

Análisis del modelo Lorenz-84: Modelación, linealización y estrategias de control

Laura Katterine Zapata Rendón, Santiago Parra Mejía, Juan David Correa Duque, Daniel Rojas Díaz

Ingeniería Matemática
Escuela de Ciencias Aplicadas e Ingeniería
Universidad EAFIT, Medellín

Abstract

En este artículo se analiza el modelo Lorenz de circulación atmosférica mundial y se exploran diversos análisis y validaciones realizados sobre el modelo. Se tratan temas como la linealización, el control, el análisis de incertidumbre, el análisis de sensibilidad y la estabilidad del sistema. Los resultados muestran la relevancia de ciertos parámetros sobre las variables de estado y la coherencia del comportamiento del modelo con la literatura existente.

Aquí se analiza el comportamiento del sistema no lineal y su aproximación lineal en el punto de equilibrio. Explora la relevancia de los parámetros en las variables de estado y concluye que ciertos parámetros tienen una mayor influencia en variables de estado específicas. Se analiza la estabilidad del sistema y se determina que el sistema es estable si se cumplen determinadas condiciones. También se incluyen simulaciones de los sistemas no lineal y lineal en distintos puntos de funcionamiento, comparando sus resultados. Se aplican estrategias de control y se observa el efecto de variar los parámetros de control. Se explora la posibilidad de un control discreto, pero se determina que no es viable. Se realizan análisis de sensibilidad e incertidumbre sobre los parámetros del sistema, con la conclusión de que la variable de salida es más sensible a un parámetro que a otros. En conjunto, el estudio proporciona una visión del comportamiento y análisis del modelo Lorenz-84, destacando su estabilidad, posibilidades de control y sensibilidad de los parámetros.

Keywords: Modelo de Lorenz, circulación atmosférica global, meteorología, modelización matemática, análisis, validación, linealización, control, análisis de incertidumbre, análisis de sensibilidad, punto de equilibrio, estabilidad, simulaciones, variables de estado, parámetros de control, control discreto, sensibilidad de parámetros.

1. Introducción

La meteorología se define como la ciencia atmosférica que busca estudiar y comprender el comportamiento de la atmósfera terrestre, junto con la búsqueda de herramientas para su predicción y pronóstico en base a registros pasados. Uno de los principales medios para esto último es el modelado matemático, a menudo mediante sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. De esta forma es posible representar mediante leyes físicas la forma en que cambia el tiempo atmosférico y realizar simulaciones por computadora para pronosticar y analizar resultados a futuro.

Sin embargo, la mayoría de modelos que pueden dar un buen acercamiento a la realidad tienen miles o millones de variables de estado, por lo que, en términos de cómputo, la resolución de estos modelos requiere un tiempo de cálculo absurdamente grande. Es por esto que algunos investigadores han desarrollado modelos de bajo orden, que cuentan con menos de 100 variables de estado, y que si bien pierden rigor al deshacerse del

resto de variables, estos buscan conservar en sí la esencia del comportamiento real del sistema.

En 1984 el científico y meteorólogo Edward Lorenz tiene como objetivo verificar cuantitativamente lo que se conoce como el fenómeno de circulación de Hadley, que explica el comportamiento de los vientos del planeta en regiones cercanas a la línea del Ecuador. Para ello, Lorenz propuso un modelo de bajo orden que, en palabras suyas, bien puede ser el modelo más simple posible que simule la circulación de Hadley [5]. Este modelo es conocido como modelo de Lorenz de 1984, o sistema Lorenz-84, y es el que se tratará a lo largo de este trabajo.

Debido a su simplicidad para modelar la circulación de Hadley, este modelo ha captado la atención de los investigadores y meteorólogos, de forma que se han logrado ya ciertos resultados. Poco tiempo después de la publicación de Lorenz, se presentó un estudio meteorológico donde se afirmaba que la circulación de Hadley en tiempo de invierno es más predecible que la misma en tiempos de verano [2]. Esto se corroboró usando el modelo propuesto por Lorenz, junto con un análisis más extenso sobre la bifurcación y predictibilidad del modelo [9]. También se han realizado análisis de estabilidad de Lyapunov para verificar la regularidad del modelo, junto con experimentos numéricos que han encontrado comportamiento caótico y periódico de

*Asesor, Profesor Investigador

Email addresses: lkzapatar@eafit.edu.co (Laura Katterine Zapata Rendón), sparram3@eafit.edu.co (Santiago Parra Mejía), jdcorread@eafit.edu.co (Juan David Correa Duque), drojasd@eafit.edu.co (Daniel Rojas Díaz)

los atractores del modelo al variar sus parámetros ([6], [7], [8]).

Sin embargo, hasta ahora no se han tratado aproximaciones lineales del sistema Lorenz-84 y su posible aplicabilidad en métodos de control, como es el caso para el modelo clásico de Lorenz en investigaciones recientes ([1], [4], [3]). El objetivo de esta practica es justamente encontrar una aproximación lineal del sistema original y verificar que el comportamiento de estos dos sistemas sea similar dentro de cierto periodo de tiempo. Además, se busca implementar un control en el sistema y realizar el análisis de incertidumbre y el análisis de sensibilidad correspondiente.

2. Métodos

El modelo se compone por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias [5]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y^2 - z^2 - ax + aF \\ \dot{y} &= xy - bxz - y + G \\ \dot{z} &= xz + bxy - z + G'\end{aligned}$$

Donde todos los parámetros son positivos y se debe cumplir $a < 1$ y $b > 1$.

Ahora, la variable x representa la intensidad promedio de las corrientes de vientos occidentales, mientras que las variables y y z representan la amplitud de coseno y seno de la fase de los remolinos generados por la circulación de Hadley. A continuación presentamos el significado de los parámetros de nuestro modelo:

- F : Velocidad promedio de los vientos occidentales
- G y G' : Magnitud de las fuerzas de transporte hacia los polos del aire en las celdas de Hadley
- a : Coeficiente de amortiguamiento de la corriente de vientos provocada por los remolinos
- b : Coeficiente de intercambio de energía entre y y z

Se referenciará la explicación completa de los parámetros y términos del modelo en [10] debido a los detalles técnicos que esta requiere para abarcarse en su totalidad.

En el mismo artículo donde presenta el modelo [5], Lorenz afirma que, en el caso $G' = 0$, los puntos de equilibrio de este sistema vienen dados por las ecuaciones

$$x = t \quad y = \frac{(1-t)G}{1-2t+(1+b^2)t^2} \quad z = \frac{btG}{1-2t+(1+b^2)t^2} \quad (1)$$

Donde t viene dado por las soluciones de $a(F-t)(1-2t+(1+b^2)t^2) = G^2$. De esta forma el número de puntos de equilibrio dependerá de los valores de los parámetros a , G y b (que determinan el número de soluciones de esta última ecuación).

Herramientas Computacionales

Para modelar este sistema y hacer las simulaciones correspondientes se utiliza la herramienta *Simulink* para graficar el sistema y ejecutarlo. Además se usa el lenguaje de programación *Matlab* y algunas de sus toolbox para poder realizar los analisis correspondientes de los datos y como tal del comportamiento del sistema.

Analisis de incetidumbre

Para realizar el análisis de incertidumbre se usa el Tool-Box GSUA-CSB y matemática simbólica de MATLAB. Además se procede con la generación de algunos filtros de montecarlo para su posterior análisis y poder evaluar que valores cercanos o en qué intervalos pueden estar los parámetros sin alterar el comportamiento del sistema.

Punto de equilibrio

Para evaluar el punto de equilibrio se procede a determinar los valores que deben tomar las variables de estado para que sus tasas de cambio sean nulas. Para ello se procede analizando analíticamente los valores de estas variables y, posteriormente, evaluandolos en el sistema y verificando que su comportamiento si corresponda realmente a una estabilidad del sistema.

Analisis dimensional

Para el análisis dimensional del modelo se hizo una búsqueda en la literatura con el fin de identificar las unidades de cada una de las variables y parámetros presentes en el modelo. Luego, con base en las ecuaciones que modelan el comportamiento del sistema se concluye que para que el sistema sea consistente en sus dimensiones se debe crear una constante que multiplica las ecuaciones que se tenían únicamente con el fin de aportarle robustez dimensional al modelo.

Linealización

Se entiende como *linealización* a la aproximación del sistema original a un sistema lineal definido en una región en específico alrededor de un punto de referencia $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$, es decir, sobre una vecindad del punto de referencia. El proceso de linealización consiste encontrar las matrices A y B tales que la aproximación al sistema lineal es

$$\Delta \dot{X} = A\Delta X + B\Delta U$$

Con $\Delta \dot{X}$ el vector de las diferencias de tasas de cambio, ΔX el vector de las diferencias de las variables de estado y ΔU el vector de las diferencias de las entradas.

