m^3}{\min}\right]}$$

$$h_{\min}: \text{Nivel mínimo permisible para la seguridad del proceso} \frac{[m]}{[m]}$$

$$h_{\max}: \text{Nivel máximo} \frac{[m]}{[m]}$$

También se puede describir en el plano  $x_1 - x_2$

$$R_T = \{(x_1, x_2) \in D \mid (f_{\min} - f_0 \leq x_1 \leq f_{\max} - f_0) \wedge (h_r - h_{\min} - \epsilon_0 \leq x_2 \leq h_r - h_{\max} - \epsilon_0)\}$$

A continuación se justifica que el único punto de equilibrio del sistema (37) es local asintóticamente estable.

### 3.3.7 Verificación de la característica local asintóticamente estable para el punto de equilibrio

Según el método directo de Lyapunov la función de Lyapunov encontrada justifica que el único punto de equilibrio es local asintóticamente estable, ya que cumple con todas las hipótesis del corolario del teorema 2.13.5 del capítulo 2. Como es posible ubicar la región de trabajo  $R_T$  como un subconjunto de  $D$ , por lo afirmado en 3.3.5 entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable para cualquier punto de esta región.

A continuación se justifica que en el sistema definido en (38) no se presentan líneas cerradas periódicas en su retrato de fase.

### 3.3.8 Análisis de existencia de ciclos límite

Según el criterio negativo de Bendixson descrito en 2.14.1 del capítulo 2, se puede afirmar que sobre el conjunto simple conexo  $W$  definido en (39), no hay orbitas periódicas ya que la divergencia es negativa.

Al calcular en (40) la divergencia se tiene que  $\nabla \cdot G(x_1, x_2) = \text{traza}[JG(x_1, x_2)]$  y esta no es idénticamente cero y no presenta cambio de signo sobre el conjunto  $W$ , porque

$$\frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \text{traza}[JG(x_1, x_2)] = -\beta = -\frac{1}{\tau_v} < 0$$

Entonces el sistema dinámico (1) no presenta ciclos límite.

A continuación se justifica que el sistema definido en (38) no tiene cambios cualitativos en su retrato de fase al variar uno de sus parámetros.

### 3.3.9 Análisis de presencia de bifurcaciones en el sistema

Para respaldar el hecho de que para diferentes valores de los parámetros del sistema (8), el punto de equilibrio (30) conserva su naturaleza como espiral o nodo estable y por consiguiente no hay presencia de puntos de bifurcación; se mostrará que la matriz Jacobiana del sistema (38) no cumple con la relación que existe entre los puntos de bifurcación y los sistemas dinámicos de dos dimensiones donde la matriz Jacobiana  $A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$  tiene un valor propio cuya parte real sea nula y el resto de valores propios tiene parte real diferente de cero, San Martín Moreno et al [39].

La matriz Jacobina del sistema (38) tiene dos valores propios determinados por:  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|} (\delta \text{Ln}(25)|\epsilon_0| + 1)} \right)$  y deducidos en (56) y(57) donde se presentan dos casos según (58) y (60).

Si ocurre  $\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1) < 0$  (58) entonces  $\mathcal{R}_e(\lambda_{1,2}) = -\frac{\beta}{2} \neq 0$ , ya que  $\beta \neq 0$ .

Si ocurre  $\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1) > 0$  (60) entonces

$$\mathcal{R}(\lambda_{1,2}) = \frac{1}{2} \left( -\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma 25^{\delta|\epsilon_0|}(\delta Ln(25)|\epsilon_0| + 1)} \right) \neq 0 \text{ por (61) y (69).}$$

Es decir que en ningún caso la matriz  $A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$  del sistema dinámico (38) tiene valores propios cuya parte real sea nula entonces el sistema no tiene un valor de bifurcación según el teorema 2.17.3 del capítulo 2 en su forma contra recíproca. Consecuentemente el sistema (1) no se puede emparejar con ninguna bifurcación típica conocida en dos dimensiones y presentadas en 2.17.2.

Los puntos estables de un sistema dinámico dado son los valores de la variable que son constantes en el tiempo. Algunos de estos puntos son atractores, lo que significa que si el sistema inicia en un estado cercano este convergerá hacia el punto estable. Algunos sistemas dinámicos no lineales suelen comportarse de forma complicada y completamente impredecible ante pequeñas variaciones en las condiciones iniciales del sistema, este tipo de sistemas se llaman caóticos, a continuación se analiza si el sistema (1) es sensible a los pequeños cambios en las condiciones iniciales y que no tiene trayectorias que comiencen cerca del punto de equilibrio y se separa de este en forma impredecible.

### 3.3.10 Análisis de caos

Afirma Peña [35] que el caos es un modo de comportamiento para los sistemas restringidos no lineales con más de dos variables de estado. En esta misma línea otros autores como Lorenzo [29] y Loaiza [28] sostienen que el sistema autónomo más simple que presenta caos debe ser de orden 3, con base en esto el sistema dinámico definido por (1) es de dos estados, es decir de orden 2 y según los postulados anteriores no presenta caos.

Hasta ahora se ha analizado el sistema sin la influencia de una señal externa, sin embargo interesa examinar el comportamiento del mismo en lo relacionado con la estabilidad, cuando el sistema presenta una señal acotada a la entrada  $u(t)$  y se quiere determinar si el estado  $x(t)$  permanece acotado. Este es el concepto de estabilidad entrada estado que a continuación se analiza.

### 3.3.11 Estabilidad entrada-estado

Se introduce un flujo perturbador  $F_p$ , al sistema (1), el nuevo sistema quedaría:

$$\frac{dh(t)}{dt} = F_i - F_o + F_p \quad (78)$$

con el objetivo de hacer que la ecuación (78) sea adimensional, se define la fracción del flujo perturbador  $F_p$  por:

$$f_p = \frac{F_p}{F} \quad (79)$$

sustituyendo (79) y las fracciones de flujo de entrada y salida (ver anexo B ecuaciones (19) y (20)) en (78) se llega a  $\dot{h} = \frac{F}{V}(f_i - f_o + f_p)$

Con lo que el sistema bajo la influencia de un flujo perturbador quedaría:  $m(t) = K_S \epsilon 25^{0.02|\epsilon| \eta}$

$$\begin{cases} \dot{f}_i = \frac{K_v}{\tau_v F} m(t) - \frac{1}{\tau_v} f_i \\ \dot{h} = \frac{F}{V} (f_i - f_o + f_p) \end{cases} \quad (80)$$

Para el análisis de estabilidad entrada estado se aplicará el teorema de suficiencia para la estabilidad entrada estado descrito en la sección 2.19.1 del capítulo 2. La metodología será:

En primer lugar se configura el problema de acuerdo a este teorema.

En segundo lugar se probará que  $f$  es una función continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  y  $u$ . En tercer lugar se probará la hipótesis  $\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$   $\alpha_1, \alpha_2$  funciones de clase  $K$ . En cuarto lugar se comprobará la condición (26) del teorema 2.19.1:  $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|)$

Primero: configuración del problema de acuerdo a este teorema 2.19.1

Sea  $f_p: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ; tal que:

$$f_p(t) = u \quad (81)$$

$f_p$  es una función acotada y continua en  $t$  que representa la señal de perturbación donde  $u \in D_u$

$$D_u = \{u \in \mathbb{R} \mid \|u\| < c; c > 0\} \quad (82)$$

Sea  $f: D \times D_u \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que:

$$f(x_1, x_2, u) = (\alpha(x_2 + \epsilon_0) 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|} - \beta(x_1 + f_0), -\gamma(x_1 + u)) \quad (83)$$

Donde

$$(x_1, x_2) \in D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < r\}, \text{ y } f_p(t) \in D_u \quad (84)$$

Segundo: demostración de que  $f$  es una función continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  y  $u$ . Para este análisis se calcula la matriz Jacobiana de (83) la cual está dada por:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, u)}{\partial x} = Jf(x_1, x_2, u) = \begin{bmatrix} -\beta & \alpha 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|} (\delta \ln(25) |x_2 + \epsilon_0| + 1) & 0 \\ -\gamma & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \quad (85)$$

Y como todas las componentes de (85) son continuas, la función definida en (83) es continuamente diferenciable y por lo tanto es continua: se puede afirmar que  $f$  es localmente Lipschitz en  $x$  y  $u$  según el teorema 2.3.2.

Tercero: demostración de la hipótesis  $\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$   $\alpha_1, \alpha_2$  funciones de clase  $K$ .

Se parte de:

$$\delta|x_2 + \epsilon_0| \geq 0 \quad (86)$$

Aplicando la función exponencial con base 25 en (86) se tiene:

$$25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|} \geq 1 \quad (87)$$

Si se suma  $x_1^2$  en el lado izquierdo se sigue conservando la desigualdad debido a que este término es positivo, es decir:

$$x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|} \geq 1 \quad (88)$$

en forma equivalente

$$\frac{1}{x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|}} \leq 1 \quad (89)$$

multiplicando por  $x_2^2$

$$\frac{x_2^2}{x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|}} \leq x_2^2 \quad (90)$$

La desigualdad (90) se sigue conservando si se adiciona el término positivo  $x_1^2$  al lado derecho

$$\frac{x_2^2}{x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|}} \leq x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \quad (91)$$

Por transitividad en (91)

$$\frac{x_2^2}{x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|}} \leq x_1^2 + x_2^2 \quad (92)$$

Por otro lado el término  $\frac{x_2^2}{x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|}}$  siempre es no negativo, por lo que se puede afirmar que:

$$0 \leq \frac{x_2^2}{x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|}} \leq x_1^2 + x_2^2 \quad (93)$$

Si se denota por

$$b = \frac{x_2^2}{x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|}} \text{ y } c = x_1^2 + x_2^2 \quad (94)$$

Entonces reemplazando (94) en (93) se llega a:

$$0 \leq b \leq c \quad (95)$$

Por el teorema de completitud de los reales, entre dos reales siempre existe otro real, por lo cual se puede afirmar que en (95) existe un número real positivo  $a$  tal que:

$$0 \leq a \leq b \leq c \quad (96)$$

Con lo que se puede afirmar:

$$a \leq b \leq c \quad (97)$$

Sea

$$a = \xi(x_1^2 + x_2^2) \text{ con } 0 < \xi < 1 \quad (98)$$

un número real positivo entre 0 y  $b$ . Sustituyendo (98) y (94) en (97) se obtiene

$$\xi(x_1^2 + x_2^2) \leq \frac{x_2^2}{x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|}} \leq (x_1^2 + x_2^2) \quad (99)$$

Sobre el conjunto  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < r\}$  donde  $r$  es aquel valor real para el cual se cumple (99) se tiene que:

$$\xi(x_1^2 + x_2^2) = \xi\|x\|^2 \quad \text{y} \quad (x_1^2 + x_2^2) = \|x\|^2 \quad (100)$$

si  $V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|}}$  entonces (99) se puede expresar por:

$$\xi\|x\|^2 \leq V(x_1, x_2) \leq \|x\|^2 \quad (101)$$

Por otro lado se tienen las funciones

$$\alpha_1(t) = \xi t^2 \quad (102)$$

$$\alpha_2(t) = t^2 \quad (103)$$

$\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones de clase  $K$  ya que son funciones continuas de la forma  $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  y estrictamente crecientes con  $\alpha(0) = 0$ . Donde  $\alpha_1(\|x\|) = \xi\|x\|^2$  y  $\alpha_2(\|x\|) = \|x\|^2$  teniendo en cuenta esto, (101) puede expresarse como:

$$\alpha_1(\|x\|) < V(x_1, x_2) < \alpha_2(\|x\|) \quad (104)$$

Lo que demuestra la condición (25) del teorema 2.19.1.

La Figura 3.4 muestra la representación gráfica de las funciones expresadas en (99), para los valores  $\xi = 0.1$ ,  $\delta = 0.033$ . La expresión (99) muestra que la función  $V$  se encuentra acotada por las funciones

$V_1(x, y) = \xi(x_1^2 + x_2^2)$  y  $V_2(x, y) = x_1^2 + x_2^2$ , en una vecindad del origen.  $V_1$  y  $V_2$  son llamadas funciones cota.

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|}}; \quad V_1(x, y) = \xi(x_1^2 + x_2^2); \quad V_2(x, y) = x_1^2 + x_2^2$$

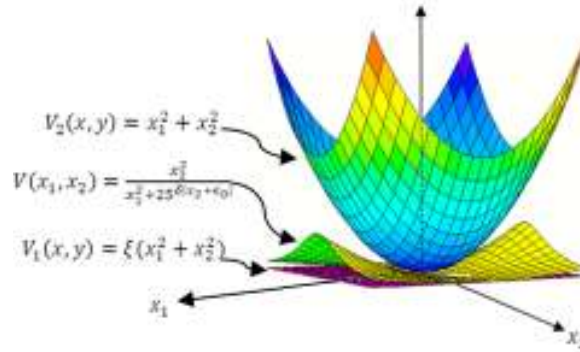


Fig. 3.4 Grafica de la función de Lyapunov y las funciones cota

Para una perturbación  $u$  acotada tal que:

$$\|u(t)\| < \omega; \quad \omega > 0 \quad (105)$$

Cuarto: demostración la condición (26) del teorema 2.19.1:  $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|)$ .

De (70) se obtiene que:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (106)$$

y la expresión  $\frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) = \dot{V}$  para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 + \epsilon_0)25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|} - \beta(x_1 + f_0) \\ \dot{x}_2 = -\gamma(x_1 + u) \end{cases} \quad (107)$$

Esta dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|})2x_2(-\gamma(x_1 + u)) - x_2^2(2x_1)[\alpha(x_2 + \epsilon_0)25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|} - \beta(x_1 + f_0)]}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|})^2} \\ & - \frac{x_2^2 \ln 25 \frac{\delta(x_2 + \epsilon_0)}{|x_2 + \epsilon_0|} (-\gamma(x_1 + u))25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|}}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2 + \epsilon_0|})^2} \end{aligned} \quad (108)$$

Operando y organizando términos

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{-2\gamma x_1^2 x_2 (x_1 + u) - 2x_2 \gamma (x_1 + u) 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} - 2\alpha x_1 x_2^2 (x_2 + \epsilon_0) 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|}}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \\ & + \frac{2\beta x_1 x_2^2 (x_1 + f_0) + \operatorname{sgn}(x_2 + \epsilon_0) \delta \gamma \ln 25 x_2^2 (x_1 + u) 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|}}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \end{aligned} \quad (109)$$

Agrupando

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{-2\gamma x_1^3 x_2 - 2\gamma u x_1^2 x_2 + [-(2\gamma x_1 x_2 + 2\gamma u x_2) - (2\alpha x_1 x_2^3 + 2\alpha \epsilon_0 x_1 x_2^2)] 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|}}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \\ & + \frac{2\beta x_1^2 x_2^2 + 2\beta f_0 x_1 x_2^2 + \operatorname{sgn}(x_2 + \epsilon_0) \delta \gamma \ln 25 x_2^2 (x_1 + u) 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|}}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \end{aligned} \quad (110)$$

Asociando términos

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{[-2\gamma x_1^3 x_2 - 2\gamma u x_1^2 x_2 + 2\beta x_1^2 x_2^2 + 2\beta f_0 x_1 x_2^2]}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \\ & - \frac{[2\alpha x_1 x_2^3 + 2\alpha \epsilon_0 x_1 x_2^2 - \operatorname{sgn}(x_2 + \epsilon_0) \delta \gamma \ln 25 x_2^2 (x_1 + u)] 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|}}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \\ & - \frac{[2\gamma x_1 x_2 + 2\gamma u x_2] 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|}}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} \end{aligned} \quad (111)$$

A continuación se acotará la expresión (111) para el caso en que  $\operatorname{sgn}(x_2 + \epsilon_0) > 0$ , de forma similar se realizaría la acotación para el caso en que  $\operatorname{sgn}(x_2 + \epsilon_0) < 0$  a partir de la afirmación:

$$(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2 > 1 \quad (112)$$

Entonces al cambiar el denominador de (111) por una expresión menor como la que aparece en (112), la nueva fracción es mayor que la que había, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & [-2\gamma x_1^3 x_2 - 2\gamma u x_1^2 x_2 + 2\beta x_1^2 x_2^2 + 2\beta f_0 x_1 x_2^2] \\ & - [2\alpha x_1 x_2^3 + 2\alpha \epsilon_0 x_1 x_2^2 - \delta \gamma \ln 25 x_2^2 (x_1 + u) + 2\gamma x_1 x_2 + 2\gamma u x_2] 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} \end{aligned} \quad (113)$$

Si se denota por  $(-\vartheta(x_1, x_2, u))$  a la expresión del lado derecho de (113) entonces:

$$\dot{V} \leq -\vartheta(x_1, x_2, u) \quad (114)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \vartheta(x_1, x_2, u) = & \\ & [2\alpha x_1 x_2^3 + 2\epsilon_0 x_1 x_2^2 - \delta \gamma \ln 25 x_2^2 (x_1 + u) + 2\gamma x_1 x_2 + 2\gamma u x_2] 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} \\ & - [-2\gamma x_1^3 x_2 - 2\gamma u x_1^2 x_2 + 2\beta x_1^2 x_2^2 + 2\beta f_0 x_1 x_2^2] \end{aligned} \quad (115)$$

Sacando factor común  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \vartheta(x_1, x_2, u) = & \\ x_2 \{ & [2\alpha x_1 x_2^2 + 2\alpha \epsilon_0 x_1 x_2 - \delta \gamma \ln 25 x_2 (x_1 + u) + 2\gamma x_1 + 2\gamma u] 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} \\ & - [-2\gamma x_1^3 - 2\gamma u x_1^2 + 2\beta x_1^2 x_2 + 2\beta f_0 x_1 x_2] \} \end{aligned} \quad (116)$$

Si se quitan los términos negativos en (116) la expresión resultante es mayor que la que había, con lo que se puede afirmar que

$$\vartheta(x_1, x_2, u) \leq x_2 \{ [2\alpha x_1 x_2^2 + 2\alpha \epsilon_0 x_1 x_2 + 2\gamma x_1 + 2\gamma u] 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} + 2\gamma x_1^3 + 2\gamma u x_1^2 \} \quad (117)$$

Si se define

$$\vartheta_1(x_1, x_2, u) = x_2 \{ [2\alpha x_1 x_2^2 + 2\alpha \epsilon_0 x_1 x_2 + 2\gamma x_1 + 2\gamma u] 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} + 2\gamma x_1^3 + 2\gamma u x_1^2 \} \quad (118)$$

Asociando términos se tiene que:

$$\begin{aligned} \vartheta(x_1, x_2, u) \leq \vartheta_1(x_1, x_2, u) = & \\ x_2 \{ & [\alpha (2x_1 x_2) x_2 + \alpha \epsilon_0 (2x_1 x_2) + 2\gamma x_1 + 2\gamma u] 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} + 2\gamma x_1^3 + 2\gamma u x_1^2 \} \end{aligned} \quad (119)$$

Se sabe que:

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0 \quad (120)$$

En forma equivalente se tiene

$$2x_1 x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 \quad (121)$$

Es decir

$$2x_1 x_2 \leq \|x\|^2 \quad (122)$$

Y por otro lado del álgebra se sabe que:

$$\begin{aligned} x_1 \leq |x_1| = \sqrt{x_1^2} & \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|x\| \\ x_2 \leq |x_2| = \sqrt{x_2^2} & \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|x\| \end{aligned} \quad (123)$$

Acotando la desigualdad (119) con (122) y (123)

$$\begin{aligned} \vartheta(x_1, x_2, u) \leq \vartheta_1(x_1, x_2, u) \leq & \\ \|x\| \{ & [\alpha \|x\|^2 \|x\| + \alpha \epsilon_0 \|x\|^2 + 2\gamma \|x\| + 2\gamma u] 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} + 2\gamma \|x\|^3 + 2\gamma u \|x\|^2 \} \end{aligned} \quad (124)$$

Organizando (124) se tiene:

$$\vartheta(x_1, x_2, u) \leq \vartheta_1(x_1, x_2, u) \leq \{[\alpha\|x\|^4 + \alpha\epsilon_0\|x\|^3 + 2\gamma\|x\|^2 + 2\gamma u\|x\|]25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} + 2\gamma\|x\|^4 + 2\gamma u\|x\|^3\} \quad (125)$$

Ahora se define

$$\vartheta_2(x_1, x_2, u) = [\alpha\|x\|^4 + \alpha\epsilon_0\|x\|^3 + 2\gamma\|x\|^2 + 2\gamma u\|x\|]25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} + 2\gamma\|x\|^4 + 2\gamma u\|x\|^3 \quad (126)$$

Usando la desigualdad en  $\delta|x_2 + \epsilon_0|$  se tiene que

$$\delta|x_2 + \epsilon_0| \leq \delta(|x_2| + |\epsilon_0|) \quad (127)$$

Acotando (126) con (127)

$$\vartheta_2(x_1, x_2, u) = [\alpha\|x\|^4 + \alpha\epsilon_0\|x\|^3 + 2\gamma\|x\|^2 + 2\gamma u\|x\|]25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} + 2\gamma\|x\|^4 + 2\gamma u\|x\|^3 \leq [\alpha\|x\|^4 + \alpha\epsilon_0\|x\|^3 + 2\gamma\|x\|^2 + 2\gamma u\|x\|]25^{\delta(|x_2|+|\epsilon_0|)} + 2\gamma\|x\|^4 + 2\gamma u\|x\|^3 \quad (128)$$

En forma equivalente:

$$\vartheta_2(x_1, x_2, u) \leq [\alpha\|x\|^4 + \alpha\epsilon_0\|x\|^3 + 2\gamma\|x\|^2 + 2\gamma u\|x\|]25^{\delta|x_2|}25^{\delta|\epsilon_0|} + 2\gamma\|x\|^4 + 2\gamma u\|x\|^3 \quad (129)$$

Acotando (125) con (129)

$$\vartheta(x_1, x_2, u) \leq \vartheta_1(x_1, x_2, u) \leq \vartheta_2(x_1, x_2, u) \leq [\alpha\|x\|^4 + \alpha\epsilon_0\|x\|^3 + 2\gamma\|x\|^2 + 2\gamma u\|x\|]25^{\delta|x_2|}25^{\delta|\epsilon_0|} + 2\gamma\|x\|^4 + 2\gamma u\|x\|^3 \quad (130)$$

Usando (130) con (123) se llega

$$\vartheta(x_1, x_2, u) \leq \vartheta_1(x_1, x_2, u) \leq \vartheta_2(x_1, x_2, u) \leq 25^{\delta|\epsilon_0|}[\alpha\|x\|^4 + \alpha\epsilon_0\|x\|^3 + 2\gamma\|x\|^2 + 2\gamma u\|x\|]25^{\delta\|x\|} + 2\gamma\|x\|^4 + 2\gamma u\|x\|^3 \quad (131)$$

Ahora se define

$$\vartheta_3(x_1, x_2, u) = 25^{\delta|\epsilon_0|}[\alpha\|x\|^4 + \alpha\epsilon_0\|x\|^3 + 2\gamma\|x\|^2 + 2\gamma u\|x\|]25^{\delta\|x\|} + 2\gamma\|x\|^4 + 2\gamma u\|x\|^3 \quad (132)$$

Usando transitividad en (131) y usando (132) se llega a:

$$\vartheta(x_1, x_2, u) \leq \vartheta_3(x_1, x_2, u) \quad (133)$$

Y transitividad entre (113) y (133)

$$\dot{V} \leq -\vartheta_3(x_1, x_2, u) \quad (134)$$

Ahora si se define la función:

$$\alpha_3(t) = 25^{\delta|\epsilon_0|}(\alpha t^4 + \alpha\epsilon_0 t^3 + 2\gamma t^2 + 2\gamma u t)25^{\delta t} + 2\gamma t^4 + 2\gamma u t^3 \quad (135)$$

Una función de clase  $C^1$  y continua de la forma  $\alpha_3(t) = \alpha_3(0)e^{25\delta t} + 2\gamma t^4 + 2\gamma ut^3$  y estrictamente crecientes con

En (135) se calcula  $\alpha_3(t)$  y se obtiene:

$$\alpha_3(t) = 25^{\delta t} \left( \alpha_3(0) + at^4 + \alpha \epsilon_0 t^3 + 2\gamma t^2 + 2\gamma ut \right) \tag{136}$$

Sustituyendo (136) en (134) se concluye que:

$$\dot{\alpha}_3(t) > 0 \tag{137}$$

Con (106) y (137) se demuestra la expresión (26) del teorema 2.19.1 dada por:

$$\alpha_3(t) > \alpha_3(0) \tag{138}$$

para toda entrada acotada  $u(t)$  que satisfaga  $u(t) \leq M$  lo que equivale a expresarlo por  $u(t) = M \sin(\omega t)$  con una función de clase  $C^1$ .

En resumen con (104) y (138) se demuestra que el sistema (83) es localmente estable entrada estado.

La figura 3.5 ilustra la grafica de  $\alpha_3(t)$  para los valores de los parámetros  $\alpha_3(0) = 0$ ;  $\delta = 0.01$ ;  $a = 0.01$ ;  $\alpha \epsilon_0 = 0.01$ ;  $\gamma = 0.01$ ;  $u = 0.01$  la cual ilustra una función de clase  $K$ .

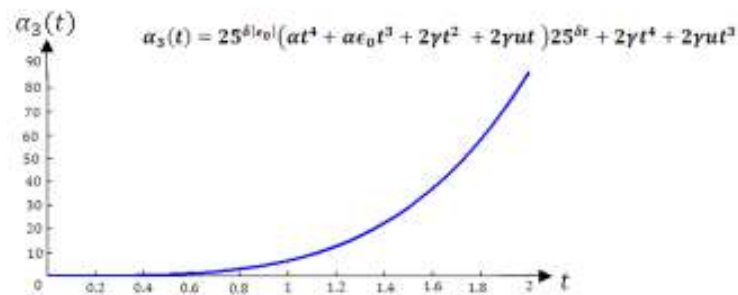


Fig. 3.5 Grafica de la función  $\alpha_3(t)$  para los valores de los parámetros:  $\alpha_3(0) = 0$ ;  $\delta = 0.01$ ;  $a = 0.01$ ;  $\alpha \epsilon_0 = 0.01$ ;  $\gamma = 0.01$ ;  $u = 0.01$ ;

La estabilidad de algunos sistemas dinámicos no lineales se pierde si existen trayectorias que tienden a infinito cuando el tiempo se aproxima a un valor real, este concepto es el de tiempo de escape finito en el sistema que se analiza a continuación.

### 3.3.12 Análisis de tiempo de escape finito

Para sustentar la no existencia de tiempo de escape finito en el sistema definido por (38) se aplicará el principio de Invariancia de la Salle, teorema 2.21 del capítulo 2.

En primer lugar se define  $\Omega$  compacto tal que  $\Omega \subset D$ , donde  $\dot{V}(x) \leq 0$  y que sea invariante positivo respecto al sistema (38).

En segundo lugar se define  $E$  como el conjunto de todos los puntos de  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) = 0$ .

En tercer lugar se deduce que  $M = \{(x_1, x_2) = (0,0)\}$  es el mayor conjunto invariante positivo en  $E$

Primero: se define el conjunto  $\Omega \subset D$ , para  $D$  definido en (71), por:

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \left[ -2\gamma x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + 2\beta f_0 x_2 - 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} (2\alpha x_2^2 + 2\alpha\epsilon_0 x_2 \pm \delta\gamma \text{Ln} 25 x_2 + 2\gamma) \right] \leq 0 \wedge (0 \leq x_1 \leq m_1) \wedge (0 \leq x_2 \leq m_2) \right\} \quad (139)$$

$\Omega$  es compacto ya que es cerrado y acotado por  $m_1, m_2$  valores constantes positivos determinados por la región de trabajo. El cual es un invariante positivo respecto al sistema (38) ya que como se afirma en 2.20.2  $\dot{V}(x) \leq 0$  para  $(x_1, x_2) \in \Omega \subset D$  y demostrado (77) entonces toda solución que comience sobre algún punto de  $\Omega$  permanece en  $\Omega$  en todo tiempo futuro.

