Línea recta y circunferencia

Pedro Vicente Esteban Duarte

Presentación

Comprender las ecuaciones de la línea recta y de la circunferencia es fundamental para el trabajo con el Cálculo. Muchos de los ejemplos y ejercicios que se presentan se basan en la interpretación que se hace del significado de la pendiente de la recta, de sus puntos de corte con los ejes coordenados o de la forma como se gráfica en el plano cartesiano.

La ecuación de la circunferencia aparece en numerosos ejercicios propuestos en Cálculo, por lo tanto, saber encontrar su centro, ecuación, longitud, área que encierra y gráfica en el plano cartesiano son conceptos que se deben aplicar con destreza.

El módulo tiene los siguientes objetivos:

Objetivo general

Estudiar los conceptos básicos sobre la línea recta y la circunferencia.

Objetivos específicos

- Graficar la línea recta y la circunferencia en el plano cartesiano.
- Identificar la ecuación de la línea recta.
- Calcular la pendiente y los interceptos de la recta con los ejes coordenados.
- Identificar la ecuación de la circunferencia.
- Calcular el centro y el radio de la circunferencia.
- Interpretar la circunferencia como un lugar geométrico en el plano.

Los conceptos expuestos y los ejercicios planteados son básicos para comprender conceptos fundamentales del Cálculo y de las Matemáticas en general.

El tiempo estimado para la solución del taller es de tres (3) horas.

En su estudio y solución le deseamos muchos éxitos.

1. La línea recta

Una línea recta está formada por todos los puntos en el plano que están en la misma dirección. El plano que se utiliza para representar la línea recta es el cartesiano.

Desde la geometría plana, se sabe que para trazar una línea recta en el plano, se requiere marcar únicamente dos puntos. La recta L, gráficada en el Figura 1, pasa por los puntos $A(-2,-1)$ y $B(2,2)$.

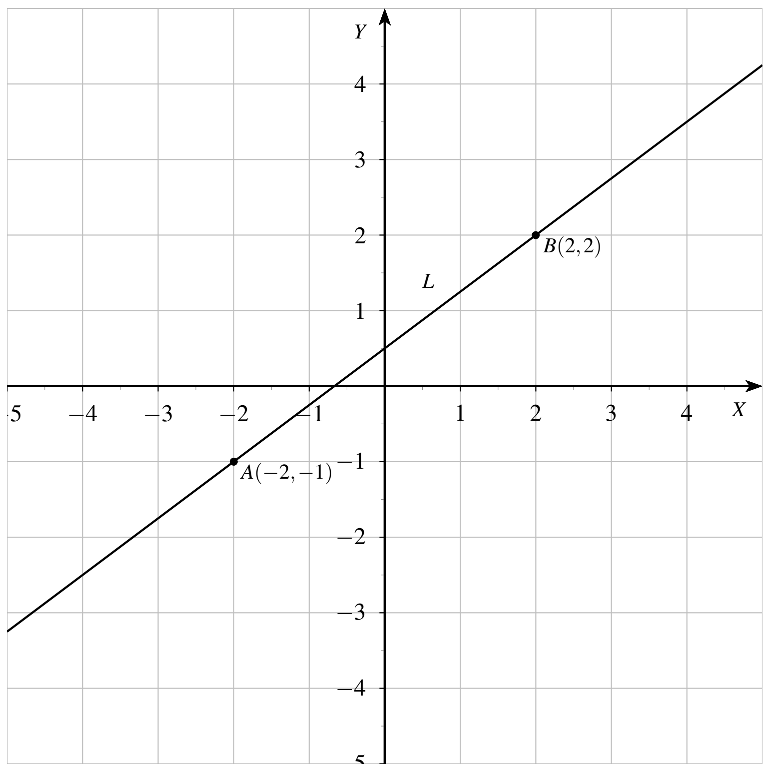

Figura 1: Línea recta en el plano cartesiano.

Ejemplos

En la Figura 2, se presentan las línea rectas L_1, L_2, L_3 y L_4. Determinar dos puntos por los que pasa cada una de ellas.

Solución

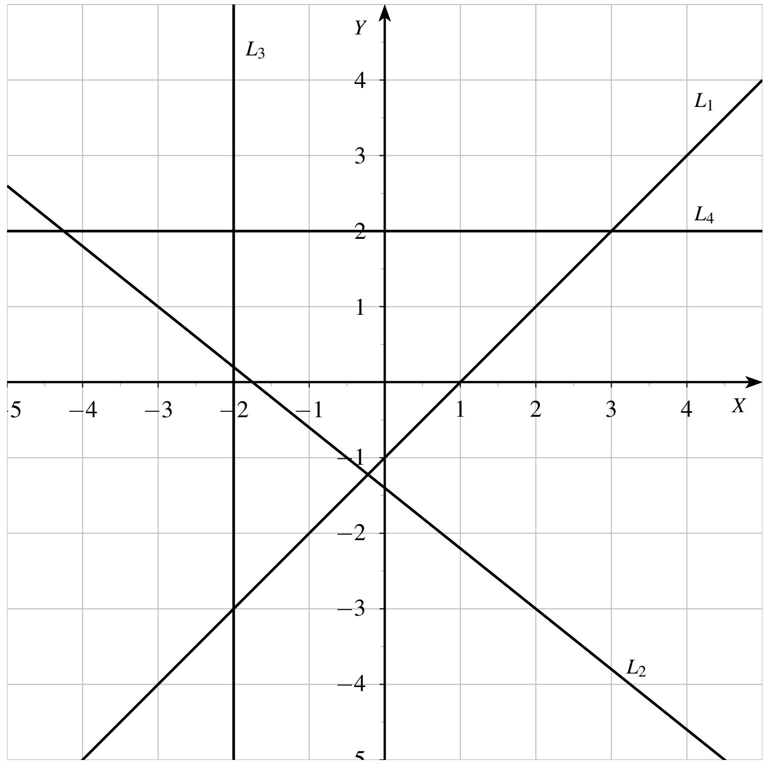

Figura 2: Líneas rectas en el plano cartesiano.

- La línea recta L_1 pasa por los puntos $(-3,-4)$ y $(2,1)$. Para está recta se pueden leer más puntos que pertenecen a ella. Como se puede observar, en la cuadrícula presentada, la recta pasa por puntos que está en las esquinas de algunas cuadrículas.
- La línea recta L_2 pasa por los puntos $(-3,1)$ y $(2,-3)$. Leer otros puntos que estén sobre la misma recta con exactitud no es posible, pues no pasa por esquinas de otras cuadrículas dibujadas en la porción del plano presentado.
- La línea recta L_3 pasa por los puntos $(-2,-3)$ y $(-2,2)$. Esta línea recta es perpendicular al eje X y tiene como una de sus características que para todos sus puntos, la componente en X siempre tiene el mismo valor -2.
- La línea recta L_4 pasa por los puntos $(-3,2)$ y $(4,2)$. Esta línea recta es paralela al eje X y tiene como una de sus características que para todos sus puntos, la componente en Y siempre tiene el mismo valor 2.

2. Pendiente y ecuación de la línea recta

Dos características que determinan a una línea recta en el plano cartesiano son su pendiente y su ecuación, que se pueden encontrar a partir de su gráfica o de dos de los puntos que pertenezcan a ella. En la Figura 3, se presenta una línea recta que pasa por los puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P(x, y)$.

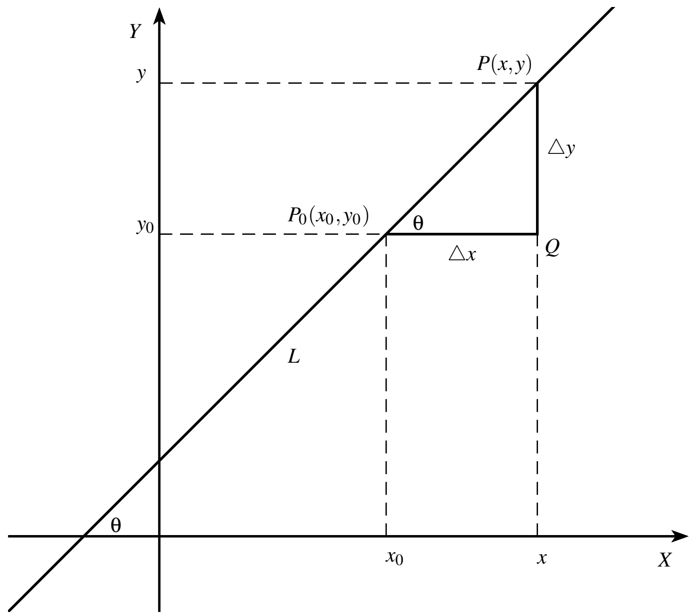

Figura 3: Línea recta en el plano cartesiano.

El cambio entre x e x_0 está dada por $\triangle x = x - x_0$.

El cambio entre y y y_0 está dada por $\triangle y = y - y_0$.

El triángulo formado por los puntos P_0, Q y P $(\triangle P_0QP)$ es rectángulo en Q.

La tangente del ángulo θ está dada por:

$$\tan(\theta) = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Note que el ángulo θ en el triángulo $(\triangle P_0QP)$ es el mismo que hace la línea recta L con el eje X.

