Lógica proposicional y teoría de conjuntos

Pedro Vicente Esteban Duarte

Presentación

La lógica proposicional es una parte de la lógica clásica que estudia las variables proposicionales, sus posibles implicaciones, los valores de verdad de las proposiciones o de conjuntos de ellas formadas a partir de los conectores lógicos. Permite validar o no las afirmaciones que se hacen en matemáticas o en otras ramas del conocimiento. Es por esto que el estudio y comprensión de las estructuras que componen la lógica y la forma como validan o no las proposiciones es fundamental en todas las ramas de las ciencias.

De otro lado, la teoría de conjuntos permite estudiar relaciones y propiedades entre diferentes colecciones de objetos al compararlas entre si de diversas maneras. La matemática moderna estudia una gran variedad de clases conjuntos a partir de las propiedades que los componen o define operaciones con los elementos de los mismos que resultan de interés para las ciencias en general.

El estudio de la lógica y la teoría de conjuntos le permite al estudiante comprender la forma como se construyen las propiedades, relaciones, resultados de las diversas ramas del conocimiento en las que se aplica la matemática.

El módulo tiene los siguientes objetivos:

Objetivo general

Estudiar los conceptos básicos de la lógica proposicional y la teoría de conjuntos que permitan verificar la verdad o falsedad de proposiciones elementales.

Objetivos específicos

- Determinar la verdad o falsedad de una proposición.
- Utilizar los conectivos lógicos en la formación de proposiciones compuestas.
- Identificar estructuras lógicas en teoremas o problemas matemáticos.
- Realizar operaciones entre conjuntos.
- Determinar el producto cartesiano entre conjuntos.

- Encontrar el conjunto de partes de un conjunto.

Los conceptos expuestos y los ejercicios planteados permiten comprender conceptos fundamentales de la lógica proposicional y los conjuntos.

El tiempo estimado para la solución del taller es de cuatro (4) horas.

En su estudio y solución le deseamos muchos éxitos.

1. La lógica proposicional

La **lógica proposicional o lógica de orden cero** es un sistema formal cuyos elementos más simples representan proposiciones, y cuyas constantes lógicas, llamadas conectivas, representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad[1].

La lógica proposicional estudia las sentencias u oraciones del lenguaje corriente o formal, a las que se les puede asignar un valor de verdad, esto es verdadero (V) o falso (F). Observe las siguientes oraciones del lenguaje corriente:

a. El sol sale por el oriente.

b. Juan, ¿tienes el computador?

c. Rosa es la niña más linda de la clase.

d. El Nacional ganará el próximo domingo.

e. Antioquia es un departamento de Panamá.

Note que en estas frases u oraciones a todas no se les puede asignar un valor de verdad.

a. A la oración “El sol sale por el oriente”, a la que se le asigna el valor de verdad “verdadero” (V).

b. En “Juan, ¿tienes el computador?”, no le puede asignar un valor de verdad. En general, las oraciones interrogativas y a las exclamativas no se les puede asignar un valor de verdad.

c. A “Rosa es la niña más linda de la clase.”, no se le puede asignar un valor de verdad. La belleza es subjetiva y todas las personas de la clase puede que no estén de acuerdo con esa afirmación.

[1] Simon Blackburn, ed., Propositional calculus, Oxford Dictionary of Philosophy, Oxford University Press

d. Para la afirmación “El Nacional ganará el próximo domingo.”, no se le puede asignar un valor de verdad.

e. La oración “Antioquia es un Departamento de Panamá.” es falsa, por lo tanto su valor de verdad es “falso” (F).

La lógica proposicional estudia oraciones como la a. o la e. (anteriores) a las que sin ambigüedad se les puede asignar un valor de verdad. A tales oraciones se les llama proposiciones y se designan por letras minúsculas del alfabeto.

Ejemplos:

a: El sol sale por el oriente.

b: Antioquia no es un Departamento de Panamá.

Son proposiciones.

Ejercicio

Dadas las siguientes oraciones:
1. La semana tiene siete días.
2. Me voy de viaje.
3. Una hora tiene sesenta segundos.
Las proposiciones son

a. 1. y 3.

b. 1. y 2.

c. 2. y 3.

d. 1., 2. y 3.

Ejercicios

Discutir con los compañeros, cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones.

a. Francia es un país americano.

b. José es un tipo inteligente.

c. Ningún republicano respeta la libertad.

d. $\dfrac{7+z}{4}=2$

e. ¡Estudia bien!

Conectivo	Lenguaje natural	Ejemplo	Símbolo	Símbolo alternativo
Negación	no	6 **No** es primo.	$\neg$	$\sim$
Conjunción	y	6 es par **y** 7 es impar.	$\wedge$	&
Disyunción	o	2 es primo **o** 2 es par.	$\vee$	
Condicional material	si ... entonces	**Si** 2 es primo, **entonces** es par.	$\rightarrow$	$\subset$
Bicondicional	si y sólo si	2 es par **si y sólo si** es divisible por 2.	$\leftrightarrow$	$\equiv$
negación conjunta	ni ... ni	**Ni** 2 es primo **ni** 2 es par.	$\downarrow$	
Disyunción excluyente	o bien ... o bien	**O bien** 2 es primo **o bien** 2 es impar.	$\nleftrightarrow$	$\bigoplus$

Tabla 1: Conectivos lógicos.

f. ¿De dónde eres?

g. $5 \times 4 = 20$

h. La ciudad del Líbano está en el continente asiático.

i. Holaaaaa..........