Segundo: Se define  $E$ , el conjunto de todos los puntos de  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) = 0$  como:

$$E = \{(x_1, x_2) \in \Omega : \dot{V}(x) = 0.\} \quad (140)$$

Remplazando (76) en (140) se obtiene

$$E = \left\{ (x_1, x_2) \in \Omega : \frac{x_1 x_2 (-2\gamma x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + 2\beta f_0 x_2) - 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} (2\alpha x_2^2 + 2\alpha\epsilon_0 x_2 \pm \delta\gamma \text{Ln}(25)x_2 - 2\gamma)}{(x_1^2 + 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|})^2} = 0 \right\} \quad (141)$$

Analizando (141) existen dos conjuntos donde (140) podría tener solución. Estos dos conjuntos son:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x_1, x_2) \in \Omega : x_1 x_2 = 0\} \text{ o} \\ E_2 &= \{(x_1, x_2) \in \Omega : (-2\gamma x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + 2\beta f_0 x_2) \\ &= 25^{\delta|x_2+\epsilon_0|} (2\alpha x_2^2 + 2\alpha\epsilon_0 x_2 \pm \delta\gamma \text{Ln}(25)x_2 - 2\gamma)\} \end{aligned} \quad (142)$$

Sobre  $E_2$  se comprueba que el único PE del sistema (37), el origen, no satisface la ecuación ya que  $0 = 25^{\delta|\epsilon_0|} (0 + 0 \pm 0 - 2\gamma)$  esto es  $25^{\delta|\epsilon_0|} (2\gamma) = 0$  lo que implica que  $\gamma = 0$  pero  $\gamma \neq 0$  porque  $\gamma = \frac{F}{V}$  y se obtendría que  $F = 0$  lo cual es una contradicción y por ende el único conjunto que agrupa los

puntos de  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) = 0$  y que incluye al único PE de (38) es  $E_1$ , y por lo tanto según la definición 2.20.2.

$$M = \{(x_1, x_2) = (0,0)\} \quad (143)$$

es el mayor conjunto invariante positivo en  $E$  entonces según el principio de Invariancia de la Salle, teorema 2.21 del capítulo 2, ya que según (76)  $V$  es una función continuamente diferenciable,  $\Omega$  es un conjunto compacto invariante positivo con respecto al sistema (38), y como se acaba de argumentar que  $M$  el mayor conjunto invariante en  $E$  entonces toda solución que comienza en  $\Omega$  tiende a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , esto unido a lo que dice Khalil [24] que los puntos de equilibrio que son local asintóticamente estables tienen la propiedad de que todas las soluciones que inicien en las cercanías del PE no sólo permanecen en las cercanías del PE sino que además tienden hacia el punto de equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito justifica que en el sistema (1) no existen trayectorias que tienden a infinito cuando el tiempo se aproxima a un valor real, es decir la no existencia de tiempo de escape finito.

### 3.4 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS TEÓRICOS

La Tabla 3.1 presenta la interpretación de los resultados de las características no lineales analizadas en un sistema de control de nivel con ley de control exponencial polinómica. La primera columna muestra la característica no lineal que fue analizada y la segunda columna el impacto del resultado teórico.

**Tabla 3.1 Interpretación de los resultados de las características no lineales analizadas en un sistema de control de nivel con ley de control exponencial polinómica.**

CARACTERÍSTICA NO LINEAL	IMPACTO
Existe un único punto de equilibrio asintóticamente estable tipo espiral o nodo	La condición de estabilidad asintótica de Lyapunov significa que, estando el sistema en un punto de equilibrio y sometido a la acción de una perturbación o a una variación del punto de control, presentará una respuesta que tenderá de nuevo al estado de equilibrio. Por el hecho de ser estable se tiene la seguridad de que todas las trayectorias que inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en dichas cercanías. El punto de equilibrio además es asintóticamente estable lo que asegura que, además de permanecer en las cercanías del mismo, las trayectorias tienden hacia él a medida que transcurre el tiempo. (ver sección 3.3.4).
Obtención de una función de Lyapunov sobre un dominio que contiene el PE	Determinación de la estabilidad asintótica local del punto de equilibrio (ver sección 3.3.7). Aproximación de una región de trabajo (ver sección 3.3.5). Determinación de la estabilidad entrada estado (ver sección 3.3.11).
Obtención de un región de trabajo	Comprensión del sistema en una región de trabajo (ver sección 3.3.5). Las simulaciones muestran que todas las soluciones que inicien en algún punto de esta son atraídas al único punto de equilibrio local asintóticamente estable.
Determinación de la no presencia de ciclos limite	No hay inestabilidad en el punto de equilibrio del sistema por no tener trayectorias que se alejen del punto de equilibrio o que se queden en una órbita cerrada (ver sección 3.3.8).
Determinación de la no presencia de bifurcaciones	Los parámetros del modelo pueden variar con el tiempo y estas variaciones no afectan la estabilidad estructural del sistema. (Ver sección 3.3.9).
Comprobación de la no presencia de caos	Es posible conocer las reglas de evolución del sistema a largo plazo y por ende se puede predecir el comportamiento del mismo (ver sección 3.3.10).
Determinación de la estabilidad entrada estado del sistema	El sistema no se desestabiliza ante perturbaciones acotadas a la entrada (ver sección 3.3.11).
Determinación de la no presencia de tiempo de escape finito	Sobre la región de trabajo y bajo las limitaciones del problema dadas en la introducción el nivel nunca se desborda (ver sección 3.3.12).

### **3.5 RESUMEN DEL CAPITULO**

En este capítulo, teniendo como marco la teoría de Lyapunov, se realizó el análisis teórico del sistema de control de nivel usando el algoritmo exponencial polinómico. Este análisis mostró la existencia de un único punto de equilibrio local asintóticamente estable del tipo nodo o espiral (ver sección 3.3.1 y 3.3.4). Se encontró una función de Lyapunov de la cual se afirma regularmente en la literatura que es de difícil hallazgo (ver sección 3.3.5) y establecer que el sistema tiene estabilidad local entrada-estado (ver sección 3.3.11). En este mismo orden de ideas el análisis mostró la no existencia de ciclos límite (ver sección 3.3.8), bifurcaciones (ver sección 3.3.9), caos (ver sección 3.3.10) ni tiempo de escape finito (ver sección 3.3.12).

# Capítulo 4. Resultados de las simulaciones y análisis

---

## 4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se hace la simulación del modelo matemático del sistema de control de nivel con cada una de las leyes de control: la proporcional, la de error cuadrático, la exponencial polinómica y la proporcional integral derivativa.

Con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema dentro de los límites impuestos por el problema y detallados en 1.4, se hacen pruebas de robustez estructurada variando la posición del punto de control, del flujo de salida y de la amplitud de la perturbación y se observará el comportamiento de la variable controlada  $h$ .

Con las diferentes leyes de control, usando la aplicación de Simulink de MatLab®, se compararán los índices de desempeño con la influencia de una perturbación o sin ella: *Offset* absoluto, porcentaje de máximo pico de altura, tiempo de asentamiento, integral del valor absoluto del error, trabajo sobre la variable manipulada del sistema, es decir, una prueba de robustez no estructurada.

Este capítulo cubre las siguientes etapas: Elementos básicos de la simulación en el que se plantea la definición del sistema, índices de desempeño, formulación del modelo, datos del modelo, análisis en estado estacionario, respuesta del sistema y comparación de los índices de desempeño del sistema con cada uno de los cuatro controladores. De la misma forma se analiza la influencia del oleaje en los índices de desempeño al variar la posición o el punto de control o el flujo de salida o la frecuencia.

## 4.2 ELEMENTOS BÁSICOS DE LA SIMULACIÓN

### 4.2.1 Descripción del problema

El problema consiste en comprobar mediante simulaciones las características no lineales del sistema descrito y formulado en 1.1 como son: la existencia de un único punto de equilibrio localmente estable, la no existencia de bifurcaciones, ciclos límite, tiempo de escape finito y caos, además se realizarán pruebas de robustez al sistema al variar los parámetros: la posición del punto de control, el flujo de salida, la amplitud de la perturbación y la frecuencia de un fenómeno ondulatorio en la superficie del líquido (olas). Adicionalmente se compararán las respuestas del nivel con leyes de control proporcional, de error cuadrático, exponencial polinómica y PID. Esta comparación se hace usando índices de desempeño como: integral del valor absoluto del error (IAE), el *offset* absoluto, el trabajo sobre la variable manipulada (TVM), el máximo pico de altura (MPH) y el tiempo de asentamiento ( $T_s$ ) que a continuación se definen.

### 4.2.2 Índices de desempeño

Según Ocampo [34] existen diferentes criterios para evaluar el desempeño dinámico de los sistemas de control, entre estos están:

#### Offset absoluto

Es el valor absoluto de la diferencia entre la variable medida y el punto de control, éste índice indica una medida de la exactitud del sistema automático de control.

#### Integral del valor absoluto del error (IAE)

De las iniciales en inglés de integral of the absolute value of the error. La idea se basa en minimizar la suma de errores absolutos, sin tener en cuenta el signo, es decir, mide el área bajo la curva del error y representa la cantidad de material fuera de especificaciones o energía perdida. Advierte Shinsky [42] que minimizando esta medida del área, es decir que el  $IAE \rightarrow 0$  se busca  $y(t) \rightarrow r(t)$ , y con esto se logra un desempeño económico del controlador y se asegura el retorno estable al punto de control. Comenta Acedo [1] que es un criterio usado con frecuencia como criterio de comparación. La Figura 4.1 muestra el área relacionada con el error IAE.

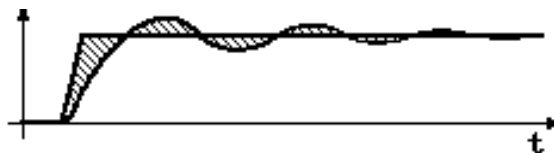


Fig. 4.1 Área relacionada con el error IAE

No es recomendable en sistemas altamente sub y sobre amortiguados.

Se mide mediante

$$\int_0^T |\epsilon(t)| dt$$

### Trabajo sobre la variable manipulada

Este índice de desempeño mide los cambios en el tiempo de la variable manipulada,  $f_i(t)$ , está relacionado con el desgaste en el elemento final de control y como define Acedo [1] se mide por:

$$TVM = \int_0^{\infty} \left| \frac{df_i(t)}{dt} \right| dt$$

### Porcentaje de máximo pico de altura (%MPH)

El máximo pico de altura (MPH) es el valor pico máximo de la curva de respuesta medido desde la unidad. Si el valor no es la unidad, se mide referenciado a la respuesta en estado estacionario y está dado por:

$$MPH = y(t_p) - y(\infty)$$

También se suele expresar en porcentaje

$$\%MPH = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} * 100\%$$

Cuando se elige el menor valor del MPH se busca seguridad en el proceso y ahorro energético como define Agudelo et al [2].

### Tiempo de asentamiento ( $T_s$ )

Es el tiempo que tarda la variable controlada en alcanzar un intervalo de control preestablecido y permanecer dentro de él. Como criterio de diseño se selecciona de acuerdo a un porcentaje del valor final de la respuesta. El aumentar o disminuir este valor indica que el controlador se estabiliza en forma lenta o rápida respectivamente. Cuando se elige el menor valor de  $T_s$  se busca una respuesta estable más rápida.

Como dicen Agudelo et al [2] existen algunos criterios para decidir de acuerdo a los índices de desempeño la mejor ley de control para el sistema automático de control (SAC), se deben priorizar las necesidades del proceso a controlar, entre ellas están el ahorro de consumo energético, cuidado de los elementos finales de control, rapidez de respuesta, etc. La Tabla 4.1 indica cual es la ley de control más apropiada según la prioridad en el sistema automático de control.

**Tabla 4.1 Recomendaciones para la decisión de una ley de control**

<b>NECESIDAD</b>	<b>Criterio de desempeño</b>
Ahorro energético	IAE
Vida útil de los elementos finales de control	TVM
Rapidez de respuesta	Ts
Seguridad en el proceso	MPH
Exactitud	Offset

#### **4.2.3 Lenguaje de programación usado**

Para las simulaciones se usará MatLab ® (MATrix LABORatory) por ser un software de uso común en muchas universidades y centros de investigación del entorno y por disponer de la herramienta Simulink que es una plataforma especialmente diseñada para la simulación de sistemas. Este recurso se usará para observar el nivel cuando el sistema es gobernado por cada uno de los controladores: el proporcional, el de error cuadrático, el exponencial polinómico y el proporcional integral derivativo. Se implementaron los bloques que representan el sistema definido por la expresión (1) del capítulo 3 y bloques adicionales para medir los índices de desempeño IAE, offset y TVM. Se desarrolló un programa en MatLab® que lee, a partir de los datos de la simulación, los anteriores criterios de desempeño junto con %MPH y  $t_s$  y grafica la respuesta del nivel con cada controlador. Esto se hizo con el objetivo de realizar una comparación entre dichos índices de desempeño. Otra de las aplicaciones que se usó es pplane® la cual corre sobre MatLab ® y muestra el retrato de fase de un sistema dinámico de segundo orden y las principales características de los puntos de equilibrio.

#### **4.2.4 Sintonía y elección de controladores**

Con el objetivo de determinar qué tan eficiente es el sistema de control de nivel gobernado por la ley exponencial polinómica, se compararán los diferentes índices de desempeño de éste con los obtenidos por el mismo sistema con otras leyes de control.

Las otras leyes de control que se usarán son: la proporcional, la de error cuadrático y la proporcional integral derivativa (PID). Se eligió la ley proporcional por ser tradicionalmente usada en control de nivel, Smith-Corripio [43]. La ley de error cuadrático por ser un algoritmo no lineal aplicado al control de nivel,

Castrillón et al [8] y la ley PID por ser un controlador ampliamente usado en distintas aplicaciones industriales, a pesar que su parte derivativa pueda incrementar el ruido.

Con el objetivo de determinar los parámetros de sintonía de los controladores propuestos, cada uno de estos se sintonizó con los valores dados en la tabla 4.2 por el método de Prueba y Error, Creus [11] y se encontró que la ganancia  $K_p$  para el controlador proporcional es  $K_p = 4.5$ . La ganancia  $K_c$  para el controlador de error cuadrático es  $K_c = 1.5$ . La ganancia  $K_s$  para el controlador exponencial polinómico es  $K_s = 4.7$  y para el controlador PID se encontró que  $K_{p\_PID} = 5.5$ ,  $K_i = 0.5$ ,  $K_d = 0.7$ .

A continuación se describe el modelo del sistema con el cual se realizarán las simulaciones y se obtendrán las verificaciones mencionadas.

#### 4.2.5 Modelo matemático del sistema

El sistema relacionado con el control de nivel con ley de control exponencial polinómica dada por  $m(t) = K_s \epsilon 25^{0.02|t| \in \eta}$ , flujo de entrada manipulado por una válvula y el flujo de salida constante, se describe por el siguiente sistema de ecuaciones: (ver anexo B).

$$\begin{cases} \dot{f}_i = \frac{K_v}{\tau_v F} m(t) - \frac{1}{\tau_v} f_i \\ \dot{h} = \frac{F}{V} (f_i - f_0) \end{cases} \quad (1)$$

donde  $h$  es el nivel del fluido en un instante  $t$  dado en  $\left[\frac{m}{m}\right]$ ,  $f_i$  es el flujo de entrada al tanque dado en  $\left[\frac{\frac{m^3}{min}}{\frac{m^3}{min}}\right]$ ,  $f_0$  es el flujo de salida constante dado en  $\left[\frac{\frac{m^3}{min}}{\frac{m^3}{min}}\right]$ ,  $V$  es el volumen del recipiente dado en  $[m^3]$ ,  $F$  es el flujo máximo dado en  $\left[\frac{m^3}{min}\right]$ ,  $h_r$  el punto de referencia dado en  $\left[\frac{m}{m}\right]$ ,  $\eta$  constante del modelo,  $K_s$  es la constante del controlador exponencial polinómico dado en  $\left[\frac{\%}{\%}\right]$ ,  $K_v$  la ganancia de la válvula dado en  $\left[\frac{m^3}{min \%}\right]$  y  $\tau_v$  la constante de tiempo del actuador de la válvula dada en  $[min]$ .

### Diagrama de bloques relacionado con el sistema

En la Figura 4.2 se muestra el diagrama de bloques del sistema (1) en lazo cerrado, donde  $r(t)$  representa la señal para el punto de referencia  $h_r$ , la cual entra a un comparador con la señal de salida  $h(t)$ , para sacar la señal de error  $e(t)$ .

La señal  $e(t)$  entra al bloque del controlador,  $G_c(t)$ , cuya salida es la señal de control  $m(t)$ , dada por  $m(t) = K_S \epsilon 25^{0.02|\epsilon|^\eta}$ , donde:  $\epsilon$  es el error en un instante (dado)  $t$ ,  $|\epsilon|$  representa el valor absoluto del error en ese instante,  $\eta$  es la constante del modelo del controlador;  $K_S$  es una constante ajustable entre 0.04 y 10 como advierten Shunta y Fehervari [44].

La ley de control  $m(t)$  es la señal que entra al bloque de la válvula,  $G_v(t)$ , y hace que la fracción de flujo  $f_i(t)$ , que ingresa a la planta  $G_p(t)$ , se modifique de acuerdo a la señal  $m(t)$ .

La salida  $h(t)$  representa el nivel en el tanque en un instante dado, señal que es enviada al comparador mediante un sensor transmisor  $H(t)$ .

El sistema inicialmente no se considera bajo ninguna variable perturbadora  $d(t)$ .

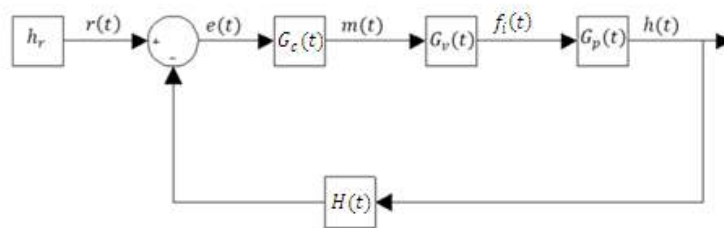


Fig. 4.2 Diagrama de bloques del sistema de control de nivel

A continuación se presentan los detalles de los bloques: controlador representado por  $G_c$ , la válvula representada por  $G_v$  y la planta representada por  $G_p$  para el sistema (1).

La Figura 4.3 muestra en simulink los bloques que representan el modelo matemático para la ley de control  $m(t) = K_S \epsilon 25^{0.02|\epsilon|^\eta}$ .

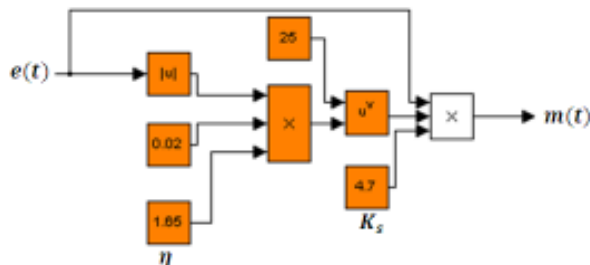


Fig. 4.3 Representación en simulink del controlador exponencial polinómico

La señal del controlador,  $m(t)$ , entra al elemento final de control, la válvula, la cual se modela mediante la siguiente ecuación. (Ver anexo B).

$$\dot{f}_i = \frac{K_v}{\tau_v F} m - \frac{1}{\tau_v} f_i \quad (2)$$

La Figura 4.4 muestra en simulink los bloques que representan el modelo matemático de la válvula dada por (2).

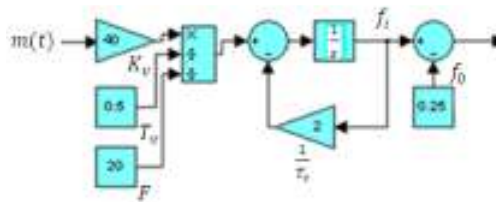


Fig. 4.4 Representación en simulink de la ecuación de la válvula

La válvula determina, mediante la ley de control  $m(t)$ , la fracción de flujo de entrada  $f_i$  que debe entrar a la planta, donde  $F_i = f_i F$  con  $F$  flujo máximo que puede entregar la válvula. La planta es un tanque de almacenamiento de capacidad  $V$ , de sección transversal conocida y fracción de flujo de salida  $f_0$  constante, donde  $F_0 = f_0 F$  y esta modelada por: (Ver anexo B).

$$\dot{h} = \frac{F}{V} (f_i - f_0) \quad (3)$$

La Figura 4.5 muestra en simulink los bloques que representan el modelo matemático de la planta (3).

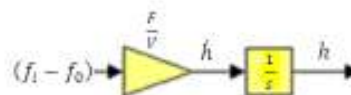


Fig. 4.5 Representación en simulink de la planta

En la Figura 4.6 se muestra en simulink la conexión de los bloques del controlador, la válvula, planta y sensor en lazo cerrado para el sistema definido por (1).

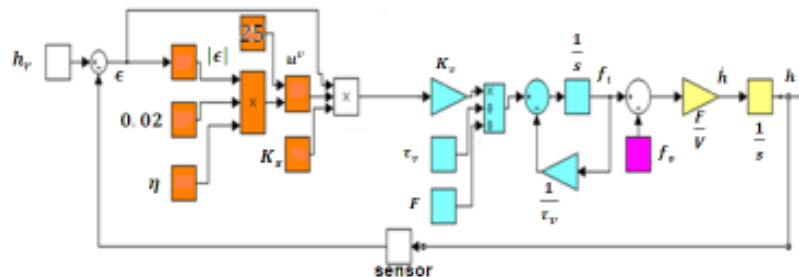


Fig. 4.6 Diagrama de bloques del sistema con ley de control exponencial polinómica

#### 4.2.6 Datos y constantes del modelo

En la figura 4.7 se presenta un diagrama simplificado de los instrumentos de control para el problema de control de nivel,

$h(t)$  representa el nivel de líquido en el tiempo.

$f_o$  es el flujo volumétrico de salida.

$f_i(t)$  corresponde al flujo volumétrico de entrada.

$LT$  es el transmisor de nivel.

$LIC$  es el controlador indicador de nivel.

$LY$  convertidor de corriente a presión.

$LCV$  válvula de control de nivel.

La fracción de flujo de entrada  $f_i$  de entrada es manipulada por una válvula que es el elemento final de control, cuya función es variar el caudal del flujo de control, para mantener en el punto de control la variable  $h(t)$ , Smith-Corripio [43].

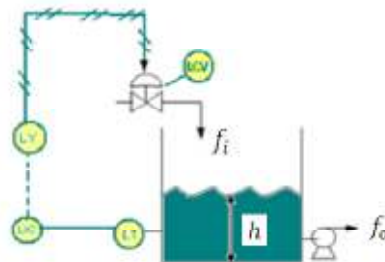


Fig. 4.7 Diagrama simplificado de instrumentos del problema

La Tabla 4.2 muestra los diferentes valores para los parámetros y las constantes del problema. Los datos para el sistema se extraen del laboratorio de operaciones unitarias de la Universidad Pontificia Bolivariana y de los rangos de valores sugeridos en la bibliografía. Para los parámetros del controlador se asumieron valores ubicados en los rangos sugeridos por Acedo [1].

**Tabla 4.2 Valores de los parámetros y las constantes relacionadas con el problema**

Flujo máximo de la válvula $F \left[ \frac{m^3}{min} \right]$	Constante de tiempo del actuador $\tau_v [min]$	Ganancia de la válvula $K_v \left[ \frac{m^3}{\frac{min}{\%}} \right]$	Capacidad del tanque $V [m^3]$	Fracción de flujo de salida $f_0 \left[ \frac{m^3}{\frac{min}{m^3}} \right]$	Ganancia del controlador $K_s \left[ \frac{\%}{\%} \right]$	Constante del modelo del controlador $\eta$	Punto de control $h_r \left[ \frac{m}{m} \right]$
20	0.5	40	100	0.25	4.7	1.65	0.5

La Figura 4.8 muestra el diagrama de bloques para el sistema presentado en (1) con los valores dados de las constantes e implementado en simulink.

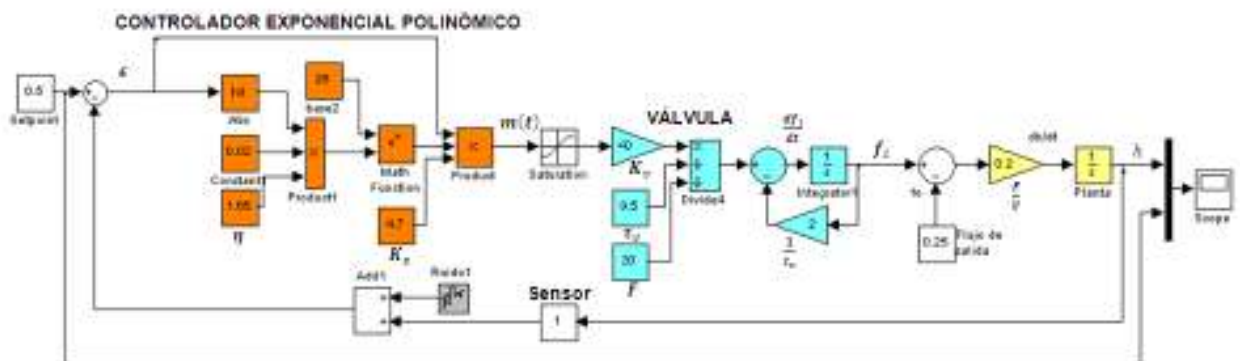


Fig. 4.8 Diagrama de bloques del sistema con los valores dados de las constantes

La Figura 4.9 muestra la salida del sistema definido en (1) con los valores dados para las constantes en la tabla 4.2.

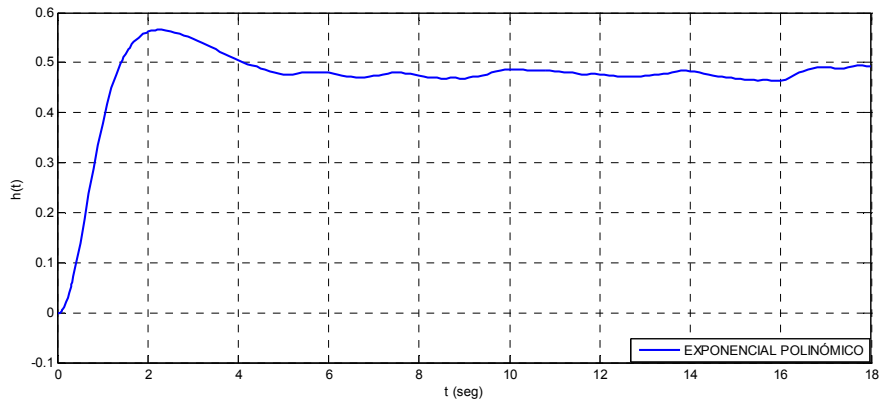


Fig. 4.9 Gráfica del nivel del líquido con los valores de las constantes dados en 4.2.6

#### 4.2.7 Análisis en estado estacionario

##### Punto de equilibrio

Al reemplazar los datos y las constantes asignadas al sistema (1) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{f}_i = 18.8(0.5 - h)25^{0.033|0.5-h|} - 2f_i \\ \dot{h} = \frac{1}{5}(f_i - 0.25) \end{cases} \quad (4)$$

El punto de equilibrio se encuentra cuando las derivadas se anulan, estando representado el sistema por las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$\begin{cases} (f_i - 0.25) = 0 \\ 18.8(0.5 - h)25^{0.033|0.5-h|} - 2f_i = 0 \end{cases} \quad (5)$$

En forma equivalente

$$\begin{cases} f_i = 0.25 \\ (0.5 - h)25^{0.033|0.5-h|} = 0.022659 \end{cases} \quad (6)$$

Resolviendo el sistema no lineal, se llega a:

$$(f_i, h) = (0.25, 0.47) \quad (7)$$

Y el valor que se obtiene en el capítulo 3 para las constantes dadas en 4.2.5 es (0.25, 0.46) lo cual corrobora el resultado obtenido mediante la simulación en pplane®.

La función

$$\dot{f}_i = (0.5 - h)25^{0.033|0.5-h|} - (0.02659) \quad (8)$$

tiene únicamente un punto de corte con el eje  $h$ , esto se demuestra probando que  $\dot{f}_i$  es una función estrictamente decreciente para todo  $h$ .

$$\frac{d\dot{f}_i}{dh} = -25^{0.033|0.5-h|}(0.033\text{Ln}25|0.5 - h| + 1) < 0 \quad (9)$$

La Figura 4.10 muestra la grafica de la función dada en (8) en la cual se ilustra la existencia de un único punto de corte con el eje  $h$ .

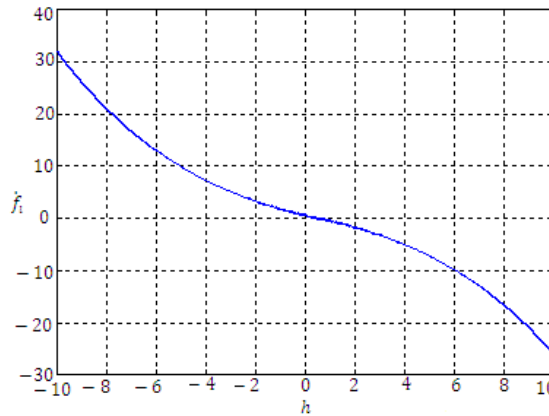


Fig. 4.10 Grafica de la función  $\dot{f}_i = (0.5 - h)25^{0.033|0.5-h|} - 0.02659$

Ahora se va a clasificar el punto de equilibrio encontrado en (7) de acuerdo a lo definido en 2.13.1, para esto se necesita hallar la matriz jacobiana del sistema y evaluarla en este punto y luego encontrar los valores propios de esta matriz.

