

# Estrategia de Cobertura a Través de Contratos Forward en Mercados Eléctricos

Alfredo Trespalacios Carrasquilla\*

Juan Fernando Rendón García \*\*

Javier Orlando Pantoja Robayo, PhD(C.) \*\*\*

22 de agosto de 2011

## Resumen

Quienes transan electricidad en los mercados liberalizados, están expuestos a riesgos que requieren un análisis y tratamiento diferente al de otro tipo de *commodities*. La dinámica del precio spot, unida a la necesidad de completar el mercado cubriendo la exposición al riesgo de volumen, son entre otras las características que hacen a este mercado diferente y complejo. Nuestro trabajo presenta un esquema de cobertura estática que puede implementar un agente que busca maximizar el valor esperado de su beneficio ajustado por riesgo y enfrenta incertidumbre por volumen. El agente participa en un mercado eléctrico cuyo precio spot presenta características de estacionalidad y reversión a la media. Asumimos como única herramienta de cobertura disponible los contratos forward que incorporan una prima de riesgo. Como caso de estudio se presenta el mercado eléctrico colombiano. Se realiza un desarrollo teórico utilizando cálculo estocástico y simulación de Montecarlo. Encontramos que cuando hay presencia de la prima de riesgo forward, el precio del contrato tendrá un *drift*, en cuyo caso el nivel de cobertura de un agente dependerá de su nivel de aversión al riesgo, la volatilidad del volumen esperado, la prima de riesgo de largo plazo del mercado y la correlación esperada entre volumen y precio forward.

**Palabras Claves:** Mercado eléctrico, cobertura, instrumentos derivados

**JEL:** C41, G11, Q40

---

\*Ingeniero Electricista Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia; Estudiante Maestría (Sc.) Universidad EAFIT; Profesional Mercado Energía Mayorista, Empresas Públicas de Medellín E.S.P.

\*\*Ingeniero de Producción Universidad EAFIT; Estudiante Maestría (Sc.) Universidad EAFIT; Catedrático Universidad de Antioquia e Instituto Tecnológico Metropolitano; Inversor Independiente.

\*\*\*PhD(C) en Administración, Universidad HEC EAFIT; Profesor de la Escuela de Administración, Universidad EAFIT

## 1. Introducción

La exposición a riesgo a la que se enfrentan los diferentes agentes que realizan transacciones con activos de financieros, ha motivado la búsqueda de herramientas que permitan prevenir y mitigar los efectos de las variaciones aleatorias de los precios de dichos activos; los contratos forward, los futuros y opciones que se transan en mercados OTC o mercados regulados son ejemplo de estas herramientas. Así mismo los agentes que transan en un mercado de energía eléctrica, se exponen a la incertidumbre asociada con el precio futuro de este insumo. A manera de ilustración: de acuerdo con Gil and Maya (2008) la volatilidad del precio spot diario para Colombia es del 13.72 % y según Lucia and Schwartz (2002) la volatilidad del precio spot diario para el Nord Pool (*Nordic Power Exchange*) es del 9.9 %; multiplicando por la raíz de 365, la volatilidad del spot en Colombia equivaldría a un 262 % anual y para el Nord Pool sería de 189 % anual.

La energía eléctrica puede ser considerada como un *commodity de flujo* que se caracteriza por serias limitaciones de almacenamiento y transporte que restringen las posibilidades de arbitraje en tiempo y espacio según Lucia and Schwartz (2002). De acuerdo con Geman and Roncoroni (2003) estas limitaciones implican que el precio de la electricidad tenga una dependencia mayor de las condiciones locales de oferta y demanda que otros *commodities*, presentando además inelasticidad en la demanda para el corto plazo. Pilipović (1998) explica que los precios de la energía están determinados por condiciones de almacenamiento en el corto plazo y por el potencial suministro de energía futuro (*Energy in the ground*) en el largo plazo. Estas características conllevan a que el precio spot de energía presente un componente predecible que, de acuerdo con Lucia and Schwartz (2002), puede ser explicado por cambios en la demanda dada la actividad de los negocios, el comportamiento periódico del consumo y la evolución estacional de las temperaturas y por esto proponen una familia de procesos estocásticos que representan la trayectoria y las características estadísticas presentadas por el precio spot. Estos procesos describen la dinámica en términos de dos tipos de componentes: El primer componente es una función determinística que captura las características estacionales y representa la parte predecible del precio; el segundo componente (para los modelos de un factor) es estocástico y sigue un proceso de difusión continuo de reversión a la media, con media de largo plazo igual a cero. Pilipović (1998) y Geman and Roncoroni (2003) también proponen modelos matemáticos para precio spot de energía eléctrica que capturan características de estacionalidad, reversión a la media e incluso saltos. Uno de los procesos de un solo factor utilizados por Lucia and Schwartz (2002) para describir el precio spot de la energía en el Nord Pool (mercado eléctrico predominantemente hidráulico) fue usado por Gil and Maya (2008) para describir el comportamiento estacional del precio spot de la energía eléctrica en Colombia.

Si dos agentes desean negociar la entrega de energía para un periodo futuro y que el precio pactado sea independiente de las variaciones del precio spot, pueden recurrir al uso de contratos forward o futuros. De acuerdo con Hull

(2009) las diferencias teóricas entre los precios de contratos futuros y forwards que tienen una vigencia de algunos meses son en la mayoría de casos suficientemente pequeñas y pueden ser ignoradas. El análisis hecho para contratos forward podría ser aplicado a futuros si se considera que los agentes pueden acceder a un mercado de futuros y que no se permite el cierre de posiciones antes de la fecha de expiración, cuando el periodo de madurez es relativamente cercano al momento de la negociación. Expone además que la relación que se presenta entre el precio de los contratos con entrega a futuro y el valor esperado del precio del spot se basa, desde un enfoque moderno, en la razón entre el riesgo y el retorno de la inversión. Sólo cuando la correlación entre el precio forward y el precio spot es cero, el precio del contrato forward será igual al valor esperado del precio spot. En otros casos se presenta una condición de *backwardation* cuando el precio del contrato forward es menor que el precio esperado del spot o de *contango* cuando ocurre lo contrario.

Lucia and Schwartz (2002) plantean que el precio de un derivado financiero sobre electricidad corresponde al valor esperado de los pagos asociados descontado por riesgo; asumen que no es aplicable el principio de no arbitraje y las diferencias entre el valor esperado del precio spot y el precio de los contratos forward son ajustadas a través de una prima de riesgo. Bessembinder and Lemmon (2002) encuentran de forma empírica, para los mercados eléctricos de PJM y CALPX, que el precio forward de mercados eléctricos es un estimador sesgado de la expectativa del precio spot y que la prima de riesgo de mercado está relacionada con la expectativa de demanda, siendo mayor para los meses de verano. Pantoja (2009) encuentra que en el mercado eléctrico colombiano la prima de riesgo en los contratos forward varía durante el día y sus propiedades están explicadas por factores de riesgo como las variaciones esperadas del spot debido al fenómeno de El Niño y la disponibilidad de generación hidráulica. Así mismo Furió and Meneu (2009) analizan también la información contenida en la diferencia entre el precio de los contratos forward y el precio spot en el mercado español, encontrando que el signo y magnitud de la prima de riesgo depende de las variaciones no esperadas en la demanda y la capacidad de generación hidráulica y está relacionada negativamente con la varianza del precio spot.

Con el propósito de describir el precio forward de energía eléctrica, Lucia and Schwartz (2002), siguen la metodología propuesta por Cox and Ross (1976), quienes encuentran un proceso neutral al riesgo para la componente estocástica del precio spot y definen una expresión para el precio forward que incorpora la componente determinística, las distorsiones de corto plazo del spot y la prima de riesgo del mercado. Dadas las características de los mercados eléctricos, los agentes participantes enfrentan no sólo la incertidumbre generada por el comportamiento futuro del precio spot, sino también a la incertidumbre causada por el volumen a transar. Sin embargo, el riesgo de volumen no puede ser perfectamente cubierto con el uso de derivados del precio spot. Näsäkkälä and Keppo (2005) comentan que si el clima no está perfectamente correlacionado con los precios de los derivados eléctricos, el riesgo de volumen no podrá ser cubier-

to por estos instrumentos y así, de acuerdo con Björk (2009), al presentarse mayor cantidad de fuentes de riesgo (precio y volumen) que activos transados, estos mercados pueden ser considerados como incompletos. Näsäkkälä and Keppo (2005) proponen una estrategia de cobertura estática, en la que explican qué porción de volumen cubrir y cuándo realizar la transacción de cobertura usando contratos forward. Asumen que los agentes maximizan el valor esperado de sus flujos de caja ajustados por riesgo. Parten de un modelo de precio forward que cumple con características martingala que no considera la prima de riesgo de mercado y otro modelo que refleja la incertidumbre de volumen, asumen además la correlación entre las dos variables. Los resultados indican que es adecuado sobrecubrirse cuando el volumen estimado y el precio forward están positivamente correlacionados y cuando la correlación entre volumen y precio forward es negativa, es adecuado hacer una cobertura parcial. También encuentran que cuando la correlación entre volumen estimado y precio spot es positiva, tiene el efecto preventivo de adelantar la transacción del contrato forward. Encontraron también que los agentes que enfrentan una volatilidad alta en el volumen pospondrán la cobertura.

Nuestro trabajo presenta un esquema de cobertura estática que puede implementar un agente que busca maximizar el valor esperado de su beneficio ajustado por riesgo y enfrenta incertidumbre por volumen. El agente participa en un mercado eléctrico cuyo precio spot presenta características de estacionalidad y reversión a la media. Asumiremos que la única herramienta de cobertura disponible corresponde a contratos forward que incorporan una prima de riesgo y por lo tanto el precio no es martingala. Para esto, se hace una descripción del modelo matemático que incluye los movimientos del precio spot, el precio forward y el volumen esperado. Luego, en la tercera sección se presenta la estrategia de cobertura propuesta y cómo ésta se modifica con las variaciones de los parámetros del agente, para después exponer cómo cambia la estrategia de cobertura al variar de los parámetros del mercado. En la quinta sección se hace un ejemplo y se explica cómo utilizar las tablas ubicadas en los anexos. En la última sección se presentan las conclusiones de esta investigación.

## 2. Modelo Matemático

### 2.1. Movimiento del precio spot

El precio spot del mercado eléctrico se mueve de acuerdo con el modelo de un factor propuesto por Lucia and Schwartz (2002), se denota  $P_t$  con  $t \in [0, \infty)$  y es representado por la suma de dos componentes. La primera componente se asume totalmente predecible y corresponde a una función determinística  $f(t)$ . La segunda componente,  $x_t$ , es un proceso estocástico de reversión a la media, o proceso de *Ornstein-Uhlenbeck*, con media de largo plazo igual a cero.

$$P_t = f(t) + x_t \quad (1)$$

$$dx_t = -\kappa x_t \cdot dt + \sigma \cdot dw_x \quad (2)$$

donde  $\kappa$  es la velocidad de reversión y debe ser mayor que cero, la condición inicial para el precio es  $x_{t_0} = x_0$  y  $dw_x$  es el cambio de un proceso browniano estándar y es la única fuente de incertidumbre del precio spot.