A $\tan(\theta)$ se le llama la pendiente de la línea recta L que pasa por los puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P(x, y)$. A la pendiente de L se le denota por m. Por lo tanto:

$$m = \tan(\theta) = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Si se quiere calcular el ángulo que la recta L hace con el eje X, se utiliza la siguiente expresión:

$$\theta = \arctan(m) = \arctan\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right) = \arctan\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)$$

Si $x_0 \neq x$, la ecuación de la línea recta L que pasa por los puntos $P_0(x_0,y_0)$ y $P(x,y)$ y tiene pendiente m es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Esta es la *ecuación punto pendiente* de la línea recta L, que pasa por (x_0,y_0) y tiene pendiente m.

Ejemplo

Para la recta L que pasa por los puntos $P_0(-2,1)$ y $P(3,-2)$, encuentre:

a. La pendiente m.

b. El ángulo θ que hace con el eje X.

c. La ecuación cartesiana.

d. Otros puntos que estén sobre la recta L.

e. La gráfica de la recta dada.

Solución

a. La pendiente de la línea recta que pasa por los puntos dados es:

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{-2-1}{3-(-2)} = -\frac{3}{5}$$

b. El ángulo θ que hace la recta con el eje X es:

$$\theta = \arctan(m) = \arctan\left(-\frac{3}{5}\right) \approx 30.96^{\text{o}}$$

c. La ecuación de la recta correspondiente es:

$$
\begin{aligned}
y - y_0 =& m(x - x_0) \\
y - 1 =& -\frac{3}{5}(x - (-2)), \text{se reemplaza el punto } P_0(-2,1). \\
y - 1 =& -\frac{3}{5}(x + 2), \text{se realizan las operaciones indicadas.} \\
y - 1 =& -\frac{3}{5}x - \frac{6}{5}, \text{se realizan las operaciones indicadas.} \\
y =& -\frac{3}{5}x - \frac{6}{5} + 1, \text{se despeja } y, \text{ variable dependiente.} \\
y =& -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}, \text{ecuación cartesiana de la recta dada.}
\end{aligned}
$$

Luego la ecuación de la recta dada, en coordenadas cartesianas es $y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.

Observación:

Para encontrar otros puntos sobre la línea recta, se le dan valores a la variable independiente x en la ecuación hallada. De esta forma, se encuentra el valor correspondiente y.

Para $x = 0$, se obtiene $y = -\frac{3}{5}(0) - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$, por lo tanto, el punto correspondiente es $\left(0, -\frac{1}{5}\right)$.

Para $x = -1$ se, obtiene $y = -\frac{3}{5}(-1) - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$, por lo tanto el punto correspondiente es $\left(-1, \frac{2}{5}\right)$.

Para $x = 1$ se obtiene $y = -\frac{3}{5}(1) - \frac{1}{5} = -\frac{4}{5}$, por lo tanto el punto correspondiente es $\left(-1, -\frac{4}{5}\right)$.

Los puntos que cumplen la ecuación de una línea recta se escriben en una tabla como se presenta a continuación:

x	-2	-1	0	1	3	$\cdots$
y	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	-2	$\cdots$

Cuadro 1: Algunos puntos sobre la recta $y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.

Observación: note que los puntos $P_0(-2,1)$ y $P(3,-2)$ cumplen la ecuación de la recta $y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.

d. Para gráficar la línea recta, se pueden tomar los dos puntos inicialmente dados o cualesquiera otros dos de los encontrados. La siguiente es la gráfica de la recta dada. La gráfica de la línea recta dada se presenta en la Figura 4.

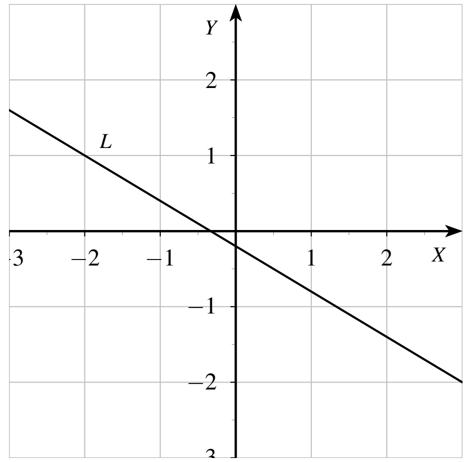

Figura 4: Recta $y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$

Ejercicio

Para $x = 1$ y $x = -2$, los puntos que se obtiene en la línea recta $y = -4x + 1$, respectivamente, son

a. $(1,3)$ y $(-1,5)$

b. $(1,-3)$ y $(-2,9)$

c. $(1,-3)$ y $(-2,-5)$

d. $(1,3)$ y $(-2,5)$

Ejemplo

Para la gráfica representada en la Figura 5, encuentre:

a. La pendiente

b. La ecuación

c. El ángulo que forma con el eje X.

d. Seis puntos que estén sobre ella.

e. Compruebe si los puntos $(-2,-1)$, $(0,-1)$, $(2,3)$ y $(4,-3)$ están sobre la recta dada.

Solución

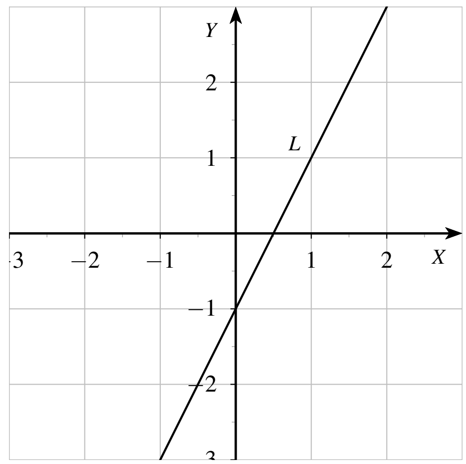

Figura 5: Línea recta.

a. La pendiente se puede encontrar observando que la línea recta pasa por los puntos $P_0(0,-1)$ y $P(1,1)$. Por lo tanto:

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{-1-1}{0-1} = -\frac{-2}{-1} = 2$$

b. La ecuación de la recta se puede encontrar a partir de la ecuación punto pendiente. Para reemplazar en la ecuación, se puede utilizar cualquiera de los dos puntos $P_0(0,-1)$ y $P(1,1)$. Si se utiliza el punto P se obtiene:

$$\begin{aligned} y - y_0 =& m(x - x_0) \\ y - 1 =& 2(x - 1) \\ y - 1 =& 2x - 2 \\ y =& 2x - 1 \end{aligned}$$

Note que si se toma el punto P_0, se llega a la misma respuesta. Verificarlo.

c. El ángulo que la recta forma con el eje X está dado por:

$$\theta = \arctan(m) = \arctan(2) \approx 63.434^o$$

d. Para encontrar otros puntos sobre la recta, se le dan valores a x y se encuentra y, ver el Cuadro 2, página 9.

e. Para verificar si un punto dado está sobre la recta, basta con reemplazar el valor en x y sustituirlo en la ecuación. Si el resultado es el valor y en el punto, se comprueba que el punto está sobre la recta.

Para el punto $(-2,-1)$, se tiene que $x = -2$. Al sustituirlo en la ecuación $y = 2x - 1$, se tiene que:

x	-3	-2	-1	0	1.5	2.5	$\cdots$
y	-7	-5	-3	-1	2.5	4	$\cdots$

Cuadro 2: Algunos puntos sobre la recta $y = 2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
y =& 2(-2) - 1\\
y =& -4 - 1\\
y =& -5
\end{aligned}
$$

Como la componente en y del punto dado es -1, se concluye que el punto $(-2, -1)$ no pertenece a la recta dada.

Otra forma de verificarlo es mirando en la gráfica de la recta. De donde se puede observar que el punto $(-2, -1)$ no pertenece, es decir, no está sobre la recta dada. Ver Figura 5, página 8.

Para el punto $(0, -1)$, se tiene que $x = 0$. Al sustituirlo en la ecuación $y = 2x - 1$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
y =& 2(0) - 1\\
y =& -1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el punto $(0, -1)$ pertenece a la recta dada.

De esta misma forma, se verifica que el punto $(2, 3)$ pertenece a la recta, pero $(4, -3)$ no pertenece, es decir, no está sobre la recta.

Ejercicio

La pendiente y la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$, respectivamente, son

a. $m = -1$, $y = -x$

b. $m = -1$, $y = x$

c. $m = 1$, $y = -x$

d. $m = 1$, $y = x$

Ejemplo

Dada la ecuación cartesiana de una recta $ax+by=c$, se pueden encontrar puntos sobre ella, la pendiente y la gráfica.

Para la recta $y+2x=2$, encuentre dos puntos sobre ella y su pendiente. Gráfiquela en el plano cartesiano.

Solución

Al despejar y de la ecuación dada, se obtiene $y=-2x+2$. Al sustituir $x=0$ y $x=2$ en esta última ecuación, se obtienen los puntos $P_0(0,2)$ y $P(2,-2)$ de la recta dada.

Con los puntos hallados, se puede encontrar la pendiente y la gráfica.

$$m=\frac{-2-2}{2-0}=-2$$

Note que este valor para la pendiente m es el mismo que aparece como coeficiente de la variable x en la ecuación dada, cuando se despeja la variable dependiente y.

Al marcar los puntos hallados, en el plano cartesiano se obtiene la gráfica de la recta dada, como se muestra en la Figura 6.

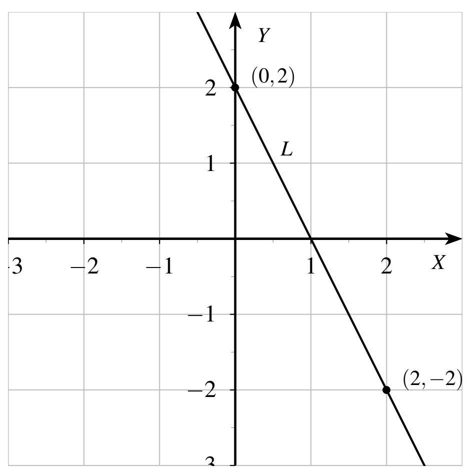

Figura 6: Línea recta $y=-2x+2$.