Se define la función vectorial:

$$G(f_i, h) = (g_1(f_i, h), g_2(f_i, h)) \quad (10)$$

Donde

$$g_1(f_i, h) = 18.8(0.5 - h)25^{0.033|0.5-h|} - 2f_i \quad (11)$$

y

$$g_2(f_i, h) = \frac{1}{5}(f_i - 0.25) \quad (12)$$

Tiene por matriz Jacobiana a

$$JG(f_i, h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(f_i, h)}{\partial f_i} & \frac{\partial g_1(f_i, h)}{\partial h} \\ \frac{\partial g_2(f_i, h)}{\partial f_i} & \frac{\partial g_2(f_i, h)}{\partial h} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Realizando los cálculos se obtiene:

$$JG(f_i, h) = \begin{bmatrix} -2 & -(18.8)25^{0.033|0.5-h|}(0.033Ln25|0.5-h|+1) \\ \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Sustituyendo el PE (7) en la matriz Jacobiana (14) se llega a:

$$JG(f_i, h)|_{(0.25, 0.47)} = \begin{bmatrix} -2 & -18.90 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Los valores propios de la matriz son

$$\lambda_1 = -1 + 1.66i ; \lambda_2 = -1 - 1.66i \quad (16)$$

Con lo que se puede afirmar según 2.13.1 que el único punto de equilibrio es un foco o espiral estable ya que los dos valores propios de  $A = JG(f_i, h)|_{(0.25, 0.47)}$  tienen parte imaginaria distinta de cero, y ambos poseen parte real negativa.

La Figura 4.11 muestra el retrato de fase para el sistema presentado en (1) con los valores de las constantes dados en 4.2.6 implementado en pplane ®. Este gráfico muestra un único punto de equilibrio del tipo espiral estable y muestra algunas trayectorias que convergen a este, también se muestra la región de trabajo de color verde donde se evidencia que para cualquier punto que este dentro de esta, las trayectorias convergen al punto de equilibrio.

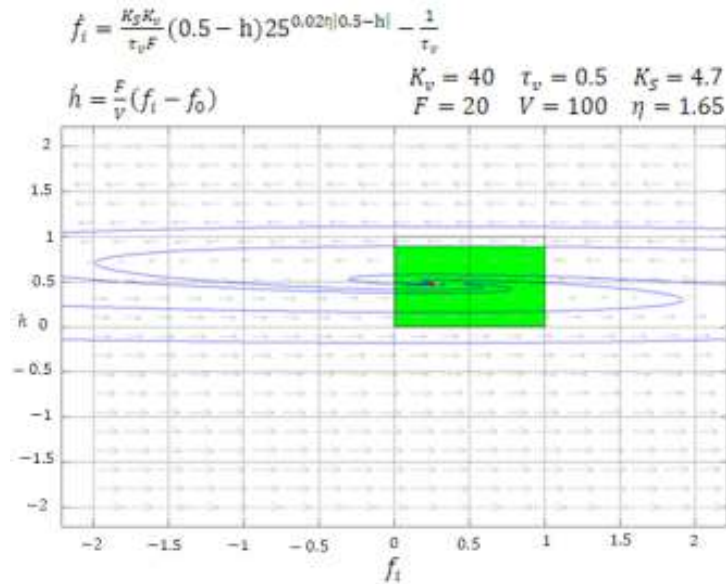


Fig. 4.11 Retrato de fase del sistema con los valores de las constantes dados en 4.2.6

La Tabla 4.3 resume las características del único punto de equilibrio a partir de los valores propios de la matriz jacobiana obtenida en pplane ®.

**Tabla 4.3 Resumen de las características del punto de equilibrio del sistema (3)**

<b>Espiral estable</b>	(0.25,0.47)
<b>Matriz Jacobiana</b>	$\begin{bmatrix} -2 & 18.90 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}$
<b>Valores propios</b>	$-1 + 1.66i$ $-1 - 1.66i$

Interesa ahora analizar el comportamiento del sistema al realizar pruebas de robustez estructural mediante simulaciones variando parámetros como: el flujo máximo, la constante de tiempo del actuador de la válvula, la ganancia de la válvula, el flujo de salida y la posición de el punto de control, para mostrar que, después de estas variaciones de los parámetros, el sistema tiene un único punto de equilibrio asintóticamente estable y no presenta ni bifurcaciones, ni ciclos límite, ni tiempo de escape finito y caos.

#### 4.2.8 Pruebas de robustez

El comportamiento del punto de equilibrio se estudia variando las diversas magnitudes de los parámetros involucrados en el modelo del sistema (1) en rangos de trabajo normalmente usados. Los parámetros analizados fueron el flujo máximo  $F$ , constante de tiempo del actuador de la válvula  $\tau_v$ , ganancia de la válvula  $K_v$ , flujo de salida  $f_0$ , señal de referencia  $h_r$ . Estas pruebas mostraron que para los diferentes valores de los parámetros, el punto de equilibrio conservó su naturaleza como espiral o nodo estable y no mostró bifurcaciones, es decir valores en alguno de los parámetros para los cuales existen cambios cualitativos en las características del sistema.

Tampoco hay caos porque no hay presencia de trayectorias que comiencen cerca del punto de equilibrio y que se separen de éste en forma aleatoria, el sistema no mostró comportamientos estables e inestables simultáneamente.

Comenta Gordillo [17] que un punto de equilibrio que no sea estable en el sentido de Lyapunov se dice inestable. Este tipo de punto tiene la característica de que existen trayectorias que inician suficientemente cerca de él pero convergen a otro punto de equilibrio o a otro tipo de atractores como: los ciclos límite o los atractores caóticos o los cuasi-periódicos. Por otro lado la inestabilidad de un sistema también puede presentarse por la existencia de trayectorias que tiendan a infinito cuando el tiempo se acerca a un valor finito determinado. Este tipo de fenómeno se llama tiempo de escape finito y se observa que la gráfica temporal de la respuesta del sistema tiene una asíntota vertical en un valor determinado del tiempo.

En los barridos que se hicieron de los parámetros ninguna de las simulaciones mostró que el sistema tuviera presencia de ciclos límite u órbitas cerradas ni tampoco tiempo de escape finito debido a que el punto de equilibrio siempre era asintóticamente estable.

Para los distintos barridos que se realizaron en los valores de los parámetros  $F, K_v, \tau_v, f_0, h_r$ , cada una de las simulaciones, realizadas sobre pplane®, el sistema conservó las características topológicas del retrato de fase visto en la Figura 4.11 y por ende se puede concluir que es estructuralmente estable y robusto si se respeta la estructura del modelo.

La Tabla 4.4 muestra un resumen de algunos valores de los parámetros en un determinado rango de variación y la clasificación del punto de equilibrio encontrado en la aplicación pplane®. Se varió un parámetro a la vez dejando los demás fijos de acuerdo a la asignación de constantes dada en 4.2.6.

**Tabla 4.4 Resumen de la variación de parámetros del sistema**

**Variación del flujo máximo  $F$**

Parámetro	Valores del parámetro	Tipo de punto de equilibrio
$F$ $\left[ \frac{m^3}{min} \right]$	1	Espiral estable
	4	Espiral estable
	7	Espiral estable
	12	Espiral estable
	20	Espiral estable

**Variación de la ganancia de la válvula**

Parámetro	Valores del parámetro	Tipo de punto de equilibrio
$K_v$ $\left[ \frac{m^3}{min} \right]$ $\%$	8	Nodo estable
	10	Nodo estable
	20	Espiral estable
	30	Espiral estable
	50	Espiral estable

**Variación de la constante de tiempo del actuador de la válvula**

Parámetro	Valores del parámetro	Tipo de punto de equilibrio
$\tau_v$ $[min]$	0.1	Espiral estable
	0.2	Espiral estable
	0.3	Espiral estable
	0.4	Espiral estable
	0.5	Espiral estable

#### Variación del flujo de salida

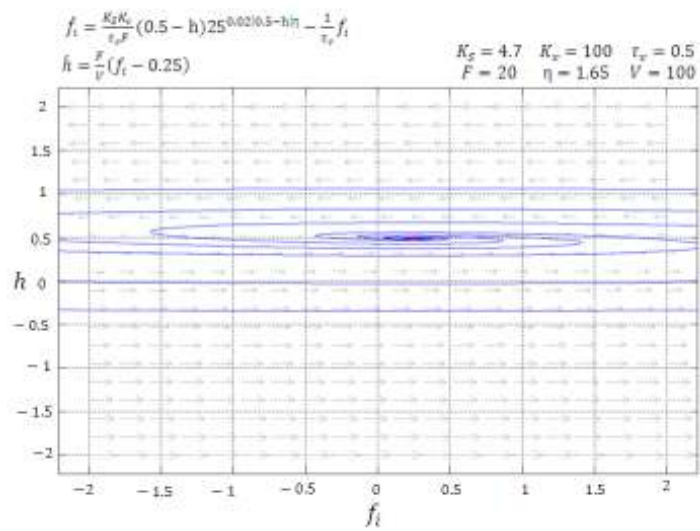
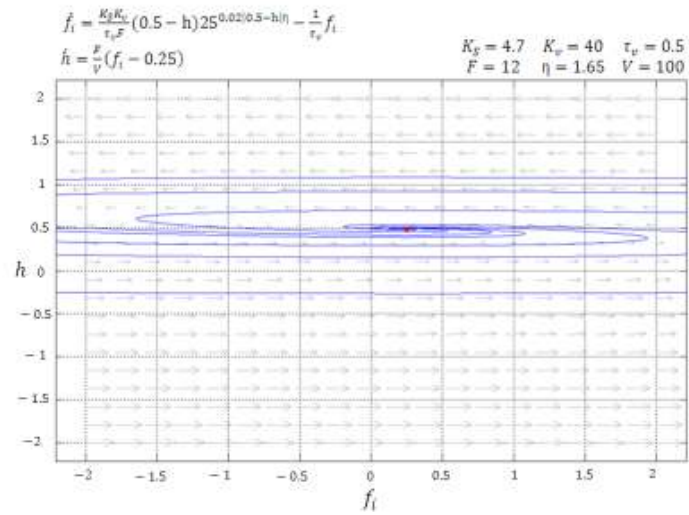
Parámetro	Valores del parámetro	Tipo de punto de equilibrio
$f_o$ $\left[ \frac{m^3}{min} \right]$	0.1	Espiral estable
	0.25	Espiral estable
	0.35	Espiral estable
	0.55	Espiral estable
	1	Espiral estable

#### Variación de la posición del punto de control

Parámetro	Valores del parámetro	Tipo de punto de equilibrio
$h_r$ $\left[ \frac{m}{m} \right]$	0.1	Espiral estable
	0.3	Espiral estable
	0.5	Espiral estable
	0.7	Espiral estable
	1	Espiral estable

La Figura 4.12 muestra algunos retratos de fase obtenidos con ciertos valores de los parámetros, donde los resultados de las simulaciones realizadas en pplane ® (ver anexo F) reafirmaron las conclusiones del capítulo anterior en cuanto a que en todas ellas se evidenció: a) punto de equilibrio estable (ver sección 3.3.4) b) unicidad del punto de equilibrio (ver sección 3.3.3) c) la no presencia de ciclos limite porque no se mostraron trayectorias cerradas incluso buscándolas con la aplicación pplane ® lo cual coincide con lo expuesto en la sección 3.3.8 d) no presencia de bifurcaciones ya que al variar los parámetros del sistema el retrato de fase conservó sus características topológicas lo cual coincide con lo expuesto en la sección 3.3.9 e) la no presencia de caos porque no aparecen trayectorias que comiencen cerca del único punto de equilibrio y que se separan de éste en forma impredecible y que sea imposible realizar predicciones a largo plazo lo cual coincide con lo expuesto en la sección 3.3.10 f) tiempo de escape finito ya que ninguna respuesta temporal de la salida del sistema mostró tener asíntotas verticales (ver sección 3.3.12).

En resumen para las variaciones de los parámetros presentadas en la tabla 4.4 el retrato de fase clasifica el único punto de equilibrio como espiral o nodo estable.



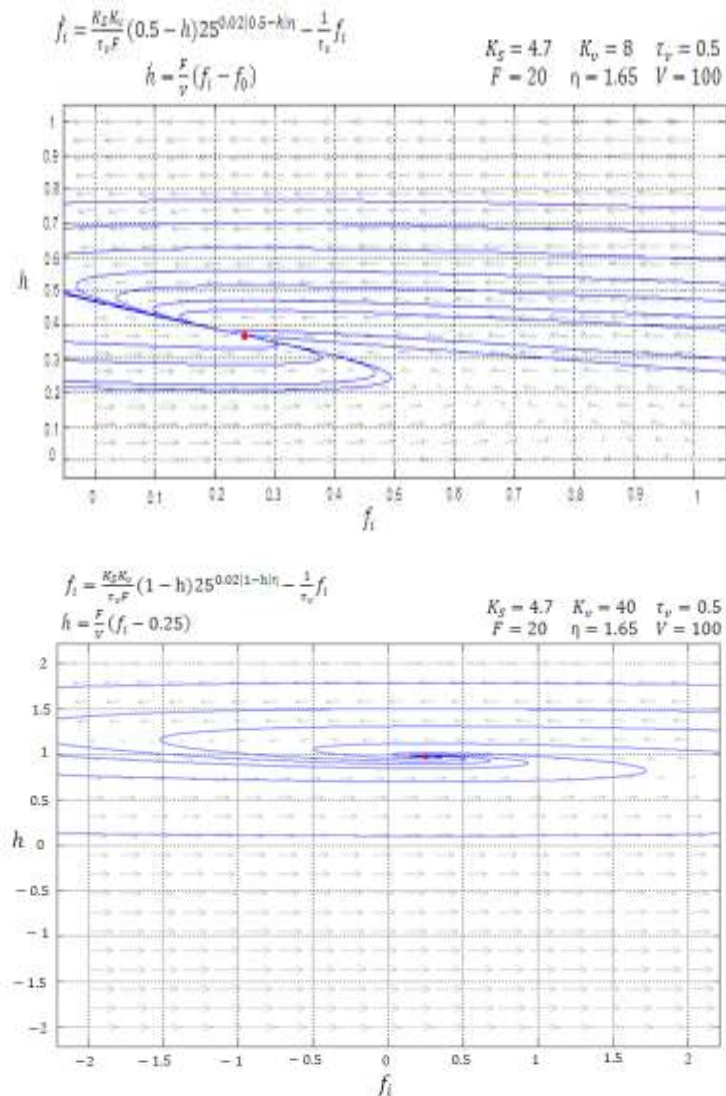


Fig. 4.12 Retratos de fase del sistema para diferentes valores de las constantes presentadas en la tabla 4.4

En el anexo F se muestran figuras adicionales donde se hacen variaciones en los diferentes parámetros. Todos los puntos de equilibrio dieron estables.

A continuación se hace una comparación de los diferentes índices de desempeño del sistema sin perturbación y gobernado por cada uno de los cuatro controladores: el proporcional, el de error cuadrático, el exponencial polinómico y el proporcional integral derivativo PID, al variar en primer lugar el valor del punto de control y en segundo lugar el flujo de salida.

Para leer los diferentes índices de desempeño se implementaron bloques en simulink con las respectivas expresiones que involucran cada una de las definiciones dadas en 4.2.2 y se desarrolló un programa en MatLab® para leer los índices: el porcentaje del máximo pico de altura % MPH, la integral del valor absoluto del error IAE, el trabajo sobre la variable manipulada TVM, el offset y el tiempo de asentamiento  $T_s$ , para la lectura de este último índice se usó como criterio el 0.01% de la primera lectura de  $\bar{h} \pm \sigma$  donde  $\bar{h}$  es el valor promedio de las alturas y  $\sigma$  es la desviación estándar de las alturas.

Para simular efectos físicos en el sistema se implementó un ruido blanco a la lectura de la señal de nivel con una potencia de  $0.0001 \frac{[m]}{[m]}$ .

### 4.3 SISTEMA NO PERTURBADO FRENTE A LOS CUATRO CONTROLADORES

A continuación el sistema es controlado por cada uno de los cuatro controladores y se realiza una comparación de los diferentes índices de desempeño, sin la influencia de una perturbación.

#### 4.3.1 Respuesta del sistema frente a los diferentes controladores sin una señal de perturbación

La respuesta del sistema frente a cada uno de los controladores se muestra en la Figura 4.13, para una señal de referencia  $h_r = 0.5 \frac{[m]}{[m]}$  y una fracción del flujo de salida constante de  $f_o = 0.25 \frac{[m^3]}{[min]}$  y los valores dados en la tabla 4.2.

En esta se observa que la medida del nivel obtenida con ley de control PID fluctúa más cerca alrededor del punto de control, en oposición a la medida de nivel obtenida con la ley de error cuadrático. El comportamiento del nivel con ley de control exponencial polinómica y proporcional es similar, siendo el sistema con ley de control exponencial polinómica el que más se acerca al la medida del punto de control. El mayor valor pico en la medida del nivel lo presenta el sistema con ley de control PID y el menor con ley de control de error cuadrático. Estas observaciones se validan a continuación con las comparaciones de los diferentes índices de desempeño dados por el sistema con cada uno de los cuatro controladores, al variar la posición del punto de control y la fracción de flujo de salida.

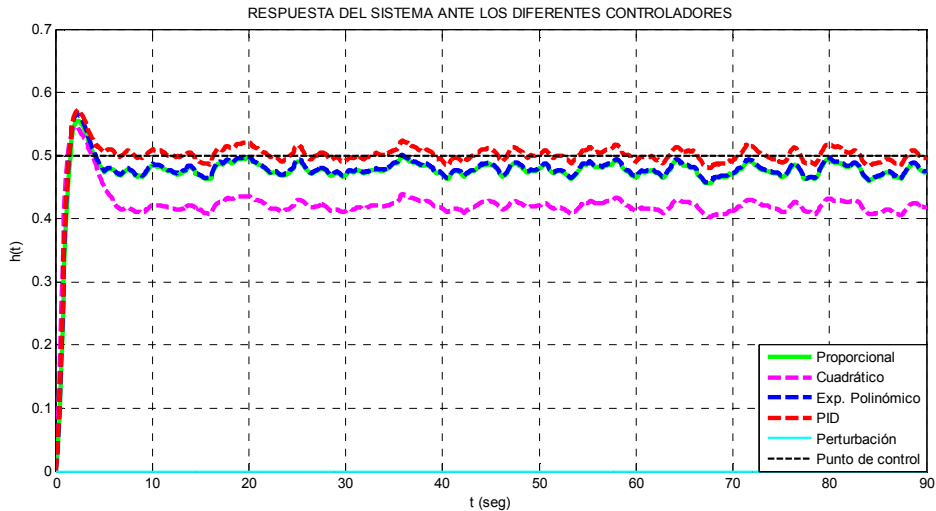


Fig. 4.13 Salida del sistema con cada uno de los controladores sin la influencia de una perturbación

### 4.3.2 Índices de desempeño del sistema sin perturbación

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en los índices de desempeño del sistema no perturbado, cuando se varía la posición del punto de control y la fracción de flujo de salida. Con los valores obtenidos de los índices y la Tabla 4.1 se tiene información suficiente para determinar la mejor ley de control de nivel en una tarea específica.

#### Comparación de los índices de desempeño al variar la posición del punto de control ( $h_r$ )

Los valores mostrados en la Tabla 4.5 fueron obtenidos para valores de  $h_r$  en el intervalo  $(0,1]$ . Para observar los efectos en los diferentes índices de desempeño del sistema controlado por cada uno de los cuatro controladores, se varía el punto de control implementando cambios del 4% en este a partir de

$h_r = 0.46 \frac{[m]}{[m]}$ , dejando constante el flujo de salida en la planta en  $f_o = 0.25 \frac{[m^3]}{[m \cdot \text{min}]}$ . Esta tabla muestra

los diferentes valores de los índices de desempeño bajo esta condición, en ella se observa que los menores valores para el %MPH los obtiene el sistema con ley de control PID, en oposición a este está el sistema con ley de control cuadrático. El sistema con ley de control exponencial polinómica mostró en este índice tener un comportamiento intermedio. El controlador con error cuadrático mostró inestabilidad cuando el  $h_r$  sobrepasa el valor de  $0.54 \frac{[m]}{[m]}$  y se pudo observar que en general este sólo es estable en una pequeña región de variación  $(0,0.54]$  del punto de control.

En general el sistema con ley de control exponencial polinómica mostró ser más rápido en estabilizarse en oposición al sistema con ley de control de error cuadrático. El sistema con ley de control PID presentó menor offset y menor IAE, en oposición al de error cuadrático. El sistema con menor valor en el TVM lo mostró el sistema con ley de control de error cuadrático en oposición al sistema con ley de control PID.



Lo que significa según la Tabla 4.1 que el sistema con mejor seguridad y mejor ahorro energético en el proceso es el que tiene ley de control PID y el que tiene mayor vida útil en la válvula es el que tiene ley de control de error cuadrático y la mejor exactitud la presenta la ley de control PID en oposición al de error cuadrático.

Según el coeficiente de variación la mayor heterogeneidad entre los índices de desempeño se presenta en el *offset*, lo que significa que este índice tiene un comportamiento diferente en el sistema gobernado por cada uno de los controladores y la mayor homogeneidad se presenta en el IAE, lo que significa que este índice tiene un comportamiento similar en el sistema gobernado por cada uno de los controladores.

En general la medida del control de nivel con ley de control PID presenta la mayor cantidad de menores índices de desempeño.

**Tabla 4.5 Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes puntos de control y sin la influencia de una perturbación**

Índice de desempeño	<i>hr</i>	Proporcional	Cuadrático	Exponencial polinómico	PID	Coficiente de Variación (%)
%MPH $\left[\frac{m}{m}\right]\%$	0,46	18,852	26,436	18,246	14,590	25,466
	0,50	16,956	29,666	18,368	14,638	33,582
	0,54	17,115	32,887	18,635	14,944	38,941
	0,60	17,2579	NC	18,8971	15,228	10,731
	0,64	17,3594	NC	19,2514	15,4361	10,996
$T_s$ [min]	0,46	9,500	9,800	7,800	9,300	9,788
	0,50	9,500	9,900	7,800	8,200	11,393
	0,54	7,900	21,000	9,500	8,300	53,565
	0,60	7,900	NC	7,800	8,300	0,033
	0,64	7,900	NC	7,800	8,400	0,040
Offset $\left[\frac{m}{m}\right]$	0,46	0,035	0,090	0,034	0,012	30,576
	0,50	0,035	0,089	0,034	0,012	77,368
	0,54	0,035	0,089	0,034	0,012	77,368
	0,60	0,035	NC	0,034	0,012	48,093
	0,64	0,035	NC	0,034	0,012	48,093
IAE $\left[\frac{m}{m}\right]$ [min]	0,46	4,194	9,727	4,083	3,481	54,377
	0,50	4,230	9,703	4,119	3,518	53,605
	0,54	4,267	9,690	4,156	3,560	52,873
	0,60	4,3263	NC	4,2195	3,6249	9,315
	0,64	4,3684	NC	4,2668	3,6699	9,201
TVM $\left[\frac{m^3}{min}\right]$ [min]	0,46	49,631	37,980	51,430	61,790	19,430
	0,50	49,986	38,682	51,812	62,109	18,949
	0,54	50,310	39,376	52,182	62,469	18,519
	0,60	50,8828	NC	52,7894	62,925	11,656
	0,64	51,2459	NC	53,1645	63,2786	11,566

 Menor valor  
 Mayor valor  
 NC No converge

### Comparación de los índices de desempeño al variar la fracción del flujo de salida ( $f_o$ )

Los valores mostrados en la Tabla 4.6 fueron obtenidos para valores dados según la tabla 4.2 y variaciones de  $f_o$  en el intervalo  $(0,1]$ . Para observar los efectos en los diferentes índices de desempeño del sistema controlado por cada uno de los cuatro controladores, se varía el flujo de salida en este intervalo iniciando el

flujo de salida en  $f_o = 0.21 \frac{\left[\frac{m^3}{min}\right]}{\left[\frac{m^3}{min}\right]}$ , dejando constante la posición del punto de control en  $h_r = 0.5 \frac{[m]}{[m]}$ .

Esta tabla muestra los diferentes valores de los índices de desempeño bajo esta condición, en ella se observa que los menores valores para el %MPH los obtiene el sistema con ley de control PID, en oposición a este está el sistema con ley de control de error cuadrático. El sistema con ley de control exponencial polinómica mostró en este índice tener un comportamiento intermedio. El sistema con ley de control de

error cuadrático mostró inestabilidad cuando  $f_o$  es menor que  $0.19 \frac{\left[\frac{m^3}{min}\right]}{\left[\frac{m^3}{min}\right]}$  y se pudo observar que en general este sólo es estable en una pequeña región de variación de  $f_o$  que se encuentra en  $(0.19,1]$ .

En general el sistema con ley de control exponencial polinómica mostró ser más rápido en estabilizarse en oposición al sistema con ley de control PID. El sistema con ley de control PID presentó menor offset y menor IAE, en oposición al de error cuadrático. El sistema con menor valor en el TVM lo mostró el sistema con ley de control de error cuadrático en oposición al sistema con ley de control PID.

Lo que significa que el sistema con mejor seguridad y mejor ahorro energético en el proceso es el que tiene ley de control PID y el que tiene mayor vida útil en la válvula es el que tiene ley de control de error cuadrático y la mejor exactitud la presentó la ley de control PID en oposición al de error cuadrático.



Según el coeficiente de variación la mayor heterogeneidad entre los índices de desempeño se presenta en el *offset*, lo que significa que este índice tiene un comportamiento diferente en el sistema gobernado por cada uno de los controladores y la mayor homogeneidad se presenta en el  $T_s$ , lo que significa que este índice tienen un comportamiento similar en el sistema gobernado por cada uno de los controladores.

En general la medida del control de nivel con ley de control PID presenta la mayor cantidad de menores índices de desempeño.

El sistema sin perturbación y con ley de control proporcional mostró resultados similares al del sistema con ley exponencial polinómica al variar tanto el punto de control como el flujo de salida.

**Tabla 4.6 Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes fracciones del flujo de salida y sin la influencia de una perturbación**

Índice de desempeño	$f_0$	Proporcional	Cuadrático	Exponencial polinómico	PID	Coefficiente de Variación (%)
%MPH $\left[\frac{m}{m}\right]\%$	0,21	17,051	29,550	18,501	15,678	31,407
	0,25	16,956	29,666	18,368	14,638	33,582
	0,29	16,771	29,788	18,355	13,776	35,614
	0,33	16,619	29,929	18,222	12,823	38,026
	0,38	16,545	30,089	18,087	11,637	41,004
$T_s$ [min]	0,21	7,800	7,800	7,800	8,900	6,811
	0,25	9,500	9,900	7,800	8,200	11,393
	0,29	9,500	9,800	9,500	13,100	16,761
	0,33	9,500	7,400	9,500	11,600	18,049
	0,38	7,800	7,600	7,200	13,400	32,710
Offset $\left[\frac{m}{m}\right]$	0,21	0,029	0,081	0,027	0,011	81,786
	0,25	0,035	0,089	0,034	0,012	77,378
	0,29	0,041	0,097	0,040	0,012	74,784
	0,33	0,047	0,104	0,045	0,013	72,748
	0,38	0,053	0,113	0,051	0,013	71,460
IAE $\left[\frac{m}{m}\right]$ [min]	0,21	3,906	8,776	3,832	3,537	50,152
	0,25	4,230	9,703	4,119	3,518	53,605
	0,29	4,604	10,560	4,461	3,507	55,692
	0,33	5,014	11,342	4,835	3,500	56,896
	0,38	5,574	12,262	5,349	3,498	57,591
TVM $\left[\frac{m^3}{min}\right]$ [min]	0,21	46,920	35,410	48,470	57,410	19,205
	0,25	49,990	38,680	51,810	62,109	18,949
	0,29	52,466	41,670	54,490	66,040	18,606
	0,33	54,411	44,450	56,737	69,293	18,167
	0,38	56,104	47,716	58,713	72,805	17,726

 Menor valor  
 Mayor valor

A continuación se analiza el sistema perturbado por: una señal pulso, una señal escalón y una señal que representa oleaje en la superficie del líquido, se hace una comparación de los diferentes índices de desempeño del sistema gobernado por cada uno de los cuatro controladores al variar el valor del punto de control, el flujo de salida y la amplitud de la señal de perturbación.

## 4.4 SISTEMA PERTURBADO FRENTE A LOS CUATRO CONTROLADORES

El sistema es controlado por cada uno de los cuatro controladores con la influencia de una perturbación, se presentan las respuestas de la medida del nivel dadas por el sistema y se comparan los diferentes índices de desempeño. En primer lugar la perturbación es un pulso rectangular, en segundo lugar es un escalón y en tercer lugar es un oleaje en la superficie del líquido.