Con A y B definidas como

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial F} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial G} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial F} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial G} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial F} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial G} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Nota: La matriz B no se calcula con respecto a la entrada G' , ya que G' toma el valor de cero en el punto de equilibrio del sistema.

Control SISO

Para hacer el control SISO debemos elegir una de las salidas y una de las entradas del modelo lineal. Si miramos la matriz B que se obtuvo en la linealización, nos damos cuenta de que la entrada actúa sobre el primer estado y por ende lo elegiremos para controlarlo definiendo $C = [1 \ 0 \ 0]$. Luego, la salida elegida es x y la entrada elegida es F . Ahora, recordemos que la función de transferencia de un sistema lineal en la forma de espacio de estado viene dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B \quad (4)$$

Función de transferencia SISO

La función de transferencia del sistema simple de control $H(s)$ se obtiene de la siguiente forma. Sea $G(s) = \frac{P_n(s)}{P_d(s)}$, donde $P_n(s)$ y $P_d(s)$ son el polinomio resultante por la entrada y el polinomio característico del sistema respectivamente en el dominio de la frecuencia, entonces se tiene:

$$H(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{K \cdot P_n(s)}{P_d(s) + K \cdot P_n(s)} \quad (5)$$

cuya estabilidad depende del polinomio resultante en el denominador $P_d(s) + K \cdot P_n(s)$

Esta sería la función de transferencia para nuestro sistema si sólo consideramos la entrada F y tomamos como salida la intensidad promedio de las corrientes de vientos occidentales.

Aplicación del método de Routh-Hurwitz

El objetivo del sistema de control es determinar una función de transferencia para el controlador K que otorgue ciertas propiedades a la función de transferencia resultante para el sistema de control. En este caso, la función de transferencia del sistema de control es una constante desconocida. Ahora, lo que le pedimos a este controlador es que mantenga el sistema estable, sin embargo no todos los valores de K necesariamente

resultan en un sistema estable.

Por ello se emplea el método de Routh-Hurwitz para analizar qué valores de K son los apropiados. En donde el número de cambios de signo en la primera columna de coeficientes en el arreglo de Routh-Hurwitz equivale al número de raíces en el semiplano derecho, es decir la región inestable. Por lo que se busca que no hayan cambios de signo en esta columna.

Análisis de sensibilidad

En esta sección realizamos un análisis de sensibilidad sobre nuestro sistema, específicamente de la salida x de acuerdo a la variación de los parámetros x_0, y_0, z_0, a, b . Adicional se estudia la sensibilidad de la salida x sobre una curva nominal. Los resultados fueron obtenidos con ayuda de la herramienta SA (Sensitivity Análisis del Toolbox GSUA-CSB de MATLAB).

Análisis de incertidumbre

En esta sección se evaluará la manera en que se propaga la incertidumbre de los factores en las salidas del modelo. Para ello se definen intervalos pequeños para cada factor. Y se utiliza el Toolbox GSUA-CSB de MATLAB.

3. Resultados y análisis

3.1. Punto de Equilibrio

Para evaluar el punto de equilibrio se procede de la siguiente manera: Para el caso $G = 0$, encontramos que, al reemplazar en las ecuaciones de (1), se sigue $y = z = 0$. Ahora, evaluando la ecuación cúbica se tiene que

$$a(F - t)(1 - 2t + (1 + b^2)t^2) = 0 \quad (6)$$

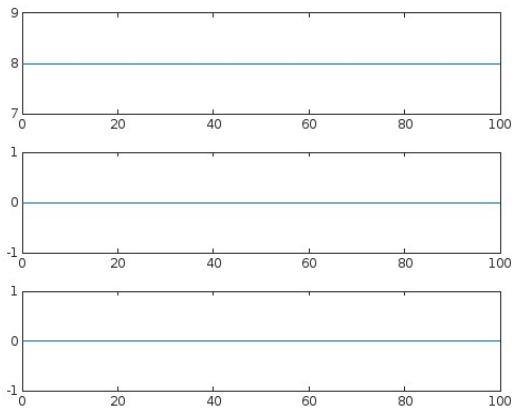
Por tanto, tenemos dos casos: o bien $F - t = 0$ o $1 - 2t + (1 + b^2)t^2 = 0$. De esta última igualdad se obtiene

$$(-2)^2 - 4(1)(1 + b^2) = 4 - 4(1 + b^2) = -4b^2 < 0$$

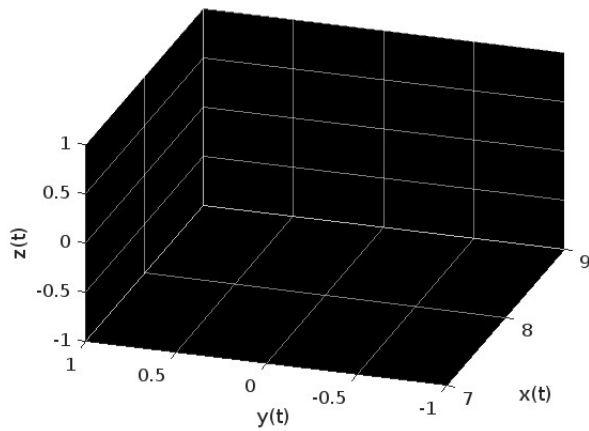
Siempre y cuando $b > 0$. Por tanto esta segunda ecuación no tiene soluciones en \mathbb{R} , y así nos quedamos con la única solución $t = F$. Finalmente, como por (1) se tiene $x = t$, el punto de equilibrio corresponde al vector $(x^*, y^*, z^*) = (F, 0, 0)$. A continuación se presenta la simulación del modelo con este estado inicial. Podemos ver que para los estados x, y y z , con $G = 0$ nos crea unas líneas constantes que es el resultado que esperábamos, y para el espacio de fase esperábamos un punto. El caso $G \neq 0$ se omite debido a la complejidad que genera el comportamiento caótico del modelo.

3.2. Análisis de incertidumbre

Se presentan las siguientes gráficas que representan los resultados del análisis. Se define el vector nominal de parámetros $(x_0, y_0, z_0, a, b) = (1, 1, 1, 0.25, 4)$ para trabajar en el análisis. En la Figura 2a se representa el comportamiento del modelo en 100 días para el vector nominal inicial.



(a) Punto de equilibrio para los estados $x = F = 8, y = 0, z = 0$, con $G = 0$

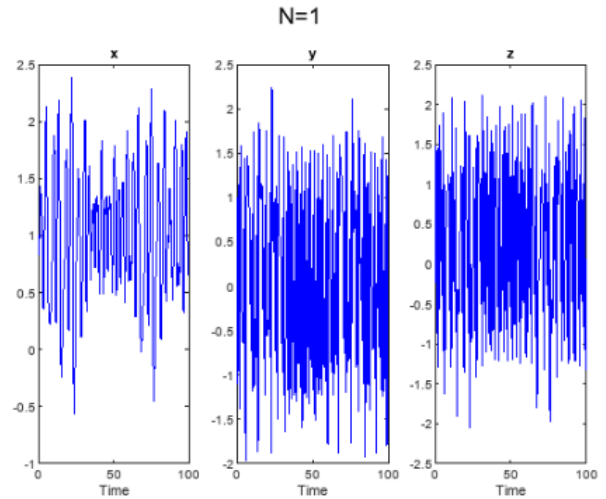


(b) Punto de equilibrio en el espacio de fases para los estados $x = F = 8, y = 0, z = 0$, con $G = 0$

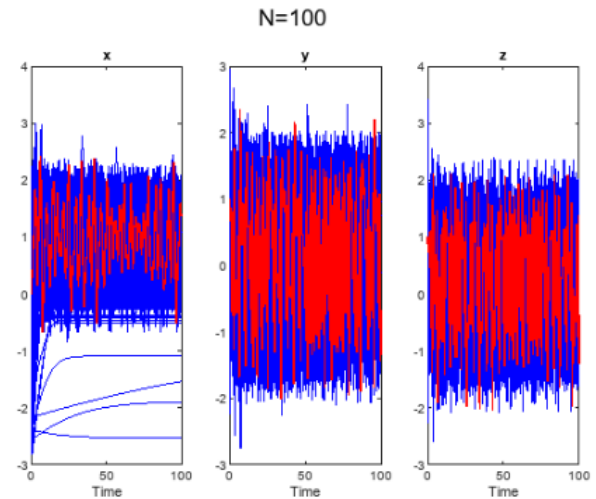
Figura 1: Resultados obtenidos para puntos de equilibrio, con $x = F = 8, y = 0$ y $z = 0$ con $G = 0$

Luego se realizan 100 simulaciones para variar los parámetros del vector nominal, y los resultados se presentan en la Figura 2b. Notamos que los valores de las variables de estado permanecen dentro de un rango cercano al descrito por el vector nominal (mostrado en rojo), mostrando así la estabilidad del sistema para los rangos determinados en la simulación.