Ejercicio

La pendiente de la línea recta $-3x+y=2$ es

a. 3

b. -3

c. 2

d. -2

3. Significado de la pendiente de la línea recta

De acuerdo con el signo y el valor de la pendiente, una línea recta tiene cuatro posibilidades para gráficarse en el plano cartesiano, es decir, para:

$$\begin{aligned} m >& 0, \text{la pendiente es positiva.}\\ m <& 0, \text{la pendiente es negativa.}\\ m =& 0, \text{la pendiente es cero.}\\ m =& \infty, \text{la pendiente es infinita o indeterminada.} \end{aligned}$$

En la Figura 7 se presentan cuatro rectas, cada una con las característica resaltadas anteriormente.

Ejemplos

En las siguientes líneas rectas se presenta la ecuación de una línea recta y la pendiente correspondiente a cada una de ellas, así como su gráfica en la Figura 8.

a. La recta $L_1 : y = x-1$ tiene pendiente positiva, $m = 1$.

b. La recta $L_2 : 4x+5y = -7$ tiene pendiente negativa, $m = -\frac{4}{5}$.

c. La recta $L_3 : x = -2$ tiene pendiente indeterminada, $m = \infty$.

d. La recta $L_4 : y = 2$ tiene pendiente cero, $m = 0$.

La recta L_3 es paralela al eje Y. Dos puntos sobre ella son $(-2,2)$ y $(-2,-3)$. Al calcular la pendiente de acuerdo con la fórmula:

$$m = \frac{y-y_o}{x-x_0}$$

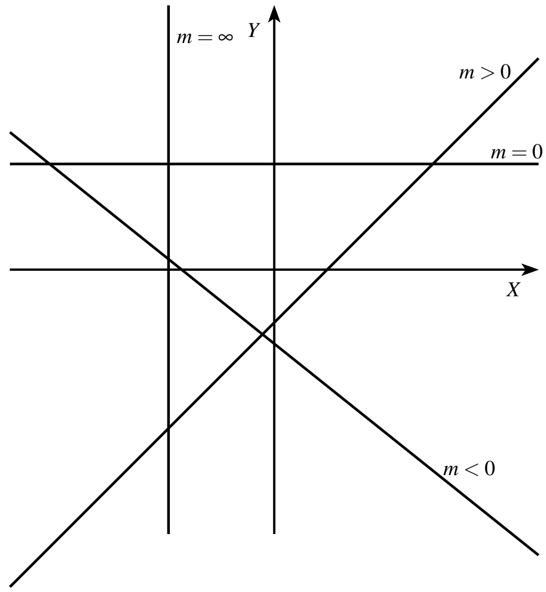

Figura 7: Líneas rectas en el plano cartesiano, de acuerdo con su pendiente.

se tiene que las coordenadas en x de los puntos seleccionados son iguales. Al sustituirlos en la ecuación de la pendiente, se llega a una indeterminación, por lo que no es posible calcular un valor real para la pendiente de las rectas que tienen esta característica. La ecuación cartesiana de todas las rectas, en las que todos sus puntos tienen la misma coordenada en x, es x igual al valor de la coordenada en x. En general, la ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_o, y_0) y (x_0, y) está dada por $x = x_0$.

Dos puntos sobre la recta L_4 son $(-2,2)$ y $(3,2)$. Al calcular la pendiente de acuerdo con la fórmula:

$$m = \frac{y - y_o}{x - x_0} = \frac{2-2}{3-(-2)} = 0$$

Al tomar tomar uno de los puntos dados y la pendiente obtenida, y sustituir en la ecuación punto pendiente, se tiene que:

$$\begin{aligned} y - y_0 =& m(x - x_0) \\ y - 2 =& 0(x-3) \\ y - 2 =& 0 \\ y =& 2 \end{aligned}$$

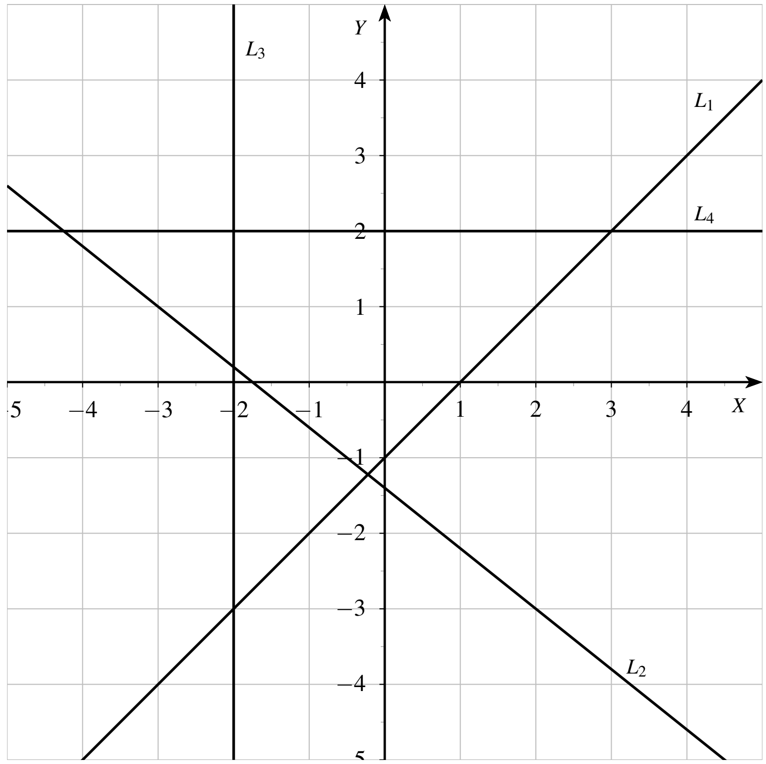

Figura 8: Líneas rectas de acuerdo con su pendiente.

En las líneas rectas que son paralelas al eje X, la segunda componente de sus puntos coordenados es la misma, es decir, tienen la segunda coordenada igual, esto es, si (x_0, y_0) y (x, y_0) son puntos de la recta, su ecuación está dada por $y = y_0$.

Ejercicio

Dos puntos de la línea recta $y = 2$ son:

a. $(-3, 3)$ y $(2, -2)$

b. $(2, 3)$ y $(-2, 2)$

c. $(-2, 3)$ y $(2, -2)$

d. $(-2, 2)$ y $(2, 2)$

Ejercicio

Dos puntos de la línea recta $x = -4$ son:

a. $(-4,3)$ y $(-4,-2)$

b. $(-4,3)$ y $(4,-2)$

c. $(-4,3)$ y $(-2,-2)$

d. $(-4,3)$ y $(4,8)$

Ejercicio

Para las líneas rectas $y = -1$ y $x = 4$, sus pendientes, respectivamente son

a. 0 y $-\infty$

b. 0 y ∞

c. ∞ y 0

d. $-\infty$ y 0

Ejercicio

La pendiente y dos puntos de la línea recta $y + 2x = 1$, respectivamente, son

a. 2, $(2,-3)$ y $(-2,5)$

b. -2, $(-2,-3)$ y $(-2,5)$

c. -2, $(2,-3)$ y $(-2,5)$

d. 2, $(2,-3)$ y $(-2,-5)$

3.1. La pendiente como razón de cambio

A partir de la ecuación $m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$, la pendiente de la línea recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m se puede interpretar como el cambio en y $(\triangle y = y - y_0)$ sobre el cambio en x $(\triangle x = x - x_0)$.

En muchas aplicaciones, los cambios se miden como una unidad: un día, un mes, un año, entre otros. De aquí, se tiene que el cambio en x se toma como la unidad (1), esto es $\triangle x = x - x_0 = 1$, por lo tanto, la pendiente de la línea recta se escribe como:

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{1}$$

Esta forma de escribir la pendiente se interpreta como: *la pendiente de una línea recta es el cambio en y ($\triangle y$), cuando x cambia una unidad* ($\triangle x = 1$).

En las Figuras 9 y 10 se ilustra esta situación.

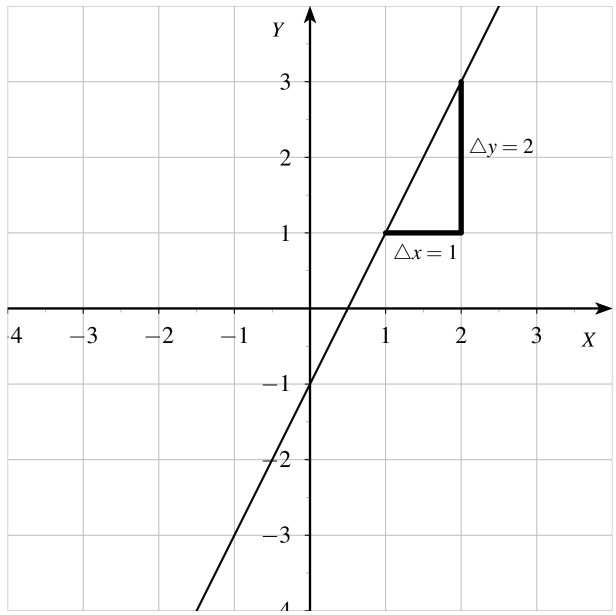

Figura 9: $m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = 2$.