### 4.4.1 Respuesta del sistema frente a los diferentes controladores con una señal de perturbación dada por un pulso rectangular

La respuesta del sistema perturbado mediante un pulso rectangular, que representa una perturbación de corta duración, frente a cada uno de los cuatro controladores se muestra en la Figura 4.14, para una señal de referencia  $h_r = 0.5 \frac{[m]}{[m]}$ , una fracción del flujo de salida constante de  $f_o = 0.25 \frac{[m^3]}{[m^3]}$ , una amplitud de pulso de  $A_p = 0.05 \frac{[m]}{[m]}$  el cual se presenta entre 40s y 45s y los valores dados en 4.2.6.

En esta se observa que la medida del nivel obtenida con ley de control PID fluctúa más cerca alrededor del punto de control, en oposición a la medida del nivel obtenida con la ley de error cuadrático. El comportamiento del nivel con ley de control exponencial polinómica y proporcional es similar, siendo el sistema con ley de control exponencial polinómica el que más se acerca al la medida del punto de control. El mayor valor pico en la medida del nivel lo presenta el sistema con ley de control PID y el menor con ley de control de error cuadrático. Estas observaciones se validan a continuación con las comparaciones de los diferentes índices de desempeño dados por el sistema con cada uno de los cuatro controladores, al variar la posición del punto de control, la fracción de flujo de salida y la amplitud del pulso.

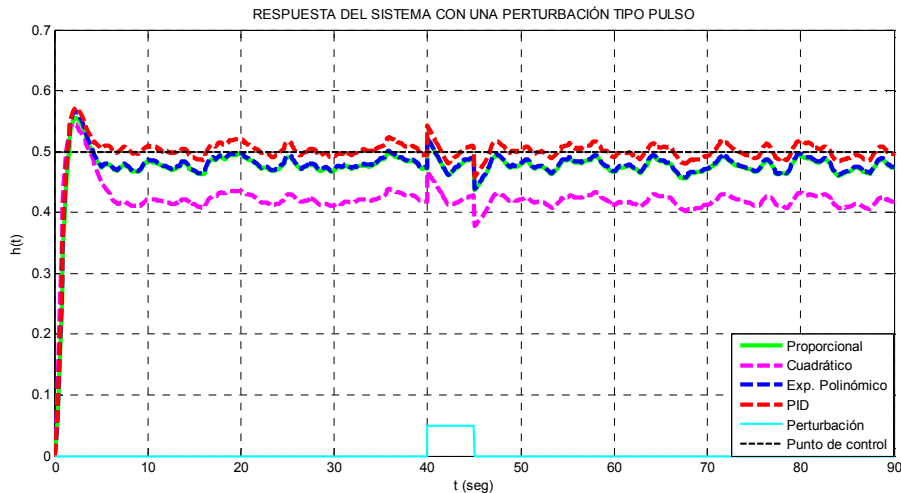


Fig. 4.14 Salida del sistema con cada uno de los controladores al ser perturbado por un pulso rectangular

#### 4.4.2 Índices de desempeño del sistema con una señal de perturbación dada por un pulso

A continuación se obtienen los índices de desempeño del sistema cuando está influenciado por una perturbación de corta duración y se varía la posición del punto de control, la fracción de flujo de salida y la amplitud del pulso.

##### Comparación de los índices de desempeño al variar la posición del punto de control ( $h_r$ )

Los valores mostrados en la Tabla 4.7 fueron obtenidos para valores de  $h_r$  en el intervalo  $(0,1]$ . Para observar los efectos en los diferentes índices de desempeño del sistema controlado por cada uno de los cuatro controladores, se varía el punto de control implementando cambios del 4% en este a partir de

$h_r = 0.46 \frac{[m]}{[m]}$ , dejando constante el flujo de salida en la planta en  $f_o = 0.25 \frac{[m^3]}{[m^3]}$  y una amplitud de

pulso  $A_p = 0.05 \frac{[m]}{[m]}$  el cual se presenta entre 40s y 45s y los valores dados en 4.2.6. Esta tabla muestra los diferentes valores de los índices de desempeño bajo esta condición, en ella se observa que los menores valores para el %MPH los obtiene el sistema con ley de control PID, en oposición a este está el sistema con ley de control proporcional y exponencial polinómico. El controlador con error cuadrático mostró inestabilidad cuando el  $h_r$  sobrepasa el valor de  $0.54 \frac{[m]}{[m]}$ , y se pudo observar que en general este sólo es estable en una pequeña región de variación  $(0,0.54]$  del punto de control.

En general el sistema con ley de control PID mostró ser más rápido en estabilizarse en oposición al sistema con ley de control exponencial polinómico. El sistema con ley de control PID presentó menor offset y menor IAE, en oposición al de error cuadrático. El sistema con menor valor en el TVM lo mostró el sistema con ley de control de error cuadrático en oposición al sistema con ley de control PID.



Lo que significa según la Tabla 4.1 que el sistema con mejor seguridad y mejor ahorro energético en el proceso es el que tiene ley de control PID y el que tiene mayor vida útil en la válvula es el que tiene ley de control de error cuadrático y la mejor exactitud la presentó la ley de control PID en oposición al de error cuadrático.

Según el coeficiente de variación la mayor heterogeneidad entre los índices de desempeño se presenta en el *offset*, lo que significa que este índice tiene un comportamiento diferente en el sistema gobernado por cada uno de los controladores y la mayor homogeneidad se presenta en el  $T_s$ , lo que significa que este índice tiene un comportamiento similar en el sistema gobernado por cada uno de los controladores.

En general la medida del control de nivel con ley de control PID y bajo la influencia de una perturbación pulso presenta mejores resultados en los índices de desempeño, excepto en el TVM.

**Tabla 4.7 Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes posiciones del punto de control y perturbado por un pulso**

Índice de desempeño	<i>hr</i>	Proporcional	Cuadrático	Exponencial polinómico	PID	Coefficiente de Variación (%)
%MPH $\frac{[m]}{[m]}%$	0,46	0,045	0,046	0,044	0,044	2,543
	0,50	0,045	0,046	0,044	0,043	1,792
	0,54	0,045	0,037	0,045	0,044	8,421
	0,60	0,045	NC	0,045	0,044	0,022
	0,64	0,045	NC	0,045	0,044	0,022
$T_s$ [min]	0,46	49,000	48,700	49,300	48,700	0,587
	0,50	49,000	49,100	49,100	48,700	0,388
	0,54	49,000	47,900	49,000	48,700	1,068
	0,60	48,700	NC	49,000	48,700	0,004
	0,64	48,700	NC	49,000	48,700	0,004
Offset $\frac{[m]}{[m]}$	0,46	0,035	0,089	0,034	0,012	77,378
	0,50	0,035	0,089	0,034	0,012	77,378
	0,54	0,035	0,089	0,034	0,012	77,378
	0,60	0,035	NC	0,034	0,012	0,481
	0,64	0,035	NC	0,034	0,012	0,481
IAE $\frac{[m]}{[m]} [min]$	0,46	4,208	9,710	4,097	3,501	53,986
	0,50	4,245	9,686	4,132	3,538	53,216
	0,54	4,282	9,673	4,169	3,580	52,488
	0,60	4,341	NC	4,233	3,645	0,092
	0,64	4,383	NC	4,280	3,690	0,091
TVM $\frac{[m^3]}{[min]} [min]$	0,46	49,460	38,009	51,275	61,678	19,351
	0,50	49,816	38,717	51,653	62,005	18,872
	0,54	50,136	39,408	52,020	62,346	18,434
	0,60	50,700	NC	52,62	62,8	0,117
	0,64	51,073	NC	53,003	63,158	0,116

 Menor valor  
 Mayor valor  
 NC No converge

### Comparación de los índices de desempeño al variar la fracción del flujo de salida ( $f_o$ )

Los valores mostrados en la Tabla 4.8 fueron obtenidos para valores dados según la tabla 4.2 y variaciones de  $f_o$  en el intervalo  $(0,1]$ . Para observar los efectos en los diferentes índices de desempeño del sistema controlado por cada uno de los cuatro controladores, se varía el flujo de salida en este intervalo a partir de

$f_o = 0.21 \frac{\left[\frac{m^3}{min}\right]}{\left[\frac{m^3}{min}\right]}$ , dejando constante la posición del punto de control en  $h_r = 0.5 \frac{[m]}{[m]}$  y una amplitud de

pulso  $A_p = 0.05 \frac{[m]}{[m]}$  el cual se presenta entre 40s y 45s. Esta tabla muestra los diferentes valores de

los índices de desempeño bajo esta condición, en ella se observa que los menores valores para el %MPH los obtiene el sistema con ley de control PID, en oposición a este está el sistema con ley de control de error cuadrático y el proporcional. El sistema con ley de control exponencial polinómica mostró en este índice tener un comportamiento intermedio. El sistema con ley de control de error cuadrático mostró inestabilidad

cuando  $f_o$  es menor que  $0.18 \frac{\left[\frac{m^3}{min}\right]}{\left[\frac{m^3}{min}\right]}$  y se pudo observar que en general este sólo es estable en una pequeña región de variación de  $f_o$  que se encuentra en  $(0.18,1]$ .

En general el sistema con ley de control proporcional mostró ser más rápido en estabilizarse en oposición al sistema con ley de control PID. El sistema con ley de control PID presentó menor offset y menor IAE, en oposición al de error cuadrático. El sistema con menor valor en el TVM lo mostró el sistema con ley de control de error cuadrático en oposición al sistema con ley de control PID.



Lo que significa según la Tabla 4.1 que el sistema con mejor seguridad y mejor ahorro energético en el proceso es el que tiene ley de control PID y el que tiene mayor vida útil en la válvula es el que tiene ley de control de error cuadrático y la mejor exactitud la presentó la ley de control PID en oposición al de error cuadrático.

Según el coeficiente de variación la mayor heterogeneidad entre los índices de desempeño se presenta en el *offset*, lo que significa que este índice tiene un comportamiento diferente en el sistema gobernado por cada uno de los controladores y la mayor homogeneidad se presenta en el  $T_s$ , lo que significa que este índice tiene un comportamiento similar en el sistema gobernado por cada uno de los controladores.

En general la medida del control de nivel con ley de control PID y bajo la influencia de una perturbación pulso presenta mejores resultados en los índices de desempeño, excepto en el TVM.

**Tabla 4.8 Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes fracciones del flujo de salida y perturbado por un pulso**

Índice de desempeño	$f_0$	Proporcional	Cuadrático	Exponencial polinómico	PID	Coefficiente de Variación (%)
%MPH $\frac{[m]}{[m]}\%$	0,21	0,044	0,045	0,043	0,043	1,3
	0,25	0,045	0,046	0,044	0,043	1,792
	0,29	0,046	0,046	0,045	0,044	1,532
	0,33	0,047	0,046	0,046	0,045	1,912
	0,42	0,049	0,046	0,048	0,047	2,643
$T_s$ [min]	0,21	46,700	48,600	46,700	48,700	2,363
	0,25	49,000	49,100	49,300	48,700	0,51
	0,29	49,100	49,100	48,600	46,600	2,462
	0,33	49,200	49,700	49,500	51,200	1,785
	0,42	49,200	49,700	48,400	51,700	2,826
Offset $\frac{[m]}{[m]}$	0,21	0,029	0,081	0,027	0,011	81,787
	0,25	0,035	0,095	0,034	0,012	77,378
	0,29	0,041	0,097	0,04	0,012	74,784
	0,33	0,047	0,104	0,045	0,013	72,748
	0,42	0,058	0,118	0,056	0,013	70,971
IAE $\frac{[m]}{[m]}$ [min]	0,21	3,918	8,759	3,844	3,560	49,739
	0,25	4,245	9,685	4,132	3,538	53,216
	0,29	4,618	10,54	4,475	3,525	55,337
	0,33	5,029	11,34	4,849	3,518	56,58
	0,42	6,054	12,946	5,795	3,518	57,562
TVM $\frac{[m^3]}{[min]}$ [min]	0,21	46,819	35,426	48,365	57,352	19,153
	0,25	49,816	38,717	51,653	62,005	18,872
	0,29	52,277	41,721	54,293	65,888	18,499
	0,33	54,229	44,504	56,541	69,082	18,026
	0,42	57,103	50,193	59,885	74,891	17,206

 Menor valor  
 Mayor valor

### Comparación de los índices de desempeño al variar la amplitud del pulso ( $A_p$ )

Los valores mostrados en la Tabla 4.9 fueron obtenidos para valores dados según la tabla 4.2 y variaciones de  $A_p$  en el intervalo  $(0,0.16]$ . Para observar los efectos en los diferentes índices de desempeño del sistema controlado por cada uno de los cuatro controladores, se varía la amplitud del pulso en este intervalo a partir de  $A_p = 0.03 \frac{[m]}{[m]}$  el cual se presenta entre 40s y 45s, dejando constante la posición del

punto de control  $h_r = 0.5 \frac{[m]}{[m]}$  y el flujo de salida  $f_o = 0.25 \frac{\frac{[m^3]}{[min]}}{\frac{[m^3]}{[min]}}$ . Esta tabla muestra los diferentes

valores de los índices de desempeño bajo esta condición, en ella se observa que los menores valores para el %MPH los obtiene el sistema con ley de control PID, en oposición a este está el sistema con ley de control proporcional y de error cuadrático. El sistema con ley de control exponencial polinómica mostró en este índice tener un comportamiento intermedio. El sistema con ley de control de error cuadrático mostró inestabilidad cuando  $A_p$  es mayor que  $0.16 \frac{[m]}{[m]}$  y se pudo observar que, en general, este sólo es estable en una pequeña región de variación de  $A_p$  que se encuentra en  $(0,0.16]$ .

Cuando la amplitud del pulso aumenta se observa que el sistema con ley de control proporcional es mas rápido en estabilizarse en oposición al sistema con ley de control PID. El sistema con ley de control PID presentó menor offset y menor IAE, en oposición al de error cuadrático. El sistema con menor valor en el TVM lo mostró el sistema con ley de control de error cuadrático en oposición al sistema con ley de control PID.



Lo que significa según la Tabla 4.1 que el sistema con mejor seguridad y mejor ahorro energético en el proceso es el que tiene ley de control PID y el que tiene mayor vida útil en la válvula es el que tiene ley de control de error cuadrático y la mejor exactitud la presenta la ley de control PID y el proporcional en oposición al de error cuadrático.

Según el coeficiente de variación la mayor heterogeneidad entre los índices de desempeño se presenta en el *offset*, lo que significa que este índice tiene un comportamiento diferente en el sistema gobernado por cada uno de los controladores y la mayor homogeneidad se presenta en el %MPH y el  $T_s$ , lo que significa que estos índices tienen un comportamiento similar en el sistema gobernado por cada uno de los controladores.

En general la medida del control de nivel con ley de control PID y bajo la influencia de una perturbación pulso presenta mejores resultados en los índices de desempeño, excepto en el TVM.

**Tabla 4.9 Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes valores en la amplitud de la perturbación tipo pulso**

Índice de desempeño	Amplitud del pulso (Ap)	Proporcional	Cuadrático	Exponencial polinómico	PID	Coefficiente de Variación (%)
%MPH $\left[\frac{m}{m}\right]\%$	0,03	0,025	0,025	0,025	0,023	4,016
	0,05	0,045	0,046	0,044	0,043	1,792
	0,07	0,065	0,066	0,064	0,064	1,487
	0,16	0,154	0,151	0,153	0,154	0,716
	0,18	0,173	NC	0,172	0,173	0,004
$T_s$ [min]	0,03	49,000	46,900	49,000	46,700	2,657
	0,05	49,000	49,100	49,300	48,700	0,510
	0,07	48,700	48,700	49,100	51,800	3,016
	0,16	49,100	55,000	51,100	54,300	5,2805
	0,18	49,100	NC	48,700	54,500	0,064
Offset $\left[\frac{m}{m}\right]$	0,03	0,035	0,089	0,034	0,012	77,379
	0,05	0,035	0,089	0,034	0,012	77,379
	0,07	0,035	0,089	0,034	0,012	77,379
	0,16	0,035	0,089	0,034	0,012	77,379
	0,18	0,035	NC	0,034	0,012	0,4805
IAE $\left[\frac{m}{m}\right]$ [min]	0,03	4,236	9,697	4,124	3,518	53,513
	0,05	4,275	9,686	4,132	3,538	53,216
	0,07	4,261	9,673	4,149	3,577	52,707
	0,16	4,459	9,622	4,348	3,849	48,737
	0,18	4,522	NC	4,411	3,940	0,072
TVM $\left[\frac{m^3}{min}\right]$ [min]	0,03	49,883	38,704	51,721	62,100	18,939
	0,05	49,816	38,717	51,653	62,005	18,872
	0,07	49,811	38,756	51,641	61,942	18,793
	0,16	49,670	38,811	51,476	61,235	18,271
	0,18	49,640	NC	51,439	61,053	0,114

 Menor valor  
 Mayor valor  
 NC No converge

A continuación se analiza el sistema perturbado por una señal escalón, se hace una comparación de los diferentes índices de desempeño del sistema gobernado por cada uno de los cuatro controladores al variar el valor del punto de control, el flujo de salida y la amplitud de la señal del escalón.

#### 4.4.3 Respuesta del sistema frente a los diferentes controladores con una señal de perturbación dada por un escalón

La respuesta del sistema perturbado mediante un escalón, que representa una perturbación de larga duración, frente a cada uno de los cuatro controladores se muestra en la Figura 4.15, para una señal de referencia  $h_r = 0.5 \frac{[m]}{[m]}$ , una fracción del flujo de salida constante de  $f_o = 0.25 \frac{[m^3]}{[min]}$ , una amplitud del escalón de  $A_e = 0.05 \frac{[m]}{[m]}$  el cual se presenta después de 40s y los valores dados en 4.2.6.

En esta se observa que la medida del nivel obtenida con ley de control PID fluctúa más cerca alrededor del punto de control, en oposición a la medida de nivel obtenida con la ley de error cuadrático. El comportamiento del nivel con ley de control exponencial polinómica y proporcional es similar, siendo el sistema con ley de control exponencial polinómica el que más se acerca al la medida del punto de control. El mayor valor pico en la medida del nivel lo presenta el sistema con ley de control PID y el menor con ley de control de error cuadrático. Estas observaciones se validan a continuación con las comparaciones de los diferentes índices de desempeño dados por el sistema con cada uno de los cuatro controladores, al variar la posición del punto de control, la fracción de flujo de salida y la amplitud del escalón.

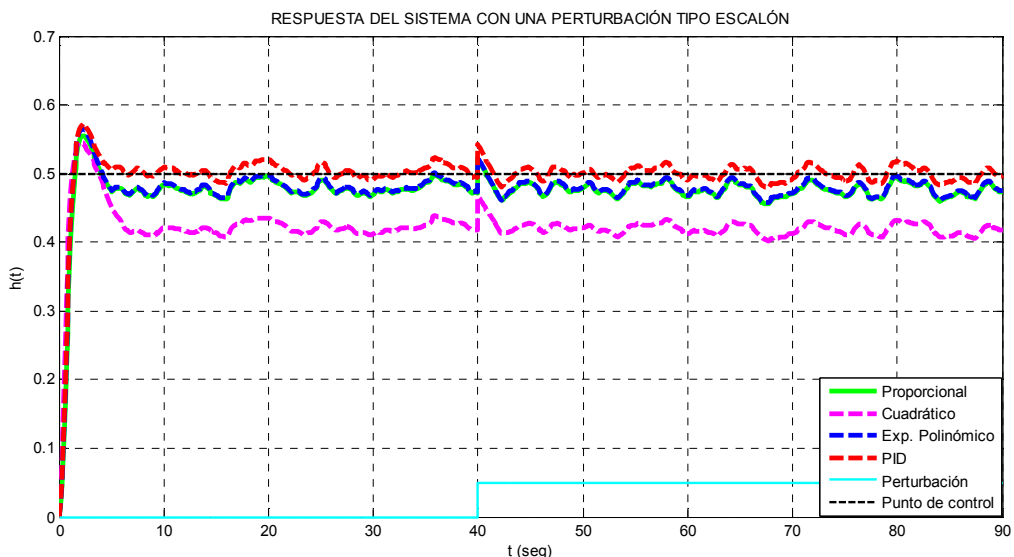


Fig. 4.15 Salida del sistema con cada uno de los controladores al ser perturbado por un escalón

#### 4.4.4 Índices de desempeño del sistema con una señal de perturbación dada por un escalón

A continuación se obtienen los índices de desempeño del sistema cuando está influenciado por una perturbación de larga duración y se varía la posición del punto de control, la fracción de flujo de salida y la amplitud del escalón.

##### Comparación de los índices de desempeño al variar la posición del punto de control ( $h_r$ )

Los valores mostrados en la Tabla 4.10 fueron obtenidos para valores de  $h_r$  en el intervalo (0,1]. Para observar los efectos en los diferentes índices de desempeño del sistema controlado por cada uno de los cuatro controladores, se varía el punto de control implementando cambios en este intervalo a partir de

$h_r = 0.46 \frac{[m]}{[m]}$ , dejando constante el flujo de salida en la planta en  $f_o = 0.25 \frac{[m^3]}{[min]}$  y una amplitud del

escalón  $A_e = 0.05 \frac{[m]}{[m]}$  el cual se presenta después de 40s y los valores dados en 4.2.6. Esta tabla muestra los diferentes valores de los índices de desempeño bajo esta condición, en ella se observa que los menores valores para el %MPH los obtienen el sistema con ley de control PID y exponencial polinómico, en oposición a este está el sistema con ley de control proporcional. El controlador con error cuadrático mostró inestabilidad cuando el  $h_r$  sobrepasa el valor de  $0.54 \frac{[m]}{[m]}$  y se pudo observar que en general este sólo es estable en una pequeña región de variación (0,0.54] del punto de control.

En general el sistema con ley de control proporcional y exponencial polinómico mostraron ser más rápidos en estabilizarse en oposición al sistema con ley de control PID. El sistema con ley de control PID presentó menor offset y menor IAE, en oposición al de error cuadrático. El sistema con menor valor en el TVM lo mostró el sistema con ley de control de error cuadrático y proporcional en oposición al sistema con ley de control PID.



Lo que significa según la Tabla 4.1 que el sistema con mejor seguridad y mejor ahorro energético en el proceso es el que tiene ley de control PID y el que tiene mayor vida útil en la válvula es el que tiene ley de control de error cuadrático y la mejor exactitud la presenta la ley de control PID en oposición al de error cuadrático.

Según el coeficiente de variación la mayor heterogeneidad entre los índices de desempeño se presenta en el *offset*, lo que significa que este índice tiene un comportamiento diferente en el sistema gobernado por cada uno de los controladores y la mayor homogeneidad se presenta en el  $T_s$ , lo que significa que estos índices tienen un comportamiento similar en el sistema gobernado por cada uno de los controladores.

En general la medida del control de nivel con ley de control PID y bajo la influencia de una perturbación escalón presenta mejores resultados en los índices de desempeño, excepto en el  $T_s$  y el TVM.

Tabla 4.10 Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes posiciones del punto de control y perturbado por un escalón

Índice de desempeño	<i>hr</i>	Proporcional	Cuadrático	Exponencial polinómico	PID	Coefficiente de Variación (%)
%MPH $\left[\frac{m}{m}\right]\%$	0,46	0,045	0,046	0,044	0,044	2,604
	0,50	0,045	0,045	0,044	0,044	1,510
	0,54	0,045	0,038	0,044	0,044	7,762
	0,60	0,045	NC	0,044	0,044	0,012
	0,72	0,045	NC	0,043	0,044	0,015
$T_s$ [min]	0,46	48,600	45,800	48,600	49,100	3,127
	0,50	48,600	49,900	48,600	49,100	1,251
	0,54	48,600	64,500	48,600	49,100	14,934
	0,60	48,600	NC	48,600	49,100	0,006
	0,72	48,600	NC	45,700	49,100	0,038
Offset $\left[\frac{m}{m}\right]$	0,46	0,035	0,089	0,034	0,012	77,376
	0,50	0,035	0,090	0,034	0,012	77,376
	0,54	0,035	0,090	0,034	0,012	77,376
	0,60	0,035	NC	0,034	0,012	0,481
	0,72	0,035	NC	0,034	0,012	0,481
IAE $\left[\frac{m}{m}\right]$ [min]	0,46	4,180	9,670	4,070	3,487	54,096
	0,50	4,216	9,646	4,105	3,524	53,322
	0,54	4,253	9,633	4,142	3,566	52,589
	0,60	4,312	NC	4,206	3,631	0,090
	0,72	4,441	NC	4,360	3,769	0,087
TVM $\left[\frac{m^3}{min}\right]$ [min]	0,46	49,362	37,799	51,154	61,485	19,428
	0,50	49,717	38,506	51,532	61,808	18,944
	0,54	50,041	39,200	51,902	62,168	18,512
	0,60	50,61	NC	52,500	62,620	0,117
	0,72	51,64	NC	53,610	63,724	0,115

 Menor valor  
 Mayor valor  
 NC No converge

### Comparación de los índices de desempeño al variar la fracción del flujo de salida ( $f_o$ )

Los valores mostrados en la Tabla 4.11 fueron obtenidos para valores dados según la tabla 4.2 y variaciones de  $f_o$  en el intervalo  $(0,1]$ . Para observar los efectos en los diferentes índices de desempeño del sistema controlado por cada uno de los cuatro controladores, se varía el flujo de salida en este intervalo

a partir de  $f_o = 0.21 \frac{\frac{m^3}{min}}{\frac{m^3}{min}}$ , dejando constante la posición del punto de control en  $h_r = 0.5 \frac{[m]}{[m]}$  y una

amplitud de escalón  $A_e = 0.05 \frac{[m]}{[m]}$  el cual se presenta entre 40s y 45s. Esta tabla muestra los diferentes

valores de los índices de desempeño bajo esta condición, en ella se observa que los menores valores para el %MPH los obtiene el sistema con ley de control PID, en oposición a este está el sistema con ley de control proporcional. El sistema con ley de control exponencial polinómica mostró en este índice tener un comportamiento intermedio. El sistema con ley de control de error cuadrático mostró inestabilidad cuando

$f_o$  es menor que  $0.18 \frac{\frac{m^3}{min}}{\frac{m^3}{min}}$ , y se pudo observar que en general este sólo es estable en una pequeña

región de variación de  $f_o$  que se encuentra en  $(0.18,1]$ .

En general el sistema con ley de control de error cuadrático mostró ser más lento en estabilizarse y el más rápido fue el sistema con ley de control proporcional. El sistema con ley de control PID presentó menor offset y menor IAE, en oposición al de error cuadrático. El sistema con menor valor en el TVM lo mostró el sistema con ley de control de error cuadrático en oposición al sistema con ley de control PID.



Lo que significa según la Tabla 4.1 que el sistema con mejor seguridad y mejor ahorro energético en el proceso es el que tiene ley de control PID y el que tiene mayor vida útil en la válvula es el que tiene ley de control de error cuadrático y la mejor exactitud la presentó la ley de control PID en oposición al de error cuadrático.

Según el coeficiente de variación la mayor heterogeneidad entre los índices de desempeño se presenta en el *offset*, lo que significa que este índice tiene un comportamiento diferente en el sistema gobernado por cada uno de los controladores y la mayor homogeneidad se presenta en el %MPH lo que significa que este índice tiene un comportamiento similar en el sistema gobernado por cada uno de los controladores.

En general la medida del control de nivel con ley de control PID y bajo la influencia de una perturbación escalón presenta mejores resultados en los índices de desempeño, excepto en el  $T_s$  y el TVM.

**Tabla 4.11 Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes fracciones del flujo de salida y perturbado por un escalón**

Índice de desempeño	$f_o$	Proporcional	Cuadrático	Exponencial polinómico	PID	Coefficiente de Variación (%)
%MPH $\left[\frac{m}{m}\right]\%$	0,21	0,044	0,044	0,043	0,044	0,811
	0,25	0,045	0,045	0,044	0,044	1,510
	0,29	0,046	0,045	0,045	0,044	1,708
	0,33	0,047	0,046	0,046	0,045	1,598
	0,42	0,048	0,046	0,048	0,048	2,117
$T_s$ [min]	0,21	49,000	48,300	49,300	49,800	1,277
	0,25	48,600	49,900	48,600	49,100	1,251
	0,29	49,100	49,800	49,100	48,500	1,082
	0,33	46,800	48,500	46,800	48,500	2,059
	0,42	45,800	63,500	48,400	46,700	16,314
Offset $\left[\frac{m}{m}\right]$	0,21	0,029	0,081	0,027	0,011	81,784
	0,25	0,035	0,090	0,033	0,012	77,376
	0,29	0,041	0,097	0,040	0,012	74,782
	0,33	0,047	0,104	0,045	0,013	72,747
	0,42	0,058	0,119	0,056	0,013	70,970
IAE $\left[\frac{m}{m}\right]$ [min]	0,21	3,893	8,716	3,821	3,545	49,782
	0,25	4,216	9,646	4,105	3,524	53,322
	0,29	4,588	10,504	4,445	3,513	55,564
	0,33	4,998	11,294	4,820	3,506	56,711
	0,42	6,026	12,915	5,767	3,508	57,670
TVM $\left[\frac{m^3}{min}\right]$ [min]	0,21	46,649	35,207	48,176	57,095	19,210
	0,25	49,717	38,506	51,532	61,808	18,944
	0,29	52,209	41,516	54,219	65,754	18,591
	0,33	54,169	44,308	56,475	69,013	18,144
	0,42	57,009	50,006	59,798	74,839	17,318

 Menor valor  
 Mayor valor

### Comparación de los índices de desempeño al variar la amplitud del escalón ( $A_e$ )

Los valores mostrados en la Tabla 4.12 fueron obtenidos para valores dados según la tabla 4.2 y variaciones de  $A_e$  en el intervalo  $(0,0.16]$ . Para observar los efectos en los diferentes índices de desempeño del sistema controlado por cada uno de los cuatro controladores, se varía la amplitud del escalón en este intervalo a partir de  $A_e = 0.03 \frac{[m]}{[m]}$  el cual se presenta después de 40s, dejando

constante la posición del punto de control  $h_r = 0.5 \frac{[m]}{[m]}$  y el flujo de salida  $f_o = 0.25 \frac{\frac{[m^3]}{[min]}}{\frac{[m^3]}{[min]}}$ . Esta tabla

muestra los diferentes valores de los índices de desempeño bajo esta condición, en ella se observa que los menores valores para el %MPH los obtiene el sistema con ley de control exponencial polinómico, en oposición a este está el sistema con ley de control proporcional y de error cuadrático. El sistema con ley de control de error cuadrático mostró inestabilidad cuando  $A_e$  es mayor que  $0.16 \frac{[m]}{[m]}$  y se pudo observar que en general este sólo es estable en una pequeña región de variación de  $A_p$  que se encuentra en  $(0,0.16]$ .