Tomando  $x_t$  de 1 se encuentra que  $dx_t = d(P_t - f(t))$  y así con  $f(t)$  diferenciable de primer orden, la ecuación diferencial estocástica del precio spot puede escribirse como en 3.

$$dP_t = \kappa(b(t) - P_t) dt + \sigma dw_x \quad (3)$$

$$b(t) = -\frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt} f(t) + f(t)$$

Resolviendo la ecuación diferencial estocástica 2 y reemplazando  $x_t$  en 1, se encuentra una expresión para el precio spot que se muestra en 4. Esta expresión es la misma que presetan Lucia and Schwartz (2002) si se asume que  $\sigma$  no varía con el tiempo y que  $t_0 = 0$ .

$$P_t = f(t) + x_0 e^{-\kappa(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \sigma e^{-\kappa(t-s)} dw_x(s) \quad (4)$$

La esperanza y varianza condicionadas del precio spot se presentan a continuación:

$$E_{t_0}[P_t] = f(t) + x_0 e^{-\kappa(t-t_0)} \quad (5)$$

$$Var_{t_0}[P_t] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left(1 - e^{-2\kappa(t-t_0)}\right) \quad (6)$$

En el largo plazo el valor esperado del precio spot es  $f(t)$  y la varianza es  $\sigma^2/2\kappa$ ; mientras más grande sea el valor de  $\kappa$  la convergencia se presentará más rápidamente. Nótese que se podría asumir que el largo plazo se ha logrado cuando  $t - t_0 \geq 7/\kappa$  ya que  $e^{-7} < 0,1\%$  y así en 5 se obtiene que luego del tiempo planteado se ha extinguido más del 99,9% de la distorsión de corto plazo  $x_0$ .

## 2.2. Movimiento del precio forward

De acuerdo con Lucia and Schwartz (2002) el precio del contrato forward de electricidad es el valor esperado ajustado por riesgo del precio spot,  $F(t) = E_t^*(P_T)$ ; Aplican la metodología propuesta por Cox and Ross (1976) y encuentran una medida neutral al riesgo para el proceso  $x_t$  que se puede representar mediante la ecuación diferencial estocástica 7. Donde  $\lambda$  es el precio por unidad de riesgo que cobra el mercado,  $\alpha$  es la prima de riesgo forward de largo plazo y  $dw^*$  es el diferencial de un movimiento Browniano bajo probabilidad neutral al riesgo.

$$\begin{aligned} dx_t &= \kappa(\alpha - x_t) \cdot dt + \sigma \cdot dw^* \\ \alpha &\equiv -\lambda \frac{\sigma}{\kappa} \end{aligned} \quad (7)$$

Resolviendo 7, reemplazando en 1 y aplicando el operador valor esperado se encuentra la solución explícita para el precio del contrato forward:

$$F(t) = f(T) + x_t e^{-\kappa(T-t)} + \alpha(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \quad (8)$$

El precio del contrato forward presenta tres componentes: Una determinística representada por  $f(T)$ , la persistencia de las distorsiones de corto plazo cuyo valor depende de  $x_t e^{-\kappa(T-t)}$  y la prima de riesgo forward  $\alpha(1 - e^{-\kappa(T-t)})$ .

Cuando el periodo de transacción es cercano al periodo de madurez, el efecto de las distorsiones de corto plazo cobra mayor importancia que la prima de riesgo forward. Cuando el periodo de negociación es lejano al de madurez el efecto del corto plazo se desvanece y la prima de riesgo forward se acerca al valor de  $\alpha$ , en el límite:  $F(t) = f(T) + \alpha$ .

Si se conoce la información hasta el periodo  $t$ , el valor del precio forward será determinístico. De lo contrario será una función estocástica que depende del valor de  $t$  y  $x_t$  donde la ecuación diferencial que gobierna su movimiento se puede hallar al aplicar lemma de Itô. La demostración de la relación presentada en 9 se presenta en el anexo B.

$$\begin{aligned} dF(t) &= \mu_F(t) \cdot dt + \sigma e^{-\kappa(T-t)} \cdot dw_x \\ \mu_F(t) &= -\alpha \cdot \kappa \cdot e^{-\kappa(T-t)} \end{aligned} \quad (9)$$

Esta expresión se diferencia de la propuesta por Näsäkkälä and Keppo (2005) principalmente en la componente determinística que ellos no incorporan y por la cual el modelo permite que el precio forward, dependiendo del signo de  $\alpha$  sea martingala ( $\alpha = 0$ ), supermartingala ( $E_{t_0}[F(t)] \leq F(t_0)$  cuando  $\alpha > 0$ ) o submartingala ( $E_{t_0}[F(t)] \geq F(t_0)$  cuando  $\alpha < 0$ ). Al resolver 9 y asumiendo que el conjunto de información disponible se encuentra hasta el periodo  $t_0$ , con  $t_0 \leq t$ , la forma cerrada para el precio forward es:

$$F(t) = F(t_0) + M_F(t) + \int_{t_0}^t \sigma e^{-\kappa(T-s)} dw_x(s) \quad (10)$$

Donde  $M_F(t)$  es una función determinística que puede ser interpretada como un ajuste a la prima de riesgo forward que cobra el mercado cuando faltan  $T - t$  periodos para el periodo de madurez:

$$M_F(t) = -\alpha \left[ e^{-\kappa(T-t)} - e^{-\kappa(T-t_0)} \right] \quad (11)$$

La esperanza y varianza condicionadas del precio forward se presentan a continuación:

$$E_{t_0}[F(t)] = F(t_0) + M_F(t) \quad (12)$$

$$Var_{t_0}[F(t)] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left[ e^{-2\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t_0)} \right] \quad (13)$$

De 6 y 13 se encuentra que la varianza del precio forward es inferior a la varianza del precio spot.

### 2.3. Movimiento del volumen esperado

Para cada momento  $t$ , se asume que la expectativa de volumen a transar (transacción que puede ser asociada a consumo o producción de la energía) por el agente  $i$  en el periodo  $T$  es  $q^i(t)$ . Näsäkkälä and Keppo (2005) proponen el modelo estocástico 14 para describir las variaciones de las expectativas de volumen en función de dos fuentes de incertidumbre, la primera proviene de la misma fuente de incertidumbre del precio forward (que afecta a todo el mercado) y la segunda está asociada a la incertidumbre que es independiente de la evolución del precio forward (que corresponde a aspectos particulares del agente  $i$ ). Según ellos, el modelo propuesto no impone restricciones sobre comportamientos estacionales del volumen transado. Las componentes estacionales del volumen se asumen como invariantes en el tiempo y por tanto su derivada respecto al tiempo será cero y así la ecuación diferencial del modelo de expectativas de volumen no posee componente determinística.

$$dq^i(t) = q^i(t) \left[ \sigma_{qx}^i \cdot dw_x + \sigma_q^i \cdot dw_q^i \right] \quad (14)$$

Para el instante  $t$  la varianza de la estimación de volumen a transar para el agente  $i$  es igual a la suma de los cuadrados de los parámetros  $\sigma_{qx}^i$  y  $\sigma_q^i$  los cuales son determinísticos y acotados. Asumiendo que la expectativa de volumen inicial es  $q^i(t_0) = q_0^i$ , la solución de 14 es:

$$q^i(t) = q_0 \cdot e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t ((\sigma_{qx}^i)^2 + (\sigma_q^i)^2) ds} \cdot e^{\int_{t_0}^t \sigma_{qx}^i dw_x(s) + \int_{t_0}^t \sigma_q^i dw_q(s)} \quad (15)$$

La esperanza y la varianza condicionadas se presentan a continuación:

$$E_{t_0}[q^i(t)] = q_0 \quad (16)$$

$$Var_{t_0}[q^i(t)] = q_0^2 \left[ e^{\int_{t_0}^t ((\sigma_{qx}^i)^2 + (\sigma_q^i)^2) ds} - 1 \right] \quad (17)$$

En forma matricial, las ecuaciones diferenciales de precios forward y cantidades se pueden expresar como:

$$\begin{pmatrix} dF(t) \\ dq^i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_F(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma e^{-\kappa(T-t)} & 0 \\ \sigma_{qx}^i \cdot q^i(t) & \sigma_q^i \cdot q^i(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dw_x \\ dw_q^i \end{pmatrix} \quad (18)$$

donde  $dw_x$  y  $dw_{qx}^i$  son independientes de acuerdo con Näsäkkälä and Keppo (2005) por lo que  $dw_x \cdot dw_{qx}^i = 0$ . Así, de Björk (2009), la correlación instantánea entre el precio forward y el volumen es:

$$\rho_{qx}^i = \frac{\sigma_{qx}^i}{\sqrt{(\sigma_q^i)^2 + (\sigma_{qx}^i)^2}} \quad (19)$$

## 2.4. Función objetivo

Se asume que los agentes tienen acceso al mercado spot y la cobertura de riesgo se realiza a través del mercado de contratos forward en el cual sólo es aplicable una estrategia del tipo *buy and hold*. Así, el flujo de caja del agente  $i$  para el periodo  $T$  está dado por:

$$\pi^i = P_T \cdot q^i(T) + \eta \cdot q^i(\tau) \cdot [F(\tau) - P_T] \quad (20)$$

Donde  $\tau \in [t_0, T)$  es el tiempo en el que se negocian los contratos forward (*hedging time*) y  $\eta$  es la razón de cobertura. Las operaciones en spot están representadas por la componente  $P_T \cdot q^i(T)$ , mientras que el pago originado por la operación en contratos forward es  $\eta \cdot q^i(\tau) \cdot [F(\tau) - P_T]$ . La cantidad de contratos forward transados es  $\eta \cdot q^i(\tau)$ . Considerando que en el periodo de madurez se cumple que  $P_T = F(T)$ , el flujo de caja del agente  $i$  por unidad de volumen esperado se puede escribir así:

$$\frac{\pi^i}{q^i(\tau)} = F(T) \cdot \frac{q^i(T)}{q^i(\tau)} + \eta \cdot [F(\tau) - F(T)] \quad (21)$$

El valor esperado condicionado a  $\tau$  del flujo de caja en el periodo  $T$ , por unidad de volumen esperado está dado por:

$$E_\tau \left[ \frac{\pi^i}{q^i(\tau)} \right] = F(\tau) + (1 - \eta) \cdot M_F(T) + Cov \left( F(T), \frac{q^i(T)}{q^i(\tau)} \right) \quad (22)$$

Donde  $Cov(\cdot)$  es el operador de la covarianza. En el esquema de cobertura propuesto, luego de realizar la transacción en el momento  $\tau$ , la composición del portafolio no puede ser reajustada y la decisión del agente en cada momento  $t \leq \tau$  debe ser la de efectuar la cobertura (seleccionando un valor adecuado para  $\eta$ ) considerando las expectativas actuales de volumen y precio spot o posponer la operación de cobertura. Asumiendo que para el periodo  $T$  el agente  $i$  busca maximizar el valor esperado ajustado por riesgo de su beneficio,  $\eta$  y  $\tau$  deben ser la solución al problema de optimización planteado en 23, que corresponde

al mismo problema de optimización que proponen solucionar Näsäkkälä and Keppo (2005) donde  $\lambda^i$  es el coeficiente de aversión al riesgo.