La recta de la Figura 9, de acuerdo con su ubicación en el plano, tiene pendiente positiva.

La recta de la Figura 10, de acuerdo con su ubicación en el plano, tiene pendiente negativa. Recuerde que los incrementos pueden ser positivos, negativos o cero (0).

En la Figura 11 se presentan ilustraciones para el caso cuando la pendiente es cero (0) e indeterminada (∞).

Ejercicio

Para la recta $3x - 2y = 1$, el cambio en y $(\triangle y)$ y el cambio en x $(\triangle x)$, respectivamente, son

a. $\triangle y = 3$, $\triangle x = -2$

b. $\triangle y = -3$, $\triangle x = 2$

c. $\triangle y = 2$, $\triangle x = 3$

d. $\triangle y = 3$, $\triangle x = 2$

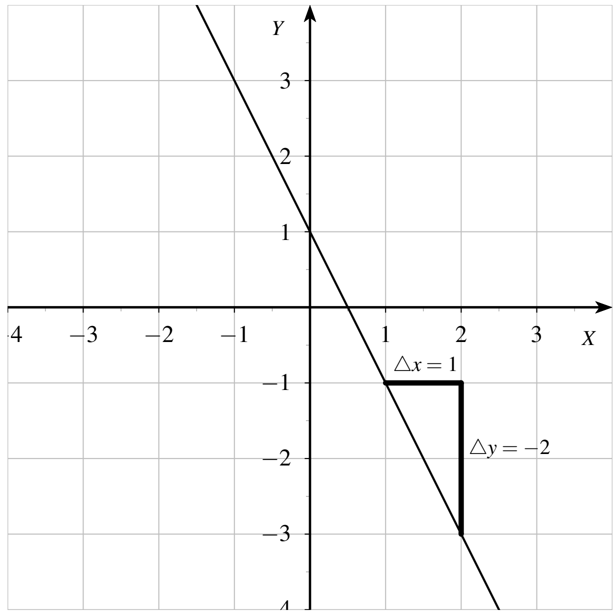

Figura 10: $m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = -2$.

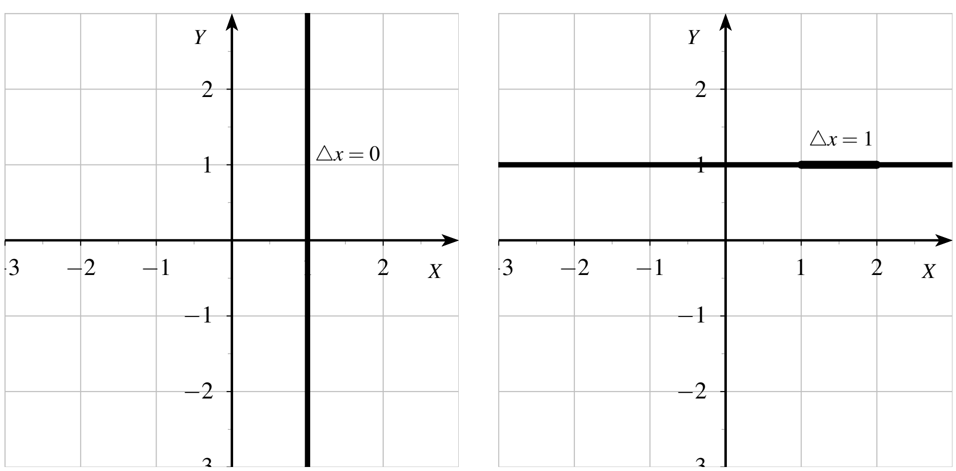

Figura 11: Rectas, respectivamente, con pendiente indeterminada y cero.

Ejercicio

Para la recta $4x-2y=1$, cuando $\triangle x=1$ el cambio en y ($\triangle y$) es

a. -2

b. 1

c. 2

d. -1

4. Cortes de la recta con los ejes coordenados

Para encontrar los puntos de corte con los ejes coordenados de una relación del tipo $y=f(x)$, como lo es la ecuación general de la línea recta $y=mx+b$, se tienen en cuenta lo siguiente:

a. Para encontrar el punto de corte con el eje X, se hace $y=0$ y se despeja x. El punto de corte es $(x_0,0)$, en el que x_0 es valor para x hallado.

b. Para encontrar el punto de corte con el eje Y, se hace $x=0$ y se despeja y. El punto de corte es $(0,y_0)$, en el que y_0 es valor para y hallado.

Ejemplo

Encuentre los puntos de corte con los ejes coordenados para la recta $y=3x-2$

Solución

Para encontrar el punto de corte con el eje X se hace $y=0$ y se sustituye en la ecuación dada.

$$\begin{aligned} y &= 3x-2 \\ 0 &= 3x-2 \\ 2 &= 3x \\ \frac{2}{3} &= x \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto de corte de la recta dada, con el eje X es $\left(\frac{2}{3},0\right)$.

Para encontrar el punto de corte con el eje Y se hace $x=0$ y se sustituye en la ecuación dada.

$$
\begin{aligned}
y =&3x-2\\
y =&3(0)-2\\
y =&0-2\\
y =&-2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el punto de corte de la recta dada, con el eje Y es $(0,-2)$.

La gráfica de la recta dada se muestra en la Figura 12.

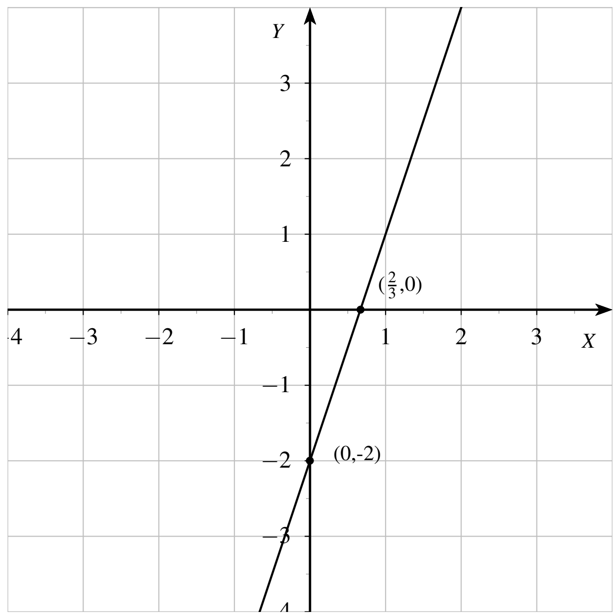

Figura 12: Recta $y = 3x-2$.

Ejercicio

Los puntos de corte con los ejes coordenados X y Y de la recta $y = 2x-4$, respectivamente, son

a. $(2,0)$ y $(0,-4)$.

b. $(-2,0)$ y $(0,-4)$.

c. $(2,0)$ y $(0,4)$

d. $(-2,0)$ y $(0,4)$.

Ejercicio

Los puntos de corte con los ejes coordenados X y Y de la recta $2x-3y=12$, respectivamente, son

a. $(-6,0)$ y $(0,-4)$.

b. $(6,0)$ y $(0,-4)$.

c. $(6,0)$ y $(0,4)$.

d. $(-6,0)$ y $(0,4)$.

Observaciones

a. Cuando la ecuación de la recta se escribe en la forma $y=mx+b$ (y despejada), se determinan rápidamente dos características. Por un lado, la pendiente es m, el coeficiente que acompaña a x y, por el otro, el término independiente b indica la altura a la que la recta corta el eje Y. Por lo tanto el punto de corte con el eje Y está dado por $(0,b)$.

Por ejemplo, para la recta $y=-3x+7$, se tiene que la pendiente es $m=-3$ y el punto de corte con el eje Y es $(0,7)$.

Cuando la ecuación se presenta de la forma $ax+cy=d$, se debe despejar y para leer la pendiente y el corte con el eje Y.

Por ejemplo, $3x+4y=7$, al despejar y se obtiene $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4}$, de donde la pendiente es $m=-\frac{3}{4}$ y el punto de corte con el eje Y es $\left(0,\dfrac{7}{4}\right)$.

Ejercicio

La pendiente y el punto de corte con el eje Y de la recta $4x-2y=8$, respectivamente, son

a. $m=2$ y $(0,-4)$

b. $m=-2$ y $(0,-4)$

c. $m=2$ y $(0,4)$

d. $m=1$ y $(0,-4)$

b. En algunos casos, para una recta graficada en el plano cartesiano, es fácil escribir su ecuación. Para la recta en la Figura 13, se tiene que:

Corta el eje Y en el punto $(0,-1)$. Por cada unidad en X, avanza una unidad en Y, luego la pendiente es $m=1$, por lo tanto, la ecuación es $y=x-1$.

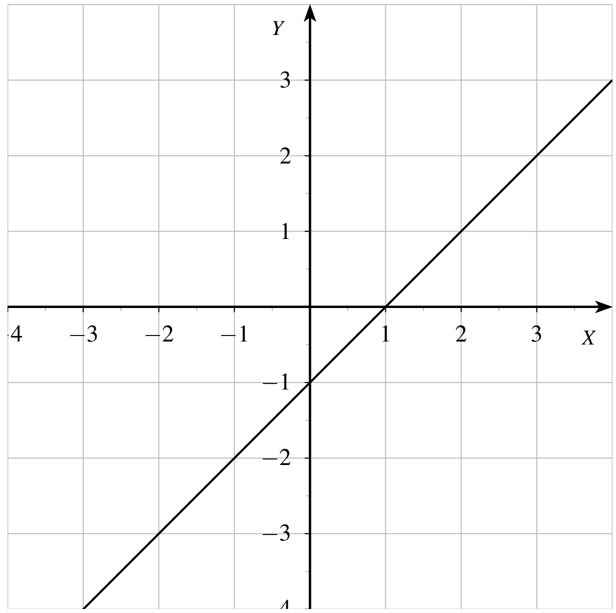

Figura 13: Recta $y = x - 1$.