En general el sistema con ley PID mostró ser más lento en estabilizarse en oposición al proporcional. El sistema con ley de control PID presentó menor offset y menor IAE, en oposición al de error cuadrático. El sistema con menor valor en el TVM lo mostró el sistema con ley de control de error cuadrático en oposición al sistema con ley de control PID.

Lo que significa según la Tabla 4.1 que el sistema con mejor seguridad en el proceso es el que tiene ley de control exponencial polinómica, mejor ahorro energético en el proceso es el que tiene ley de control PID y el que tiene mayor vida útil en la válvula es el que tiene ley de control de error cuadrático y la mejor exactitud la presentó la ley de control PID en oposición al de error cuadrático.

Según el coeficiente de variación la mayor heterogeneidad entre los índices de desempeño se presenta en el *offset*, lo que significa que este índice tiene un comportamiento diferente en el sistema gobernado por cada uno de los controladores y la mayor homogeneidad se presenta en el  $T_s$ , lo que significa que este índice tiene un comportamiento similar en el sistema gobernado por cada uno de los controladores.

**Tabla 4.12 Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes valores en la amplitud de la perturbación tipo escalón**

Índice de desempeño	Amplitud del escalón (Ae)	Proporcional	Cuadrático	Exponencial polinómico	PID	Coficiente de Variación (%)
%MPH $\frac{[m]}{[m]}%$	0,03	0,025	0,025	0,024	0,024	2,777
	0,05	0,045	0,045	0,044	0,044	1,510
	0,07	0,065	0,065	0,064	0,063	1,276
	0,16	0,153	0,151	0,151	0,153	0,770
	0,18	0,172	NC	0,171	0,174	0,007
$T_s$ [min]	0,03	48,600	49,900	48,600	45,700	3,684
	0,05	48,600	49,900	48,600	49,100	1,251
	0,07	48,600	45,700	49,100	49,900	3,787
	0,16	45,600	47,200	49,900	54,700	8,072
	0,18	45,500	NC	46,900	57,000	0,126
Offset $\frac{[m]}{[m]}$	0,03	0,035	0,089	0,034	0,012	77,377
	0,05	0,035	0,090	0,034	0,012	77,376
	0,07	0,035	0,090	0,033	0,012	77,374
	0,16	0,035	0,089	0,034	0,012	77,359
	0,18	0,035	NC	0,034	0,012	0,048
IAE $\frac{[m]}{[m]}$ [min]	0,03	4,220	9,671	4,109	3,514	53,521
	0,05	4,216	9,646	4,105	3,524	53,322
	0,07	4,220	9,622	4,111	3,547	52,962
	0,16	4,358	9,525	4,253	3,765	49,533
	0,18	4,407	NC	4,302	3,854	0,070
TVM $\frac{[m^3]}{[min]}$ [min]	0,03	49,820	38,583	51,636	61,921	18,936
	0,05	49,717	38,506	51,532	61,808	18,944
	0,07	49,674	38,464	51,481	61,702	18,914
	0,16	49,047	37,933	50,818	60,768	18,849
	0,18	48,854	NC	50,620	60,312	0,118

 Menor valor  
 Mayor valor  
 NC No converge

La influencia de las olas en el desempeño de un controlador de nivel puede ser complicado ya que el nivel medido es afectado por estos fenómenos ondulatorios en la superficie del líquido y esto no es deseable. A continuación se analizarán qué efectos tienen los fenómenos ondulatorios en los diferentes índices de desempeño cuando el sistema es gobernado por cada uno de los cuatro controladores.

#### 4.4.5 Efecto del oleaje en el sistema de control de nivel

Para simular el efecto de fenómenos ondulatorios (olas) en la superficie de un líquido, se ha implementado en simulink los bloques que se ilustran en la Figura 4.16, que representan de forma simple pequeñas olas en la superficie del líquido, de amplitud  $A_o = 0.01 \frac{[m]}{[m]}$  y una frecuencia de  $f = 1[Hz]$ . Como criterio de elección de estos valores para  $A_o$  y  $f$  se tomó el hecho de que muchos tanques industriales tienen presencia de olas cuando tienen un flujo de entrada y para minimizar el efecto negativo de estas en el controlador se ponen paneles rompe olas, sin embargo a pesar de estos, pueden llegar al sensor de nivel olas de pequeña amplitud a una cierta frecuencia. Se eligió esta frecuencia por estar dentro de un rango de frecuencias en perturbaciones no controlables según Marlin [32]. Para este caso se estimó experimentalmente que  $A_o$  tomara el valor del 1% del valor máximo del punto de control y el valor de  $f$  fuera el de una ola de periodo de un segundo.

En el anexo D se muestra el diagrama de bloques del sistema con cada uno de los cuatro controladores con el bloque que representa el fenómeno ondulatorio.

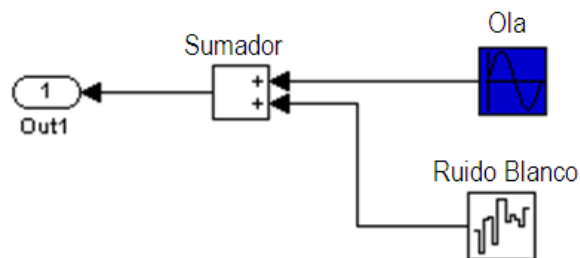


Fig. 4.16 Diagrama de bloques para representar un fenómeno ondulatorio en la superficie del líquido

#### 4.4.6 Respuesta del sistema frente a los diferentes controladores con una señal de perturbación dada por una ola

La respuesta del sistema perturbado mediante un fenómeno ondulatorio (olas), frente a cada uno de los cuatro controladores se muestra en la Figura 4.17, para una señal de referencia  $h_r = 0.5 \frac{[m]}{[m]}$ , una fracción

del flujo de salida constante de  $f_o = 0.25 \frac{[m^3]}{[m^3]}$ , una amplitud de la ola  $A_o = 0.01 \frac{[m]}{[m]}$  a una frecuencia de  $f = 1[Hz]$  y los valores dados en 4.2.6.

En esta se observa que la medida del nivel obtenida con ley de control PID fluctúa más cerca alrededor del punto de control, en oposición a la medida de nivel obtenida con la ley de error cuadrático. El comportamiento del nivel con ley de control exponencial polinómica y proporcional es similar, siendo el sistema con ley de control exponencial polinómica el que más se acerca al la medida del punto de control. El mayor valor pico en la medida del nivel lo presenta el sistema con ley de control PID y el menor con ley de control de error cuadrático. Estas observaciones se validan a continuación con las comparaciones de los diferentes índices de desempeño dados por el sistema con cada uno de los cuatro controladores, al variar la posición del punto de control, la fracción de flujo de salida y la frecuencia de la ola.

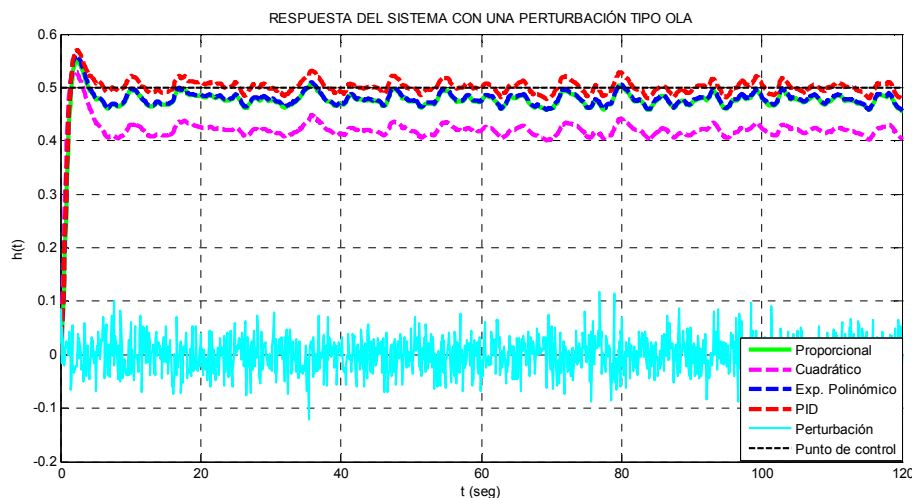


Fig. 4.17 Salida del sistema con cada uno de los controladores al ser perturbado por una ola

A continuación se muestra la comparación de los diferentes índices de desempeño cuando se varía el valor del punto de control, el valor del flujo de salida y la frecuencia del fenómeno ondulatorio en la superficie del líquido.

### Comparación de los índices de desempeño al variar la posición del punto de control ( $h_r$ )

Los valores mostrados en la Tabla 4.13 fueron obtenidos para valores de  $h_r$  en el intervalo (0,1]. Para observar los efectos en los diferentes índices de desempeño del sistema controlado por cada uno de los cuatro controladores, se varía el punto de control implementando cambios del 4% en este a partir de

$h_r = 0.46 \frac{[m]}{[m]}$ , dejando constante el flujo de salida en la planta en  $f_o = 0.25 \frac{[\frac{m^3}{min}]}{[\frac{m^3}{min}]}$ , una amplitud de la ola

de  $A_o = 0.01 \frac{[m]}{[m]}$  y una frecuencia de  $f = 1[Hz]$  y los valores dados en 4.2.6. En esta tabla se muestran los diferentes valores de los índices de desempeño bajo esta condición, en ella se observa que los menores valores para el %MPH los obtiene el sistema con ley de control de error cuadrático, en oposición a este está el sistema con ley de control exponencial polinómico. El controlador con ley de control de error cuadrático mostró inestabilidad cuando el  $h_r$  sobrepasa el valor de  $0.56 \frac{[m]}{[m]}$  y se pudo observar que en general este sólo es estable en una pequeña región de variación (0,0.56] del punto de control.

En general el sistema con ley de control exponencial polinómico mostró ser más lento en estabilizarse en oposición al de error cuadrático. El sistema con ley de control PID presentó menor offset y menor IAE, en oposición al sistema con ley de control cuadrático. El sistema con menor valor en el TVM lo mostró el sistema con ley de control cuadrático en oposición al sistema con ley de control PID.



Lo que significa según la Tabla 4.1 que el sistema con mejor seguridad en el proceso es el que tiene ley de control de error cuadrático, mejor ahorro energético en el proceso es el que tiene ley de control PID y el que tiene mayor vida útil en la válvula es el que tiene ley de control de error cuadrático y la mejor exactitud la presentó la ley de control PID en oposición al de error cuadrático.

Según el coeficiente de variación la mayor heterogeneidad entre los índices de desempeño se presenta en el *offset*, lo que significa que este índice tiene un comportamiento diferente en el sistema gobernado por cada uno de los controladores y la mayor homogeneidad se presenta en el  $T_s$ , lo que significa que estos índices tienen un comportamiento similar en el sistema gobernado por cada uno de los controladores.

En general la medida del control de nivel con ley de control PID y bajo la influencia de una perturbación tipo oleaje presenta mejores resultados en los índices de desempeño *offset* e *IAE*.

**Tabla 4.13 Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes posiciones del punto de control y perturbado por un oleaje**

Índice de desempeño	<i>hr</i>	Proporcional	Cuadrático	Exponencial polinómico	PID	Coefficiente de Variación (%)
%MPH $\left[\frac{m}{m}\right]\%$	0,46	0,029	0,022	0,029	0,028	13,067
	0,50	0,029	0,021	0,029	0,028	13,862
	0,54	0,029	0,020	0,029	0,028	17,068
	0,60	0,029	NC	0,030	0,028	0,020
	0,64	0,029	NC	0,030	0,028	0,020
$T_s$ [min]	0,46	45,100	49,900	50,500	45,300	6,026
	0,50	45,100	49,900	50,500	45,300	6,026
	0,54	45,100	46,800	50,500	45,300	5,330
	0,60	45,100	NC	45,200	45,300	0,002
	0,64	45,100	NC	45,200	45,300	0,002
Offset $\left[\frac{m}{m}\right]$	0,46	0,045	0,097	0,043	0,021	62,330
	0,50	0,045	0,097	0,043	0,021	62,330
	0,54	0,045	0,097	0,043	0,021	62,330
	0,60	0,045	NC	0,043	0,021	0,359
	0,64	0,045	NC	0,043	0,021	0,359
IAE $\left[\frac{m}{m}\right]$ [min]	0,46	4,173	9,729	4,063	3,489	54,547
	0,50	4,209	9,696	4,098	3,526	53,718
	0,54	4,245	9,664	4,133	3,563	52,906
	0,60	4,301	NC	4,187	3,626	0,090
	0,64	4,340	NC	4,232	3,670	0,088
TVM $\left[\frac{m^3}{min}\right]$ [min]	0,46	49,530	37,790	51,300	61,690	19,5513
	0,50	49,890	38,490	51,690	62,080	19,123
	0,54	50,220	39,200	52,030	62,390	18,643
	0,60	50,771	NC	52,654	62,897	0,118
	0,64	51,106	NC	53,010	63,254	0,117

 Menor valor  
 Mayor valor  
 NC No converge

### Comparación de los índices de desempeño al variar la fracción del flujo de salida ( $f_o$ )

Los valores mostrados en la Tabla 4.14 fueron obtenidos para valores dados según la tabla 4.2 y variaciones de  $f_o$  en el intervalo  $(0,1]$ . Para observar los efectos en los diferentes índices de desempeño del sistema controlado por cada uno de los cuatro controladores, se varía el flujo de salida en este intervalo

a partir de  $f_o = 0.21 \frac{\left[ \frac{m^3}{min} \right]}{\left[ \frac{m^3}{min} \right]}$ , dejando constante la posición del punto de control en  $h_r = 0.5 \frac{[m]}{[m]}$ , una

amplitud de la ola de  $A_o = 0.01 \frac{[m]}{[m]}$  y una frecuencia de  $f = 1Hz$ . En la tabla se muestra los diferentes valores de los índices de desempeño bajo esta condición, en ella se observa que los menores valores para el %MPH los obtiene el sistema con ley de control de error cuadrático, en oposición a este está el sistema con ley de control exponencial polinómico y PID. El sistema con ley de control de error cuadrático mostró inestabilidad cuando  $f_o$  es menor que 0.14 y se pudo observar que en general este sólo es estable en una pequeña región de variación de  $f_o$  que se encuentra en  $(0.14,1]$ .

En general el sistema con ley de control proporcional y exponencial polinómico mostraron ser más rápidos en estabilizarse en oposición al sistema con ley de control de error cuadrático. El sistema con ley de control PID presentó menor offset y menor IAE, en oposición al de error cuadrático. El sistema con menor valor en el TVM lo mostró el sistema con ley de control de error cuadrático en oposición al sistema con ley de control PID.



Lo que significa según la Tabla 4.1 que el sistema con mejor seguridad en el proceso es el que tiene ley de control de error cuadrático en oposición al exponencial polinómico y PID. El que tiene mejor ahorro energético en el proceso es el que tiene ley de control PID en oposición al de error cuadrático y el que tiene mayor vida útil en la válvula es el que tiene ley de control de error cuadrático en oposición al PID y la mejor exactitud la presentó la ley de control PID en oposición al de error cuadrático.

Según el coeficiente de variación la mayor heterogeneidad entre los índices de desempeño se presenta en el *offset*, lo que significa que este índice tiene un comportamiento diferente en el sistema gobernado por cada uno de los controladores y la mayor homogeneidad se presenta en el  $T_s$ , lo que significa que este índice tiene un comportamiento similar en el sistema gobernado por cada uno de los controladores.

En general la medida del control de nivel con ley de control PID y bajo la influencia de una perturbación tipo oleaje presenta mejores resultados en los índices de desempeño *offset* e *IAE*.

**Tabla 4.14 Índices de desempeño en el sistema para cada controlador con diferentes fracciones del flujo de salida y perturbado por un oleaje**

Índice de desempeño	$f_0$	Proporcional	Cuadrático	Exponencial polinómico	PID	Coefficiente de Variación (%)
%MPH $\left[\frac{m}{m}\right]\%$	0,21	0,028	0,020	0,028	0,027	16,095
	0,25	0,029	0,021	0,029	0,028	13,862
	0,29	0,029	0,022	0,030	0,030	13,407
	0,33	0,030	0,023	0,030	0,031	12,197
	0,42	0,030	0,025	0,030	0,033	10,790
$T_s$ [min]	0,21	45,100	49,800	49,600	45,100	5,606
	0,25	45,100	49,800	50,500	45,300	6,026
	0,29	45,100	49,700	45,100	45,400	4,866
	0,33	45,400	46,700	45,100	45,400	1,564
	0,42	45,500	49,500	45,500	46,400	4,062
Offset $\left[\frac{m}{m}\right]$	0,21	0,034	0,087	0,035	0,018	67,063
	0,25	0,045	0,097	0,043	0,021	62,330
	0,29	0,051	0,105	0,049	0,022	61,078
	0,33	0,057	0,113	0,055	0,023	60,446
	0,42	0,069	0,1285	0,067	0,024	59,832
IAE $\left[\frac{m}{m}\right]$ [min]	0,21	3,887	8,766	3,813	3,551	50,200
	0,25	4,209	9,696	4,098	3,526	53,718
	0,29	4,591	10,550	4,442	3,511	55,757
	0,33	5,009	11,344	4,828	3,501	56,952
	0,42	6,037	12,965	5,771	3,491	57,958
TVM $\left[\frac{m^3}{min}\right]$ [min]	0,21	46,790	35,270	48,300	57,200	19,209
	0,25	49,890	38,490	51,690	62,080	19,123
	0,29	52,200	41,450	54,310	66,020	18,830
	0,33	53,993	44,246	56,278	69,302	18,435
	0,42	56,915	49,849	59,732	74,832	17,441

 Menor valor  
 Mayor valor

### Comparación de los índices de desempeño al variar la frecuencia de la ola

Para observar los efectos en los índices de desempeño del sistema controlado por cada uno de los cuatro controladores al variar la frecuencia de la ola, se han implementado diferentes valores para esta iniciando en 2 [Hz], dejando constante el punto de control en  $h_r = 0.5 \frac{[m]}{[m]}$ , el flujo de salida  $f_o = 0.25 \frac{[m^3]}{[min]}$ , la

amplitud de la ola en  $A_0 = 0.01 \frac{[m]}{[m]}$  y una fase de  $\pi/2$ . En la tabla 4.15 se muestra los diferentes valores de los índices de desempeño bajo esta condición, en ella se observa que los menores valores para el %MPH los obtiene el sistema con ley de control de error cuadrático, en oposición a este está el sistema con ley de control exponencial polinómico.

En general el sistema con ley de control de error cuadrático mostró ser más rápido en estabilizarse, sin embargo cuando se aumenta la frecuencia el sistema con ley de control PID supera a este en el tiempo de estabilización en oposición al exponencial polinómico. El sistema con ley de control PID presentó menor offset y menor IAE, en oposición al de error cuadrático. El sistema con menor valor en el TVM lo mostró el sistema con ley de control de error cuadrático en oposición al sistema con ley de control PID.



Lo que significa según la Tabla 4.1 que el sistema con mejor seguridad en el proceso es el que tiene ley de control de error cuadrático en oposición al exponencial polinómico. El mejor ahorro energético es el que tiene ley de control PID en oposición al de error cuadrático y el que tiene mayor vida útil en la válvula es el que tiene ley de control de error cuadrático en oposición al PID y la mejor exactitud la presentó la ley de control PID en oposición al de error cuadrático.

Según el coeficiente de variación la mayor heterogeneidad entre los índices de desempeño se presenta en el *offset*, lo que significa que este índice tiene un comportamiento diferente en el sistema gobernado por cada uno de los controladores y la mayor homogeneidad se presenta en el  $T_s$ , lo que significa que este índice tiene un comportamiento similar en el sistema gobernado por cada uno de los controladores.

En general la medida del control de nivel con ley de control PID y bajo la influencia de una perturbación tipo oleaje presenta mejores resultados en los índices de desempeño *offset* e *IAE*.

**Tabla 4.15 Índices de desempeño en el sistema para cada controlador perturbado por una ola y con diferentes valores en la frecuencia de la ola**

Índice de desempeño	Frecuencia (Hz)	Proporcional	Cuadrático	Exponencial polinómico	PID	Coefficiente de Variación (%)
%MPH $\frac{[m]}{[m]}\%$	2	0,026	0,017	0,027	0,025	18,461
	4	0,020	0,014	0,020	0,021	17,719
	10	0,021	0,014	0,021	0,020	16,947
	20	0,021	0,014	0,021	0,025	23,972
	30	0,021	0,014	0,021	0,020	19,650
$T_s$ [min]	2	45,800	45,700	48,100	46,400	2,388
	4	51,200	45,800	45,800	49,600	5,685
	10	46,800	48,600	48,700	45,700	3,071
	20	45,800	48,500	48,600	45,700	3,431
	30	45,800	48,400	46,800	46,400	3,374
Offset $\frac{[m]}{[m]}$	2	0,039	0,092	0,038	0,016	68,936
	4	0,038	0,091	0,036	0,016	71,110
	10	0,036	0,089	0,034	0,010	78,794
	20	0,034	0,089	0,033	0,010	80,464
	30	0,036	0,090	0,034	0,018	69,806
IAE $\frac{[m]}{[m]} [min]$	2	4,281	9,677	4,176	3,600	52,357
	4	4,260	9,666	4,156	3,580	52,624
	10	4,253	9,672	4,144	3,594	52,663
	20	4,261	9,673	4,152	3,581	52,673
	30	4,270	9,661	4,163	3,622	52,227
TVM $\frac{[m^3]}{[min]} [min]$	2	50,215	38,940	51,984	61,999	18,605
	4	50,712	39,153	52,480	62,146	18,447
	10	50,942	39,601	52,784	62,233	18,070
	20	50,231	39,092	52,050	57,370	16,707
	30	50,363	39,231	52,149	57,473	15,398

 Menor valor  
 Mayor valor

## 4.5 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

El sistema con ley de control exponencial polinómico mostró que, para los diferentes valores de los parámetros, el punto de equilibrio conservó su estabilidad y no mostró bifurcaciones, ni caos, ni ciclos límite u orbitas cerradas, ni tiempo de escape finito, lo que significa que, para valores típicos en la región de trabajo, el sistema es robusto (ver sección 4.2.7 y 4.2.8), por lo tanto el sistema con esta ley de control siempre buscará el punto de equilibrio estable después de haber sido desplazado y conservará las características no lineales mencionadas.

Al comparar los índices de desempeño del sistema con ley de control exponencial polinómica respecto al sistema con ley de control proporcional, sin la influencia de una perturbación y al variar el punto de control se concluye que, en general, el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control proporcional en la rapidez de respuesta, seguridad en el proceso, ahorro energético y exactitud. Sin embargo, el segundo supera al primero en vida útil de la válvula y, cuando se varía el flujo de salida, también lo supera en la rapidez de respuesta, ahorro energético y exactitud pero no en seguridad en el proceso ni en la vida útil de la válvula (ver tablas 4.5; 4.6).

Bajo la influencia de una perturbación tipo pulso el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control proporcional en exactitud, ahorro energético y seguridad en el proceso pero es superado por este en vida útil de la válvula y rapidez de respuesta al variar el punto de control o el flujo de salida o la amplitud de la perturbación (ver sección 4.7, 4.8, 4.9).

Bajo la influencia de una perturbación tipo escalón el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control proporcional en exactitud, ahorro energético, seguridad en el proceso y rapidez de respuesta pero es superado por éste en vida útil de la válvula al variar el punto de control o el flujo de salida y la amplitud de la perturbación (ver tablas 4.10; 4.11; 4.12).

Bajo la influencia de una perturbación tipo ola el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control proporcional en ahorro energético y exactitud al variar o el punto de control o el flujo de salida o la frecuencia de la ola, pero es superado por éste en seguridad en el proceso, vida útil de la válvula y rapidez de respuesta (ver tablas 4.13; 4.14; 4.15).

Al comparar los índices de desempeño del sistema con ley de control exponencial polinómica respecto al sistema con ley de control de error cuadrático, sin la influencia de una perturbación y al variar el punto de control o el flujo de salida, se concluye que, en general, el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control de error cuadrático en seguridad en el proceso, ahorro energético, exactitud y rapidez de respuesta pero no en vida útil de la válvula (ver tablas 4.5; 4.6).

Bajo la influencia de una perturbación tipo pulso el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control de error cuadrático en exactitud, ahorro energético y seguridad en el proceso pero es superado por éste en vida útil de la válvula al variar el punto de control, o el flujo de salida o la amplitud de la perturbación (ver sección 4.7, 4.8, 4.9).

Bajo la influencia de una perturbación tipo escalón el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control de error cuadrático en exactitud, ahorro energético, seguridad en el

proceso y rapidez de respuesta pero es superado por éste en vida útil de la válvula al variar el punto de control o el flujo de salida o la amplitud de la perturbación (ver tablas 4.10; 4.11; 4.12).

Bajo la influencia de una perturbación tipo ola el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control de error cuadrático en ahorro energético y exactitud al variar el punto de control o el flujo de salida o la frecuencia de la ola pero es superado por éste en seguridad en el proceso, vida útil de la válvula y rapidez de respuesta (ver tablas 4.13; 4.14; 4.15).

Al comparar los índices de desempeño del sistema con ley de control exponencial polinómica respecto al sistema con ley de control PID sin la influencia de una perturbación y al variar el punto de control y el flujo de salida, se concluye que, en general, el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control PID en rapidez de respuesta y vida útil de la válvula pero es superado por éste en seguridad en el proceso, ahorro energético y exactitud (ver tablas 4.5; 4.6).

Bajo la influencia de una perturbación tipo pulso el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control PID en vida útil de la válvula pero es superado por éste en exactitud, ahorro energético, seguridad en el proceso y rapidez de respuesta al variar el punto de control o el flujo de salida o la amplitud de la perturbación.

Bajo la influencia de una perturbación tipo escalón el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control PID en la rapidez de respuesta y vida útil de la válvula pero es superado por éste en exactitud, ahorro energético y seguridad en el proceso al variar el punto de control, o el flujo de salida o la amplitud de la perturbación (ver tablas 4.10; 4.11; 4.12).

Bajo la influencia de una perturbación tipo ola el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control PID en vida útil de la válvula pero es superado por éste en ahorro energético, exactitud, seguridad en el proceso y rapidez de respuesta al variar el punto de control o el flujo de salida o la frecuencia de la ola. Al mismo tiempo el sistema con ley de control PID supera al exponencial polinómico en rapidez de respuesta al variar el punto de control, pero al variar el flujo de salida el sistema con ley de control exponencial polinómico supera al sistema con ley de control PID. Del mismo modo al variar la frecuencia de la ola se observa que a frecuencias bajas el sistema con ley de control PID supera al sistema con ley de control exponencial polinómico y al revés para frecuencias altas (ver tablas 4.13; 4.14; 4.15).

En general el sistema gobernado con ley de control PID presentó mejores índices de desempeño *offset* e IAE tanto con perturbaciones tipo pulso, escalón u oleaje al variar el punto de control o el flujo de salida o la amplitud de la perturbación o la frecuencia de la ola. La mejor exactitud de este algoritmo obedece a que este controlador tiene componente integral encargada de disminuir el error en estado estacionario provocado por el modo proporcional. Sin embargo el sistema con este controlador mostró el peor resultado en TVM lo que implicaría cambios permanentes de la válvula. Como consecuencia este controlador puede ser usado en aquellas aplicaciones de control de nivel donde se busque ahorro energético y exactitud.