$$\max_{\eta, \tau} E_{t_0}[\pi^i] - \lambda^i \cdot Var_{t_0}[\pi^i] \quad (23)$$

De 22 y 23 se puede inferir que un agente neutral al riesgo, con  $\lambda^i = 0$ , estará dispuesto a transar tantos contratos forward como le sea posible y el valor esperado de su flujo de caja coincide con la prima de riesgo del mercado al momento de realizar la compra o venta de los contratos forward, como lo sugiere la sensibilidad de la función de utilidad ante los cambios de  $\eta$  que se presenta en 24.

$$\frac{\partial}{\partial \eta} E_{\tau} \left[ \frac{\pi^i}{q^i(\tau)} \right] = \alpha \left( 1 - e^{-\kappa(T-\tau)} \right) \quad (24)$$

### 3. Estrategia de Cobertura

La propuesta de cobertura que se presenta, asume que los agentes que participan en el mercado eléctrico son aversos al riesgo; es decir  $\lambda^i$  es mayor que cero. De acuerdo con Bodie et al. (2009), un inversionista averso al riesgo penaliza el valor esperado de su beneficio por el grado de riesgo que se encuentre asumiendo, ellos proponen como razonable una función de utilidad empleada normalmente por la industria y la academia que puede ser escrita como aparece en 23 . A diferencia de lo expuesto por Näsäkkälä and Keppo (2005), en este trabajo se encuentra que la decisión de los agentes no coincide necesariamente con la solución de mínima varianza del portafolio, así el coeficiente de aversión a riesgo del agente sí es determinante en la cobertura deseada, como lo muestra se aprecia en la figura ?. Para lograr un balance apropiado entre rentabilidad y riesgo, un inversionista debe hacer uso de instrumentos que atenúen el riesgo al que se enfrenta. La iliquidez del mercado eléctrico y los costos de transacción involucrados dificulta la aplicabilidad de una estrategia de cobertura dinámica por parte de productores, comercializadores y los propios consumidores, esto debido a que no es posible realizar negociaciones en un mercado continuo. Como solución se propone una estrategia de cobertura estática a través de contratos forward, que de acuerdo con Näsäkkälä and Keppo (2005) son fácilmente implementadas en mercados eléctricos. Sin embargo, los resultados obtenidos a partir del análisis con contratos forward puede ser utilizado para la formulación de una estrategia de cobertura utilizando contratos de futuros. Según Pilipović (1998) la correlación de los precios futuros de energía con las tasas de interés es típicamente nula, por lo cual las valoraciones del precio de los futuros y de contratos forward se realiza de la misma manera, por lo que el precio de los futuros de energía y el precio forward pueden usarse indistintamente ya que ambos reflejan el mismo valor.

De acuerdo con la formulación del problema, el agente que desea aplicar la

cobertura, deberá seleccionar la porción de energía que venderá en contratos forward y el momento para el cual realizar dicha cobertura. Se asume que el agente no puede modificar mediante su gestión los parámetros que corresponden a su expectativa de volumen  $q_0$ ,  $\sigma_q^i$  y  $\sigma_{qx}^i$  ni los parámetros  $\sigma$ ,  $\kappa$  y  $\alpha$  que dependen del mercado en el que están inmersos. En el anexo C de este trabajo se encuentran valores para los parámetros  $\sigma_q^i$ ,  $\sigma_{qx}^i$ ,  $\sigma$  y  $\kappa$  del mercado eléctrico colombiano.

La valoración del precio forward de energía eléctrica es función de la prima de riesgo forward, la existencia de dicha prima se sustenta en que el enfoque de no arbitraje para la valoración de activos financieros no puede ser aplicado de la manera usual en estos mercados, ya que este enfoque requiere el costo de conveniencia que relaciona el precio spot con el precio forward según Bessembinder and Lemmon (2002). Eydeland and Geman (1999) resaltan que existe una diferencia entre el precio forward y el precio spot esperado para el tiempo de maduración del forward, lo cual implica la presencia de la prima de riesgo forward, que representa la compensación por asumir el riesgo. Bessembinder and Lemmon (2002) presentan un modelo de equilibrio de mercado entre la expectativa de precio spot y el precio forward de energía eléctrica el cual implica que el precio forward de equilibrio es determinado por los participantes de la industria más que por los especuladores y dichos participantes están preocupados tanto por el valor esperado, como por la volatilidad de sus ingresos. El modelo propuesto implica que el precio forward de energía es un pronóstico sesgado de la expectativa de precio spot. La diferencia entre los dos activos (forward y expectativa de precio spot) es explicada por la prima de riesgo, la cual es función de las expectativas de la demanda y su volatilidad. Señalan que el precio forward supera la expectativa de precio spot cuando la demanda esperada o la volatilidad de la demanda son altas. Pantoja (2009) encuentra que la prima de riesgo en Colombia varía a través del día y cómo estas propiedades son explicadas por factores de riesgo como volatilidad condicional del precio spot, innovaciones en los cambios esperados de volúmenes o de la ocurrencia del fenómeno de El Niño. Para seleccionar el valor de la prima de riesgo que puede utilizarse en el caso colombiano, se sugiere la lectura de Pantoja (2009).

Para la presentación de la estrategia de cobertura propuesta, se calculan los valores de  $\eta$  y  $\tau$  que logran minimizar la varianza y maximizar la función objetivo de cada agente. En términos generales, se utilizó la metodología propuesta por Pilipović (1998) que consta de tres pasos: 1. Definir un portafolio inicial y el instrumento de cobertura disponible. 2. Estimar la volatilidad futura del instrumento utilizado. 3. Calcular el número de nuevos contratos de cobertura requeridos para asegurar que el riesgo asumido será el adecuado. Se ignoran los costos de transacción y el riesgo de contraparte y se asume que siempre existirá la posibilidad de realizar la transacción en el periodo deseado (periodicidad mensual). Para obtener el valor esperado y varianza del flujo de caja generado por el portafolio al momento de madurez, se recurrió a simulación de Montecarlo y se aplicó el concepto de variables antitéticas para la reducción de la varianza

en la estimación, presentado por Insua et al. (2000).

### 3.1. Sensibilidad de la esperanza del portafolio

De acuerdo con la formulación del modelo matemático, un agente sólo podrá decidir cuánto contratar en el mercado forward y cuándo hacer esta transacción, los demás parámetros se asumen fuera de su control. A partir de la ecuación 23 se pueden definir los parámetros que modifican el valor esperado del portafolio. En la figura 1 se presenta la sensibilidad de  $E_{t_0}(\pi)$  para diferentes valores de  $\eta$ . Estas simulaciones se realizaron considerando un periodo de madurez igual a  $20 + t_0$ ,  $\kappa = 1$ ;  $\sigma = 5,19$ ;  $q_0 = 1$ ;  $F(t_0) = 100$ ;  $\alpha = 2$  y la desviación estándar total del volumen es igual a 0,16.

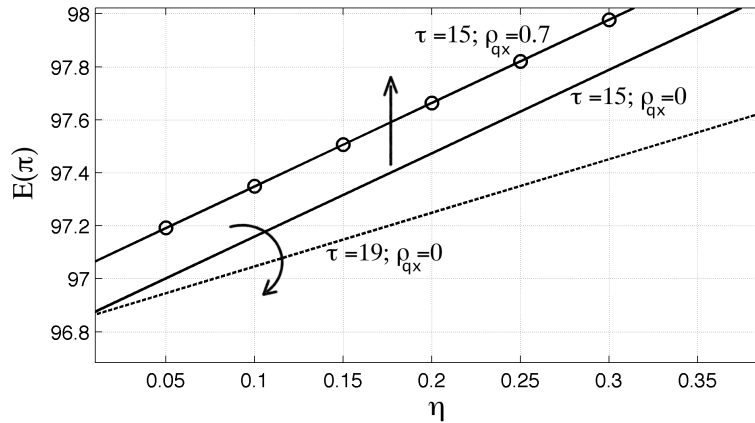


Figura 1:  $E_{t_0}(\pi)$  para diferentes valores de  $\eta$ . Escala seleccionada con fines ilustrativos.

Coherente con lo planteado en la sección anterior, la relación entre el valor esperado del portafolio y la porción transada en contratos forward es lineal, la pendiente depende de  $\tau$  mientras que el intercepto varía conforme lo hace la correlación. Para las sensibilidades realizadas se aprecia que entre más grande  $\tau$ , menor será el aporte marginal de  $\eta$  sobre  $E_{t_0}(\pi)$ .

De la ecuación 24 se encuentra que el aporte de adicionar contratos forward al portafolio depende además de la prima de riesgo forward. En la figura 2 se presenta el cambio del valor esperado del portafolio por cada unidad adicional de  $\eta$  en función de  $\tau$  (*hedging time*) y  $\alpha$ . Para la construcción de la figura se asignaron valores a los demás parámetros así:  $T = 20 + t_0$ ;  $F(t_0) = 100$ ;  $q_0 = 1$ ;  $\sigma_{qx}^i = 0,11$ ;  $\sigma_q^i = 0,11$ ;  $\kappa = 1$ ;  $\sigma = 5,19$ . Se observa cómo el impacto de aumentar  $\eta$  en  $E_{t_0}(\pi)$  depende del tiempo que falte para la madurez del portafolio al momento de hacer la transacción ( $T - \tau$ ), con el cual se presenta una relación

exponencial.

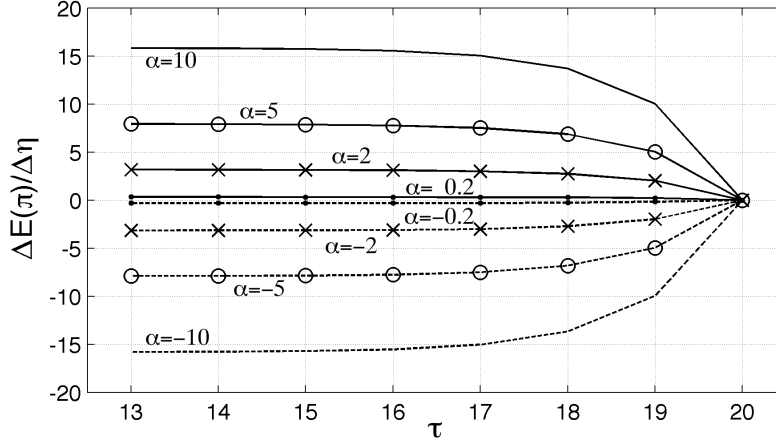


Figura 2: Sensibilidad de  $\Delta E_{t_0}(\pi)$  ante  $\Delta\eta$  para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\tau$ .