5. Paralelismo y perpendicularidad entre rectas

Al ubicar, simultáneamente, dos rectas en el plano cartesiano, éstas se pueden cortar o no. Las que no se cortan son paralelas entre sí. De las que se cortan, tienen especial interés las que lo hacen formando un ángulo recto entre ellas.

5.1. Rectas paralelas

Dos rectas L_1 con pendiente m_1 y L_2 con pendiente m_2 son paralelas entre sí, si tienen la misma pendiente, es decir $m_1 = m_2$. Simbólicamente:

$$L_1 \| L_2 \Longrightarrow m_1 = m_2$$

Ejemplo

Las rectas $L_1 : y = x - 1$ y $L_2 : y = x + 1$ son paralelas, sus pendientes son $m_1 = m_2 = 1$. Sus gráficas se encuentran en la Figura 14.

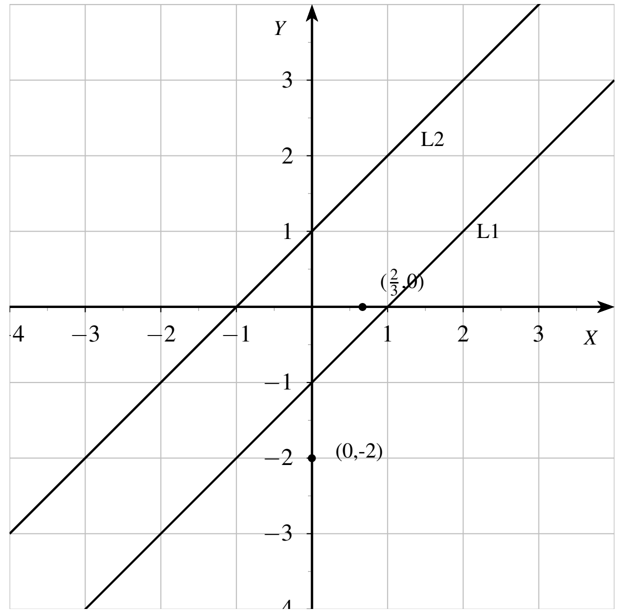

Figura 14: Rectas paralelas $y = x - 1$, $y = x + 1$.

Ejercicio

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 3)$ y es paralela a la recta $y - 3x + 2 = 0$ es

a. $y = -3x - 3$

b. $y = -3x + 3$

c. $y = 3x + 3$

d. $y = 3x - 3$

5.2. Rectas perpendiculares

Dos rectas L_1 con pendiente m_1 y L_2 con pendiente m_2 son perpendiculares entre sí, si la multiplicación de sus pendientes es -1, es decir $m_1 m_2 = -1$. Simbólicamente:

$$L_1 \perp L_2 \Longrightarrow m_1 m_2 = -1$$

Ejemplo

Las rectas $L_1 : y = x - 1$ y $L_2 : y = -x + 2$ son perpendiculares entre sí. La multiplicación de sus pendientes es $m_1 m_2 = (1)(-1) = -1$. Sus gráficas se encuentran en la Figura 15.

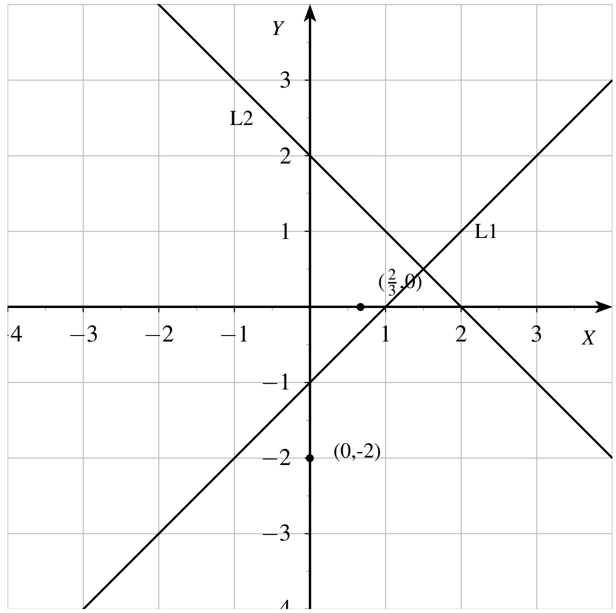

Figura 15: Rectas perpendiculares $y = x - 1$, $y = -x + 2$.

Ejercicio

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(0,3)$ y es perpendicular a la recta $y - 3x + 2 = 0$ es

a. $y = -\frac{1}{3}x + 3$

b. $y = -\frac{1}{3}x - 3$

c. $y = \frac{1}{3}x + 3$

d. $y = -3x + 3$

6. Punto de corte entre rectas no paralelas

Dos rectas no paralelas L_1 y L_2 se cortan en algún punto del plano cartesiano. Para encontrar el punto de corte entre ellas, existen varios métodos, uno de ellos consiste en:

a. Despejar la variable y (o x) en las dos ecuaciones.

b. Igualar las dos ecuaciones resultantes.

c. Despejar la variable x (o y).

d. Sustituir el valor hallado para x en una de las ecuaciones dadas.

e. Los valores hallados para las variables x e y son las coordenadas del punto de corte entre las rectas.

Ejemplo

Encuentre el punto de corte entre las rectas $y = 2x - 2$ e $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Solución

En las ecuaciones dadas, ya se encuentra despejada la variable y. Al igualar las dos ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} y &= y \\ 2x - 2 &= -\frac{1}{2}x + 3 \\ 2x + \frac{1}{2}x &= 3 + 2 \\ \frac{5}{2}x &= 5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Al sustituir $x = 2$ en la primera ecuación se obtiene que $y = 2(2) - 2 = 2$, de donde se sigue que el punto de corte entre las dos rectas dadas es $(2,2)$, como se puede apreciar en la Figura 16.

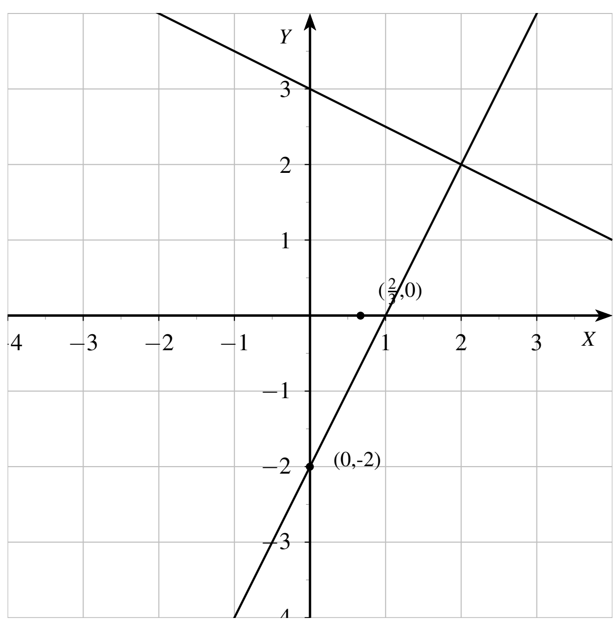

Figura 16: Corte entre $y = 2x - 2$ y $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Ejercicio

Determine si las rectas $y = 4x - 1$ y $y - 4x + 3 = 0$ son paralela, se cortan perpendicularmente o se cortan formando un ángulo distinto a $\frac{\pi}{2}$.

a. Son paralelas y se cortan en algún punto del plano cartesiano.

b. Se cortan en un ángulo distinto a $\frac{\pi}{2}$ porque la multiplicación de sus pendientes es distinto de -1.

c. Son perpendiculares, porque la multiplicación de sus pendientes es -1.

d. Son paralelas porque sus pendientes son iguales.

7. Segmentos de recta y puntos medios

Para el segmento de recta que se encuentra comprendido entre los puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P(x, y)$, la distancia entre P_0 y P está dada por:

$$d(P_0, P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Las coordenadas del punto medio están dadas por:

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{x + x_0}{2}, \frac{y + y_0}{2} \right)$$

Ejemplo

Para el segmento comprendido entre los puntos $p_0(1, -2)$ y $P(5, 6)$, encontrar su pendiente, su longitud y el punto medio.

Solución

La pendiente está dada por la fórmula:

$$m = \frac{y - y_0}{x_0} = \frac{6 - (-2)}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$$

Por lo tanto, la pendiente del segmento de recta que tiene por extremos a P_0 y a P es 2.

La distancia entre los puntos P_0 y P es:

$$d(P_0,P)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{(5-1)^2+(6-(-2))^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}$$

Por lo tanto, la distancia entre los putos dados es $\sqrt{80}\approx 8.944$ unidades de longitud.

Las coordenadas del punto medio están dadas por:

$$(\overline{x},\overline{y})=\left(\frac{x+x_0}{2},\frac{y+y_0}{2}\right)=\left(\frac{5+1}{2},\frac{6+(-2)}{2}\right)=(3,2)$$

De donde se obtiene que el punto medio del segmento de recta que va de P_0 a P está dado por $(\overline{x},\overline{y})=(3,2)$.