En general el sistema gobernado con ley de control de error cuadrático mostró los mejores resultados en el índice de desempeño TVM tanto sin perturbación como con perturbaciones tipo pulso, escalón u olas lo que significa que este controlador pueda ser usado en aquellas aplicaciones de control de nivel donde importe el desgaste de la válvula. No obstante mostró las peores lecturas en %MPH, *offset*,  $T_s$  e IAE. El sistema de control de nivel con error cuadrático tiene un limitado rango de variabilidad en sus parámetros

en comparación con los demás controladores. Esto significa que es poco práctico para ciertas aplicaciones donde se requiera variar en amplios rangos ciertos parámetros del controlador.

Se observan desventajas del sistema controlado con ley exponencial polinómica respecto a los otros tres controladores como la complejidad del algoritmo, por ser no lineal, la implementación física, por demandar un controlador no lineal, y el requerimiento de un análisis matemático más difícil en comparación con los análisis de los otros tres algoritmos.

## 4.6 RESUMEN DEL CAPITULO

En este capítulo se observó el comportamiento de la variable controlada  $h$  y se compararon los índices de desempeño del sistema en cada uno de los cuatro controladores tanto sin perturbación como con perturbación al variar el punto de control o el flujo de salida o la amplitud de la perturbación o la frecuencia de la ola (ver sección 4.3 y 4.4).

Usando simulaciones se hicieron pruebas de robustez al sistema al variar los diferentes parámetros del mismo: el flujo máximo  $F$ , la constante de tiempo del actuador de la válvula  $\tau_v$ , la ganancia de la válvula  $K_v$ , el flujo de salida  $f_0$  y el punto de control  $h_r$  (ver sección 4.2.8).

Se determinó que el punto de equilibrio era del tipo espiral en unos casos y nodo estable en otros y que tenía estabilidad local en ambos casos (ver sección 4.2.8). Estas pruebas mostraron que para los diferentes valores de los parámetros, el punto de equilibrio conservó su estabilidad y que el sistema no presenta bifurcaciones, ni caos, ni ciclos límite, ni tiempo de escape finito. Se concluye que el sistema es robusto (ver sección 4.2.8).

La tabla 4.16 muestra el resumen de los índices de desempeño para el sistema de control de nivel obtenidos con cada uno de los cuatro controladores. La tabla muestra que:

- En general el sistema con ley de control PID, con perturbación y sin ella, mostró mejores resultados en los índices de desempeño *offset* e *IAE* y las peores medidas en el TVM (ver sección 4.3 y 4.4).
- El sistema con ley exponencial polinómica mostró un comportamiento similar al proporcional (ver sección 4.3 y 4.4).
- El sistema con ley de control exponencial polinómica sin perturbación obtuvo los mejores índices en  $T_s$ , lo que significa que este controlador puede ser usado en aplicaciones donde interese la rapidez en la respuesta.
- El sistema gobernado con ley de control error cuadrático mostró los mejores resultados en el índice de desempeño TVM tanto sin perturbación (ver sección 4.3.2) como con perturbación tipo pulso o escalón (ver sección 4.4.2 y 4.4.4). Sin embargo también muestra las peores lecturas en *offset* e *IAE*, lo que significa que este controlador puede ser usado en aplicaciones donde interese en primer lugar el cuidado de la válvula y en segundo lugar la precisión y el ahorro energético.

- Se analizó el sistema, con cada uno de los cuatro controladores, bajo la influencia de una perturbación tipo oleaje en la superficie del líquido y se observaron resultados similares a los obtenidos por estos mismos controladores con perturbaciones tipo pulso y escalón en los índices *offset*, *IAE*, y *TVM*, sin embargo se observaron cambios en el %MPH y  $T_s$  (ver sección 4.4.5).
- El sistema de control de nivel con error cuadrático tiene un limitado rango de variabilidad de sus parámetros que hacen que este converja a la posición del punto de control (ver sección 4.4).
- Se observaron desventajas y ventajas del sistema controlado con ley exponencial polinómica respecto a los otros tres controladores (ver sección 4.5).

**Tabla 4.16 Resumen de los índices de desempeño para el sistema de control de nivel para cada uno de los cuatro controladores**

Índice	Sin perturbación		Con perturbación																			
			Pulso						escalón						Olas							
	Mejor		Peor		Mejor			Peor			Mejor			Peor			Mejor			Peor		
	<i>hr</i>	<i>fo</i>	<i>hr</i>	<i>fo</i>	<i>hr</i>	<i>fo</i>	$A_p$	<i>hr</i>	<i>fo</i>	$A_p$	<i>hr</i>	<i>fo</i>	$A_e$	<i>hr</i>	<i>fo</i>	$A_e$	<i>hr</i>	<i>fo</i>	$f_r$	<i>hr</i>	<i>fo</i>	$f_r$
%MPH $\left[\frac{m}{m}\right]\%$	4	4	2	2	4	4	4	1	1	1	4	4	3	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$T_s$ [min]	3	3	4	4	4	1	1	3	4	4	1	1	1	4	2	4	2	1	2	3	2	3
Offset $\left[\frac{m}{m}\right]$	4	4	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2
IAE $\left[\frac{m}{m}\right]$ [min]	4	4	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2
TVM $\left[\frac{m^3}{min}\right]$ [min]	2	2	4	4	2	2	2	4	4	4	1	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	4

Proporcional	1
Error Cuadrático	2
Exponencial polinómico	3
PID	4

# Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones

---

## 5.1 CONCLUSIONES

Se analizaron las características no lineales de un sistema de control de nivel que opera mediante el algoritmo exponencial polinómico dado por la ecuación (1) del capítulo 3. De este análisis se concluye que:

1. El sistema tiene un único punto de equilibrio local asintóticamente estable que puede ser tipo nodo o tipo espiral (ver sección 3.3.4) dentro de una zona de atracción que define una función de Lyapunov para el problema planteado (ver sección 3.3.5). Lo anterior significa que en una vecindad del punto de equilibrio, este atrae todas las soluciones independientemente del estado inicial.
2. La función que modela el sistema automático de control de este trabajo es seccionalmente continua y cumple con el criterio de Lipschitz (ver sección 3.3.2). Gracias a esta condición se verificaron muchos de los teoremas y conceptos de la teoría de Lyapunov. A su vez estos sirvieron de soporte para algunos de los resultados de este trabajo como son determinar la unicidad de la solución en una vecindad del punto de equilibrio (ver sección 3.3.3) y garantizar la estabilidad entrada estado (ver sección 3.3.11).
3. Se encontró una función de Lyapunov de difícil hallazgo para el sistema (1) del capítulo 3 y con ella se definió una zona en  $\mathbb{R}^2$  que representa la región de trabajo (ver sección 3.3.5). Sobre la región de trabajo las simulaciones mostraron que cualquier trayectoria que comience sobre ésta ella converge al único punto de equilibrio cuando el tiempo tienda a infinito, garantizando con esto que el sistema siempre es controlable en la región de trabajo.
4. En el sistema no se presentan ciclos límite (ver secciones 3.3.8; 4.2.8), lo que implica que no existen trayectorias que se alejen del punto de equilibrio. Si esto llegara a suceder, estas quedarían en una órbita cerrada y producirían inestabilidad en el punto de equilibrio del sistema.
5. En el sistema no se presentan bifurcaciones (ver secciones 3.3.9; 4.2.8) lo que representa que el punto de equilibrio no pierde su estabilidad al variar algún parámetro en el sistema. Esto es importante

en aplicaciones prácticas ya que los parámetros del modelo pueden variar con el tiempo y estas variaciones no afectan la estabilidad estructural del sistema.

6. En el sistema no se presenta caos (ver secciones 3.3.10; 4.2.8), lo que significa que es posible conocer las reglas de evolución del sistema a largo plazo y por ende poder predecir el comportamiento del mismo.
7. En el sistema el estado  $x(t)$  permanece acotado ante una señal acotada a la entrada, característica importante en las aplicaciones ya que garantiza que el sistema no se desestabiliza ante perturbaciones acotadas (ver sección 3.3.11).
8. En el sistema no se presenta tiempo de escape finito (ver secciones 3.3.12; 4.2.8 y figuras 4.13, 4.14, 4.15, 4.17), lo que significa que la gráfica temporal de la respuesta no tiene asíntotas verticales, es decir, que para cualquier valor del tiempo siempre existirá un valor real asociado con el nivel. Esto representaría físicamente que, sobre la región de trabajo y bajo las limitaciones del problema (ver sección 1.4), el nivel no se desborda.
9. Las simulaciones del sistema mostraron que, para diferentes valores de los parámetros en la región de trabajo (ver sección 3.3.6), el punto de equilibrio conservó su estabilidad y por lo tanto el sistema es robusto en esta región (ver sección 4.2.8).
10. En general el sistema con ley de control exponencial polinómica tiene un comportamiento similar al proporcional (ley de control comúnmente usada en el control de nivel) (Ver secciones 4.3, 4.4, 4.5 y figuras 4.13, 4.14, 4.15 y 4.17).
11. El sistema con ley de control exponencial polinómica, tanto con perturbación como sin ella, supera al sistema con ley de control proporcional en ahorro energético y exactitud (ver secciones 4.3, 4.4, 4.5).
12. El sistema tanto sin perturbación como con ella y con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control de error cuadrático en ahorro energético, exactitud y rapidez de respuesta pero no en vida útil de la válvula (ver secciones 4.3, 4.4).
13. Bajo la influencia de una perturbación tipo pulso el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control de error cuadrático en exactitud, ahorro energético y seguridad en el proceso pero es superado por este en vida útil de la válvula al variar el punto de control, o el flujo de salida o la amplitud de la perturbación (ver sección 4.7, 4.8, 4.9).
14. Bajo la influencia de una perturbación tipo escalón el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control de error cuadrático en exactitud, ahorro energético, seguridad en el proceso y rapidez de respuesta pero es superado por este en vida útil de la válvula al variar el punto de control o el flujo de salida o la amplitud de la perturbación (ver tablas 4.10; 4.11; 4.12).
15. Bajo la influencia de una perturbación tipo ola el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control de error cuadrático en ahorro energético y exactitud al variar el punto de control o el flujo de salida o la frecuencia de la ola pero es superado por este en seguridad en el proceso, vida útil de la válvula y rapidez de respuesta (ver tablas 4.13; 4.14; 4.15).
16. En general el sistema gobernado con ley de control de error cuadrático mostró los mejores resultados en el índice de desempeño TVM tanto sin perturbación como con perturbaciones tipo pulso o escalón u

olas, lo que significa que este controlador pueda ser usado en aquellas aplicaciones de control de nivel donde importe el desgaste de la válvula. No obstante mostró las peores lecturas en %MPH, offset, IAE y  $T_s$ . El sistema de control de nivel con error cuadrático tiene un limitado rango de variabilidad en el punto de control y no soporta grandes cambios en la amplitud de la perturbación en comparación con los demás controladores. Esto permite concluir que es poco práctico para ciertas aplicaciones donde se requieran estas variaciones.

17. Al comparar los índices de desempeño del sistema con ley de control exponencial polinómica respecto al sistema con ley de control PID sin la influencia de una perturbación y al variar el punto de control y el flujo de salida, se concluye que, en general, el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control PID en rapidez de respuesta y vida útil de la válvula pero es superado por este en seguridad en el proceso, ahorro energético y exactitud (ver tablas 4.5; 4.6)
18. Bajo la influencia de una perturbación tipo pulso el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control PID en vida útil de la válvula pero es superado por este en exactitud, ahorro energético, seguridad en el proceso y rapidez de respuesta al variar el punto de control o el flujo de salida o la amplitud de la perturbación.
19. Bajo la influencia de una perturbación tipo escalón el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control PID en la rapidez de respuesta y vida útil de la válvula pero es superado por este en exactitud, ahorro energético y seguridad en el proceso, al variar el punto de control, o el flujo de salida o la amplitud de la perturbación (ver tablas 4.10; 4.11; 4.12).
20. Bajo la influencia de una perturbación tipo ola el sistema con ley de control exponencial polinómica supera al sistema con ley de control PID en vida útil de la válvula pero es superado por este en ahorro energético, exactitud, seguridad en el proceso y rapidez de respuesta al variar el punto de control o el flujo de salida o la frecuencia de la ola. Al mismo tiempo el sistema con ley de control PID supera al exponencial polinómico en rapidez de respuesta al variar el punto de control, pero al variar el flujo de salida el sistema con ley de control exponencial polinómico supera al sistema con ley de control PID. Del mismo modo al variar la frecuencia de la ola se observa que a frecuencias bajas el sistema con ley de control PID supera al sistema con ley de control exponencial polinómico y al revés para frecuencias altas (ver tablas 4.13; 4.14; 4.15).
21. En general el sistema gobernado con ley de control PID presentó mejores índices de desempeño *offset* e IAE tanto con perturbaciones tipo pulso, escalón u oleaje al variar el punto de control o el flujo de salida o la amplitud de la perturbación o la frecuencia de la ola (ver secciones 4.3, 4.4, 4.5). La mejor exactitud de este algoritmo obedece a que este controlador tiene componente integral encargada de disminuir el error en estado estacionario provocado por el modo proporcional. Sin embargo el sistema con este controlador mostró el peor resultado en TVM lo que implicaría cambios permanentes de la válvula. Como consecuencia este controlador puede ser usado en aquellas aplicaciones de control de nivel donde se busque ahorro energético y exactitud.
22. Se observan desventajas del sistema controlado con ley exponencial polinómica respecto a los otros tres controladores como la complejidad del algoritmo por ser no lineal, la implementación física por requerir un controlador no lineal y el requerimiento de un análisis matemático más difícil en

comparación con los análisis de los otros tres algoritmos (ver sección 4.5). Por la complejidad para realizar los análisis de las características no lineales en un sistema, en general para efectos prácticos o industriales, donde lo urgente desplaza a lo importante y lo fácil a lo complejo, el sistema con ley de control exponencial polinómica no es eficiente a pesar de mostrar ventajas en ciertos índices de desempeño. Se corrobora así la ley 1 propuesta en la sección 2.2 por Luyben y Luyben [30]. Este tipo de ley de control no lineal puede ser reemplazada por otras con respuestas similares como la ley de control proporcional o proporcional-integral.

## 5.2 CONTRIBUCIONES

Las contribuciones en este trabajo se pueden organizar desde dos puntos de vista:

### 5.2.1 Desde la matemática aplicada

1. Se ha encontrado una función de Lyapunov para el sistema dado por (1) del capítulo 3 (ver sección 3.3.5).
2. Se ha encontrado una aproximación de la región de trabajo (ver sección 3.3.5).
3. Se hicieron una serie de análisis de las características no lineales del sistema desde el punto de vista de la teoría de Lyapunov. Estos análisis no hubieran sido posibles si no se hubiera contado con las herramientas matemáticas que estos exigen. Estas herramientas se usaron por ejemplo, para determinar la existencia y unicidad local de una solución (ver sección 3.3.3), para hallar un único punto de equilibrio local asintóticamente estable tipo espiral o nodo (ver secciones 3.3.1, 3.3.4, 3.3.7), para comprobar cada uno de los requerimientos que debe cumplir una función para ser Lyapunov (ver sección 3.3.5), para verificar la no existencia de ciclos límite (ver sección 3.3.8), para determinar la estabilidad entrada estado (ver sección 3.3.11) y la no presencia de tiempo de escape finito (ver sección 3.3.12). Vale la pena destacar que en la literatura consultada no se encontró ningún tipo de análisis teórico similar relacionado con el control de nivel, donde la matemática fuera la herramienta científica usada. Los trabajos consultados basan su análisis en simulaciones y experimentación.
4. En este trabajo se generalizaron los resultados presentados en el artículo realizado por Fabio Castrillón et al [8] ya que, bajo ciertas condiciones, el algoritmo de error cuadrático es un caso particular del algoritmo exponencial polinómico.

### **5.2.2 Desde sistemas de control**

1. Se han hecho una serie de análisis, usando la teoría de Lyapunov, de las características no lineales en un sistema de control de nivel con ley de control exponencial polinómica. No se encontraron antecedentes al respecto en la bibliografía consultada excepto aquellos que describen resultados experimentales y no reflexionan en torno a la existencia de los fenómenos no lineales relacionados con el control de nivel. En dichos trabajos no se analizan temas como la clasificación de la naturaleza de la estabilidad del punto de equilibrio, la no existencia de inestabilidades como bifurcaciones, los ciclos límite, el tiempo de escape finito y el caos (ver secciones 3.2, 3.3), asuntos que el presente trabajo si considera .
2. Se ha propuesto la primera función de Lyapunov (ver sección 3.3.5) del sistema de control de nivel con ley de control exponencial polinómica. Esta función podrá servir para trabajos futuros en esta misma línea. La literatura consultada de control de nivel no registra ninguna función de Lyapunov así sea con otra ley de control.
3. Es importante subrayar que en lo relativo a control de nivel los análisis a partir de simulaciones o de experimentos son más abundantes que los análisis desde el punto de vista teórico lo que es particularmente notable si se hacen con la teoría de Lyapunov. Regularmente los autores que abordan el estudio del control de nivel solo tienen en cuenta uno de estos puntos de partida: o simulaciones o experimentos. En este trabajo se ha realizado un análisis de las características no lineales (detalladas en la sección 3.1) de un sistema de control de nivel con ley de control exponencial polinómica desde dos frentes, tanto desde la teoría de Lyapunov (ver secciones 3.2, 3.3) como desde las simulaciones (ver secciones 4.2, 4.3, 4.4), aportando con él a los pocos trabajos teóricos existentes.
4. A partir del análisis de las simulaciones y de las pruebas de robustez para el sistema, se han realizado barridos para el punto de control, el flujo de salida, la amplitud de la perturbación y la frecuencia del oleaje, a partir de los cuales se conocen valores iniciales para estos parámetros para los cuales el sistema es estable (ver sección 4.2.8, 4.3, 4.4).
5. El trabajo logrado sirve como base para realizar otros análisis de fenómenos no lineales de control de nivel con otras leyes de control.
6. Los resultados obtenidos se podrían usar en otros análisis de ingeniería de control de fenómenos equivalentes, como puede ser el análisis de las características no lineales del voltaje en un condensador con una ley de control específica.
7. Teniendo como punto de partida las medidas y comparaciones de los índices de desempeño del sistema de control de nivel con cada uno de los cuatro controladores, se tiene una base de información a partir de la cual se puede decidir, junto con los análisis teóricos, qué controlador sería más adecuado que otro en una tarea específica de control de nivel.

8. Muchas industrias tienen procesos donde el control de nivel es una operación importante, sin embargo, por lo general, ésta se hace de manera informal, sin el análisis suficiente que requiere seleccionar un buen controlador. Con el presente trabajo las industrias podrán contar con un recurso que presenta los análisis que se deben realizar para escoger el mejor controlador que busquen para una tarea específica. Se aporta así una metodología diferente a la que opera comúnmente en el contexto de la industria que disminuye los posibles problemas que puedan aparecer para un sistema de control de nivel. Así se pueden conocer los fenómenos no lineales que pueden afectar negativamente el proceso, como puede ser la inestabilidad del punto de equilibrio, la presencia de bifurcaciones, el tiempo de escape finito o los ciclos límite. (ver sección 3.3) con las respectivas consecuencias económicas que ellos puedan acarrear.

### 5.3 RECOMENDACIONES

Para futuros trabajos se sugiere tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

1. Implementar sobre un sistema físico el algoritmo exponencial polinómico en un controlador no lineal para optimizar el %MPH, el *offset*, el IAE, el TVM y confrontar, mediante experimentación, los resultados obtenidos en forma teórica y por simulación.
2. Encontrar una región de atracción.
3. Desarrollar leyes de control a partir de aproximaciones polinómica por series de Taylor como casos particulares del algoritmo exponencial polinómico. Una aproximación polinómica de la parte exponencial de orden uno origina la ley de control de error cuadrático, una aproximación de orden dos originaría la ley error cúbico y así sucesivamente. Esto con el objetivo de obtener otras leyes de control con análisis de menor grado de dificultad que heredarían las mismas conclusiones del algoritmo exponencial polinómico.
4. Determinar intervalos de variación de todos los parámetros del sistema para los cuales este es estable.
5. Modelar y estudiar las características no lineales en un sistema donde se tengan en cuenta la influencia de los retardos, el flujo de entrada y de salida variables y la dinámica del sensor.
6. Obtener una región de sintonía para el controlador exponencial polinómico usando los resultados aquí obtenidos además de un diseño experimental.

## ANEXO A. ELEMENTOS MATEMÁTICOS

### Norma:

La norma  $\|x\|$  de un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  es una función real que cumple las siguientes propiedades:

$$\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \|x\| = 0 \text{ si y solo si } x = 0. \quad (1)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (2)$$

$$\text{Si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } x \in \mathbb{R}^n \text{ entonces } \|\alpha x\| \leq |\alpha| \|x\| \quad (3)$$

Las normas más comunes sobre vectores son:

- Norma  $p$

$$x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}; 1 \leq p < \infty \quad (4)$$

- Norma Euclídeana

$$x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^t x} \quad (5)$$

- Norma infinita

$$x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|\} \quad (6)$$

- Norma Inducida de una matriz  $A$

Sea  $A \in M_{m \times n}$  definida sobre reales, la cual define la transformación lineal,

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; T(x) = Ax \quad (7)$$

La norma- $p$  inducida de  $A$  esta definida por:

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \text{máx}_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p \quad (8)$$

Las normas mas usuales en matrices

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (9)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \quad (10)$$

$\lambda_{\max}(A^T A)$  representa el valor propio máximo de  $A^T A$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (11)$$

### **Vecindad:**

La vecindad con centro en  $x_o$  y radio  $\delta$  representa un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  se denota y define por:

$$V(x_o, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_o\| \leq \delta; \delta > 0\} \quad (12)$$

## **ANEXO B. MODELO MATEMÁTICO DE LA PLANTA Y DE LA VÁLVULA**

A continuación se describen los instrumentos y los modelos matemáticos relacionados con el control de nivel de un fluido en un tanque de almacenamiento de forma conocida, cuya sección transversal es de área constante, con flujo de entrada manipulado por una válvula y el flujo de salida constante, para un fluido incompresible, de parámetros concentrados, usando la ley de control  $m(t)$ ; donde la dinámica del sensor transmisor se asume despreciable.

### ***Instrumentos de control asociados al control de nivel:***

En el control de nivel la variable controlada es  $h(t)$ , la cual se mide con un sensor transmisor que envía una señal al controlador indicador de nivel, LIC, en donde se calcula la señal de corrección que es enviada a una válvula, LCV, mediante el convertidor de corriente a presión, LY, modificando así el flujo de entrada al tanque,  $F_i(t)$ . Se considerará el sensor transmisor ideal. En la Figura 1 se presenta un diagrama simplificado de los instrumentos de control del problema, donde

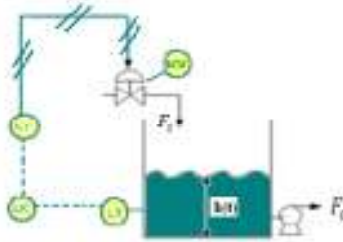
$h(t)$  : Representa el nivel de líquido en el tiempo.

$F_0$  : Es el flujo volumétrico de salida.

$F_i$  : Es el flujo volumétrico de entrada.

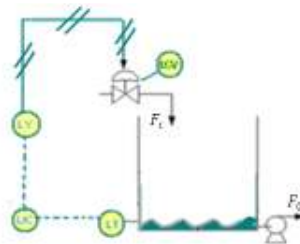
- LT* : Es el trasmisor de nivel.
- LIC* : El controlador indicador de nivel.
- LY* : El convertidor de corriente a presión.
- LCV* : La válvula de control de nivel.

Como se describe en Smith y Corripio [43] el flujo volumétrico de entrada es manipulado por una válvula que es el elemento final de control, cuya función es variar el caudal del flujo de entrada, para mantener la variable controlada lo mas cerca posible al punto de control.



*Fig. 1. Diagrama simplificado de instrumentos*

En el problema, el recipiente se asume vertical, de área interior uniforme, que opera a presión atmosférica y está abierto, bajo la restricción de que el nivel no llegue más allá de un valor mínimo o máximo. Como muestra la Figura 2, cuando esto suceda, un interruptor emitirá una señal que activa un dispositivo de paro inmediato en todo el sistema, tanto en el flujo de entrada al tanque,  $F_i$ , como en la bomba que regula el flujo de salida  $F_o$ , con el fin de evitar que la bomba trate de expulsar más líquido del que puede absorber y por ende que se produzca aspiración en vacío que cause daños en la bomba o los sensores de nivel.



*Fig. 2. Restricción adicional en el nivel mínimo de líquido*

### **Modelo matemático de la planta:**

Para el problema se hace un balance de materia y se llega a:

$$\frac{dv(t)}{dt} = F_i - F_o \quad (13)$$

donde:

$F_i$  es el flujo de entrada, medido en unidades de volumen por unidades de tiempo.  $F_o$  es el flujo de salida, medido en unidades de volumen por unidades de tiempo.  $v$  es el volumen del líquido en el interior del recipiente.

$$v(t) = \int (F_i - F_o) dt \quad (14)$$

Como dice Shinsky [42] con el objetivo de hacer que toda la ecuación sea adimensional se define la fracción de nivel  $h(t)$  de un líquido como la fracción de volumen

$$h(t) = \frac{v(t)}{V} \quad (15)$$

Donde  $V$  es el volumen total del recipiente.

de (15), despejando  $v$ , queda

$$v(t) = h(t)V \quad (16)$$

sustituyendo (16) en (14)

$$h(t)V = \int (F_i - F_o) dt \quad (17)$$

de donde

$$h(t) = \frac{1}{V} \int (F_i - F_o) dt \quad (18)$$

Se definen  $f_i$ ,  $f_o$  como fracciones del flujo máximo  $F$ , que puede entregar la válvula estando completamente abierta, entonces una fracción del flujo de entrada sería

$$F_i = f_i F \quad (19)$$

De forma similar una fracción del flujo de salida sería

$$F_o = f_o F \quad (20)$$

Sustituyendo (19) y (20) en (18)

$$h(t) = \frac{F}{V} \int (f_i - f_o) dt \quad (21)$$

y reescribiendo (21)

$$h(t) = \frac{1}{\bar{V}} \int (f_i - f_o) dt \quad (22)$$

En forma equivalente se tiene

$$\dot{h}(t) = \frac{F}{V} (f_i - f_o) \quad (23)$$

Las curvas de respuesta de (21) pueden presentar tres casos:

El caudal de entrada es igual al de salida ( $f_i = f_o$ ): llamado estado estacionario en este caso el nivel permanece constante.

El caudal de entrada es superior al de salida ( $f_i > f_o$ ): en este caso la altura del nivel irá aumentando hasta alcanzar el nivel máximo del 100% del nivel de líquido en el tanque.

El caudal de entrada es inferior al de salida ( $f_i < f_o$ ): el nivel irá disminuyendo hasta alcanzar el 0 % de la altura del nivel de líquido en el tanque.

El segundo y tercer caso le dan al proceso capacitivo, el nombre de integrador.

La Figura 3 ilustra las curvas de respuesta del estado estacionario e integrador de un tanque, la curva *a* representa el estado estacionario del sistema ( $f_i = f_o$ ), la curva *b* ilustra que el nivel sube cuando la fracción del flujo de entrada es mayor que la fracción del flujo de salida, ( $f_i > f_o$ ) y la curva *c* ilustra que el nivel baja cuando la fracción del flujo de entrada es menor que la fracción del flujo de salida, ( $f_i < f_o$ ), Acedo Sánchez [1].

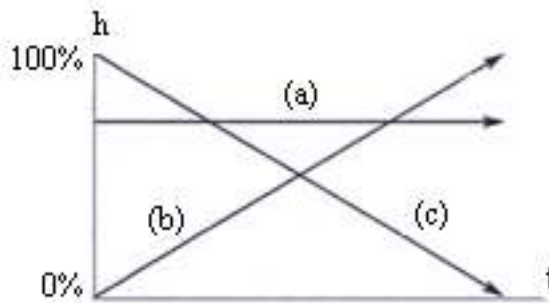


Fig. 3. Ilustración de las curvas de respuesta del estado estacionario e integrador de un tanque

**Modelo matemático de la válvula:**

Según Seborg y Duncan [41] aplicando la segunda ley de Newton en una válvula, se encuentra una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$PA_D + M \frac{g}{g_c} - Kx - P_f A_P - R \frac{dx}{dt} = \frac{M}{g_c} \frac{d^2x}{dt^2} \quad (24)$$

Donde

*M*: Masa movable del vástago en *lbf*.

$P$ : Entrada de aire a presión a la válvula en  $psi$ .

$P_f$ : Presión del contra fluido en  $psi$ .

$A_D$ : Área del diafragma en  $ft^2$

$A_P$ : Área del tapón de la válvula en  $ft^2$

$g$ : Gravedad en  $\frac{ft}{s^2}$

$g_c$ : Constante de conversión en unidades de gravedad en  $\frac{ft}{s^2}$ .