De acuerdo con la figura 2, esperar a transar en contratos forward hasta el momento de vencimiento ( $\tau = T$ ) no aporta al valor esperado del flujo de caja del portafolio. Existe además un intervalo de tiempo mucho antes de  $T$ , en donde el cambio de  $E_{t_0}(\pi)$  por cada unidad adicional de  $\eta$  permanece prácticamente constante, indiferente del momento en el que se haga la cobertura. Por ejemplo, en términos del valor esperado del portafolio, para el agente podría ser indiferente realizar la operación en contratos forward entre  $\tau = 1$  y  $\tau = 12$ . Este periodo depende de la velocidad de reversión a la media de  $x_t$ . Adicionalmente, en experimentos realizados, la relación  $\Delta E_{t_0}(\pi)/\Delta\eta$  no depende de la correlación entre el precio forward y el volumen esperado.

### 3.2. Sensibilidad de la varianza del portafolio

En la figura 3 se presenta la varianza del portafolio para diferentes valores de  $\eta$ , en esta simulación se utilizaron como valores de los parámetros:  $T = 20 + t_0$ ;  $F(t_0) = 100$ ;  $q_0 = 1$ ;  $\sigma_{qx}^i = 0,11$ ;  $\sigma_q^i = 0,11$ ;  $\kappa = 1$ ;  $\sigma = 5,19$ ;  $\alpha = 5$  y  $\tau = 15$ . Se observa que para el intervalo analizado la varianza del portafolio es convexa con un valor mínimo el cual se alcanza cuando  $\eta = \eta_{mv}$ . En el caso propuesto la mínima varianza es 226,6 y ocurre cuando  $\eta_{mv} = 1,05$ . Para ilustrar la relación de la varianza con las variables de decisión, en la figura 4 se presenta el valor de  $\eta_{mv}$  para cada valor de  $\tau$  y diferentes valores de  $\rho_{qx}^i$ , mientras se mantiene constante la volatilidad total del volumen. En términos generales, a medida que aumenta la correlación, se incrementa la cantidad necesaria de contratos forward para lograr el portafolio de mínima varianza. Adicionalmente, se aprecia que la relación entre  $\eta_{mv}$  y  $\tau$  exhibe un comportamiento aparentemente exponencial con una tendencia que puede ser explicada por la prima de riesgo de largo plazo

y el tiempo que reste para la maduración de acuerdo con los resultados que se presentan en la figura 5. Con respecto a  $\tau$ , cuando aumenta también lo hace la varianza del portafolio, en este sentido para lograr la mínima varianza, la cobertura debe realizarse lo antes posible.

Si se decide realizar una estrategia de cobertura de mínima varianza debe considerarse la irreversibilidad de las decisiones. Por ejemplo, un agente que pretenda lograr un portafolio de mínima varianza, deberá tomar posiciones forward inferiores a  $\eta_{mv}$  y de esta manera podría recomponer su portafolio en periodos posteriores, agregando mayor cantidad de contratos forward en la dirección de la posición de mínima varianza. Si se toman posiciones por encima de  $\eta_{mv}$ , no se podrán hacer ajustes futuros en la dirección apropiada, dado que los contratos forward no se pueden deshacer.

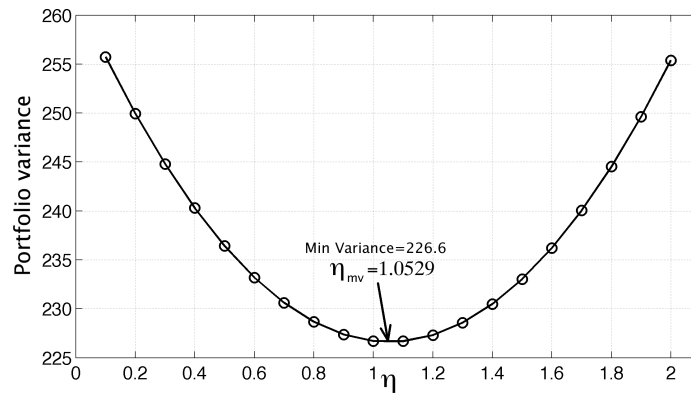


Figura 3: Varianza del portafolio para diferentes valores de  $\eta$ .

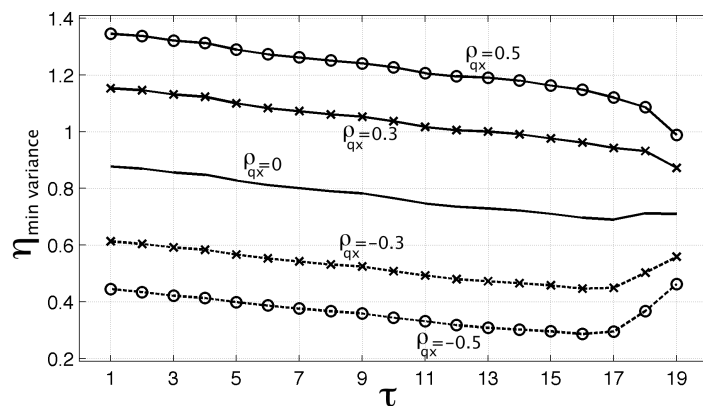


Figura 4:  $\eta_{mv}$  para diferentes valores de  $\tau$  y  $\rho_{qx}^i$ .

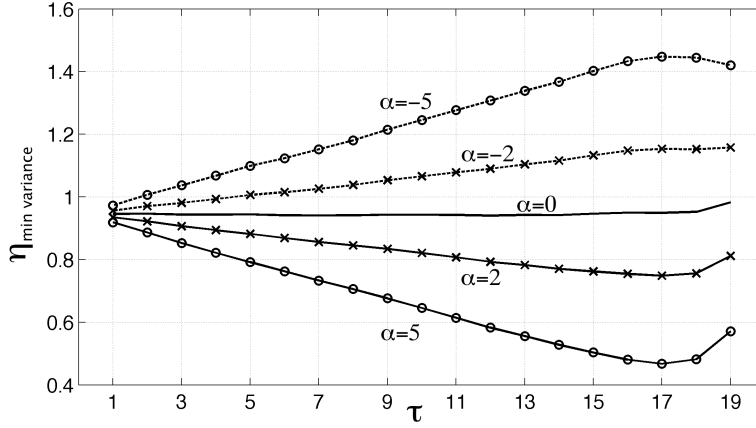


Figura 5:  $\eta$  de mínima varianza para diferentes valores de  $\tau$  y  $\alpha$ , para todos los casos  $\rho_{qx}^i = 0$ .

### 3.3. Toma de decisiones

La función de utilidad propuesta considera el valor esperado, la varianza del beneficio del agente y la compensación que el agente espera recibir por asumir el riesgo,  $\eta_{mu}$  será el valor de  $\eta$  para el cual se logra maximizar la utilidad del agente y dependerá del nivel de aversión al riesgo de éste. Como el precio del contrato forward no es necesariamente martingala, la solución al problema de maximización de la utilidad no corresponde en principio al problema de minimización de varianza del flujo de caja como ocurre en Näsäkkälä and Keppo (2005). En la figura 6 se presenta la función de utilidad y la varianza del portafolio de un agente con  $\lambda^i = 1$ , ambas en función de  $\eta$ . La curva se construye considerando los siguientes parámetros:  $T = 20 + t_0$ ;  $F(t_0) = 100$ ;  $q_0 = 1$ ;  $\sigma_{qx}^i = 0,11$ ;  $\sigma_q^i = 0,11$ ;  $\kappa = 1$ ;  $\sigma = 5,19$ ;  $\alpha = 5$  y  $\tau = 15 + t_0$ . Para el caso propuesto, la mayor utilidad es 125,5 y ocurre cuando  $\eta_{mu} = 1,18$ . Para la minimización de la varianza del portafolio,  $\eta_{mv}$  será el valor de  $\eta$  para el cual se logra la mínima varianza y que para el caso propuesto alcanza un valor de 226,6 cuando  $\eta_{mv} = 1,05$ . En la figura 7 se muestra el conjunto de posibles combinaciones de riesgo y beneficio para portafolios dependiendo del valor de  $\tau$ . El eje vertical corresponde al valor esperado del flujo de caja y el eje horizontal a su varianza. Para cada  $\tau$  es eficiente la selección de portafolios que logren mayor valor esperado que el portafolio obtenido para mínima varianza. Además no es posible definir un nivel óptimo de cobertura para todos los agentes ya que el nivel de aversión a riesgo del tomador de decisiones es importante al momento de planear la estrategia; sinembargo, es posible generar un rango de razón cobertura que cubra un rango de valores de  $\lambda^i$ . En el caso particular de la figura presentada, se observa que con el hecho de adelantar la cobertura, se pueden obtener portafolios que dominan a los que están más cercanos al momento de maduración. Un agente que posea

una posición larga en el subyacente deberá realizar la operación de cobertura en  $\tau = 1$  y la cantidad de contratos forward dependerá de su nivel de aversión al riesgo.

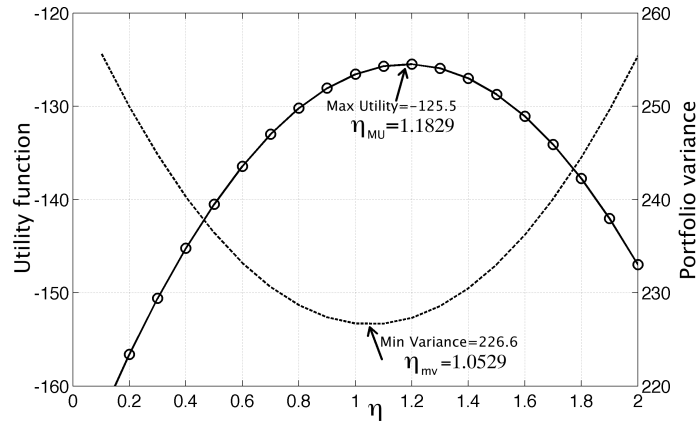


Figura 6: Función de utilidad del agente con  $\lambda^i = 1$  y varianza del portafolio en función de  $\eta$ .

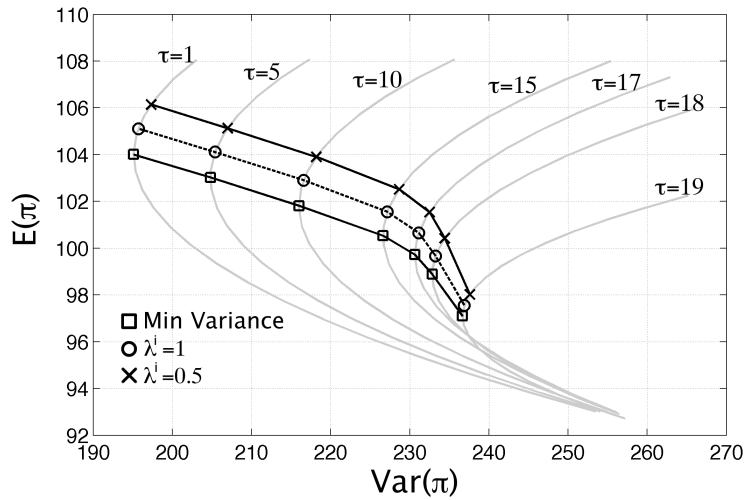


Figura 7: Conjunto de portafolios para diferentes  $\tau$ .