Las figuras 3a, 3b y 3c representan Filtros de Montecarlo para cada variable de estado respectivamente. De esta forma se permite medir la relevancia sobre el modelo que tiene cambiar los parámetros a altos o bajos valores. Así, se evalúa la relevancia de cada parámetro sobre cada variable de estado. Para x y y , en 3a y 3b, notamos que los parámetros x_0, a y b cobran gran relevancia. Sin embargo, la única variable relevante para z resulta ser a y b , y el resto de variables no muestran grandes afectaciones sobre esta última, caso contrario al presentado en x y y .



(a) Análisis de incertidumbre del modelo Lorenz-84 con matemática simbólica $N = 1$



(b) Análisis de incertidumbre del modelo Lorenz-84 con matemática simbólica $N = 100$

Figura 2: Gráficas obtenidas del análisis de incertidumbre

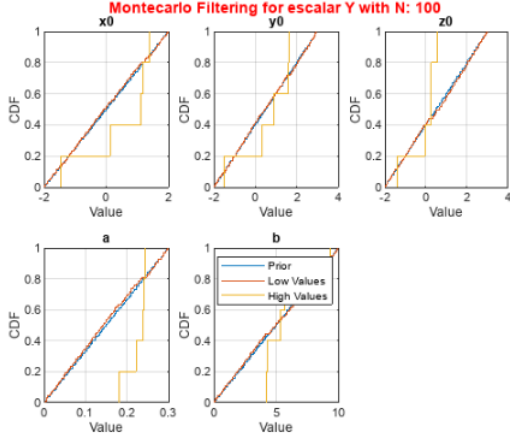
3.3. Análisis dimensional

Recordemos el sistema original:

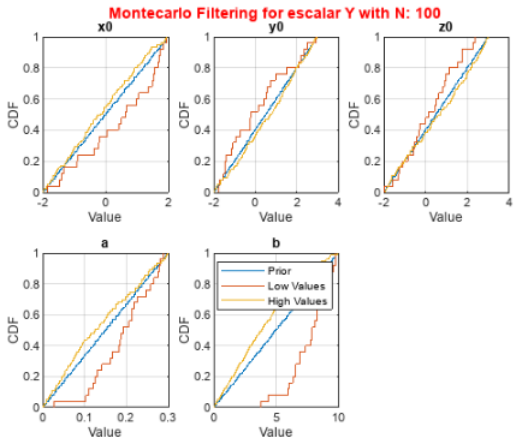
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y^2 - z^2 - ax + aF \\ \dot{y} &= xy - bxz - y + G \\ \dot{z} &= xz + bxy - z + G'\end{aligned}$$

De acuerdo a [10], las variables x, y y z son adimensionales y la unidad de tiempo es 5 días.

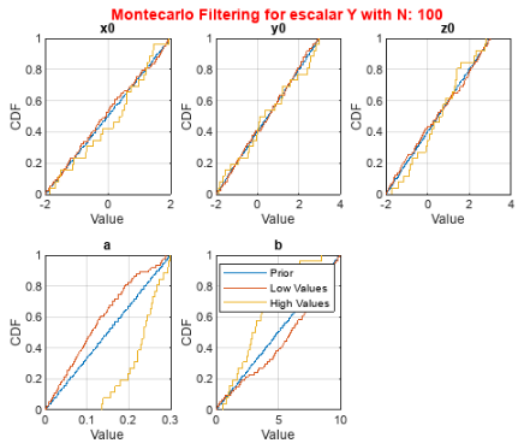
Sin embargo, que las variables x, y y z no tengan dimensión hace que el sistema sea inconsistente en su análisis dimensional porque, de acuerdo a las ecuaciones del sistema, las unidades de la parte derecha serían 1, haciendo a su vez que las unidades de las tasas de cambio \dot{x}, \dot{y} y \dot{z} sean 1, lo cual no tiene sentido físico ni matemático. Es por ello, que definimos una constante k , invisible en el sistema pero que nos aporta al análisis dimensional del mismo.



(a) Filtro de montecarlo para la primera salida (valor de x) del modelo Lorenz-84 con matemática simbólica



(b) Filtro de montecarlo para la segunda salida (valor de y) del modelo Lorenz-84 con matemática simbólica



(c) Filtro de montecarlo para la tercera salida (valor de z) del modelo Lorenz-84 con matemática simbólica

Figura 3: Filtros de Montecarlo obtenidos del análisis de incertidumbre

Definamos ahora el sistema como sigue

$$\begin{aligned}\dot{x} &= k(-y^2 - z^2 - ax + aF) \\ \dot{y} &= k(xy - bxz - y + G) \\ \dot{z} &= k(xz + bxy - z + G')\end{aligned}$$

Sea k la constante definida como $k = 1/dia$. Luego, como los parámetros a y b y las entradas F , G y G' son también adimensionales (es decir las unidades son 1) se concluye que las expresiones $(-y^2 - z^2 - ax + aF)$, $(xy - bxz - y + G)$ y $(xz + bxy - z + G')$ también son adimensionales.

Así, las unidades de las tasas de cambio \dot{x} , \dot{y} y \dot{z} están definidas como $1/dia$ y el sistema es consistente en sus dimensiones.

A continuación se presenta una tabla con el resumen de este análisis dimensional:

	Unidades	Descripción
x	1 (Adimensional)	Intensidad promedio
y	1 (Adimensional)	Amplitud del coseno
z	1 (Adimensional)	Amplitud del seno
t	días	Unidad de tiempo: 5 días
k	$(1/dia) = Dia^{-1}$	Constante para ajustar el análisis
a	1 (Adimensional)	Coefficiente de amortiguamiento
b	1 (Adimensional)	Coefficiente de energía
F	1 (Adimensional)	Velocidad promedio
G	1 (Adimensional)	Magnitud de las fuerzas
G'	1 (Adimensional)	Magnitud de las fuerzas
\dot{x}	$(1/dia) = Dia^{-1}$	Tasa de cambio de x
\dot{y}	$(1/dia) = Dia^{-1}$	Tasa de cambio de y
\dot{z}	$(1/dia) = Dia^{-1}$	Tasa de cambio de z

Tabla 1: Unidades de los parámetros presentes en el modelo

3.4. Linealización analítica

Sistema original:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y^2 - z^2 - ax + aF \\ \dot{y} &= xy - bxz - y + G \\ \dot{z} &= xz + bxy - z + G'\end{aligned}$$

donde $0 < a < 1$ y $b > 1$.

Se calcula el punto de equilibrio del sistema a partir de igualar las tasas de cambio a cero, es decir $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ y $\dot{z} = 0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}y &= \frac{(1-x)G}{1-2x+(1+b^2)x^2} \\ z &= \frac{bxG}{1-2x+(1+b^2)x^2}\end{aligned}$$

$$a(F-x)(1-2x+(1+b^2)x^2) - G^2 = 0$$

Donde si tomamos a $G = 0$ se obtiene que $y = 0$, $z = 0$, $x = F$. Así, calculando las matrices A y B sobre el sistema original, obtenemos:

$$A = \begin{bmatrix} -a & -2y & -2z \\ y - bz & x - 1 & -bx \\ z + by & bx & x - 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ahora, si evaluamos las matrices A y B en el punto de equilibrio con $G = 0, y = 0, z = 0, x = F = 8, a = 0.25$ y $b = 4$, obtenemos:

$$A = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -32 \\ 0 & 32 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Y calculando los valores propios de la matriz A se obtiene:

$$eig(A) = \begin{bmatrix} 7 + 32i \\ 7 - 32i \\ -0.25 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Por tanto, se concluye que se trata de un punto de equilibrio inestable ya que estos autovalores de la matriz A no se encuentran en la región estable, es decir, el semiplano izquierdo del plano imaginario.

Mientras que si calculamos la matriz A en el punto de equilibrio $G = 0, G' = 0, y = 0, z = 0, x = F$, pero asignamos el valor de F a $F < 1$, específicamente $F = 0.5, a = 0.25$ y $b = 4$. Obtenemos:

$$A = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -2 \\ 0 & 2 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Y calculando los valores propios de esta nueva matriz A se obtiene:

$$eig(A) = \begin{bmatrix} -0.5 + 2i \\ -0.5 - 2i \\ -0.25 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Donde todos sus autovalores se encuentran en la región estable del plano (semiplano izquierdo del plano imaginario)). Y por lo tanto se trata de un punto de equilibrio estable. Confirmando la hipótesis que Lorenz estableció en [5] donde se menciona que la solución es estable si $F < 1$ e inestable si $F > 1$.