$K$ : Constante del resorte= $3600\frac{lb_f}{ft}$

$R$ : Coeficiente de fricción= $15000\frac{lb_f}{ft \cdot s}$

$x$ : Posición de la válvula en  $ft$

Reorganizando términos

$$\frac{M}{g_c} \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + Kx = PA_D + M \frac{g}{g_c} - P_f A_P \quad (25)$$

Con el objeto de simplificar (25), en la práctica el término  $(M \frac{g}{g_c} - P_f A_P)$  es pequeño en comparación con el término  $PA_D$ , por lo tanto se puede aproximar a:

$$\frac{M}{g_c} \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + Kx = A_D P \quad (26)$$

Reescribiéndola:

$$\alpha \ddot{x} + \beta \dot{x} + \gamma x = \Omega u \quad (27)$$

Con

$$\alpha = \frac{M}{g_c}, \beta = R, \gamma = K, \Omega = A_D, u = P \quad (28)$$

Una ecuación de segundo orden puede describir un sistema subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado, de acuerdo al problema se descarta el tipo subamortiguado por su lenta y oscilatoria respuesta.

La parte izquierda de (27) corresponde con la suma de tres componentes físicas, la componente inercial,  $\alpha \ddot{x}$ , la componente de fricción,  $\beta \dot{x}$  y la componente del resorte,  $\gamma x$ , de la válvula. Esta ecuación tiene su origen en la segunda ley de Newton.

Aplicando la transformada de Laplace a (27) se obtiene:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\Omega}{\alpha s^2 + \beta s + \gamma} \quad (29)$$

Que se puede escribir como:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)} + \frac{K_2}{(\tau_2 s + 1)} \quad (30)$$

La Figura 4 muestra el diagrama de bloques asociado a la ecuación (21)

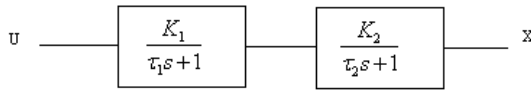


Fig. 4. Diagrama de bloques relacionados con la ecuación (21)

Si se supone que  $\tau_1 \ll \tau_2$  entonces el diagrama de bloques de la Figura 4 queda representada por la Figura 5.

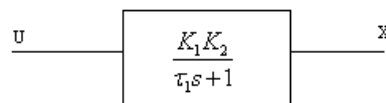


Fig. 5. Diagrama de bloques para  $\tau_1 \ll \tau_2$

Si se denota

$$K_v = K_1 K_2, \tau_v = \tau_1 \quad (31)$$

La Figura 6 muestra el diagrama de bloques de una válvula lineal de control, cuya entrada es la señal de salida del controlador en porcentaje,  $m\%$  y la salida es el flujo  $F_i$  en  $gpm$ .

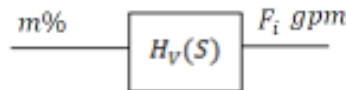


Fig. 6. Diagrama de bloques de una válvula lineal de control

La función de transferencia asociada a este diagrama de bloques es

$$H_v(s) = \frac{F_i(s)}{M(s)} = \frac{K_v}{\tau_v s + 1} \quad (32)$$

Donde

$K_v$ : Ganancia de la válvula en  $gpm/\%$

$\tau_v$ : Constante de tiempo del actuador de la válvula en minutos

La ecuación diferencial que describe (32) es

$$\tau_v \dot{F}_i + F_i = K_v m \quad (33)$$

Para un flujo adimensional se tiene según la ecuación (7)

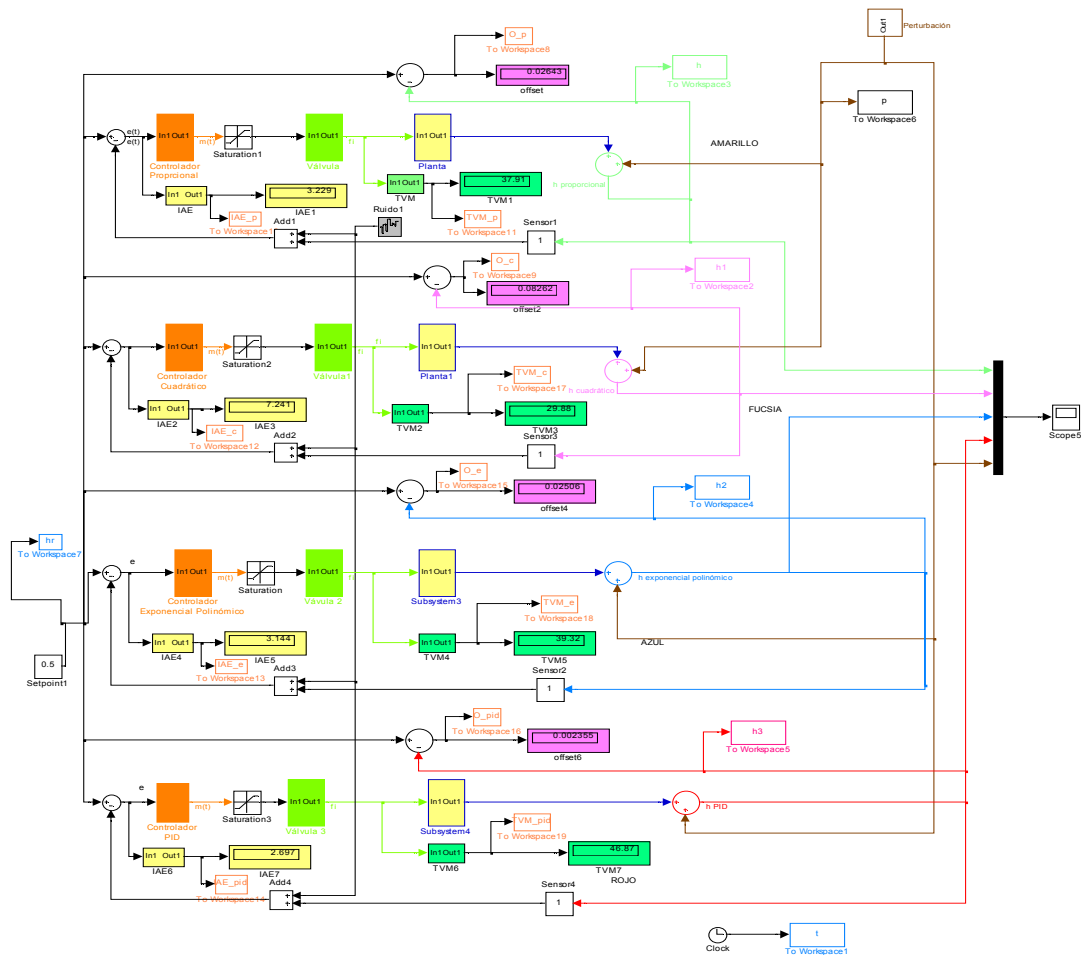
$$\tau_v F \dot{f}_i + F f_i = K_v m \quad (34)$$

Reescribiendo (34)

$$\dot{f}_i = \frac{K_v}{\tau_v F} m - \frac{1}{\tau_v} f_i \quad (35)$$

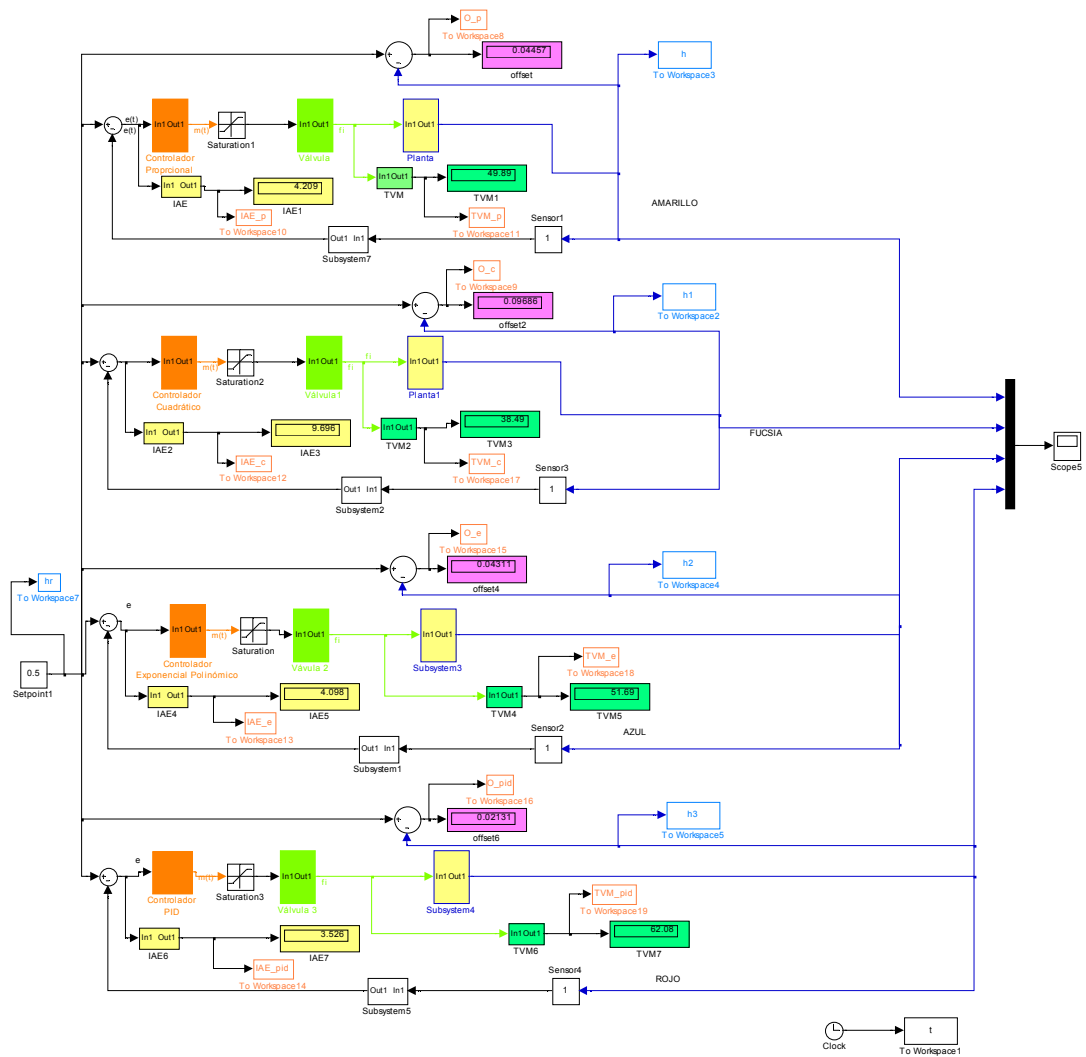
## ANEXO C. DIAGRAMA DE BLOQUES DEL SISTEMA CON LOS 4 CONTROLADORES CON Y SIN PERTURBACIÓN

La figura ilustra el diagrama de bloques del sistema de control de nivel sin perturbación con cada uno de los cuatro controladores con los bloques de medición de errores *offset*, IAE, TVM.



## ANEXO D. DIAGRAMA DE BLOQUES DEL SISTEMA CON LOS 4 CONTROLADORES CON OLAS

La figura ilustra el diagrama de bloques del sistema de control de nivel con perturbación con cada uno de los cuatro controladores con los bloques de medición de errores offset, IAE, TVM.



## ANEXO E. CÓDIGO DEL PROGRAMA QUE LEE LOS ERRORES Y GRAFICA LA SALIDA DEL SISTEMA

El siguiente programa lee, de la simulación del sistema realizada en simulink, los errores *offset* %MPH y presenta la salida del sistema con cada uno de los cuatro controladores.

```
%El siguiente programa lee datos del un programa en simulink llamado
%cuatro_en_uno_simplificado
clc
close all
format long
m=0.01; % porcentaje de exigencia para el criterio del tiempo de Ts
Te; % tiempo donde actúa el escalón.
A=[t,h];% se construye la matriz A de dos columnas la primera columna son
%los tiempos de muestreo y la segunda son las medidas del nivel
%-----
%CONTROLADOR PROPORCIONAL
%-----
%A continuación se calcula la media del nivel y la desviación típica
valor_medio_A=mean(A(:,2));%Valor promedio de las alturas
desviacion_tipica_A=std(A(:,2));
% La siguiente parte ubica la posición donde se presenta el Te, para
% construir una submatriz de A hasta ahí
for k=1:length(A);
    if A(k,1)<Te
        Q=k;
    else
        break
    end
end
% la siguiente parte construye una submatriz B de la matriz A, aquella que
% llega hasta el tiempo de la perturbación, hasta Q.
for i=1:Q
    for j=1:2
        B(i,j)=A(i,j);
    end
end
B;
% la siguiente parte construye una sub matriz C de la matriz A, aquella que
% va desde el comienzo de la perturbación hasta el final de de A
for i=Q+1:length(A)
    for j=1:2
        C(i-Q,j)=A(i,j);
    end
end
C;
maximo_B=max(B(:,2));% Calcula el valor máximo en la matriz B
maximo_C=max(C(:,2));% Calcula el valor máximo en la matriz C
```

```

%el siguiente ciclo encuentra en la matriz B el valor pico: Ytp_B de las
%alturas y el tiempo Tp_B donde este ocurre, es decir antes de la perturbación
for k=1:length(B);
    if B(k,2)==maximo_B;
        Tp_B=B(k,1);
        Ytp_B=B(k,2);
    end
end
%-----
%el siguiente ciclo encuentra en la matriz C el valor pico: Ytp_C de las alturas de la
%matriz C y el tiempo %Tp_C donde este ocurre
for k=1:length(C);
    if C(k,2)==maximo_C;
        Tp_C=C(k,1);
        Ytp_C=C(k,2);
    end
end
%-----
% El siguiente ciclo calcula el tiempo de establecimiento
%y el valor de la altura donde este ocurre en la matriz B
for j=1:length(B);
    Ts_B=B(j,1); % El tiempo en la posición j
    ys_B=B(j,2); % La medida de la altura en la posición j
    if ((abs(ys_B-valor_medio_A)<m*abs(desviacion_tipica_A))&(Ts_B>Tp_B+5));
        break
    end
end
%-----
% El siguiente ciclo calcula el tiempo de establecimiento después de la
% perturbación y el valor de la altura donde este ocurre
for j=1:length(C);
    Ts_C=C(j,1); % El tiempo en la posición j
    ys_C=C(j,2); % La medida de la altura en la posición j
    if ((abs(ys_C-valor_medio_A)<m*abs(desviacion_tipica_A))&(Ts_C>(Te+5)));
        break
    end
end
MPH_B=Ytp_B-ys_B;
Porcen_MPH_B_proporcional=(MPH_B/ys_B)*100;
Ts_proporcional_B=Ts_B;
%la siguiente parte lee el %MPH y Ts después de la perturbación
MPH_C_perturbacion_proporcional=Ytp_C-ys_C;
Porcen_MPH_C_perturbacion_proporcional=(MPH_C_perturbacion_proporcional/ys_C)*100;
Ts_C_perturbacion_proporcional=Ts_C;
r(1,1)=Porcen_MPH_B_proporcional;
r(1,2)=Ts_proporcional_B;
r(1,3)=MPH_C_perturbacion_proporcional;
r(1,4)=Ts_C_perturbacion_proporcional;
r(1,5)=O_p(length(O_p),1);
r(1,6)=IAE_p(length(IAE_p),1);
r(1,7)=TVM_p(length(TVM_p),1);

```

```

r;
plot(t,h,'markeredgecolor','y','markerfacecolor',[.9 0 .9],...
      'linestyle','-','color','g','linewidth',3)
grid on
hold on
%la siguiente parte ubica gráficamente los puntos picos
%-----
%la siguiente parte ubica gráficamente los puntos picos después de la
% perturbación
p1_A=valor_medio_A+m*desviacion_tipica_A;
p2_A=valor_medio_A-m*desviacion_tipica_A;
% % % % % % plot(t,valor_medio_A,'r',t,p1_A,'r',t,p2_A,'r')
%-----
%FIN CONTROLADOR PROPORCIONAL
%-----
%-----
% CONTROLADOR CUADRÁTICO
%-----
A1=[t,h1];% se construye la matriz A1 de dos columnas la primera columna son
%los tiempos de muestreo y la segunda son las medidas del nivel de los
%datos provenientes del controlador de error cuadrático
%A continuación se calcula la media del nivel y la desviación típica de la
%matriz A1
valor_medio_A1=mean(A1(:,2));%Valor promedio de las alturas
desviacion_tipica_A1=std(A1(:,2));
% La siguiente parte ubica la posición donde se presenta el Te, para
% construir una submatriz de A1 hasta ahí
for k=1:length(A1);
    if A1(k,1)<Te
        Q1=k;
    else
        break
    end
end
% la siguiente parte construye una submatriz B1 de la matriz A1, aquella que
% llega hasta el tiempo de la perturbación, hasta Q1.
for i=1:Q1
    for j=1:2
        B1(i,j)=A1(i,j);
    end
end
B1;
% la siguiente parte construye una sub matriz C1 de la matriz A1, aquella que
% va desde el comienzo de la perturbación hasta el final de de A1
for i=Q1+1:length(A1)
    for j=1:2
        C1(i-Q1,j)=A1(i,j);
    end
end
C1;
maximo_B1=max(B1(:,2));% Calcula el valor máximo en la matriz B1

```

```

maximo_C1=max(C1(:,2));% Calcula el valor máximo en la matriz C1
%el siguiente ciclo encuentra en la matriz B1 el valor pico: Ytp_B1 de las
%alturas y el tiempo Tp_B1 donde este ocurre, es decir antes de la perturbación
for k=1:length(B1);
    if B1(k,2)==maximo_B1;
        Tp_B1=B1(k,1);
        Ytp_B1=B1(k,2);
    end
end
%-----
%el siguiente ciclo encuentra en la matriz C1 el valor pico: Ytp_C1 de las
%alturas de la matriz C1 y el tiempo %Tp_C1 donde este ocurre
for k=1:length(C1);
    if C1(k,2)==maximo_C1;
        Tp_C1=C1(k,1);
        Ytp_C1=C1(k,2);
    end
end
%-----
%El siguiente ciclo calcula el tiempo de establecimiento
%y el valor de la altura donde este ocurre en la matriz B1
for j=1:length(B1);
    Ts_B1=B1(j,1); % El tiempo en la posición j
    ys_B1=B1(j,2); % La medida de la altura en la posición j
    if ((abs(ys_B1-valor_medio_A1)<m*abs(desviacion_tipica_A1))&(Ts_B1>Tp_B1+5));
        break
    end
end
%-----
% El siguiente ciclo calcula el tiempo de establecimiento después de la
% perturbación y el valor de la altura donde este ocurre
for j=1:length(C1);
    Ts_C1=C1(j,1); % El tiempo en la posición j
    ys_C1=C1(j,2); % La medida de la altura en la posición j
    if (abs(ys_C1-valor_medio_A1)<m*abs(desviacion_tipica_A1))&(Ts_C1>(Te+5));
        break
    end
end
MPH_B1=Ytp_B1-ys_B1;
Porcen_MPH_B1_proporcional=(MPH_B1/ys_B1)*100;
Ts_proporcional_B1=Ts_B1;
%la siguiente parte lee el %MPH y Ts después de la perturbación
MPH_C1_perturbacion_proporcional=Ytp_C1-ys_C1;
Porcen_MPH_C1_perturbacion_proporcional=(MPH_C1_perturbacion_proporcional/ys_C1)*100;
Ts_C1_perturbacion_proporcional=Ts_C1;
r1(1,1)=Porcen_MPH_B1_proporcional;
r1(1,2)=Ts_proporcional_B1;
r1(1,3)=MPH_C1_perturbacion_proporcional;
r1(1,4)=Ts_C1_perturbacion_proporcional;
r1(1,5)=O_c(length(O_c),1);
r1(1,6)=IAE_c(length(IAE_c),1);

```

```

r1(1,7)=TVM_c(length(TVM_c),1);
r1;
plot(t,h1,'markeredgecolor','y','markerfacecolor',[.9 0 .9],...
      'linestyle','--','color','magenta','linewidth',3)
grid on
hold on
%la siguiente parte ubica gráficamente los puntos picos
%-----
%la siguiente parte ubica gráficamente los puntos picos después de la
%perturbación
p1_A1=valor_medio_A1+m*desviacion_tipica_A1;
p2_A1=valor_medio_A1-m*desviacion_tipica_A1;
%-----
%FIN CONTROLADOR DE ERROR CUADRÁTICO
%-----
%-----
% CONTROLADOR EXPONENCIAL POLINÓMICO
%-----
A2=[t,h2];% se construye la matriz A2 de dos columnas la primera columna son
%los tiempos de muestreo y la segunda son las medidas del nivel de los
%datos provenientes del controlador de error cuadrático
%A continuación se calcula la media del nivel y la desviación típica de la
%matriz A2
valor_medio_A2=mean(A2(:,2));%Valor promedio de las alturas
desviacion_tipica_A2=std(A2(:,2));
% La siguiente parte ubica la posición donde se presenta el Te, para
% construir una submatriz de A2 hasta ahí
for k=1:length(A2);
    if A2(k,1)<Te
        Q2=k;
    else
        break
    end
end
% la siguiente parte construye una submatriz B2 de la matriz A2, aquella que
% llega hasta el tiempo de la perturbación, hasta Q2.
for i=1:Q2
    for j=1:2
        B2(i,j)=A2(i,j);
    end
end
B2;
% la siguiente parte construye una sub matriz C2 de la matriz A2, aquella que
%va desde el comienzo de la perturbación hasta el final de de A2
for i=Q2+1:length(A2)
    for j=1:2
        C2(i-Q2,j)=A2(i,j);
    end
end
C2;
maximo_B2=max(B2(:,2));% Calcula el valor máximo en la matriz B2

```

```

maximo_C2=max(C2(:,2));% Calcula el valor máximo en la matriz C2
%el siguiente ciclo encuentra en la matriz B2 el valor pico: Ytp_B2 de las
%alturas y el tiempo Tp_B2 donde este ocurre, es decir antes de la perturbación
for k=1:length(B2);
    if B2(k,2)==maximo_B2;
        Tp_B2=B2(k,1);
        Ytp_B2=B2(k,2);
    end
end
%-----
%el siguiente ciclo encuentra en la matriz C2 el valor pico: Ytp_C2 de las
%alturas de la matriz C2 y el tiempo %Tp_C2 donde este ocurre
for k=1:length(C2);
    if C2(k,2)==maximo_C2;
        Tp_C2=C2(k,1);
        Ytp_C2=C2(k,2);
    end
end
%-----
%El siguiente ciclo calcula el tiempo de establecimiento
%y el valor de la altura donde este ocurre en la matriz B2
for j=1:length(B2);
    Ts_B2=B2(j,1); % El tiempo en la posición j
    ys_B2=B2(j,2); % La medida de la altura en la posición j
    if ((abs(ys_B2-valor_medio_A2)<m*abs(desviacion_tipica_A2))&(Ts_B2>Tp_B2+5));
        break
    end
end
%-----
% El siguiente ciclo calcula el tiempo de establecimiento después de la
% perturbación y el valor de la altura donde este ocurre
for j=1:length(C2);
    Ts_C2=C2(j,1); % El tiempo en la posición j
    ys_C2=C2(j,2); % La medida de la altura en la posición j
    if ((abs(ys_C2-valor_medio_A2)<m*abs(desviacion_tipica_A2))&(Ts_C2>(Te+5)));
        break
    end
end
MPH_B2=Ytp_B2-ys_B2;
Porcen_MPH_B2_proporcional=(MPH_B2/ys_B2)*100;
Ts_proporcional_B2=Ts_B2;
%la siguiente parte lee el %MPH y Ts después de la perturbación
MPH_C2_perturbacion_proporcional=Ytp_C2-ys_C2;
Porcen_MPH_C2_perturbacion_proporcional=(MPH_C2_perturbacion_proporcional/ys_C2)*100;
Ts_C2_perturbacion_proporcional=Ts_C2;
r2(1,1)=Porcen_MPH_B2_proporcional;
r2(1,2)=Ts_proporcional_B2;
r2(1,3)=MPH_C2_perturbacion_proporcional;
r2(1,4)=Ts_C2_perturbacion_proporcional;
r2(1,5)=O_e(length(O_e),1);
r2(1,6)=IAE_e(length(IAE_e),1);

```

```

r2(1,7)=TVM_e(length(TVM_e),1);
r2;
plot(t,h2,'markeredgecolor','y','markerfacecolor',[.9 0 .9],...
      'linestyle','--','color','b','linewidth',3)
grid on
hold on
%la siguiente parte ubica gráficamente los puntos picos
%-----
%la siguiente parte ubica gráficamente los puntos picos después de la
%perturbación
p1_A2=valor_medio_A2+m*desviacion_tipica_A2;
p2_A2=valor_medio_A2-m*desviacion_tipica_A2;
% % % % % plot(t,valor_medio_A2,'b',t,p1_A2,'b',t,p2_A2,'b')
%-----
%FIN CONTROLADOR EXPONENCIAL POLINÓMICO
%-----
% CONTROLADOR PID
%-----
A3=[t,h3];% se construye la matriz A3 de dos columnas la primera columna son
%los tiempos de muestreo y la segunda son las medidas del nivel de los
%datos provenientes del controlador de error cuadrático
%A continuación se calcula la media del nivel y la desviación típica de la
%matriz A3
valor_medio_A3=mean(A3(:,2));%Valor promedio de las alturas
desviacion_tipica_A3=std(A3(:,2));
% La siguiente parte ubica la posición donde se presenta el Te, para
% construir una submatriz de 32 hasta ahí
for k=1:length(A3);
    if A3(k,1)<Te
        Q3=k;
    else
        break
    end
end
% la siguiente parte construye una submatriz B3 de la matriz A3, aquella que
% llega hasta el tiempo de la perturbación, hasta Q3.
for i=1:Q3
    for j=1:2
        B3(i,j)=A3(i,j);
    end
end
B3;
% la siguiente parte construye una sub matriz C3 de la matriz A3, aquella que
% va desde el comienzo de la perturbación hasta el final de de A3
for i=Q3+1:length(A3)
    for j=1:2
        C3(i-Q3,j)=A3(i,j);
    end
end
end
C3;

```

```

maximo_B3=max(B3(:,2));% Calcula el valor máximo en la matriz B3
maximo_C3=max(C3(:,2));% Calcula el valor máximo en la matriz C3
%el siguiente ciclo encuentra en la matriz B3 el valor pico: Ytp_B3 de las
%alturas y el tiempo Tp_B3 donde este ocurre, es decir antes de la perturbación
for k=1:length(B3);
    if B3(k,2)==maximo_B3;
        Tp_B3=B3(k,1);
        Ytp_B3=B3(k,2);
    end
end
%-----
%el siguiente ciclo encuentra en la matriz C3 el valor pico: Ytp_C3 de las
%alturas de la matriz C3 y el tiempo %Tp_C3 donde este ocurre
for k=1:length(C3);
    if C3(k,2)==maximo_C3;
        Tp_C3=C3(k,1);
        Ytp_C3=C3(k,2);
    end
end
%-----
%El siguiente ciclo calcula el tiempo de establecimiento
%y el valor de la altura donde este ocurre en la matriz B3
for j=1:length(B3);
    Ts_B3=B3(j,1); % El tiempo en la posición j
    ys_B3=B3(j,2); % La medida de la altura en la posición j
    if ((abs(ys_B3-valor_medio_A3)<m*abs(desviacion_tipica_A3))&(Ts_B3>Tp_B3+5));
        break
    end
end
%-----
% El siguiente ciclo calcula el tiempo de establecimiento después de la
% perturbación y el valor de la altura donde este ocurre
for j=1:length(C3);
    Ts_C3=C3(j,1); % El tiempo en la posición j
    ys_C3=C3(j,2); % La medida de la altura en la posición j
    if ((abs(ys_C3-valor_medio_A3)<m*abs(desviacion_tipica_A3))&(Ts_C3>(Te+5)));
        break
    end
end
MPH_B3=Ytp_B3-ys_B3;
Porcen_MPH_B3_proporcional=(MPH_B3/ys_B3)*100;
Ts_proporcional_B3=Ts_B3;
%la siguiente parte lee el %MPH y Ts después de la perturbación
MPH_C3_perturbacion_proporcional=Ytp_C3-ys_C3;
Porcen_MPH_C3_perturbacion_proporcional=(MPH_C3_perturbacion_proporcional/ys_C3)*100;
Ts_C3_perturbacion_proporcional=Ts_C3;
r3(1,1)=Porcen_MPH_B3_proporcional;
r3(1,2)=Ts_proporcional_B3;
r3(1,3)=MPH_C3_perturbacion_proporcional;
r3(1,4)=Ts_C3_perturbacion_proporcional;
r3(1,5)=O_pid(length(O_pid),1);