#### 4. Diferencia entre mercados

En las secciones anteriores se analizó cómo se afecta la toma de decisiones cuando hay variaciones en los valores de los parámetros que corresponden al

agente o a condiciones particulares del momento para el cual se está analizando la cobertura. En esta sección se pretende formar una idea del efecto que tienen los parámetros del mercado  $\kappa$  y  $\sigma$  en el desempeño del portafolio de los agentes y en ese sentido conocer cómo pueden afectar la toma de decisiones. En las figuras 8 y 9 se presenta la línea de selección (aquella línea que une los puntos de máxima utilidad para los diferentes valores de  $\tau$ ) de un agente con  $\lambda^i = 1$ . Cada punto sobre la curva, corresponde al portafolio que maximiza la utilidad en función de  $\tau$ . Se presentan curvas para diferentes valores de  $\kappa$  y  $\sigma$ . Los parámetros utilizados son los mismos considerados para la construcción de la figura 7.

En la figura 8 se observa cómo el aumento de  $\kappa$  vuelve más crítico el momento de la transacción; es decir, al incrementar la velocidad de reversión a la media, se incrementa el costo de postergar la cobertura. Si el mercado corrige rápidamente las distorsiones de corto plazo, la prima de riesgo forward caerá velozmente y así al esperar para realizar la transacción en contratos forward se pierde el aporte que la prima de riesgo hace al valor esperado del flujo de caja, por lo que es menos atractivo el hecho de esperar para realizar la cobertura. Así mismo se aprecia en la figura 9 cómo la disminución de la volatilidad instantánea del precio spot  $\sigma$ , hace menos recomendable postergar la cobertura. Es así como la estrategia de cobertura no sólo obedece a las características propias de cada agente, sino también a aquellas que provienen del mercado. Con lo encontrado en estas sensibilidades, se puede decir que una decisión que sea adecuada para un agente inmerso en un mercado eléctrico, no sería necesariamente adecuada si este agente participara en otro mercado.

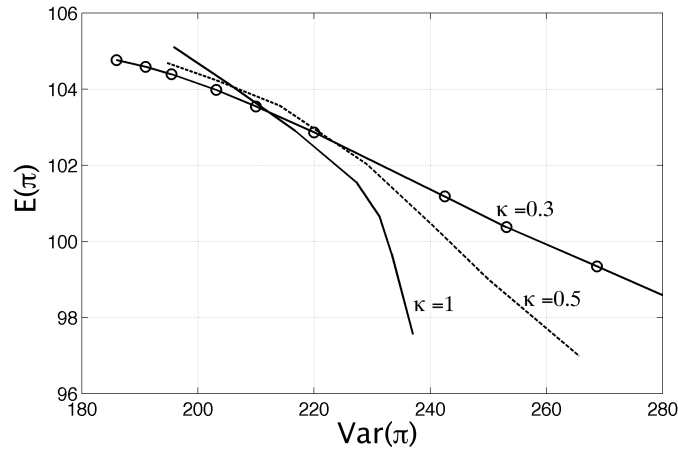


Figura 8: Línea de decisión del agente con  $\lambda^i = 1$  para diferentes valores de  $\kappa$ .

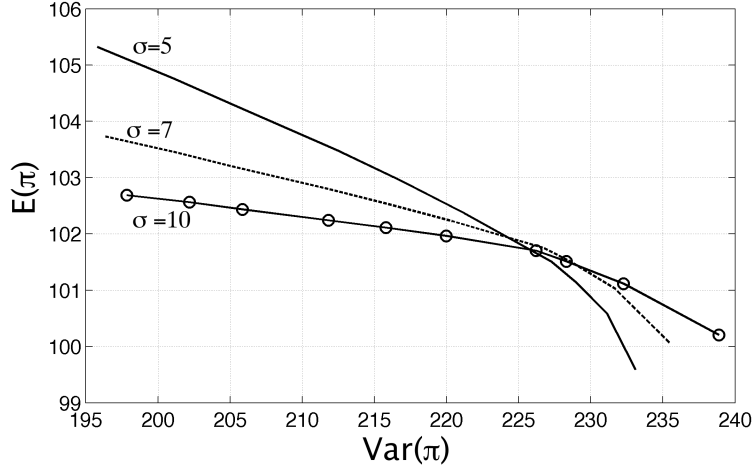


Figura 9: Línea de decisión del agente con  $\lambda^i = 1$  para diferentes valores de  $\sigma$ .

## 5. Ejemplo de Cobertura

En esta sección se desarrolla un ejemplo para la formulación de una estrategia de cobertura para dos agentes y se hace una comparación entre ellas. A partir de los parámetros supuestos se hace la búsqueda de la respuesta en las tablas del anexo A .

Si se consideran dos agentes con  $\lambda^i = 2$  que difieren en la volatilidad del volumen esperado, participan en el mercado eléctrico colombiano y desean realizar su operación de cobertura para un periodo de maduración de un año a partir del momento actual. Se conoce que el precio del contratos forward inicial es de 100 y  $\alpha$  es igual a cero, la estrategia de cobertura de ambos agentes será la que se presenta en el cuadro 1. La correlación positiva que presentan ambos agentes hacen que la razón de cobertura sea mayor que uno. Por otro lado, el hecho de incrementar la volatilidad total del volumen esperado sugiere que la operación de cobertura sea postergada. El agente  $a$  presenta una menor volatilidad total del volumen ( $\sigma_{qtot}^a$ ) que el agente  $b$  y el  $\tau$  sugerido para el agente  $a$  es menor que el sugerido para el agente  $b$ , situación que se presenta incluso para diferentes valores de prima de riesgo.

Cuadro 1: Estrategia para agentes con diferente volatilidad de volumen esperado y  $\alpha = 0$ .

agente	$\sigma_{qtot}^i$	$\rho_{qx}^i (\%)$	$\eta_{mu}$	$\tau$
$a$	0.05	15	1.08	1
$b$	0.2	15	1.30	5

## 6. Conclusiones

El hecho de considerar que la valoración de los contratos forward en mercados eléctricos incorporan una prima de riesgo sobre las expectativas del precio spot y que éste a su vez presenta características de estacionalidad y reversión a la media, hacen que el movimiento del precio futuro de la energía eléctrica no presente características martingala, sino que dependiendo del signo de la prima de riesgo de largo plazo, podría ser submartingala o súpermartingala.

En este trabajo se ha estudiado la estrategia de cobertura que puede implementar un agente que participa en un mercado eléctrico y busca maximizar el valor esperado de su flujo de caja ajustado por riesgo. Se propone una cobertura estática utilizando contratos forward, cuyo precio incorpora una prima de riesgo, pero podría ser extendida a contratos futuros. La estrategia de cobertura sugiere la selección de la razón de cobertura y el momento en el que dicha cobertura debe ser efectuada. Debido a que el movimiento del precio forward no es necesariamente martingala, la estrategia de cobertura que debe realizar el agente no es, en principio, equivalente a la selección de un portafolio de mínima varianza y en este sentido, el nivel de aversión al riesgo sí es determinante al momento de definir la cobertura, así como el periodo para el cual se plenee hacer la transacción en el mercado de contratos forward. Como caso de estudio se tomó el mercado eléctrico colombiano, en el anexo C se presentan los parámetros de este mercado y la estrategia sugerida se presenta en los cuadros del anexo A. A lo largo del documento se muestra cómo la estrategia de cobertura a implementar depende de las características particulares de cada agente y el mercado en el que se encuentra inmerso y por lo tanto no es completamente generalizable.

Se encuentra que los agentes que presentan una mayor volatilidad en el volumen esperado tienden a postergar la operación de cobertura para lograr mejores estimaciones de su consumo o generación futura y que a medida que aumenta la correlación se incrementa la cantidad necesaria de contratos forward para lograr una adecuada compensación del riesgo asumido. Una correlación negativa es una cobertura natural del flujo de caja del portafolio. Además cuando la correlación es positiva, la estrategia de cobertura sugiere la anticipación de la transacción.

Debido a la existencia de la prima de riesgo forward, un agente neutral al riesgo podrá vender o comprar en contratos forward y su beneficio marginal esperado corresponderá al valor de la prima de riesgo. Por otro lado, dependiendo del signo de ésta, un agente estará interesado en anticipar o postergar la cobertura; por ejemplo, si la prima de riesgo es positiva será conveniente vender en contratos forward para el periodo de vencimiento más lejano posible.

La metodología utilizada puede ser aplicada a otro tipo de problemas en donde el subyacente exhiba patrones de reversión a la media.

## Referencias

- Hendrik Bessembinder and Michael L. Lemmon. Equilibrium pricing and optimal hedging in electricity forward markets. *THE JOURNAL OF FINANCE*, 2002.
- Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, third edition, 2009.
- Zvi Bodie, Alex Kane, and Alan J. Marcus. *Investments*. McGraw Hill, eighth edition, 2009.
- John C. Cox and Stephen A. Ross. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics* 3, 1976.
- Alexander Eydeland and Helyette Geman. *Energy Modelling and the Management of Uncertainty*, chapter Fundamentals of electricity derivatives, pages 35–43. Risk Books. 1999.
- Dolores Furió and Vicente Meneu. Expectations and forward risk premium in the spanish deregulated power market. *Working Paper*, 2009.
- Hélyette Geman and Andrea Roncoroni. A class of marked point processes for modelling electricity prices. *ESSEC*, 2003.
- Marta Gil and Cecilia Maya. Modelación de la volatilidad de los precios de la energía eléctrica en Colombia. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, pages 87–114, 2008.
- John C. Hull. *Options, Futures and other Derivatives*. Pearson Prentice Hall, 2009.
- David Ríos Insua, Sixto Ríos Insua, and Jacinto Martín Jiménez. *Simulación. Métodos y aplicaciones*. RA-MA Editorial, 2000.
- Julio J. Lucia and Eduardo S. Schwartz. Electricity prices and power derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange. *Review of Derivatives Research* 5, pages 5–50, 2002.
- Erkka Näsäkkälä and Jussi Keppo. Electricity load pattern hedging with static forward strategies. *Managerial Finance*, pages 116–137, 2005.
- Javier O. Pantoja. Modelling risk of electric power markets. *Working Paper*, 2009.
- Dragana Pilipović. *Energy Risk: valuing and managing energy derivatives*. McGraw-Hill, 1998.

## A. Tablas Cobertura Colombia

Estrategia de cobertura propuesta en términos de razón de cobertura para lograr la mínima varianza cuando  $\tau = 1 + t_0$ :  $\eta_{mv}$  y la pareja  $\eta_{mu}, \tau$  que debe seleccionar un agente cuyo valor de  $\lambda^i$  es uno o dos. Así mismo se consideran diferentes valores de varianza total del volumen esperado ( $\sigma_{qtot}^i$ ), correlación y tiempo para el vencimiento ( $T - t_0$ ), que puede ser seis meses, un año, dos años o tres años. Para las simulaciones se considera  $\kappa = 0,57$ ;  $\sigma = 5,19$ ;  $F_0 = 100$  y  $q_0 = 1$ .

Cuadro 2: Estrategia de cobertura propuesta para participantes del mercado eléctrico colombiano,  $\alpha = 2$ .