Así, la aproximación lineal del sistema en el punto de equilibrio $G = 0, G' = 0, y = 0, z = 0, x = F = 0.5, a = 0.25$ y $b = 4$: queda:

$$\dot{X} = A\Delta X + B\Delta U$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -2 \\ 0 & 2 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta F \\ \Delta G \end{bmatrix}$$

Donde

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 0.25 \\ y - 0 \\ z - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 0.25 \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta F \\ \Delta G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - 0.25 \\ G - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - 0.25 \\ G \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal obtenido es

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -2 \\ 0 & 2 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 0.25 \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F - 0.25 \\ G \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25(x - 0.25) + 0.25(F - 0.25) \\ -0.5y - 2z + G \\ 2y - 0.5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25x + 0.25F \\ -0.5y - 2z + G \\ 2y - 0.5z \end{bmatrix}$$

Ahora, notemos que al evaluar los valores $x = F = 0.5, G = 0, G' = 0, y = 0, z = 0, a = 0.25$ y $b = 4$ en el sistema original obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -0^2 - 0^2 - (0.25)(0.5) + (0.25)(0.5) = 0 \\ \dot{y} &= (0.25)(0) - (4)(0.25)(0) - 0 + 0 = 0 \\ \dot{z} &= (0.25)(0) + (4)(0.25)(0) - 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Obteniendo las expresiones para $\Delta\dot{x}, \Delta\dot{y}$ y $\Delta\dot{z}$ en términos de \dot{x}, \dot{y} y \dot{z} como sigue:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - 0 \\ \dot{y} - 0 \\ \dot{z} - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Luego, el sistema lineal asociado al sistema original en el punto de equilibrio $x = F = 0.5, G = 0, G' = 0, y = 0, z = 0, a = 0.25$ y $b = 4$ es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -0.25x + 0.25F \\ \dot{y} &= -0.5y - 2z + G \\ \dot{z} &= 2y - 0.5z \end{aligned}$$

3.5. Linealización numérica

Proceso de linealización en Matlab

Para ello se evalúa el comportamiento del modelo en Simulink para el conjunto nominal de parámetros dado por $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1, a = 0.25, b = 4, F = 0.5, G = 0$ y $G' = 0$. En la figura 4 se observa que las variables de estado x, y y z

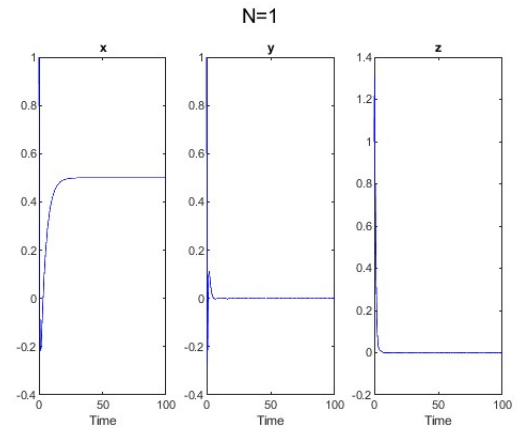


Figura 4: Comportamiento del modelo de acuerdo a valores para sus parámetros y y z se estabilizan en los valores 0.5, 0 y 0 respectivamente.

Luego, se obtiene la respuesta del sistema repitiendo los valores de la nominal y variando los valores de la entrada F en el intervalo $[0, 2]$. En la figura 5 se observa que el valor de

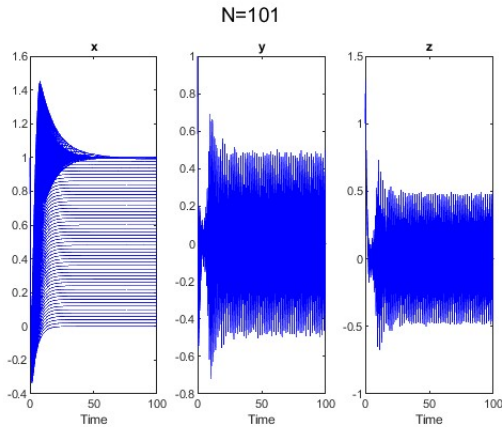


Figura 5: Comportamiento del modelo de acuerdo a valores nominales y variando los valores de la entrada F

la variable de estado x se estabiliza en el rango establecido mientras que los valores de y y z oscilan constantemente. Esto se debe a la naturaleza caótica del modelo, ya que dependiendo de la entrada que definamos él puede estabilizarse, quedarse oscilando o no converger. En este caso x se estabiliza y las otras dos variables de estado no lo hacen.

Ahora extraemos los valores donde se estabilizó el sistema y procedemos a trazar la curva de linealidad. De acuerdo

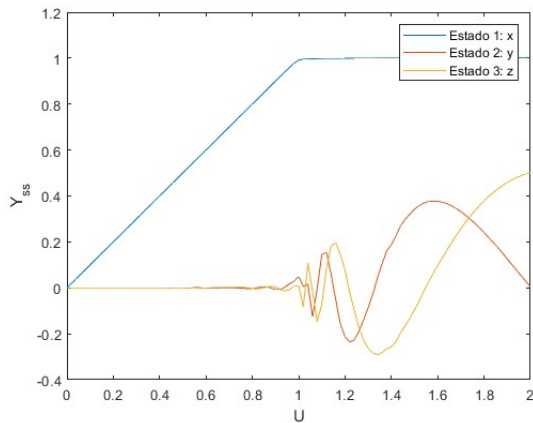


Figura 6: Curva de linealidad con las variables de estado x , y y z

a la figura 6 se observa que la variable de estado x se logra estabilizar en $(0, 1)$. Por lo tanto un buen intervalo donde podemos variar el parámetro F manteniendo el comportamiento original del modelo es $F \in (0, 1)$. Además, es posible tomar en cuenta el intervalo $F \in (1, 2)$ que conserva el comportamiento original pero esta vez únicamente de x . Esto coincide con el planteamiento del modelo ya que en el equilibrio x toma el valor de la entrada F mientras que las demás variables se anulan, y sabemos que si $F < 1$ el punto de equilibrio del sistema es estable [5].

Ahora se procede a encontrar las matrices A y B de la aproxima-

ción lineal del sistema.

Para ello se escriben las ecuaciones del sistema original en matemática simbólica e igualamos las ecuaciones de las tasas de cambio \dot{x} , \dot{y} y \dot{z} a cero para encontrar los puntos de equilibrio. Observando que los valores de x , y y z del punto de equilibrio

```

eqs =
  (-y^2 - z^2 + F a - a x)
  (x y - y - b x z)
  (x z - z + b x y)

u = F

sol = struct with fields:
  x: F
  y: 0
  z: 0

```

Figura 7: Puntos de equilibrio con Matlab

coinciden con los valores encontrados analíticamente: $x = F$, $y = 0$ y $z = 0$.

Sustituyendo en las expresiones anteriores los valores de los parámetros requeridos $a = 0.25$, $b = 4$ y $F = 0.5$ se observa que los valores de x , y y z coinciden con los valores de estabilidad $x = 0.5$, $y = 0$ y $z = 0$ obtenidos en la Figura 4.

Ahora, para obtener las matrices del sistema lineal se procede calculando el jacobiano directamente o usando *linmod*. El caso de la matriz A es el jacobiano del sistema respecto a las variables de estado x , y y z y la matriz B es el jacobiano respecto a la entrada F . Luego, el sistema lineal asociado al

```

A = 3x3
  -0.2500    0    0
    0   -0.5000   -2.0000
    0    2.0000   -0.5000

B = 3x1
  0.2500
    0
    0

```

Figura 8: Matrices A y B calculadas con jacobiano en Matlab

sistema original en el punto de equilibrio $x = F = 0.5$, $G = 0$, $G' = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a = 0.25$ y $b = 4$ es:

$$\dot{X} = A\Delta X + B\Delta U$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -2 \\ 0 & 2 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta F$$

$$\dot{x} = -0.25x + 0.25F$$

$$\dot{y} = -0.5y - 2z$$

$$\dot{z} = 2y - 0.5z$$

Ahora, para validar que sea un punto de equilibrio estable se calcula los autovalores de la matriz A . Como se observa en la figura 9f todos los autovalores están en la región estable (es decir el semiplano izquierdo) puesto que todos tienen parte real negativa. Concluyendo que se trata de un punto de equilibrio

```
ans = 3x1 complex
    -0.5000 + 2.0000i
    -0.5000 - 2.0000i
    -0.2500 + 0.0000i
```

Figura 9: Autovalores de matriz A con MATLAB

estable, tal y como se observó analíticamente.