Observaciones

a. La distancia de P_0 al punto medio es igual a la distancia del punto medio a P. Luego, la distancia de P_0 al punto medio $(2,4)$ es aproximadamente $\frac{8.944}{2}\approx 4.472$ unidades de longitud, que es la misma que del punto medio al punto P.

b. La distancia es un valor positivo y sus unidades son de longitud: milímetros, metros, kilómetros, entre otras.

Ejercicio

La distancia y el punto medio del segmento comprendido entre los puntos $(0,4)$ y $(3,0)$, respectivamente, son

a. 5 unidades de longitud, $\left(\frac{3}{2},2\right)$.

b. -5 unidades de longitud, $\left(\frac{3}{2},2\right)$.

c. 5 unidades de longitud, $\left(-\frac{3}{2},2\right)$.

d. 4 unidades de longitud, $\left(\frac{3}{2},-2\right)$.

8. Ejercicios de aplicación

En muchos ejercicios de aplicación, en su redacción, se dice que el modelo es lineal y se dan dos puntos para encontrar la ecuación que describe la situación planteada. En otros, se da un punto y la pendiente como una razón de cambio.

Ejemplo

Una tienda vende jabones de lavar. Si se venden tres jabones, se obtienen una ganancia de \$ 200. Cuando se venden cinco jabones se obtiene una ganancia de \$ 500. Suponiendo que las ganancias por la venta de jabones, sigue un modelo lineal, encuentre la ecuación de la línea recta que modela las ganancias. Si se venden diez jabones, ¿cuál es la ganancia que se obtiene?

Solución

Sea x la cantidad de jabones vendidos y y la ganancia obtenida por su venta. En la redacción del ejercicio, se han dado dos puntos $(3,200)$ y $(5,300)$. Como el modelo que siguen las ganancias es lineal, la pendiente es:

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{300-200}{5-3} = 50$$

De acuerdo con la interpretación dada a la pendiente, se tiene que por cada jabón que se venda el tendero gana \$ 50.

Utilizando la ecuación punto pendiente de la línea recta la ecuación que modela, la ganancia de la venta de jabones está dada por:

$$\begin{aligned}
y-y_0 =& m(x-x_0)\\
y-200 =& 50(x-3)\\
y =& 50x-150+200\\
y =& 50x+50
\end{aligned}$$

Esta última ecuación modela las ganancias por la venta de jabones.

Para saber la ganancia que se obtiene al vender diez jabones, se reemplaza este valor en la ecuación $y = 50x+50$, de donde $y = 50(10)+50$. Luego $y = 550$, que es la ganancia que se obtiene al vender 10 jabones. Note que en este modelo $x \geq 0$.

Ejercicio

Un vendedor de revistas sabe que si vende sus revistas a $ 150 cada una, puede vender 80 revistas. Pero si aumenta el precio de cada revista en $ 30 deja de vender 50 revistas. Si x es el número de revistas vendidas y y el precio de venta, la ecuación lineal que modela las ventas es

a. $3x+5y=990$

b. $5x-3y=990$

c. $-5x+3y=990$

d. $-5x-3y=990$

9. La ecuación de la circunferencia

Una circunferencia en el plano cartesiano de centro (h,k) y radio r es el *lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia r del centro*. Si (x,y) es un punto cualquiera sobre la circunferencia, se tiene que:

$$r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

de donde $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. La ecuación general se ilustra en la Figura 17.

Si una circunferencia está centrada en el origen $(h,k)=(0,0)$ su ecuación está dada por $x^2+y^2=r^2$.

Ejemplos

a. Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(2,-1)$ y radio $r=2$.

   Solución

   A partir de la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, se tiene que $(x-2)^2+(y-(-1))^2=2^2$, de donde $(x-2)^2+(y+1)^2=4$. La gráfica se encuentra en la Figura 18.

b. Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el origen y radio 2. Grafíquela.

   Solución

   El origen en el plano cartesiano, está dado por el punto $(0,0)$, luego al reemplazar, en la ecuación general se tiene que:

   $$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

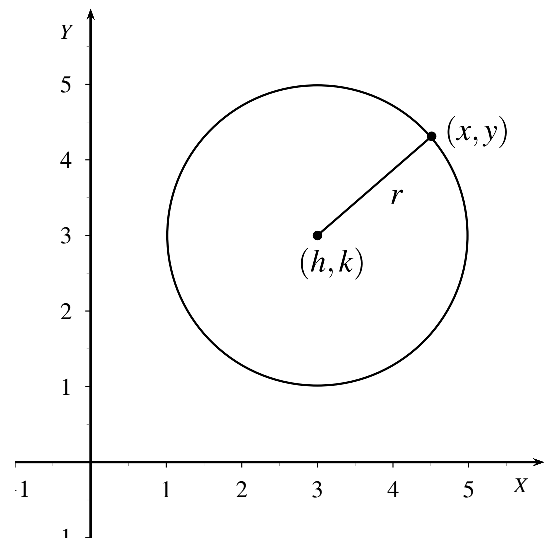

Figura 17: Circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

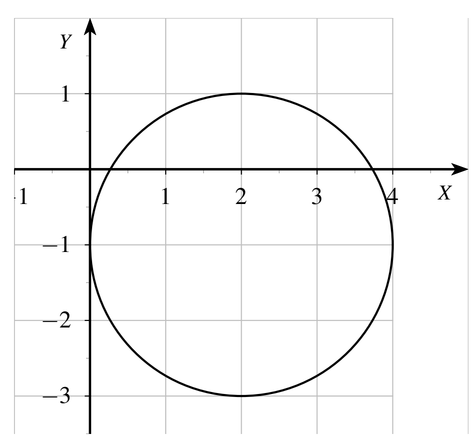

Figura 18: Circunferencia $(x-2)^2+(y+1)^2=4$.

$$(x-0)^2+(y-0)^2=2^2$$

$$x^2+y^2=4$$

que es la ecuación pedida. La gráfica se presenta en la Figura 19.

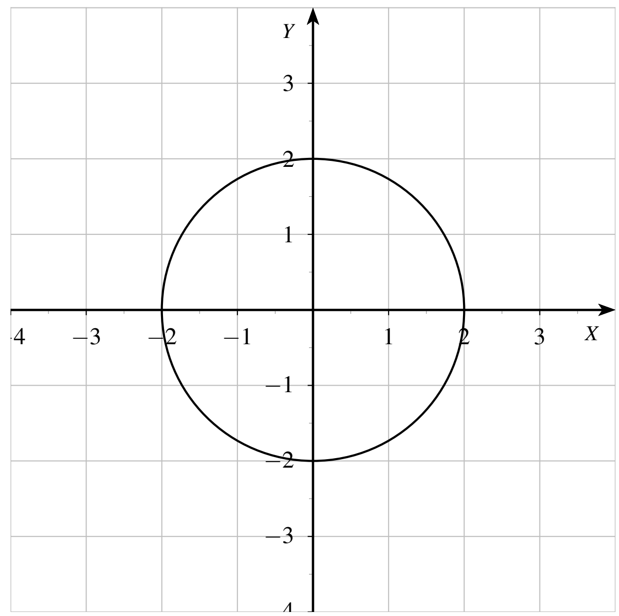

Figura 19: Circunferencia $x^2+y^2=4$.

Ejercicio

La ecuación de la circunferencia que tiene radio 3 y centro en el punto $(-1,2)$, es

a. $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

b. $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

c. $(x+1)^2+(y+2)^2=9$

d. $(x+1)^2+(y-2)^2=-9$

Ejercicio

La ecuación de la circunferencia que tiene radio 2 y centro en el punto $(0,-2)$, es

a. $x^2+y^2-4y=0$

b. $x^2-y^2+4y=0$

c. $x^2-y^2-4y=0$

d. $x^2+y^2+4y=0$

9.1. A partir de una ecuación, determinar el centro y el radio de la circunferencia

Para la circunferencia con centro $(-1,-2)$ y radio $r=3$ se tiene que la ecuación está dada por:

$$(x+1)^2+(y+2)^2=9$$

Al desarrollar los cuadrados, la ecuación se transforma en:

$$x^2+y^2+2x+4y=4$$

Esta ecuación tiene las siguientes características:

a. Los coeficientes en x^2 y y^2 son iguales. En este caso 1.

b. Los términos x^2 y y^2 son ambos positivos.

c. Para encontrar el centro y el radio de la circunferencia, a partir de la ecuación expandida, se completan los cuadrados en x y y.

d. Al completar los cuadrados, el valor para el radio debe ser positivo. El radio es una distancia y como tal, es positivo.

Ejemplo

Comprobar si la ecuación $x^2+y^2-4x+6y=-9$ corresponde a una circunferencia. Si corresponde, encuentre el centro y el radio.

Solución

$$x^2+y^2-4x+6y=-9$$

$$x^2-4x+y^2+6y=-9, \text{se reúnen los términos en } x \text{ y } y.$$

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=-9+4+9, \text{se suman los valores para completar el cuadrado.}$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4, \text{se factorizan los binomios cuadrados perfectos.}$$

De donde se sigue que $x^2+y^2-4x+6y=-9$ corresponde a la ecuación de una circunferencia de centro en $(2,-3)$ y radio 3.

Ejercicio

La ecuación $x^2+y^2+6x-6y+20=0$ no corresponde a una circunferencia puesto que

a. Los términos al cuadrado son negativos.

b. No tiene centro.

c. No se pueden completar los cuadrados perfectos.

d. r no es un valor positivo.

Ejemplo

Una circunferencia pasa por los puntos $(2,4)$ y $(2,10)$ que están sobre su diámetro. Encuentre su centro, su radio y la ecuación.