$\sigma_{qtot}^i$	$\rho_{qx}^i$ (%)	$\alpha = 2$											
		6 meses			1 año			2 años			3 años		
		$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\lambda^i = 1$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\lambda^i = 1$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\lambda^i = 1$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\lambda^i = 1$
0.05	30	1.15	1.17	1.18	1.14	1.15	1.17	1.09	1.11	1.12	1.07	1.09	1.11
	15	1.07	1.08	1.10	1.07	1.09	1.11	1.04	1.06	1.08	1.03	1.05	1.07
	0	0.99	1.00	1.02	1.01	1.03	1.04	1.00	1.02	1.03	1.00	1.01	1.03
	-15	0.90	0.92	0.93	0.95	0.96	0.98	0.95	0.97	0.99	0.96	0.97	0.99
	-30	0.82	0.84	0.85	0.88	0.90	0.91	0.91	0.92	0.94	0.92	0.94	0.95
0.15	30	1.44	1.46	1.47	1.27	1.28	1.30	1.27	1.28	1.30	1.22	1.23	1.24
	15	1.19	1.21	1.22	1.13	1.15	1.16	1.13	1.15	1.16	1.10	1.11	1.13
	0	0.94	0.96	0.97	0.99	1.01	1.02	0.99	1.01	1.02	0.99	1.00	1.01
	-15	0.69	0.71	0.73	0.85	0.87	0.89	0.85	0.87	0.89	0.87	0.88	0.90
	-30	0.44	0.63	0.64	0.71	0.73	0.75	0.71	0.73	0.75	0.76	0.77	0.79
0.2	30	1.57	1.60	1.61	1.41	1.42	1.43	1.35	1.37	1.39	1.29	1.29	1.31
	15	1.24	1.26	1.28	1.22	1.23	1.24	1.17	1.19	1.20	1.13	1.14	1.16
	0	0.91	0.93	0.95	1.02	1.04	1.05	0.98	1.00	1.02	0.98	0.99	1.01
	-15	0.58	0.60	0.61	0.83	0.84	0.86	0.80	0.82	0.83	0.83	0.84	0.85
	-30	0.25	0.48	0.49	0.64	0.65	0.67	0.61	0.63	0.65	0.68	0.69	0.70

Cuadro 3: Estrategia de cobertura propuesta para participantes del mercado eléctrico colombiano,  $\alpha = 4$ .

$\sigma_{qtot}^i$	$\rho_{qx}^i$ (%)	$\alpha = 4$																					
		6 meses			1 año			2 años			3 años												
		$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\tau$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\tau$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\tau$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\tau$										
0.05	30	1.15	1.18	1	1.21	1	1.13	1.16	1	1.20	1	1.09	1.12	1	1.07	1.10	1	1.15	1	1.07	1.10	1	
	15	1.06	1.10	1	1.13	1	1.07	1.10	1	1.13	1	1.04	1.08	1	1.03	1	1.11	1	1.11	1	1.03	1.07	1
	0	0.98	1.02	1	1.05	1	1.01	1.04	1	1.07	1	1.00	1.03	1	1.07	1	1.07	1	1.07	1	1.00	1.03	1
	-15	0.90	0.93	1	0.97	1	0.95	0.98	1	1.01	1	0.95	0.99	1	1.02	1	1.02	1	1.02	1	0.96	0.99	1
	-30	0.82	0.85	1	0.89	1	0.88	0.91	1	0.95	1	0.91	0.94	1	0.98	1	0.98	1	0.98	1	0.92	0.96	1
0.15	30	1.40	1.44	1	1.47	1	1.38	1.41	1	1.44	1	1.25	1.29	1	1.32	1	1.25	1.29	1	1.21	1.23	1	
	15	1.16	1.20	1	1.23	1	1.20	1.23	1	1.26	1	1.12	1.15	1	1.19	1	1.12	1.15	1	1.10	1.12	1	
	0	0.92	0.95	1	0.98	1	1.01	1.04	1	1.07	1	0.98	1.02	1	1.05	1	0.98	1.02	1	0.98	1.01	1	
	-15	0.68	0.71	1	0.74	1	0.83	0.85	1	0.88	1	0.85	0.88	1	0.92	1	0.87	0.88	1	0.87	0.90	1	
	-30	0.44	0.58	5	0.60	5	0.64	0.66	1	0.70	1	0.71	0.75	1	0.78	1	0.76	0.79	1	0.76	0.79	1	
0.2	30	1.57	1.60	1	1.61	1	1.50	1.53	1	1.56	1	1.33	1.37	1	1.40	1	1.33	1.37	1	1.27	1.29	1	
	15	1.24	1.26	1	1.28	1	1.25	1.28	1	1.31	1	1.15	1.19	1	1.22	1	1.12	1.15	1	1.12	1.15	1	
	0	0.91	0.93	1	0.95	1	1.01	1.03	1	1.06	1	0.97	1.01	1	1.04	1	0.97	1.01	1	0.97	1.00	1	
	-15	0.58	0.60	1	0.61	1	0.76	0.78	1	0.81	1	0.79	0.83	1	0.86	1	0.83	0.85	1	0.83	0.85	1	
	-30	0.25	0.48	5	0.49	5	0.51	0.53	1	0.56	1	0.61	0.65	1	0.68	1	0.61	0.65	1	0.61	0.68	1	

Cuadro 4: Estrategia de cobertura propuesta para participantes del mercado eléctrico colombiano,  $\alpha = 10$ .

$\sigma_{qtot}^i$	$\rho_{qx}^i$ (%)	$\alpha = 10$															
		6 meses			1 año			2 años			3 años						
		$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\tau$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\tau$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\tau$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\tau$				
0.05	30	1.13	1.20	1	1.12	1.20	1	1.28	1	1.08	1.16	1	1.06	1.15	1	1.23	1
	15	1.05	1.13	1	1.06	1.14	1	1.22	1	1.04	1.12	1	1.03	1.11	1	1.20	1
	0	0.98	1.06	1	1.00	1.08	1	1.16	1	0.99	1.08	1	1.00	1.08	1	1.17	1
0.15	-15	0.90	0.98	1	0.95	1.03	1	1.11	1	0.95	1.04	1	0.96	1.05	1	1.13	1
	-30	0.83	0.91	1	0.89	0.97	1	1.05	1	0.91	1.00	1	0.93	1.01	1	1.10	1
	30	1.30	1.38	1	1.31	1.39	1	1.47	1	1.21	1.30	1	1.18	1.25	1	1.34	1
0.2	15	1.08	1.16	1	1.14	1.22	1	1.30	1	1.09	1.17	1	1.07	1.15	1	1.24	1
	0	0.86	0.94	1	0.97	1.05	1	1.13	1	0.96	1.05	1	0.97	1.05	1	1.14	1
	-15	0.64	0.72	1	0.80	0.88	1	0.96	1	0.84	0.93	1	0.87	0.95	1	1.04	1
0.2	-30	0.42	0.50	1	0.63	0.71	1	0.79	1	0.72	0.80	1	0.77	0.85	1	0.94	1
	30	1.34	1.43	1	1.39	1.47	1	1.54	1	1.27	1.35	1	1.23	1.30	1	1.38	1
	15	1.05	1.13	1	1.17	1.24	1	1.32	1	1.10	1.19	1	1.09	1.16	1	1.25	1
0.2	0	0.76	0.84	1	0.94	1.01	1	1.09	1	0.94	1.03	1	0.95	1.03	1	1.11	1
	-15	0.47	0.56	1	0.71	0.79	1	0.86	1	0.77	0.86	1	0.82	0.89	1	0.98	1
	-30	0.18	0.27	1	0.49	0.56	1	0.64	1	0.61	0.70	1	0.68	0.76	1	0.85	1

Cuadro 5: Estrategia de cobertura propuesta para participantes del mercado eléctrico colombiano,  $\alpha = 0$ .

$\sigma_{qtot}^i$	$\rho_{qx}^i$ (%)	$\alpha = 0$															
		6 meses			1 año			2 años			3 años						
		$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\tau$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\tau$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\tau$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\tau$				
0.05	30	1.16	1.16	1	1.14	1.14	1	1.09	1.09	12	1.09	12	1.07	1.07	24	1.07	24
	15	1.07	1.07	1	1.08	1.08	1	1.05	1.05	12	1.05	12	1.04	1.04	24	1.03	24
	0	0.99	0.99	1	1.01	1.01	5	1.00	1.00	15	1.00	15	1.00	0.99	28	0.99	28
	-15	0.90	0.91	2	0.95	0.95	8	0.95	0.95	18	0.95	18	0.96	0.96	28	0.96	28
	-30	0.82	0.83	3	0.88	0.89	8	0.90	0.93	21	0.91	18	0.92	0.92	32	0.92	32
0.15	30	1.47	1.48	1	1.43	1.42	3	1.28	1.28	15	1.28	15	1.23	1.23	24	1.22	24
	15	1.22	1.22	1	1.23	1.23	5	1.14	1.14	15	1.14	15	1.11	1.11	24	1.10	24
	0	0.96	0.96	2	1.04	1.03	6	0.99	1.00	18	1.00	18	0.99	0.98	28	0.98	28
	-15	0.71	0.76	4	0.84	0.87	9	0.85	0.89	21	0.89	21	0.87	0.87	32	0.87	32
	-30	0.45	0.69	5	0.64	0.74	10	0.71	0.77	21	0.77	21	0.76	0.77	32	0.77	32
0.2	30	1.63	1.64	1	1.57	1.56	5	1.37	1.37	15	1.37	15	1.30	1.30	24	1.28	24
	15	1.28	1.29	1	1.31	1.30	5	1.18	1.18	15	1.18	15	1.15	1.15	24	1.13	24
	0	0.94	0.95	2	1.05	1.05	8	0.99	1.02	21	1.02	21	0.99	0.99	24	0.97	24
	-15	0.60	0.80	5	0.79	0.86	10	0.80	0.86	21	0.86	21	0.83	0.83	32	0.83	32
	-30	0.27	0.58	5	0.52	0.65	10	0.61	0.69	21	0.69	21	0.68	0.69	32	0.69	32

Cuadro 6: Estrategia de cobertura para participantes del mercado eléctrico colombiano,  $\alpha = -2$ .