Como vimos anteriormente, el resultado del sistema lineal en Matlab coincide con la aproximación lineal encontrada analíticamente en la sección 4.3.

Ahora, analicemos el comportamiento del sistema lineal asociado al sistema original en otros puntos de equilibrio. Por ejemplo veamos el sistema lineal en el punto $x = F = 0.7$, $G = 0$, $G' = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a = 0.25$ y $b = 4$. En la figura se

```
A = 3x3
    -0.2500     0     0
         0    -0.3000   -2.8000
         0     2.8000   -0.3000

B = 3x1
    0.2500
         0
         0

ans = 3x1 complex
    -0.3000 + 2.8000i
    -0.3000 - 2.8000i
    -0.2500 + 0.0000i
```

Figura 10: Matrices A y B calculadas con $x = F = 0.7$, $G = 0$, $G' = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a = 0.25$ y $b = 4$

```
A = 3x3
    -0.2500     0     0
         0     4.0000  -20.0000
         0    20.0000     4.0000

B = 3x1
    0.2500
         0
         0

ans = 3x1 complex
    4.0000 +20.0000i
    4.0000 -20.0000i
    -0.2500 + 0.0000i
```

Figura 11: Matrices A y B calculadas con $x = F = 5$, $G = 0$, $G' = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a = 0.25$ y $b = 4$

puede observar que el punto de equilibrio $x = F = 0.7$, $G = 0$, $G' = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a = 0.25$ y $b = 4$ es un punto de equilibrio estable, ya que los autovalores de la matriz A están en la región estable.

Mientras que en la figura se puede observar que el punto de equilibrio $x = F = 5$, $G = 0$, $G' = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a = 0.25$ y $b = 4$ es un punto de equilibrio inestable, ya que los autovalores de la matriz A no están en la región estable.

Esto coincide con la teoría ya que en el punto de equilibrio $G = 0$, $G' = 0$, $x = F$, $y = 0$ y $z = 0$, cuando $F < 1$ el sistema es estable y con $F > 1$ el sistema es inestable. Por tanto el sistema lineal coincide con su estabilidad en el punto de equilibrio tal como el sistema original.

3.6. Comparación sistema no lineal y lineal

Veamos el comportamiento de ambos sistemas en el punto de equilibrio $x = 0.5$, $y = 0$, $z = 0$ con $G' = 0$, $a = 0.25$ y $b = 4$, bajo diferentes valores para las entradas F y G .

En el caso del sistema no lineal las condiciones iniciales son $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$. Por otro lado, para el sistema lineal las condiciones iniciales son $\Delta x_0 = 0$, $\Delta y_0 = 0$, $\Delta z_0 = 0$, pues tomamos como punto inicial el mismo punto de equilibrio.

Realizamos las simulaciones para el sistema no lineal y linealizado respectivamente. En primer lugar verificamos el experimento básico donde los valores de las entradas coinciden con los valores usados para la construcción del sistema lineal. Posteriormente se realizan simulaciones para diferentes valores de estas alrededor de la vecindad definida por el punto de operación $F = 0.5$, $G = 0$

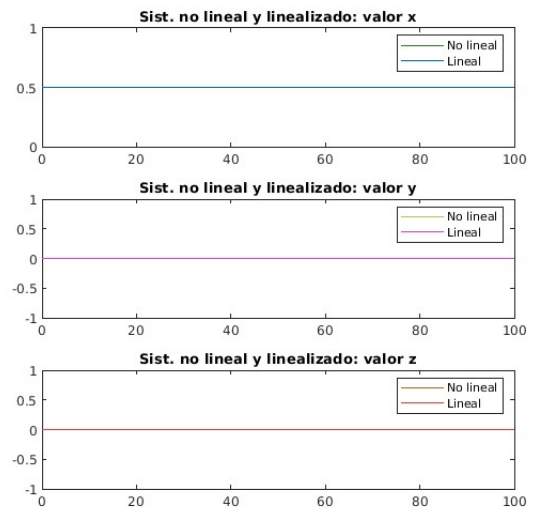
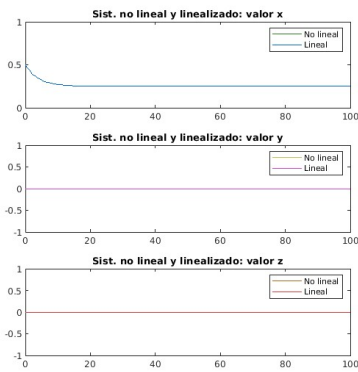


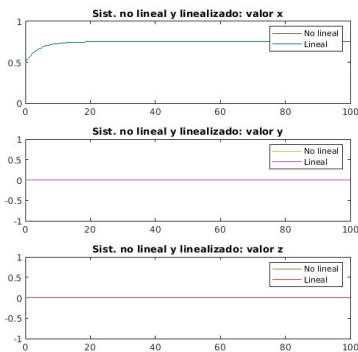
Figura 12: Comparación del sistema no lineal y lineal en el punto de operación $F = 0.5$, $G = 0$

A partir de las gráficas notamos una correspondencia perfecta entre el comportamiento del sistema no lineal y el comportamiento del sistema lineal. Estos resultados son consistentes con las conclusiones obtenidas a partir de la curva de linealidad calculada anteriormente, donde el resultado sobre x resulta tener un comportamiento lineal respecto a los cambios en F , que se comprueba con estas simulaciones.

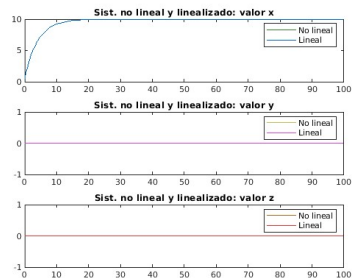
Ahora, realizaremos los mismos experimentos, pero esta vez



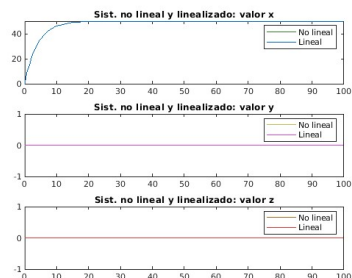
(a) Comparación del sistema no lineal y lineal en el punto de operación $F = 0.25, G = 0$



(b) Comparación del sistema no lineal y lineal en el punto de operación $F = 0.75, G = 0$



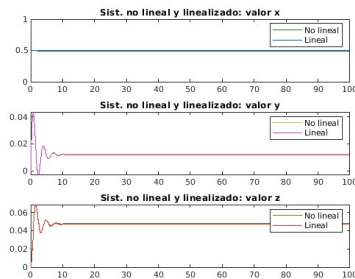
(c) Comparación del sistema no lineal y lineal en el punto de operación $F = 10, G = 0$



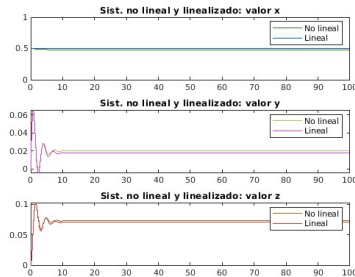
(d) Comparación del sistema no lineal y lineal en el punto de operación $F = 50, G = 0$

Figura 13: Comportamiento de los sistemas no lineal y linealizado en el punto de operación $x = 0.5, y = 0, z = 0, F = 0.5, G = 0$ con parámetros $a = 0.25$ y $b = 4$ variando los valores de F

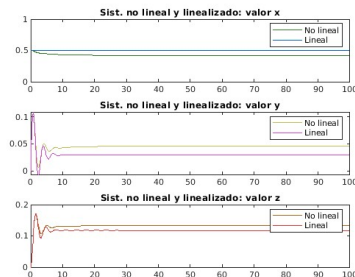
realizando variaciones sobre la componente G del punto de operación. Los resultados se muestran a continuación



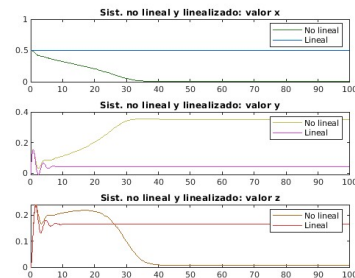
(a) Comparación del sistema no lineal y lineal en el punto de operación $F = 0.5, G = 0.1$



(b) Comparación del sistema no lineal y lineal en el punto de operación $F = 0.5, G = 0.25$



(c) Comparación del sistema no lineal y lineal en el punto de operación $F = 0.5, G = 0.5$



(d) Comparación del sistema no lineal y lineal en el punto de operación $F = 0.5, G = 0.75$

Figura 14: Comportamiento de los sistemas no lineal y linealizado en el punto de operación $x = 0.5, y = 0, z = 0, F = 0.5, G = 0$ con parámetros $a = 0.25$ y $b = 4$ variando los valores de G

3.7. Control SISO

La función de transferencia de la planta está dada por: Este valor de la función de transferencia G del sistema de control se valida usando la herramienta *Control System Toolbox* de Matlab pasandole como entrada las matrices A, B, C y D . Con C y D definidas como $[1 \ 0 \ 0]$ y $[0]$ respectivamente. En donde se observa que realmente corresponden a la misma función de transferencia. Pues si multiplicamos por el número 4 arriba y abajo

$$G = \frac{1}{4s + 1}$$

Figura 15: Resultado función de transferencia del sistema

```

Continuous-time state-space model.
ans =

    0.25
-----
    s + 0.25

Continuous-time transfer function.