Solución

Como los puntos están en el extremo del diámetro, el centro de la circunferencia es el punto medio de los puntos dados, luego el centro es $(2,7)$.

El radio es la distancia entre el punto medio y uno de los extremos del diámetro. Por lo tanto, $r=\sqrt{(2-2)^2+(10-7)^2}=3$.

Por lo tanto la ecuación de dicha circunferencia es $(x-2)^2+(y-7)^2=9$.

Ejemplo

Una circunferencia tiene como centro el punto $(-2,3)$ y pasa por le punto $(2,2)$. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados y la recta perpendicular a ella en el punto $(2,2)$.

Solución

La pendiente de la recta que pasa por $(-2,3)$ y $(2,2)$ es $m=-\frac{1}{4}$. Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por ellos es $y-2=-\frac{1}{4}(x-2)$.

La pendiente de la recta perpendicular está dada por $-\frac{1}{4}m_2=-1$, de donde $m=4$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y-2=-\frac{1}{4}(x-2)$ y que pasa por el punto $(2,2)$ es $y-2=4(x-2)$.

Ejercicio

Los puntos $(3,-2)$ y $(3,6)$ son extremos del diámetro de una circunferencia. El centro y el radio, respectivamente, son

a. $(-3,2)$, 4

b. $(3,2)$, 4

c. $(3,2)$, -4

d. $(3,-2)$, 4

Ejercicio

Los puntos $(3,-2)$ y $(3,6)$ son extremos del diámetro de una circunferencia. La ecuación de la circunferencia es

a. $x^2-y^2-6\,x-4\,y=9$

b. $x^2+y^2-6\,x-4\,y=9$

c. $x^2+y^2-6\,x+4\,y=-9$

d. $x^2+y^2-6\,x-4\,y=3$

10. Ejercicios sobre la recta y la circunferencia

1. La recta $3x-2y=6$ pasa por los puntos

   a. $(-2,-6), \quad (-2,0)$
   b. $(2,0), \quad (0,3)$
   c. $(2,0), \quad (-2,-6)$
   d. $(-2,6), \quad (1,2)$

2. La recta $2x+3y=6$ pasa por los puntos es

   a. $(3,0), \quad (-2,1)$
   b. $(3,0), \quad (0,2)$
   c. $(6,-2), \quad (2,0)$
   d. $(2,1), \quad (0,2)$

3. La ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $A(3,1)$, y $B(-1,5)$ es

   a. $y=x-2$
   b. $y=-x-4$
   c. $y=-x+4$
   d. $y=-x-2$

4. La ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $A(2,-1)$ y $B(-3,1)$ es

   a. $y=\frac{2x}{5}-\frac{1}{5}$
   b. $y=\frac{-2x}{5}+\frac{1}{5}$
   c. $y=\frac{2x}{5}+\frac{11}{5}$
   d. $y=\frac{-2x}{5}-\frac{1}{5}$

5. La ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-3,4)$ y tiene pendiente $m=\frac{-1}{3}$ es

   a. $y=\frac{-x}{3}+4$
   b. $y=\frac{-x}{3}+5$
   c. $y=\frac{-x}{3}+3$

d. $y = \dfrac{-x}{3} - 3$

6. La ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,-4)$ y tiene pendiente $m = \dfrac{-1}{2}$ es

   a. $x - 2y - 10 = 0$
   b. $x + 2y + 6 = 0$
   c. $x + 2y = 6$
   d. $x - 2y + 10 = 0$

7. La ecuación de la recta que pasa por el punto $A(4,-2)$ y tiene pendiente $m = 0$ es

   a. $y + 2 = 0$
   b. $y - 2 = 0$
   c. $x = -2$
   d. $x + y = 2$

8. La ecuación de la recta que pasa por el punto $A(5,-2)$, y tiene pendiente indefinida es

   a. $x + 5 = 0$
   b. $x - 5 = 0$
   c. $y = -2$
   d. $x + y = 3$

9. La recta con ecuación $3x - 2y = 1$ tiene pendiente

   a. $m = \dfrac{3}{2}$
   b. $m = \dfrac{-3}{2}$
   c. $m = \dfrac{2}{3}$
   d. $m = \dfrac{-2}{3}$

10. La recta con ecuación $2x + 3y = 1$ tiene pendiente:

    a. $m = \dfrac{3}{2}$
    b. $m = \dfrac{-3}{2}$
    c. $m = \dfrac{2}{3}$

d. $m = \dfrac{-2}{3}$

11. La recta con ecuación $2y = 1$

a. Tiene pendiente igual a $\dfrac{1}{2}$
b. Tiene pendiente igual a 2
c. Tiene pendiente igual a 0
d. Tiene pendiente indefinida

12. La recta con ecuación $3x = 5$

a. Tiene pendiente igual a $\dfrac{5}{3}$
b. Tiene pendiente igual a $\dfrac{-5}{3}$
c. Tiene pendiente igual a 0
d. Tiene pendiente indefinida

13. La ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,-1)$ y es paralela a la recta con ecuación $3x - y = 5$ es

a. $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{5}{3}$
b. $y = 3x + 7$
c. $y = -3x + 5$
d. $y = 3x - 7$

14. La ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3,-1)$ y es paralela a la recta con ecuación $y - 5 = 0$ es

a. $y = 1$
b. $y + 1 = 0$
c. $x = 3$
d. $x = -3$

15. La ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3,-3)$ y es paralela a la recta con ecuación $5x - 6 = 0$ es

a. $y = -3$
b. $y = 3$
c. $x = 3$
d. $x = -3$

16. La ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2,5)$ y es paralela a la recta con ecuación $x + y = 5$ es

a. $x+y=3$
b. $x+y=5$
c. $x+y=0$
d. $x-y=-7$

17. Dos de las siguientes ecuaciones corresponden a rectas paralelas.

a. $y=-2x+3, \qquad 6x-3y=1$
b. $y=2x+3, \qquad 6x+3y=1$
c. $y=2x+3, \qquad 6x-3y=1$
d. $y=-2x+1, \qquad 12x-6y=2$

18. Dos de las siguientes ecuaciones corresponden a rectas paralelas.

a. $y=\dfrac{-2x}{3}+3, \qquad 2x+y=5$
b. $y=\dfrac{-2x}{3}+3, \qquad 2x+3y=5$
c. $y=3x+3, \qquad 6x-3y=1$
d. $y=-2x+1, \qquad 3x-6y=2$

19. Dos de las siguientes ecuaciones corresponden a rectas paralelas.

a. $y=\dfrac{5x}{2}-3, \qquad 5x-2y=40$
b. $y=\dfrac{-5x}{2}+40, \qquad 5x-2y=40$
c. $y=\dfrac{2x}{5}-3, \qquad 5x-2y=40$
d. $y=\dfrac{5x}{2}-3, \qquad 5x+2y=40$

20. Dos de las siguientes ecuaciones corresponden a rectas paralelas.

a. $5x-2y=6, \qquad -2x+5y=1$
b. $3x-2y=6, \qquad 6x+4y=1$
c. $3x+2y=6, \qquad -6x+4y=1$
d. $3x-2y=6, \qquad -6x+4y=1$

21. Dos de las siguientes ecuaciones corresponden a rectas paralelas.

a. $2x+5=0, \qquad y=1$
b. $2x+5y=10, \qquad 3x=1$

c. $2x+5=0, \qquad 3x=1$
d. $2x+5=0, \qquad 3x-y=6$

22. Dos de las siguientes ecuaciones corresponden a rectas perpendiculares.

a. $y=2x-1, \qquad 2x-4y=8$
b. $y=4x-1, \qquad 2x+4y=8$
c. $y=2x-1, \qquad 2x+4y=8$
d. $y=2x-1, \qquad y=-2x-2$

23. Dos de las siguientes ecuaciones corresponden a rectas perpendiculares.

a. $2x+3y=6, \qquad 6x+4y=2$
b. $2x-3y=6, \qquad 6x+4y=2$
c. $2x-3y=6, \qquad 6x-4y=2$
d. $2x-3y=6, \qquad 4x+6y=2$

24. Dos de las siguientes ecuaciones corresponden a rectas perpendiculares.

a. $3x+2y=6, \qquad 10x-15y=30$
b. $y=\dfrac{2x}{3}+6, \qquad 10x-15y=30$
c. $3x-2y=6, \qquad 10x-15y=30$
d. $6x+4y=6, \qquad 10x+15y=30$

25. Dos de las siguientes ecuaciones corresponden a rectas perpendiculares.

a. $2x-1=0, \qquad y+2=1$
b. $2x+y=10, \qquad 3x+2y=1$
c. $4x+5=0, \qquad 3x=1$
d. $x+5=0, \qquad 3x-y=6$

26. Dos de las siguientes de ecuaciones corresponden a rectas perpendiculares.

a. $x=3, \qquad 2x+5=0$
b. $y=3, \qquad 2y+5=0$
c. $x-y=3, \qquad 2x=y$
d. $y=3, \qquad 2x+5=0$