$\sigma_{qtot}^i$	$\rho_{qx}^i$ (%)	$\alpha = -2$											
		6 meses			1 año			2 años			3 años		
		$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\lambda^i = 1$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\lambda^i = 1$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\lambda^i = 1$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\lambda^i = 1$
		$\eta_{mu}$	$\tau$	$\eta_{mu}$	$\tau$	$\eta_{mu}$	$\tau$	$\eta_{mu}$	$\tau$	$\eta_{mu}$	$\tau$	$\eta_{mu}$	$\tau$
0.05	30	1.17	1	1.13	1	1.15	5	1.12	5	1.10	15	1.07	18
	15	1.08	1	1.05	1	1.08	6	1.05	6	1.05	18	1.03	18
	0	0.99	2	0.96	2	1.01	6	0.99	8	1.00	18	0.98	18
	-15	0.90	2	0.89	3	0.95	8	0.93	8	0.95	18	0.93	18
	-30	0.82	3	0.81	3	0.88	8	0.88	9	0.90	21	0.91	21
0.15	30	1.51	1	1.48	2	1.45	6	1.46	6	1.29	18	1.36	18
	15	1.24	2	1.23	2	1.25	8	1.28	8	1.15	18	1.22	18
	0	0.98	3	1.00	3	1.05	8	1.09	8	1.00	21	1.10	21
	-15	0.72	4	0.81	4	0.85	9	0.93	9	0.85	21	0.98	21
	-30	0.46	5	0.73	5	0.64	10	0.80	10	0.71	21	0.85	21
0.2	30	1.68	2	1.67	2	1.61	8	1.66	8	1.39	18	1.53	18
	15	1.33	3	1.35	3	1.34	8	1.42	8	1.20	18	1.34	18
	0	0.98	3	1.04	3	1.07	8	1.17	8	1.00	21	1.19	21
	-15	0.63	5	0.91	5	0.80	10	0.99	10	0.81	21	1.03	21
	-30	0.29	5	0.68	5	0.53	10	0.78	10	0.61	21	0.86	21

Cuadro 7: Estrategia de cobertura propuesta para participantes del mercado eléctrico colombiano,  $\alpha = -4$ .

$\sigma_{qtot}^i$	$\rho_{qx}^i$ (%)	$\alpha = -4$																															
		6 meses			1 año			2 años			3 años																						
		$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\lambda^i = 1$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\lambda^i = 1$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\lambda^i = 1$	$\eta_{mv}$	$\lambda^i = 2$	$\lambda^i = 1$																				
		$\eta_{mu}$	$\tau$	$\eta_{mu}$	$\tau$	$\eta_{mu}$	$\tau$	$\eta_{mu}$	$\tau$	$\eta_{mu}$	$\tau$	$\eta_{mu}$	$\tau$																				
0.05	30	1.17	1.14	1.11	1	1.11	1	1.15	1.13	6	1.10	6	1.10	18	1.09	18	1.06	18	1.08	1.07	28	1.03	28	1.03	28	0.99	28	0.96	32	0.92	32	0.88	32
	15	1.08	1.05	1.02	2	1.02	2	1.08	1.06	6	1.04	8	1.05	18	1.04	18	1.01	18	1.04	1.03	28	0.99	28	0.99	28	0.96	32	0.92	32	0.88	32		
	0	0.99	0.97	0.94	2	0.94	2	1.01	1.00	8	0.97	8	1.00	18	0.99	18	0.96	18	1.00	0.99	28	0.99	28	0.96	32	0.92	32	0.88	32				
	-15	0.90	0.89	0.86	3	0.86	3	0.95	0.94	8	0.91	8	0.95	18	0.94	18	0.93	21	0.96	0.95	32	0.95	32	0.92	32	0.88	32						
	-30	0.81	0.81	0.78	3	0.78	3	0.88	0.89	9	0.86	9	0.90	21	0.92	21	0.89	21	0.91	0.92	32	0.92	32	0.88	32								
0.15	30	1.17	1.14	1.11	1	1.11	1	1.47	1.55	8	1.53	8	1.31	18	1.47	18	1.43	18	1.25	1.42	28	1.42	28	1.38	28	1.27	32	1.16	32	1.05	32	0.94	32
	15	1.08	1.05	1.02	2	1.02	2	1.27	1.37	8	1.34	8	1.16	18	1.32	18	1.29	18	1.12	1.30	28	1.30	28	1.27	32	1.16	32	1.05	32	0.94	32		
	0	0.99	0.97	0.94	2	0.94	2	1.06	1.19	9	1.17	9	1.01	21	1.21	21	1.18	21	1.00	1.19	32	1.19	32	1.16	32	1.05	32	0.94	32				
	-15	0.90	0.89	0.86	3	0.86	3	0.86	1.02	9	0.99	9	0.86	21	1.09	21	1.06	21	0.87	1.08	32	1.08	32	1.05	32	0.94	32						
	-30	0.81	0.81	0.78	3	0.78	3	0.65	0.88	10	0.86	10	0.71	21	0.96	21	0.93	21	0.75	0.97	32	0.97	32	0.94	32								
0.2	30	1.74	1.78	1.75	3	1.75	3	1.64	1.82	8	1.79	8	1.41	18	1.72	18	1.69	18	1.34	1.66	28	1.66	28	1.62	28	1.48	32	1.33	32	1.19	32	1.05	32
	15	1.38	1.46	1.43	3	1.43	3	1.37	1.57	8	1.54	8	1.21	18	1.53	18	1.50	18	1.17	1.51	32	1.51	32	1.48	32	1.33	32	1.19	32	1.05	32		
	0	1.02	1.18	1.16	4	1.16	4	1.10	1.34	9	1.32	9	1.01	21	1.38	21	1.36	21	1.00	1.36	32	1.36	32	1.33	32	1.19	32	1.05	32	0.94	32		
	-15	0.66	1.04	1.02	5	1.02	5	0.82	1.11	9	1.12	10	0.82	21	1.22	21	1.19	21	0.84	1.22	32	1.22	32	1.19	32	1.05	32	0.94	32				
	-30	0.31	0.81	0.79	5	0.79	5	0.54	0.93	10	0.91	10	0.62	21	1.05	21	1.02	21	0.67	1.08	32	1.08	32	1.05	32								



## B. Demostración movimiento precio forward

### B.1. Ecuación diferencial estocástica

De acuerdo con Lucia and Schwartz (2002), el precio del contrato forward con vencimiento en  $T$  se denota con  $F(t)$  y corresponde al valor esperado ajustado por riesgo del valor esperado del precio spot, así:

$$F(t) = E_t^*(P_T) \quad (25)$$

Donde  $P_t$  es el precio spot en el periodo  $t$ :

$$P_t = f(t) + x_t \quad (26)$$

$$dx_t = -\kappa x_t \cdot dt + \sigma \cdot dw_x \quad (27)$$

De Lucia and Schwartz (2002), una medida de riesgo neutral para la variable  $x_t$  es:

$$\begin{aligned} dx_t &= \kappa(\alpha - x_t) \cdot dt + \sigma \cdot dw^* \\ \alpha &= -\lambda \frac{\sigma}{\kappa} \end{aligned} \quad (28)$$

Entonces, reemplazando en 25, el precio forward en  $t$  es:

$$\begin{aligned} F(t) &= E_t^*[f(T) + x_T] \\ &= f(T) + E_t^*[x_T] \\ &= f(T) + E_t \left[ x_t e^{-\kappa(T-t)} + \alpha(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \int_t^T \sigma e^{\kappa(s-t)} dw_s^* \right] \\ \Rightarrow F(t) &= f(T) + x_t e^{-\kappa(T-t)} + \alpha(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \end{aligned} \quad (29)$$

Así el precio forward es una función estocástica que depende de  $x_t$  y  $t$ . Tomando 27, haciendo  $\mu_{ito} = -\kappa x_t$  and  $\sigma_{ito} = \sigma$  y aplicando lemma de Itô:

$$dF(t) = \left[ \frac{\partial F(t)}{\partial t} + \mu_{ito} \frac{\partial F(t)}{\partial x_t} + \frac{1}{2} \sigma_{ito}^2 \frac{\partial^2 F(t)}{\partial x_t^2} \right] \cdot dt + \sigma_{ito} \frac{\partial F(t)}{\partial x_t} \cdot dw_x(t)$$

sabiendo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ f(T) + x_t e^{-\kappa(T-t)} + \alpha(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \right] \\ &= 0 + x_t \kappa e^{-\kappa(T-t)} + \alpha(0 - \kappa e^{-\kappa(T-t)}) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} F(t) &= x_t \kappa e^{-\kappa(T-t)} - \alpha \kappa e^{-\kappa(T-t)} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_t} F(t) &= \frac{\partial}{\partial x_t} \left[ f(T) + x_t e^{-\kappa(T-t)} + \alpha(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \right] \\
&= 0 + e^{-\kappa(T-t)} + 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_t} F(t) &= e^{-\kappa(T-t)} \tag{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_t^2} F(t) &= \frac{\partial}{\partial x_t} e^{-\kappa(T-t)} \\
\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} F(t) &= 0 \tag{32}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$dF(t) = \left[ x_t \kappa e^{-\kappa(T-t)} - \alpha \kappa e^{-\kappa(T-t)} - \kappa x_t e^{-\kappa(T-t)} + \frac{1}{2} \sigma_{ito}^2 \cdot 0 \right] \cdot dt + \sigma e^{-\kappa(T-t)} dw_x(t)$$

$$dF(t) = -\alpha \kappa e^{-\kappa(T-t)} \cdot dt + \sigma e^{-\kappa(T-t)} dw_x(t)$$

Sea  $\mu_F(t) = -\alpha \cdot \kappa \cdot e^{-\kappa(T-t)}$  entonces, la ecuación diferencial estocástica para el precio forward con vencimiento en  $T$  es:

$$dF(t) = \mu_F(t) \cdot dt + \sigma e^{-\kappa(T-t)} \cdot dw_x \tag{33}$$

$$\mu_F(t) = -\alpha \cdot \kappa \cdot e^{-\kappa(T-t)}$$

## B.2. Comportamiento en el límite

Cuando el periodo de vencimiento es lo suficientemente lejano, el precio forward no varía

$$\begin{aligned}
\lim_{(T-t) \rightarrow +\infty} dF(t) &= \lim_{(T-t) \rightarrow +\infty} -\alpha \kappa e^{-\kappa(T-t)} \cdot dt + \lim_{(T-t) \rightarrow +\infty} \sigma e^{-\kappa(T-t)} \cdot dw_x \\
&= 0
\end{aligned}$$

## B.3. Precio de contrato forward

Al resolver la ecuación diferencial para el precio forward se encuentra:

$$F(t) = F(t_0) + M_F(t) + \int_{t_0}^t \sigma e^{-\kappa(T-s)} dw_x(s)$$

Donde  $M_F(t)$  es una función determinística dada por:

$$M_F(t) = \int_{t_0}^t \mu_F(s) ds \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^t -\alpha \kappa e^{-\kappa(T-s)} ds \\
&= -\alpha e^{-\kappa(T-s)} \Big|_{s=t_0}^{s=t} \\
\Rightarrow M_F(t) &= -\alpha \left[ e^{-\kappa(T-t)} - e^{-\kappa(T-t_0)} \right]
\end{aligned}$$

#### B.4. Valor esperado y varianza

La esperanza condicionada para el precio forward es:

$$E_{t_0}[F(t)] = F(t_0) + M_F(t) \quad (35)$$

Para todo  $t > t_0$ :  $T - t \leq T - t_0$ , entonces  $e^{-\kappa(T-t)} - e^{-\kappa(T-t_0)}$  es siempre positivo, dependiendo del signo de  $\alpha$ , el precio forward será martingala ( $\alpha = 0$ ), supermartingala ( $E_{t_0}[F(t)] \leq F(t_0)$  cuando  $\alpha > 0$ ) o submartingala ( $E_{t_0}[F(t)] \geq F(t_0)$  cuando  $\alpha < 0$ ). La varianza condicionada para el precio forward es:

$$\begin{aligned}
Var_{t_0}[F(t)] &= E[F(t) - E[F(t)]]^2 \\
&= E \left[ \int_{t_0}^t \sigma e^{-\kappa(T-s)} dw_x(s) \right]^2 \\
&= \int_{t_0}^t \sigma^2 e^{-2\kappa(T-s)} ds \\
\Rightarrow Var_{t_0}[F(t)] &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left[ e^{-2\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t_0)} \right] \quad (36)
\end{aligned}$$