```

Figura 16: Resultado función de transferencia del sistema usando el Control System Toolbox de Matlab

en esta última función, obtenemos la función de transferencia hallada. Ahora estos polinomios $P_n(s)$ y $P_d(s)$ corresponden al

$$\begin{aligned}
 P_n &= 1 \\
 P_d &= 4s + 1 \\
 P_{ch} &= k + 4s + 1
 \end{aligned}$$

Figura 17: Resultado Polinomio característico

numerador y el denominador de $G(s)$ respectivamente. Luego podemos definir $H(s)$ (también llamada la función de transferencia del sistema controlado) como

$$H(s) = \frac{k}{4s + k + 1} \quad (12)$$

Y así, el Polinomio característico del sistema controlado queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Polinomio característico} &= P_d(s) + (K \cdot P_n(s)) \\
 &= 4s + 1 + k(1) \\
 &= 4s + k + 1
 \end{aligned}$$

Luego el arreglo de Routh-Hurwitz nos queda:

$$\begin{bmatrix} S^1 & 4 \\ S^0 & k + 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, para que no tengamos cambios de signo en la primera columna de coeficientes tendremos que cumplir que:

$$\begin{aligned}
 k + 1 &\geq 0 \\
 k &\geq -1
 \end{aligned} \quad (13)$$

Por tanto $k \geq -1$. Así el valor para la constante k debe ser mayor a -1 para garantizar que ambos términos sean positivos. De esta forma, no tendremos ningún cambio de signo y garantizamos que el sistema siga siendo estable.

A continuación presentamos los resultados para el control SISO implementado con Simulink. Se toma x como la variable a controlar con condición inicial $x_0 = 0.5$. Las simulaciones se realizaron para diferentes señales con controlador $k = 100$. Se verifica en la Figura ?? la correspondencia entre los valores de x deseados y la evolución real de estos valores en el sistema no lineal.

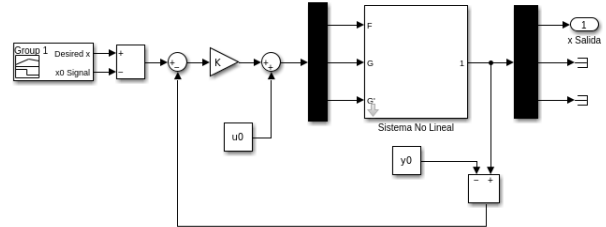
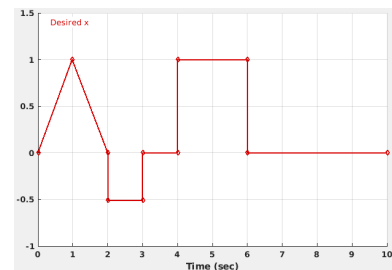
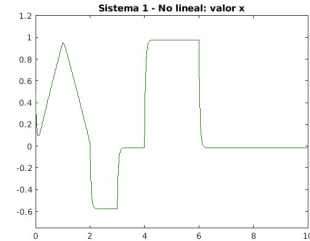


Figura 18: Diagrama de bloques en Simulink del sistema de control SISO.



(a) Comportamiento deseado para la variable x



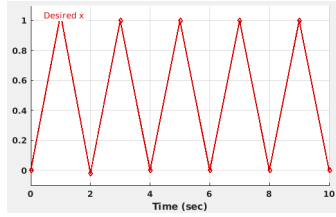
(b) Evolución de la variable x al aplicar el control SISO

Figura 19: Resultados del control SISO para una señal arbitraria en la variable x con $k = 100$

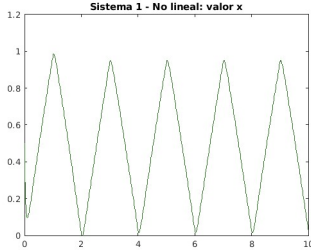
En las Figuras 19, 20 y 21 observamos los diferentes resultados del sistema controlado con algunas perturbaciones en forma de pulso en la entrada del proceso, es decir en nuestra referencia. Es de notar que, la evolución de la salida x corresponde apropiadamente al comportamiento deseado por medio del control. Concluyendo que nuestro control se está aplicando correctamente.

En las Figuras 23, 24, 25 y 26 observamos los diferentes resultados al variar el valor de k para el control con una misma señal de entrada (Figura 22). Es de notar que, a medida que crece el valor de k , también lo hace la precisión con que el sistema se ajusta a la señal establecida por el control.

Este resultado se corresponde con lo obtenido en (12) y (13): a medida que $k \rightarrow \infty$, los polos de $H(s)$ permanecen con parte



(a) Comportamiento deseado para la variable x



(b) Evolución de la variable x al aplicar el control SISO

Figura 20: Resultados del control SISO para una señal triangular en la variable x con $k = 100$

imaginaria nula, mientras que en su parte real tienden a $-\infty$. Esto quiere decir que, a medida que k se hace más grande, los polos de $H(s)$ se alejan cada vez más de la región inestable. De la misma forma, para valores pequeños de k , el sistema empieza a diferir del comportamiento deseado, precisamente porque los polos de $H(s)$ se acercan cada vez más a la región inestable del sistema.

3.8. Control de un sistema discreto

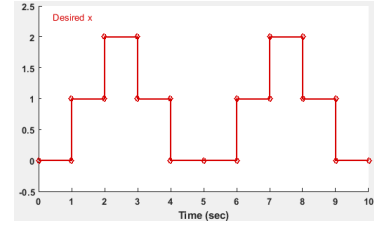
En este caso, para evaluar si nuestro sistema permite un control discreto se calcula la matriz C_0 a partir de las matrices A y B del sistema lineal, de acuerdo a la ecuación

$$C_0 = [B \ AB \ A^2B] \quad (14)$$

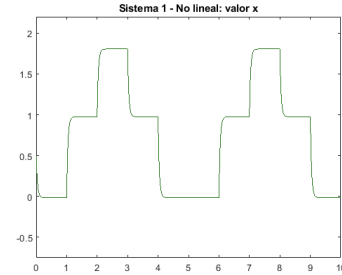
Al reemplazar las matrices A y B de nuestro sistema linealizado en el punto de operación $x = 0.5$, $y = 0$, $z = 0$, $F = 0.5$, $G = 0$, obtenemos la matriz de controlabilidad, que se presenta en la figura 27. Notamos que esta matriz no tiene rango completo debido a que está compuesta por dos filas inferiores de ceros. Esto indica que los estados y y z no son controlables, por tanto nuestro sistema no permite hacer un control discreto ni por realimentación sobre él.

3.9. Análisis de sensibilidad e incertidumbre sobre espacio de factores

A continuación se observará en la figura 28 el análisis de sensibilidad sobre una sola salida del sistema (en este caso la variable de estado x) para el espacio de factores. Es decir, se evalúa qué tan sensible es el valor de la variable de estado x a los parámetros a y b y los valores iniciales para las variables de estado (x_0 , y_0 , z_0). En este caso se usó el método de sensibilidad escalar conocido como *Xiao*. Además, en la figura 28f se muestra el resultado del análisis de incertidumbre sobre la salida x .



(a) Comportamiento deseado para la variable x



(b) Evolución de la variable x al aplicar el control SISO

Figura 21: Resultados del control SISO para una señal de escalones en la variable x con $k = 100$

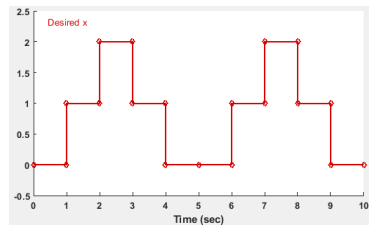


Figura 22: Comportamiento deseado para la variable x

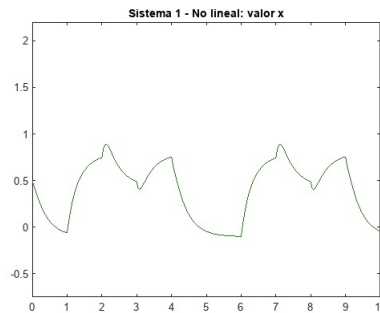


Figura 23: Evolución de la variable x al aplicar el control SISO con $k = 10$

3.10. Análisis de sensibilidad e incertidumbre para una curva nominal

A continuación se evalúa la sensibilidad de la salida x sobre una curva nominal. En este caso se usó el método de sensibilidad vectorial conocido como *Saltelli* y se realizó su respectivo análisis de incertidumbre. Los resultados se muestran a continuación en la Figura 29.