27. El segmento de recta con puntos extremos $A(-4,3)$ y $B(8,5)$ tiene como punto medio

a. $(-6,-1)$

b. $(-2,1)$
c. $(2,4)$
d. $(4,8)$

28. El segmento de recta con extremos $A(2,3)$ y $B(-12,5)$ tiene como punto medio

a. $(2.5,-3.5)$
b. $(5,-4)$
c. $(7,-1)$
d. $(-5,4)$

29. El segmento de recta con extremos $A(0,-2)$ y $B(20,-4)$ tiene como punto medio

a. $(-10,1)$
b. $(10,-3)$
c. $(-10,3)$
d. $(-1,8)$

30. El segmento de recta con extremos $A(3,1)$ y $B(2,-1)$ tiene una longitud de

a. 3
b. 7
c. $\sqrt{5}$
d. 1

31. El segmento de recta con extremos $A(-2,0)$ y $B(3,0)$ tiene una longitud de

a. $\sqrt{29}$
b. 5
c. $\sqrt{5}$
d. 1

32. El segmento de recta con extremos $A(2,-3)$ y $B(-3,2)$ tiene una longitud de

a. 50
b. 10
c. $2\sqrt{5}$
d. $5\sqrt{2}$

33. El perímetro del triángulo (es decir, la suma de las longitudes de sus lados) con vértices $A(-2,-1)$, $B(2,-1), C(2,3)$ mide

a. $8+\sqrt{2}$
b. 10
c. $4(2+\sqrt{2})$
d. $4(2-\sqrt{2})$

34. El perímetro (es decir, la suma de las longitudes de sus lados) del triángulo con vértices $A(-1,1)$, $B(2,1)$ y $C(2,-1)$ mide

a. $5+\sqrt{13}$
b. 18
c. $5-\sqrt{13}$
d. $5+2\sqrt{2}$

35. El perímetro del triángulo (es decir, la suma de las longitudes de sus lados) con vértices $A(-2,1)$, $B(2,1)$ y $C(2,-2)$ mide

a. $\sqrt{12}$
b. 12
c. 8
d. $6+2\sqrt{26}$

36. La ecuación de la circunferencia con centro $C(0,0)$ y radio $r=\sqrt{2}$ es

a. $x^2+y^2=\sqrt{2}$
b. $x^2+y^2=2$
c. $x^2+y^2=4$
d. $x^2+y^2+2=0$

37. La ecuación de la circunferencia con centro $C(2,1)$, y radio $r=2$ es

a. $x^2+y^2+4x+2y=4$
b. $x^2+y^2-4x-2y-1=0$
c. $x^2+y^2-4x-2y=-1$
d. $x^2-y^2-4x-2y=4$

38. La ecuación de la circunferencia con centro $C(-1,3)$ y radio $r=1$ es

a. $x^2+y^2+2x-6y=9$
b. $x^2+y^2+2x-6y+9=0$
c. $x^2+y^2-2x+6y+9=0$
d. $x^2-y^2-2x+6y+9=0$

39. La ecuación de la circunferencia con centro $C(-2,0)$ y radio $r=2$ es

    a. $x^2+y^2-4x=0$
    b. $x^2+y^2+4y=0$
    c. $x^2+4x=y^2$
    d. $x^2+y^2+4x=0$

40. La ecuación de la circunferencia con centro $C(0,-3)$ y radio $r=2$ es

    a. $x^2+y^2+6y=-5$
    b. $x^2+y^2+6y-5=0$
    c. $x^2+y^2-6y=-5$
    d. $x^2-y^2+6y=4$

41. La ecuación de la circunferencia con centro $C(-2,0)$ y que pasa por el punto $P(2,-3)$ es

    a. $x^2+y^2+4x+25=0$
    b. $x^2+y^2+4x+21=0$
    c. $x^2+y^2+4x-21=0$
    d. $x^2-y^2+4x-25=0$

42. La ecuación de la circunferencia con centro $C(-2,1)$ y que pasa por el origen es

    a. $x^2+y^2-4x+2y=0$
    b. $x^2+y^2+4x-2y=0$
    c. $x^2+y^2+4x-2y=\sqrt{5}-5$
    d. $x^2+y^2-4x+2y=\sqrt{5}-5$

43. La ecuación de la circunferencia con centro $C(0,-1)$ y es tangente a la recta $y=1$ es

    a. $x^2+y^2+2y=3$
    b. $x^2+y^2+2y=4$
    c. $x^2+y^2+2x=3$
    d. $x^2+y^2+2x=4$

44. La ecuación de la circunferencia con diámetro de extremos $A(-2,1)$ y $B(2,-1)$ es

    a. $x^2+y^2=20$
    b. $x^2+y^2=\sqrt{3}$
    c. $x^2+y^2=5$
    d. $x^2+y^2=\sqrt{5}$

45. La ecuación de la circunferencia con diámetro de extremos $A(-3,0)$ y $B(1,2)$ es

    a. $x^2+y^2-2x+2y=5$
    b. $x^2+y^2-2x+2y=\sqrt{3}$
    c. $x^2+y^2+2x-2y=3$
    d. $x^2+y^2-2x+2y=3$

46. La ecuación $x^2+y^2-4x+3=0$ corresponde a una circunferencia con radio y centro dados respectivamente por

    a. $R=1$, $C(0,2)$
    b. $R=1$, $C(-2,0)$
    c. $R=1$, $C(2,0)$
    d. $R=1$, $C(0,-2)$

47. La ecuación $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ corresponde a una circunferencia con centro y radio dados respectivamente por:

    a. $C(-2,1)$, $R=\sqrt{2}$
    b. $C(-2,1)$, $R=1$
    c. $C(2,-1)$, $R=\sqrt{2}$
    d. $C(2,-1)$, $R=2$

48. La ecuación $x^2+y^2+2x-2y=0$ corresponde a una circunferencia con centro y radio, respectivamente, dados por

    a. $C(-1,1)$, $R=\sqrt{2}$
    b. $C(-1,1)$, $R=1$
    c. $C(1,-1)$, $R=\sqrt{2}$
    d. $C(1,-1)$, $R=2$

49. La ecuación $4x^2+4y^2-4x=3$ corresponde a una circunferencia con centro y radio, respectivamente, dados por

    a. $C\left(\frac{1}{2},0\right)$, $R=\sqrt{2}$
    b. $C\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $R=1$
    c. $C\left(\frac{1}{2},0\right)$, $R=1$
    d. $C\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $R=\sqrt{3}$

50. La ecuación $3x^2+3y^2+2y=0$ corresponde a una circunferencia con radio y centro dados respectivamente por

a. $R=\dfrac{1}{3}, \qquad C\left(\dfrac{1}{3},0\right)$

b. $R=\dfrac{1}{3}, \qquad C\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$

c. $R=\dfrac{1}{9}, \qquad C\left(0,\dfrac{-1}{3}\right)$

d. $R=\dfrac{1}{3}, \qquad C\left(0,\dfrac{-1}{3}\right)$

51. Cierto artículo tiene un valor de \$ 60.000 y su valor aumenta a una razón constante de \$300 por año durante los próximos 10 años. Una expresión lineal que predice el valor (y) del artículo durante los próximos (t) años es:

a. $y=(60000+300)t$

b. $y=60000+3000t$

c. $y=300t+60000$

d. $y=60000t+300$

52. Suponga que cierto artículo tiene un valor de \$ 50.000 y su valor aumenta a una razón constante de \$ 400 por mes durante los próximos 20 meses. Una expresión lineal que predice el valor (y) del artículo durante los próximos (t) meses es

a. $y=(50000+400)t$

b. $y=50000t+400$

c. $y=4000t+50000$

d. $y=400t+50000$

53. Suponga que cierto artículo tiene un valor de \$ 80.000 y su valor disminuye a una razón constante de \$ 500 por mes, durante los próximos 10 meses. Una expresión lineal que predice el valor (y) del artículo durante los próximos (t) meses es:

a. $y=500t+80000$

b. $y=-500t+80000$

c. $y=500t-80000$

d. $y=-5000t+80000$

54. Suponga que cierto artículo tiene un valor de \$50000 y su valor disminuye a una razón constante de \$400 por mes, durante los próximos 12 meses. Una expresión lineal que predice el valor(y) del artículo durante los próximos (t) meses es

a. $y = 50000 + 4000t$
b. $y = 50000t + 400$
c. $y = 50000 - 4000t$
d. $y = 50000 - 400t$

55. Suponga que 10 artículos cuestan \$ 148 y 20 artículos cuestan \$ 268. Si el costo C crece en forma lineal respecto al número de artículos x, entonces el costo está dado por la expresión

a. $C = 10x + 48$
b. $C = 12x - 48$
c. $C = 12x + 28$
d. $C = 14x + 8$

56. En cierta región, el servicio digital de TV es el 5% del precio real al inicio del año 2010 $(t = 0)$, y es el 17% al inicio del año 2013 $(t = 3)$. Si el servicio digital de TV crece en forma lineal, entonces la expresión para el porcentaje, del servicio digital en la región, al final de año t es

a. $y = 3t + 8$
b. $y = 5t + 17$
c. $y = 5t + 4$
d. $y = 4t + 5$

57. Las ventas mensuales en millones de pesos en un centro comercial son 115 en el mes 2 y 120 en el mes 4. Si las ventas siguen creciendo de forma lineal, entonces la expresión para las ventas al final del mes t es

a. $y = 2.5t + 110$
b. $y = 2t + 110$
c. $y = 4t + 105$
d. $y = 2t + 115$

11. Bibliografía

1. Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2008). Precálculo con avances de cálculo. McGraw-Hill Interamericana.
2. James, S., Redlin, L., Watson, S., Vidaurri, H., Alfaro, A., Anzures, M. B. J., & Fragoso Sánchez, F. (2007). Precálculo: matemáticas para el cálculo. México: Thomson Learning, 847.
3. Leithold, L., & González, F. M. (1998). Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica: con ejercicios para calculadora y graficadora. Oxford University Press.
4. Sullivan, M. (1998). Precálculo. Pearson Educación.