```

```

r3(1,6)=IAE_pid(length(IAE_pid),1);
r3(1,7)=TVM_pid(length(TVM_pid),1);
r3;
%a continuación de determina el coeficiente de variación de los índices de
%desempeño
%-----
%coeficiente de variación del %MPH
datos=[r(1,1) r1(1,1) r2(1,1) r3(1,1)];
media_porc_MPH=mean(datos);
des_tip_porc_MPH=std(datos);
Coef_variacion_porc_MPH=(des_tip_porc_MPH/media_porc_MPH);
r(1,8)=Coef_variacion_porc_MPH*100;
media_porc_MPH_emprobleado=mean([r(1,1) r2(1,1) r3(1,1)]);
des_tip_porc_MPH_emprobleado=std([r(1,1) r2(1,1) r3(1,1)]);
Coef_variacion_porc_MPH_emprobleado=(des_tip_porc_MPH_emprobleado/media_porc_MPH_emprobleado);
r(1,9)=Coef_variacion_porc_MPH_emprobleado;
%-----
%coeficiente de variación del Ts
datos1=[r(1,2) r1(1,2) r2(1,2) r3(1,2)];
media_Ts=mean(datos1);
des_tip_Ts=std(datos1);
Coef_variacion_Ts=(des_tip_Ts/media_Ts);
r1(1,8)=Coef_variacion_Ts*100;
media_Ts_emprobleado=mean([r(1,2) r2(1,2) r3(1,2)]);
des_tip_Ts_emprobleado=std([r(1,2) r2(1,2) r3(1,2)]);
Coef_variacion_Ts_emprobleado=(des_tip_Ts_emprobleado/media_Ts_emprobleado);
r1(1,9)=Coef_variacion_Ts_emprobleado;
%-----
%coeficiente de variación del MPH con perturbación
datos2=[r(1,3) r1(1,3) r2(1,3) r3(1,3)];
media_porc_MPH_pert=mean(datos2);
des_tip_porc_MPH_pert=std(datos2);
Coef_variacion_porc_MPH_pert=(des_tip_porc_MPH_pert/media_porc_MPH_pert);
r2(1,8)=Coef_variacion_porc_MPH_pert*100;
media_porc_MPH_pert_emprobleado=mean([r(1,3) r2(1,3) r3(1,3)]);
des_tip_porc_MPH_pert_emprobleado=std([r(1,3) r2(1,3) r3(1,3)]);
Coef_variacion_porc_MPH_pert_emprobleado=(des_tip_porc_MPH_pert_emprobleado/media_porc_MPH_pert_emprobleado);
r2(1,9)=Coef_variacion_porc_MPH_pert_emprobleado;
%-----
%coeficiente de variación del Ts con perturbacion
datos3=[r(1,4) r1(1,4) r2(1,4) r3(1,4)];
media_Ts_pert=mean(datos3);
des_tip_Ts_pert=std(datos3);
Coef_variacion_Ts_pert=(des_tip_Ts_pert/media_Ts_pert);
r3(1,8)=Coef_variacion_Ts_pert*100;
media_Ts_pert_emprobleado=mean([r(1,4) r2(1,4) r3(1,4)]);
des_tip_Ts_pert_emprobleado=std([r(1,4) r2(1,4) r3(1,4)]);
Coef_variacion_Ts_pert_emprobleado=(des_tip_Ts_pert_emprobleado/media_Ts_pert_emprobleado);
r3(1,9)=Coef_variacion_Ts_pert_emprobleado;

```

```

%-----
%coeficiente de variación del offset
datos4=[r(1,5) r1(1,5) r2(1,5) r3(1,5)];
media_off=mean(datos4);
des_tip_off=std(datos4);
Coef_variacion_off=(des_tip_off/media_off);
r4(1,8)=Coef_variacion_off*100;
media_offset_emproblegado=mean([r(1,5) r2(1,5) r3(1,5)]);
des_tip_offset_emproblegado=std([r(1,5) r2(1,5) r3(1,5)]);
Coef_variacion_offset_emproblegado=(des_tip_offset_emproblegado/media_offset_emproblegado);
r4(1,9)=Coef_variacion_offset_emproblegado;
%-----
%coeficiente de variación del IAE
datos5=[r(1,6) r1(1,6) r2(1,6) r3(1,6)];
media_IAE=mean(datos5);
des_tip_IAE=std(datos5);
Coef_variacion_IAE=(des_tip_IAE/media_IAE);
r5(1,8)=Coef_variacion_IAE*100;
media_IAE_emproblegado=mean([r(1,6) r2(1,6) r3(1,6)]);
des_tip_IAE_emproblegado=std([r(1,6) r2(1,6) r3(1,6)]);
Coef_variacion_IAE_emproblegado=(des_tip_IAE_emproblegado/media_IAE_emproblegado);
r5(1,9)=Coef_variacion_IAE_emproblegado;
%-----
%coeficiente de variación del TVM
datos6=[r(1,7) r1(1,7) r2(1,7) r3(1,7)];
media_TVM=mean(datos6);
des_tip_TVM=std(datos6);
Coef_variacion_TVM=(des_tip_TVM/media_TVM);
r6(1,8)=Coef_variacion_TVM*100;
media_TVM_emproblegado=mean([r(1,7) r2(1,7) r3(1,7)]);
des_tip_TVM_emproblegado=std([r(1,7) r2(1,7) r3(1,7)]);
Coef_variacion_TVM_emproblegado=(des_tip_TVM_emproblegado/media_TVM_emproblegado);
r6(1,9)=Coef_variacion_TVM_emproblegado;
Matriz_MPH=[datos r(1,8) r(1,9)];% Matriz que agrupa los porcentajes de MPH y su Coeficiente de variación
Matriz_Ts=[datos1 r1(1,8) r1(1,9)];% Matriz que agrupa los Ts y su Coeficiente de variación
Matriz_porc_MPH_pert=[datos2 r2(1,8) r2(1,9)];% Matriz que agrupa los %MPH pert y su Coeficiente de variación
Matriz_Ts_pert=[datos3 r3(1,8) r3(1,9)];% Matriz que agrupa los Ts_pert y su Coeficiente de variación
Matriz_off=[datos4 r4(1,8) r4(1,9)];% Matriz que agrupa los offset y su Coeficiente de variación
Matriz_IAE=[datos5 r5(1,8) r5(1,9)];% Matriz que agrupa los IAE y su Coeficiente de variación
Matriz_TVM=[datos6 r6(1,8) r6(1,9)];% Matriz que agrupa los TVM y su Coeficiente de variación
disp('-----')
disp('          DATOS DEL %MPH')
disp('-----')
disp(' Propor      | Cuadrát | Exp_Pol | PID | CV ')
disp('-----')
Matriz_MPH
disp('-----')
disp('          DATOS DEL Ts')
disp('-----')
disp(' Propor      | Cuadrát | Exp_Pol | PID | CV ')
disp('-----')

```

```

Matriz_Ts
disp('-----')
disp('          DATOS DEL %MPH PERTURBACIÓN')
disp('-----')
disp(' Propor      | Cuadrát | Exp_Pol | PID | CV ')
disp('-----')
Matriz_porc_MPH_pert
disp('-----')
disp('          DATOS DEL Ts PERTURBACIÓN')
disp('-----')
disp(' Propor      | Cuadrát | Exp_Pol | PID | CV ')
disp('-----')
Matriz_Ts_pert
disp('-----')
disp('          DATOS DEL OFFSET')
disp('-----')
disp(' Propor      | Cuadrát | Exp_Pol | PID | CV ')
disp('-----')
Matriz_off
disp('-----')
disp('          DATOS IAE')
disp('-----')
disp(' Propor      | Cuadrát | Exp_Pol | PID | CV ')
disp('-----')
Matriz_IAE
disp('-----')
disp('          DATOS TVM')
disp('-----')
disp(' Propor      | Cuadrát | Exp_Pol | PID | CV ')
disp('-----')
Matriz_TVM
plot(t,h3,'markeredgecolor','y','markerfacecolor',[.9 0 .9],...
      'linestyle','--','color','r','linewidth',3)

grid on
hold on
p1_A3=valor_medio_A3+m*desviacion_tipica_A3;
p2_A3=valor_medio_A3-m*desviacion_tipica_A3;
%-----
%FIN CONTROLADOR PID
%-----
xlabel('t (seg)')
ylabel('h(t)')
title('RESPUESTA DEL SISTEMA CON UNA PERTURBACIÓN TIPO OLA')
plot(t,p,'markeredgecolor','y','markerfacecolor',[.9 0 .9],...
      'linestyle','-','color','cyan','linewidth',2)
plot(t,hr,'markeredgecolor','y','markerfacecolor',[.9 0 .9],...
      'linestyle','--','color','black','linewidth',2)

legend('Proporcional','De error cuadrático','Exp. Polinómico','PID',...
       'Perturbación','Punto de control')

```

## ANEXO F. RETRATOS DE FASE

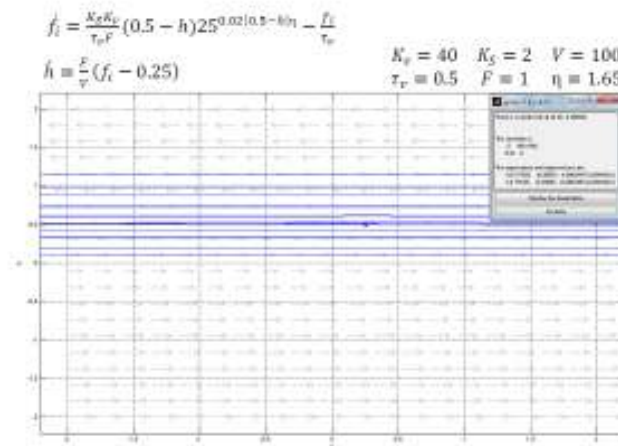


Fig. 7. Diagrama de fase para los parámetros dados que se muestran en el grafico  $F = 1$

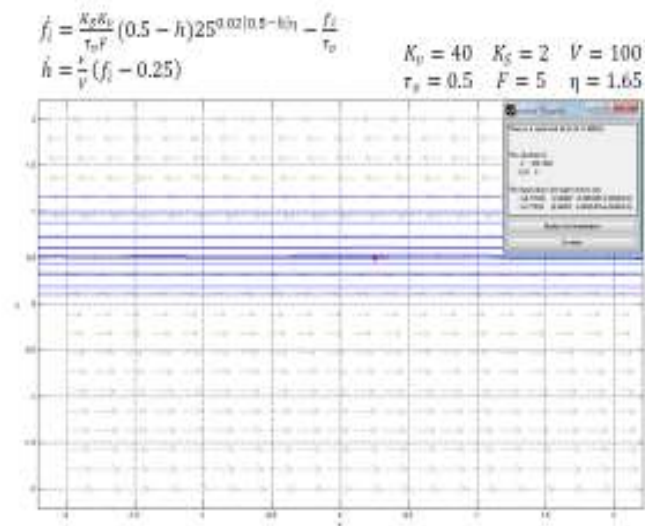


Fig. 8. Diagrama de fase para los parámetros dados que se muestran en el grafico  $F = 5$

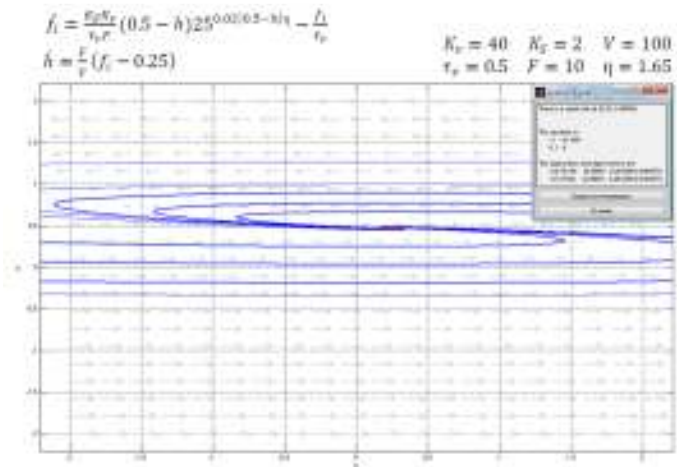


Fig. 9. Diagrama de fase para los parámetros dados que se muestran en el grafico  $F = 10$

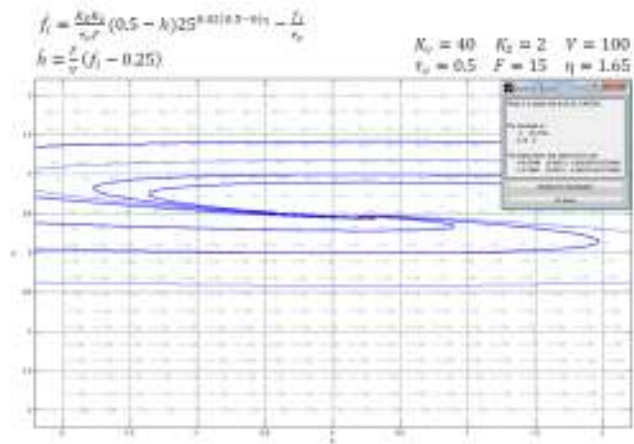


Fig. 10. Diagrama de fase para los parámetros dados que se muestran en el grafico  $F = 15$

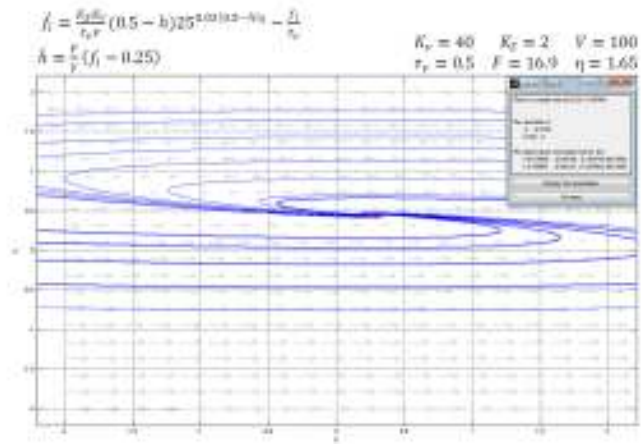


Fig. 11. Diagrama de fase para los parámetros dados que se muestran en el grafico  $F = 16.9$

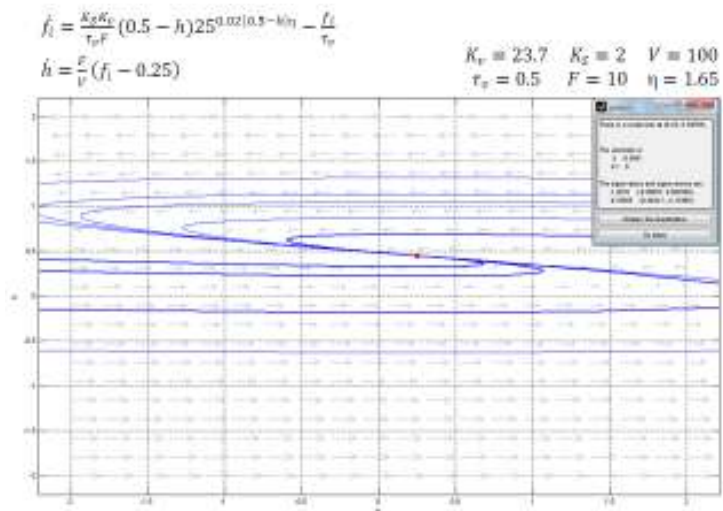


Fig. 12. Diagrama de fase para los parámetros dados que se muestran en el grafico  $K_1 = 23.7$

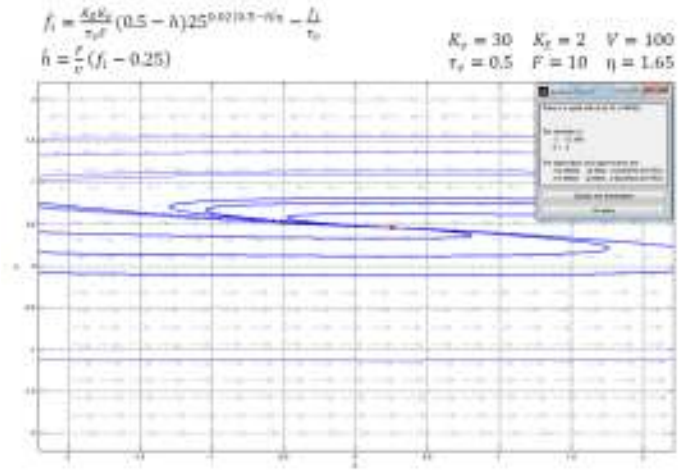


Fig. 13. Diagrama de fase para los parámetros dados que se muestran en el grafico  $K_p = 30$

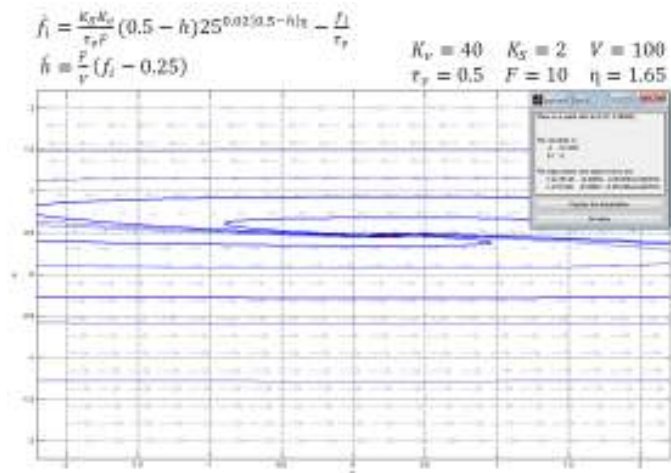


Fig. 14. Diagrama de fase para los parámetros dados que se muestran en el grafico  $K_p = 40$

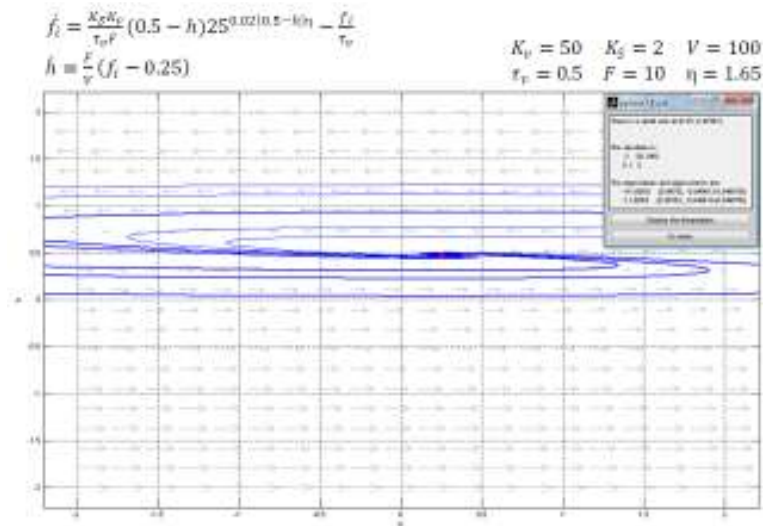


Fig. 15. Diagrama de fase para los parámetros dados que se muestran en el grafico  $K_v = 50$

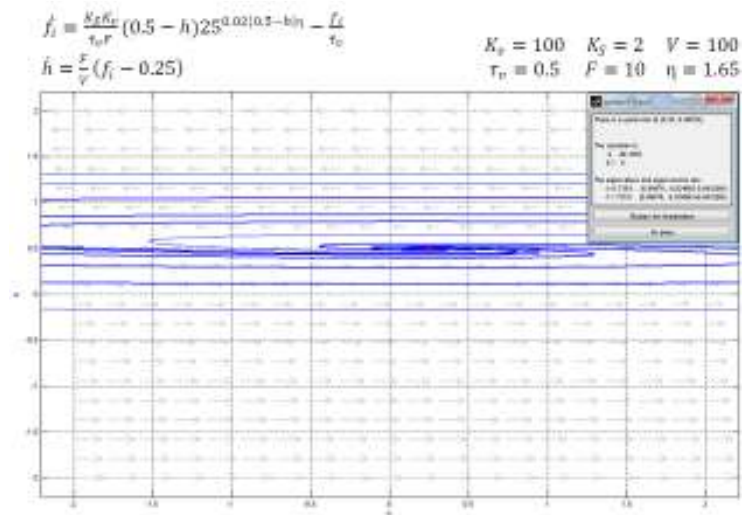


Fig. 16. Diagrama de fase para los parámetros dados que se muestran en el grafico  $K_v = 100$ .

# Bibliografía

---

- [1] Acedo Sánchez, José. Instrumentación y control avanzado de procesos. Barcelona: Díaz de Santos, 2006. 609p.
- [2] Agudelo B., Sebastián; Ortiz H., Eliana; Vásquez M., Rafael y Castrillón H., Fabio. Comparación de técnicas adicionales de control. En: Ingeniería Química julio-agosto 2010.
- [3] Berber, R. and Kravaris, C. Nonlinear Model Based Process Control», editors. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998. 896p.
- [4] Bifurcaciones. <http://www.docentes.unal.edu.co/atovarp/docs/IGB/02Introducci%F3n%20a%20las%20bifurcaciones.pdf>.
- [5] Bronshtein, I. y Semendiaev, K. Manual de matemáticas, para ingenieros y estudiantes. Moscú: Mir, 1988. 155p.
- [6] Buckley, P.S. Nonlinear averaging level control with digital controllers. Texas A y M. Instrumentation Symposium. Enero, 1986.
- [7] Castrillón, Fabio. Control de nivel. En: Estabilidad de sistemas de nivel integradores con algoritmo de error cuadrático. s.l.: Congreso ACA, 2007. 7 p.
- [8] Castrillón, F, Osorio, M Y. Gallego, M.P. Estabilidad de Sistemas de Nivel Integradores con Algoritmo de Error Cuadrático. Universidad Pontificia Bolivariana. Grupo de Investigación en Automática y Diseño A+D, 2007.
- [9] Cheung, T.F. PhD. Dissertation, Lehigh University (1978).
- [10] Cheung, T. y Luyben, W. Nonlinear and nonconventional liquid level controllers. En: Ind. Eng. Chem. Fundam. Vol. 19 (1980); p. 93-98.
- [11] Creuss, Antonio. Instrumentación Industrial. Marcombo, S.A, Barcelona, España. 1997. 525p.
- [12] Duarte, O. Introducción a los Sistemas no Lineales. Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Colombia. p.1-44.
- [13] Espacio de estado. [http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio\\_de\\_estados](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_de_estados).
- [14] Espinoza Verdejo, Miguel. Dos contribuciones sobre la estabilidad y el determinismo de los sistemas. En: Revista Límite. s.l. No. 10 (2003); p. 20.
- [15] Etchehoury, María. Sistemas no-lineales. Salta: Universidad Nacional de La Plata, 2005. p. 14.

- [16] Friedman, Y. Z. Tuning averaging level controllers. En: Hydrocarbon processing. Vol 73, No. 12. December. 1994.p.103
- [17] Gordillo, Francisco. Estabilidad de sistemas no lineales basada en la teoría de Lyapunov. En: Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial. Vol. 6, No. 2 (Abr., 2009); p. 7.
- [18] Gorostiaga, L. y Busoch, C. El control promediante, principios de diseño y aplicación al proceso azucarero. En: Memorias III Congreso de la Asociación Colombiana de Automática. Rionegro Sept 24-27 de 1998. Universidad Católica de Oriente. p 300-305.
- [19] Haizhou P, Hong W, Vikram K, Queiroz M. Experimental validation of a nonlinear backstepping liquid level controller for a state coupled two tank system. Control Engineering Practice 13 (2005) 27–40.
- [20] Hussain, M.A, HO, P.Y Allwright J. C. Adaptive linearizing control with neural-network-based hybrid models. Industrial & engineering chemistry research ISSN 0888-5885 CODEN IECRED. 2001, Vol. 40, No. 23. pp. 5604-5620.
- [21] Hussain, M Y Pei, Y. Adaptive linearizing control with neural-network-based hybrid models. American Chemical Society, Washington, DC, ETATS-UNIS (1987).
- [22] Juan Pagano, Daniel. Bifurcaciones en sistemas de control no lineales. Tesis Doctoral. Sevilla: Universidad de Sevilla, 1999. p. 38.
- [23] Jutan, A. A Nonlinear PI(D) controller, Can. J.Chem.Eng.,67, p. 485-493.
- [24] Khalil, Hassan. Nonlinear Systems. 2a. ed. New York: Prentice Hall, 1996. p.144
- [25] Khan, M. K y Spurgeon S.K. Application of output feedback based dynamic sliding mode control to speed control of an automotive engine. In Fourth Nonlinear Control Network (NCN4) Workshop, The University of She\_eld, UK.,June. 2001.
- [26] Kothare,M.V, Mettler,B, Morari,M ,Bendotti,P, Falinower, C.M. Level control in steam generator of a nuclear power plant, IEEE Trans. Cont. Syst. Technol. 8 (2000); p. 55-69.
- [27] Kow Liang wu,Chen Ching Yu, Yu Chang Cheng. A two degree of freedom level control. Journal of Process Control 11. 2001. p. 311-319
- [28] Loaiza Ramírez, Manuel. Diseño y simulación de un criptosistema caótico para comunicaciones seguras.s.l.: Universidad de las Américas Puebla, 2006.
- [29] Lorenzo Gonzales, María de las Nieves. Influencia del ruido Gaussiano correlacionado en la Sincronización de Sistemas Caóticos. Universidad Santiago de Compostela, 2000. p. 4.
- [30] Luyben, M. y Luyben, W. Essentials of Process Control. Singapore: s.n., 1997. p. 22.
- [31] Marroquin G y Luyben W.L., Experimental evaluation of nonlinear cascade controllers for batch reactors.Ind. Eng. Chem. Fundm. 11 No 4 (1972), p. 552–556
- [32] Marlín, T.E. Process Control. Designing Process and Control System for Dynamic Performance. Mc Graw, New York, 1995.
- [33] Mcdonald,K.A,Mcavoy,T.J and Tits,A. Optimal averaging level control AIChE J. 32 (1) p. 75-86. 1986.
- [34] Ocampo Moreno, Juan Esteban. Sintonía de sistemas de control en cascada. En: Ingeniería Química Nº 473 julio-agosto 2009 p 64-70.

- [35] Peña Zapata, Gloria Elena. Dinámica de sistemas y análisis cualitativo matemático. En: Modelo de Gestión de la Producción. 2003. p. 35.
- [36] Roy, S. y Smith, C. Better than average [ing] level control. En: InTech, 1995.
- [37] Roy, S. Selection and tuning of feedback controller for averaging level control. University of South Florida, Master tESIS, 1988.
- [38] Rugh, W.J. The extended linearization approach for nonlinear system problems. Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear control Theory. Edited by M. Fliess and M. Hazewinkel p. 285-309; 1987.
- [39] San Martín Moreno, Jesús; Tomeo Perucha, Venancio y Uña Juárez, Isaías. Métodos matemáticos. ampliación de matemáticas para ciencias e ingeniería. España: Thompson, 2005. p. 413.
- [40] Sbarbaro, D y Ortega, R. Averaging level control: An approach based on mass balance. Journal of Process Control. Volume 17, Issue 7, August 2007. p. 621-629.
- [41] Seborg, D., Thomas E. y Duncan, A. Process Dynamics and Control. 2a. ed. Santa Bárbara: John Wiley & Sons, 2004.
- [42] Shinskey, F.G. Sistemas de control de procesos. Aplicación, diseño y sintonización. México: Mc Graw-Hill, 1996. 141p.
- [43] Smith, C. y A. Corripio, Principles and practice of automatic process control, 2ª edición., John Wiley & Sons, New York, USA (1997).
- [44] Shunta, J.P. y Fehervari, W. Nonlinear Control of Liquid Level. En: Instrumentation Technology. s.l. Vol. 23, No. 43 (Ene., 1979); p. 43-48.
- [45] Thanomsat C., Taft C.W., Annaswamy A.M. Level control in feedwater heater systems using nonlinear strategies. En ISA transaction Volume 37, Issue 4 , September 1998, p. 299-312.
- [46] Teng, T. K., Shieh, J. S y Chen, C. S. Genetic algorithms applied in online autotuning PID parameters of a liquid-level control system. Transactions of the Institute of Measurement and Control, ISSN 0142-3312, Vol. 25, N° 5 (2003); p. 433-450.
- [47] Tunyasirirut, S Y Wangnipparnto, S. Level Control in Horizontal Tank by Fuzzy Logic Controller. SICE-ICASE International Joint Conference, 2006. p. 2491-2494
- [48] Vilchez Lobato, María Luisa. Análisis bioeconómico y estadístico de pesquerías. Artesanales andaluzas. Sevilla: Consejería Agricultura y Pesca, 2002. 70p.
- [49] Wang, M Y Crusca, F (2002). Design and implementation of a gain scheduling controller for a level Control system. In: ISA transactions. Vol. 41. p. 323-331.
- [50] Xu, M y Li, S. Cascade generalized predictive control strategy for boiler drum level. En: ISA Transactions. Vol. 44. Julio (2005); p. 401.