Discusión sobre los resultados en el análisis de sensibilidad e incertidumbre sobre espacio de factores y sobre una curva nominal

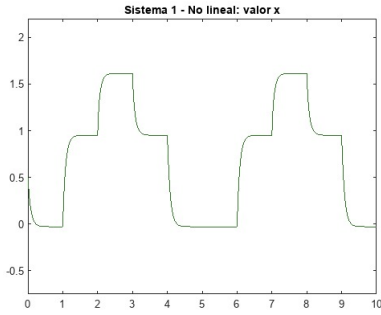


Figura 24: Resultados para un control SISO de la variable x para $k = 50$

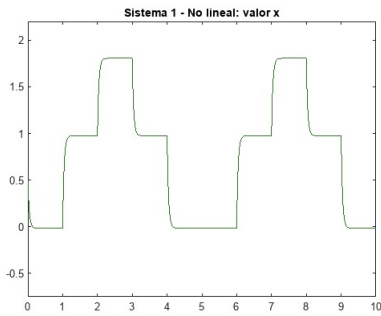
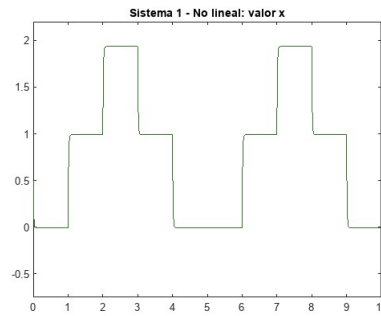


Figura 25: Resultados para un control SISO de la variable x para $k = 100$



(a) Evolución de la variable x al aplicar el control SISO con $k = 300$

Figura 26: Resultados para un control SISO de la variable x para $k = 300$

$$C_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 27: Matriz de controlabilidad para el sistema linealizado en el punto de operación

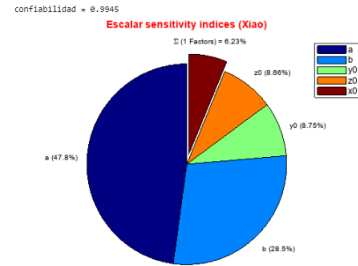
Podemos notar que, de acuerdo a la figura 28c donde se observan los resultados de análisis de sensibilidad sobre espacio de factores, la salida x es mucho más sensible al parámetro a que al resto de parámetros, con un índice de sensibilidad del 47.8%. Le siguen los parámetros b , y_0 , z_0 y x_0 con índices de sensibilidad de 28.5%, 8.75%, 8.66% y

		Range	Nominal
1	x_0	-2 2	0
2	y_0	-2 3	0.5000
3	z_0	-2 3	0.5000
4	a	0 0.3000	0.1500
5	b	0 10	5

(a) Tabla con intervalos para cada parámetro

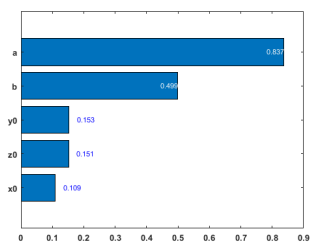
	Range	Nominal	Si	STi	
1	x_0	-2 2	0	0.0363	0.1090
2	y_0	-2 3	0.5000	0.0538	0.1531
3	z_0	-2 3	0.5000	-0.0020	0.1514
4	a	0 0.3000	0.1500	0.4765	0.8369
5	b	0 10	5	0.1706	0.4989

(b) Valores índices de sensibilidad con método Xiao

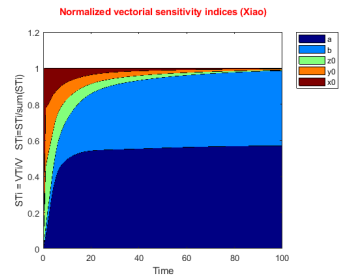


(c) Gráfico de torta índices de sensibilidad total

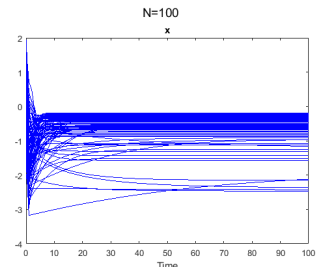
Bar chart of sensitivity indices for MSE function using Xiao method



(d) Gráfico de barras índices de sensibilidad total

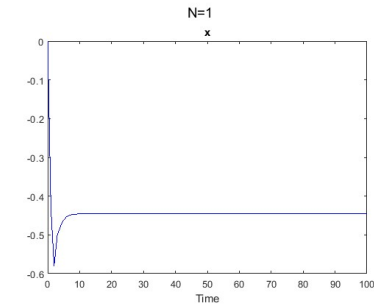


(e) Gráfico de barras índices de sensibilidad total



(f) Análisis de incertidumbre sobre el valor de x

Figura 28: Resultados obtenidos del análisis de sensibilidad general y de incertidumbre con confiabilidad 0,9945

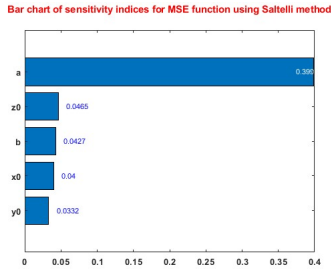


(a) Curva nominal para x con matemática simbólica

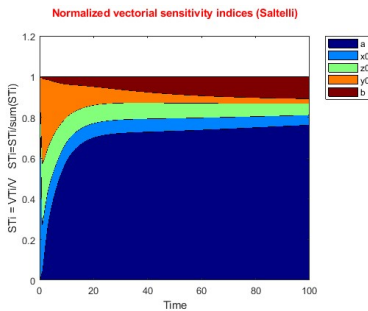
confiabilidad = 0.9791



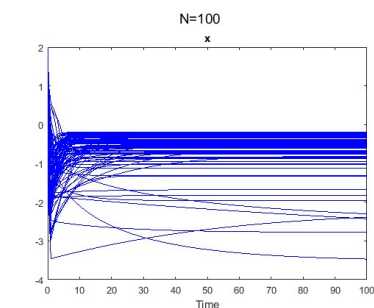
(b) Valores índices de sensibilidad con método Saltelli



(c) Gráfico de torta índices de sensibilidad total



(d) Gráfico de barras índices de sensibilidad total



(e) Análisis de incertidumbre sobre el valor de x con curva nominal

Figura 29: Resultados obtenidos del análisis de sensibilidad vectorial con método Saltelli con confiabilidad 0,9791 y su respectivo análisis de incertidumbre

6.23 % respectivamente. Notando extrañamente que el valor de la variable de estado x termina siendo más sensible a los demás parámetros que a su propio valor inicial x_0 . Sin embargo, cabe aclarar que este comportamiento no ha sido así durante todo el periodo de tiempo, pues en un inicio la salida del modelo si era mucho más sensible a los valores de y_0 , z_0 y x_0 que a los valores de a y b . Ver figura 28e

Además, podemos notar de acuerdo a la figura 28f que el valor de la salida x se termina estabilizando en la gran mayoría de las simulaciones. Donde se están variando los valores de los parámetros x_0 , y_0 , z_0 , a y b de acuerdo a los rangos $[-2, 2]$, $[-2, 3]$, $[-2, 3]$, $[0, 0.3]$ y $[0, 10]$ respectivamente. Por tanto, nuestra salida x sigue siendo estable mientras los parámetros se mantengan en esos rangos.

Ahora, en cuanto al análisis de sensibilidad para la curva nominal, se puede concluir que, de acuerdo a la figura 29b, el sistema sigue siendo mucho más sensible al parámetro a que respecto a cualquier otro parámetro, con un índice de sensibilidad total de 69.9%. Un valor mucho más alto que para el mismo índice de sensibilidad del parámetro a pero en el caso del espacio de factores. Esta diferencia puede deberse al cambio de método para hallar estos índices, pues en el caso de dos factores se usa el método escalar *Xiao* y en el caso de la curva nominal el método vectorial *Saltelli*. Además, notamos que la sensibilidad sobre el parámetro b resulta ser casi igual a la de los parámetros x_0 , y_0 y z_0 .