Considerando que  $t \leq T$ , la varianza del precio forward es menor que la varianza del precio spot.

$$\begin{aligned}
\frac{Var_{t_0}[F(t)]}{Var_{t_0}[P_t]} &= \frac{\frac{\sigma^2}{2\kappa} [e^{-2\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t_0)}]}{\frac{\sigma^2}{2\kappa} [1 - e^{-2\kappa(t-t_0)}]} \\
&= \frac{\frac{\sigma^2}{2\kappa} [e^{-2\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(t-t_0)} \cdot e^{-2\kappa(T-t)}]}{\frac{\sigma^2}{2\kappa} [1 - e^{-2\kappa(t-t_0)}]} \\
&= \frac{e^{-2\kappa(T-t)} \frac{\sigma^2}{2\kappa} [e^{-2\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(t-t_0)}]}{\frac{\sigma^2}{2\kappa} [1 - e^{-2\kappa(t-t_0)}]} \\
\Rightarrow \frac{Var_{t_0}[F(t)]}{Var_{t_0}[P_t]} &= e^{-2\kappa(T-t)} \leq 1 \\
\Rightarrow Var_{t_0}[F(t)] &\leq Var_{t_0}[P_t]
\end{aligned}$$

## C. Parámetros para Colombia

### C.1. Volumen

La estimación del modelo de volúmenes para diferentes agentes que participan en el mercado eléctrico colombiano, se realizó utilizando información con resolución mensual para diferentes horizontes de tiempo de la base de datos Neón de XM Compañía de Expertos en Mercados S.A. E.S.P. (administrador del mercado eléctrico colombiano). Partiendo de la ecuación diferencial del modelo de expectativas de volúmenes 14, se estima la desviación total de la serie mensual de volúmenes cuando se iguala a los logretornos de la serie mensual observada de volúmenes de cada agente. El parámetro  $\hat{\rho}_{qx}^i$  se calcula como una función del producto entre los errores del precio spot de energía y los errores de los volúmenes. Los errores del precio spot se estiman como la diferencia entre el precio spot mensual observado y la función determinística  $f(t)$  cuyos parámetros se encuentran en el cuadro 10. Los errores de los volúmenes se calculan como la diferencia entre la serie de volumen mensual de cada agente y su valor esperado, que para las series que presentan tendencia se hace necesario correr una regresión lineal entre los volúmenes observados y el tiempo para calcular el valor esperado de los volúmenes. Finalmente, partiendo de la ecuación 19 se estiman  $\hat{\sigma}_q^i$  y  $\hat{\sigma}_{qx}^i$ . En el cuadro 9 se encuentra el valor de los parámetros calibrados para la demanda de energía nacional, la generación real de cuatro agentes generadores y la demanda comercial total del mercado no regulado (grandes consumidores) de dos comercializadores. La estimación se realizó para diferentes periodos de inicio, el periodo final para todas las estimaciones es diciembre de 2010.

### C.2. Precio spot

Se tomó el precio spot con resolución mensual (promedio aritmético de todas las horas del mes) con corte a diciembre de 2010 de la base de datos Neón de XM Compañía de Expertos en Mercados S.A. E.S.P. (administrador del mercado eléctrico colombiano) y la estimación se realiza por etapas, partiendo de la metodología propuesta por Lucia and Schwartz (2002). Primero se hace una regresión entre el precio de bolsa y la función  $f(t)$  que se presenta en 37, los residuales de esta regresión corresponden al proceso  $x_t$ . Luego se aplica un modelo  $AR(1)$  como el de 38 para  $x_t$  donde el coeficiente de autoregresión será igual a  $1 - \hat{\kappa}$  y los residuales son llamados  $a_t$ . Para la estimación de  $\sigma$  se conoce que  $\sigma^2 = E[a_t^2]$  y se hace la regresión lineal 39 para el logaritmo de  $a_t$  al cuadrado explicada por una constante y la variable categórica Niño fuerte donde  $\omega_t$  no debe presentar autocorrelación.

$$f(t) = c + \beta_0 \cdot t + \sum_{m=1}^{12} \beta_m \cdot D_m + \beta_{SN} \cdot D_{StrongNino} \quad (37)$$

La función determinística propuesta incorpora, además de variables categóricas estacionales (para cada mes)  $\beta_m \cdot D_m$ , una tendencia lineal  $\beta_0 \cdot t$  y la ocurrencia

Cuadro 9: Parámetros estimados modelo de volumen, algunos agentes de Colombia

Periodo inicio	Variable	Agente	$\sigma_q^i$	$\sigma_{qx}^i$	$\rho_{qx}(\%)$
Octubre 1999	Demanda Nacional		0.023	0.001	5.64
		Generacion real			
	Generacion real	Generador 1	0.081	0.011	13.99
		Generador 2	0.318	0.104	-31.05
		Generador 3	0.557	0.111	-19.60
		Generador 4	0.149	0.011	-7.21
	Demanda Comercial	Comercializador 1	0.050	0.006	-11.08
Mercado No Regulado	Comercializador 2	0.086	0.017	-19.13	
Enero 2002	Demanda Nacional		0.023	0.001	5.64
		Generacion real			
	Generacion real	Generador 1	0.081	0.013	15.39
		Generador 2	0.341	0.117	-32.43
		Generador 3	0.336	0.071	-20.57
		Generador 4	0.125	0.004	-3.51
	Demanda Comercial	Comercializador 1	0.050	0.006	-12.28
Mercado No Regulado	Comercializador 2	0.059	0.009	-15.93	
Enero 2007	Demanda Nacional		0.024	0.002	6.54
		Generacion real			
	Generacion real	Generador 1	0.089	0.011	12.33
		Generador 2	0.313	0.108	-32.75
		Generador 3	0.354	0.081	-22.35
		Generador 4	0.114	0.029	-24.25
	Demanda Comercial	Comercializador 1	0.046	0.009	-19.40
Mercado No Regulado	Comercializador 2	0.050	0.009	-16.80	

del fenómeno de El Niño con intensidad fuerte  $\beta_{SN} \cdot D_{StrongNino}$ . El modelo spot cumple los supuestos necesarios para el periodo comprendido entre octubre de 1999 y diciembre de 2010.

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + a_t \quad (38)$$

$$\ln(a_t^2) = \delta_0 + \delta_{SN} \cdot D_{StrongNino} + \omega_t \quad (39)$$

Los coeficientes de las regresiones realizadas se encuentran en el cuadro 10, allí mismo se reportan los valores de  $\kappa$  y  $\sigma$  asociados al modelo propuesto por Lucia and Schwartz (2002). La ocurrencia del fenómeno de El Niño con intensidad fuerte no sólo afecta el nivel del precio sino que también aumenta la volatilidad del precio spot,  $\sigma_{SN}$  es el valor de  $\sigma$  para los periodos en los cuales se presenta el efecto de este fenómeno climático.

Cuadro 10: Parámetros del precio spot para Colombia

		Coeff	p-value
$f(t)$	c	9.12	0.034
	$\beta_0$	0.51	0.000
	$\beta_1$ -jan-	8.26	0.019
	$\beta_2$ -feb-	16.40	0.001
	$\beta_3$ -mar-	9.93	0.047
	$\beta_{SN}$	74.06	0.000
$x_t$	$\phi_1$	0.43	0.000
	$\kappa$	0.57	-
	$\sigma$	5.19	-
	$\sigma_{SN}$	15.53	-
$\ln(a_t^2)$	$\delta_0$	3.29	0.000
	$\delta_{SN}$	2.19	0.004

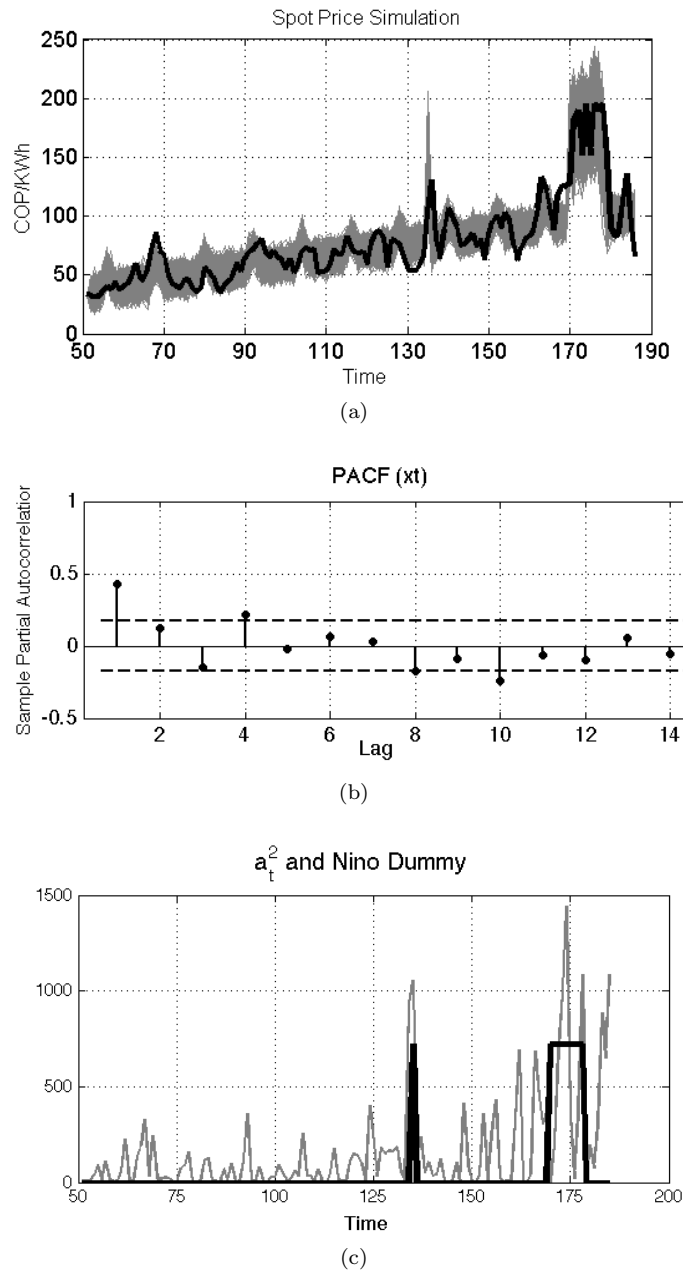


Figura 10: Estimación modelo de precio spot para Colombia. En (a) se presenta la simulación precio spot en Colombia y el precio ocurrido. Resolución mensual, evaluación *in sample*, el autocorrelograma parcial de  $x_t$  se presenta en (b) y  $a_t^2$  con la variable explicativa Niño fuerte está en (c).