En cuanto a la evolución de estos índices en el tiempo (ver figura 29d), notamos que la sensibilidad respecto al parámetro a y b es mucho menor al comienzo de la simulación pero a medida que avanza esta sensibilidad se hace mucho mayor, con un comportamiento constante a partir de $t = 20$ aproximadamente para el caso del parámetro a mientras que el parámetro b aumenta su sensibilidad en el tiempo casi linealmente.

Finalmente, notamos en la figura 29e que el comportamiento de la salida x en casi todas las simulaciones se estabiliza en valores muy cercanos sin importar cuanto cambien los valores de los parámetros de acuerdo a los rangos establecidos. Concluyendo así que la salida x sigue siendo estable en esos rangos.

3.11. Análisis de incertidumbre para el sistema controlado

Ahora realizamos el mismo análisis para una curva nominal, pero esta vez usando los resultados del sistema con el control SISO implementado anteriormente.

En la Figura 30, encontramos los resultados para este análisis respecto a una señal presentada en la sección control SISO. En primer lugar se evidencia la tabla con rangos y valores nominales para los parámetros del sistema que serán evaluados y con los cuales realizaremos nuestro análisis. La Figura 30a muestran las salidas del modelo para el sistema controlado en

sus valores nominales para los factores (nótese que es la misma salida que en el control SISO).

Luego, se varían los valores de los factores en un hiper cubo definido por sus intervalos determinados, realizando así una exploración de nuestro espacio de incertidumbre de los factores y cuyas salidas en el modelo se presentan en la gráfica 30c. Las gráficas muestran que el sistema sigue siendo controlable (en el sentido SISO) aún al variar los factores, excepto por ciertas traslaciones verticales que pueden influir en el interés del controlados, pero el comportamiento en esencia sigue siendo el mismo y el sistema mantiene la estabilidad (un aspecto muy importante para aplicar en la realidad).

Terminamos con unos filtros de montecarlo obtenidos en la figura 30d, donde se concluye que la única variable que logra cambios significativos en la salida del sistema es y_0 , mientras que los demás logran el mismo efecto práctico tanto para altos como para bajos valores de estos.

4. Conclusiones

Nuestro modelo es válido y sigue el comportamiento que se espera tener al variar los parámetros de acuerdo a los registros encontrados en la literatura. Además, se evidencia un comportamiento estable si su entrada $F < 1$ e inestable si $F > 1$. Además se verificó que cuando $G = 0$ su punto de equilibrio es de la forma $x = F$, $y = z = 0$. Se realizó también un análisis de incertidumbre al variar los parámetros x_0 , y_0 , z_0 , a y b del modelo. Se encontró que el sistema sigue su comportamiento estable al varian dentro de los rangos $[-2, 2]$, $[-2, 3]$, $[-2, 3]$, $[0, 0.3]$ y $[0, 10]$ respectivamente, donde estas regiones fueron consideradas empíricamente y de acuerdo a los experimentos realizados en la literatura.

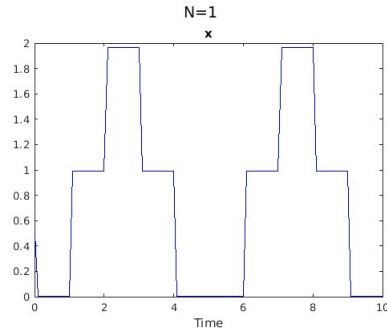
Encontramos que el sistema original como está expresado en [10] es inconsistente en sus dimensiones. Para lograr la consistencia dimensional del modelo se creó una constante $k = 1/dia$ que resulta ser invisible al sistema pero que nos aporta al análisis dimensional del mismo, conservando de esta forma el sentido físico del sistema y evitando contradicciones en las respectivas conclusiones que surjan de la experimentación de este.

Aún cuando el modelo presenta casi siempre un comportamiento caótico, es posible aproximar los resultados reales del modelo mediante un modelo lineal, el cual nos ayuda no solo a aproximar el modelo original con diferentes valores para las entradas, sino también para verificar las propiedades del sistema no lineal permitiéndonos entrar a profundidad sobre la naturaleza de este.

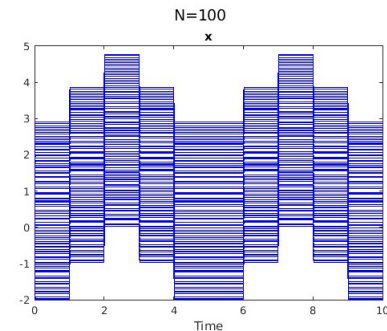
En cuanto al control del sistema, se comprueba experimentalmente la correspondencia entre el comportamiento de la función de transferencia del sistema controlado mediante SISO. Se demostró la estabilidad del sistema cuando se elige

		Range		Nominal
1	x_0	-2	2	0.5000
2	y_0	-2	3	0
3	z_0	-2	3	0
4	a	0	0.3000	0.2500
5	b	0	10	4

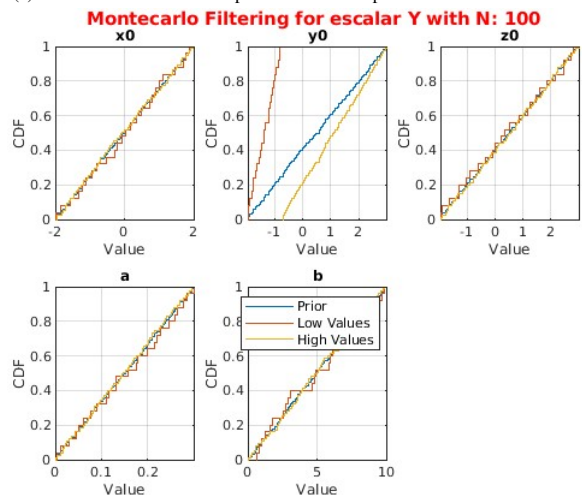
(a) Tabla de rangos y valores nominales del sistema a evaluar



(b) Curva nominal para x con el sistema controlado



(c) Análisis de incertidumbre para valores del espacio de factores del sistema



(d) Filtros de Montecarlo para Análisis de incertidumbre

Figura 30: Resultados obtenidos del análisis de incertidumbre para el sistema controlado con una señal de pulsos

un correcto valor del controlador, el cual hemos encontrado que corresponde a la región $k \geq -1$, donde se mejora considerablemente a medida que crece el valor de k . Estos resultados también se reflejan en el análisis de incertidumbre, donde se mantiene la estabilidad al variar los factores que componen

el modelo, y mostrando la factibilidad de un control aún con la incertidumbre que lleva el conocimiento de los verdaderos valores para los parámetros.

De acuerdo al análisis de sensibilidad podemos concluir que la variable de estado x es mucho más sensible al parámetro a que al resto de parámetros b , y_0 , z_0 y x_0 . Aunque, en el comienzo de las simulaciones la salida x es más sensible a los valores de x_0 , y_0 y z_0 que al parámetro a y b , y a medida que el tiempo pasa es cuando la sensibilidad de a y b incrementa, o en otras palabras, se pierde sensibilidad en los valores iniciales de las variables de estado. Además, se puede evidenciar que la salida x sigue teniendo un comportamiento estable mientras los parámetros estén en los rangos establecidos.

Referencias

- [1] Smail Bougouffa. Linearization and treatment of lorenz equations. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1048, pages 109–112. American Institute of Physics, 2008.
- [2] Roberto Buizza and Tim N Palmer. The singular-vector structure of the atmospheric global circulation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 52(9):1434–1456, 1995.
- [3] Gülnur Çelik KIZILKAN. Numerical computation of linearized lorenz system with variable step. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 9(2):227–231, 2019.
- [4] Chunbiao Li, Julien Clinton Sprott, and Wesley Thio. Linearization of the lorenz system. *Physics Letters A*, 379(10-11):888–893, 2015.
- [5] Edward N Lorenz. Irregularity: A fundamental property of the atmosphere. *Tellus A*, 36(2):98–110, 1984.
- [6] C Masoller, AC Sicardi Schifino, and L Romanelli. Characterization of strange attractors of lorenz model of general circulation of the atmosphere. *Chaos, Solitons & Fractals*, 6:357–366, 1995.
- [7] C Masoller, AC Sicardi Schifino, and Lilia Romanelli. Regular and chaotic behavior in the new lorenz system. *Physics Letters A*, 167(2):185–190, 1992.
- [8] AC Sicardi Schifino and C Masoller. Analytical study of the codimension two bifurcations of the new lorenz system. In *Instabilities and Nonequilibrium Structures V*, pages 345–348. Springer, 1996.
- [9] Andrey SHIL'NIKOV, Grégoire Nicolis, and Catherine Nicolis. Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(06):1701–1711, 1995.
- [10] Tamás Tél and Márton Gruiz. *Chaotic dynamics: an introduction based on classical mechanics*. Cambridge University Press, 2006.