Cuando se utilizan los conectivos lógicos se pueden crear proposiciones compuestas. El valor de verdad de las proposiciones compuestas depende del valor de verdad que tenga cada una de las proposiciones simples y de los conectivos lógicos que las conforma. Los conectivos lógicos son: no, y, o, si ... entonces (condicional), sí y solo sí (bicondicional), ni ... ni (negación conjunta), o bien ... o bien (disyunción excluyente).

En la siguiente tabla se presentan los conectivos lógicos utilizados en la lógica proposicional:

Ejemplos:

Con las proposiciones:

c: El sol sale por el oriente

f: Los gatos vuelan

t: Los perros ladran

Simbolizar las proposiciones compuestas con los conectivos lógicos dados en la Tabla 1, de la página 4.

El sol **No** sale por el oriente: $\neg c$

El sol sale por el oriente **y** los gatos vuelan: $c \wedge f$

El sol sale por el oriente **o** los gatos vuelan: $c \vee f$

Si el sol sale por el oriente, **entonces** los perros ladran: $c \rightarrow t$

El sol sale por el oriente **sí y solo sí** los perros ladran: $c \leftrightarrow t$

Ni el sol sale por el oriente **ni** ni los gatos vuelan: $c \downarrow t$

O bien los perros ladran **o bien** el sale por el oriente: $t \not\leftrightarrow c$

Ejercicio

Dadas las proposiciones:
m: $2+2=4$
t: Las rosas tienen espinas.
s: Un día de la semana es el martes.
Al simbolizar las siguientes proposiciones:

1. Si las rosas tienen espinas y un día de la semana es martes entonces $2+2=4$
2. Las rosas tiene espinas si y sólo si $2+2 \neq 4$ o un día de la semana no es el martes.

Se obtiene, respectivamente

a. $(t \wedge s) \wedge m$, $t \leftrightarrow (\neg m \wedge \neg s)$

b. $(t \vee s) \rightarrow m$, $t \leftrightarrow (\neg m \wedge \neg s)$

c. $(t \vee s) \vee m$, $t \leftrightarrow (\neg m \vee \neg s)$

d. $(t \wedge s) \rightarrow m$, $t \leftrightarrow (\neg m \vee \neg s)$

2. Cálculo proposicional

Al formar proposiciones compuestas a partir del usos de los conectores lógicos es necesario tener reglas para saber el valor de verdad de dichas proposiciones. Las siguientes reglas son las que permiten determinar el valor de verdad de las proposiciones compuestas.

Si p y q son proposiciones, se tienen las siguientes tablas lógicas para los conectores lógicos.

2.1. La negación

Si la proposición p es verdadera (V) se tiene que $\neg p$ es (F), se simboliza en la siguiente tabla.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabla 2: Negación.

2.2. La conjunción

La conjunción relaciona dos proposiciones, cada una de ellas tiene dos valores de verdad posibles $(F \text{ o } V)$, por lo tanto, la tabla tiene 4 posibilidades de valores de verdad.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 3: Conjunción.

Note que la conjunción de dos proposiciones es verdadera cuando las dos son verdaderas.

2.3. La disyunción

La disyunción relaciona dos proposiciones, cada una de ellas tiene dos valores de verdad posibles $(F \text{ o } V)$, por lo tanto, la tabla tiene 4 posibilidades de valores de verdad.

Note que la disyunción de dos proposiciones es falsa cuando las dos son falsas, en los demás casos es verdadera.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 4: Disyunción.

2.4. El condicional

El condicional relaciona dos proposiciones, cada una de ellas tiene dos valores de verdad posibles $(F$ o $V)$, por lo tanto, la tabla tiene 4 posibilidades de valores de verdad. En el condiciona $p \rightarrow q$ a p se le llama en antecedente y a q el consecuente.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 5: Condicional.

Note que en el condicional únicamente es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, en todos los demás casos es verdadero.

2.5. El sí y solo sí

El sí y solo sí, relaciona dos proposiciones, cada una de ellas tiene dos valores de verdad posibles (FoV), por lo tanto, la tabla tiene 4 posibilidades de valores de verdad.

El sí y solo sí, es verdadero cuando los dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 6: Sí y solo sí.

2.6. La disyunción excluyente

La conjunción relaciona dos proposiciones, cada una de ellas tiene dos valores de verdad posibles (FoV), por lo tanto, la tabla tiene 4 posibilidades de valores de verdad.

p	q	$p \not\leftrightarrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 7: Disyunción excluyente.

Note que la disyunción excluyente (o bien ...o bien) de dos proposiciones es verdadera cuando las dos proposiciones tienen valores de verdad contrarios.

Ejemplo

Dada la proposición: los leones son carnívoros o las vacas son herbívoras entonces los leones se alimentan de vacas.

Realice las siguientes actividades:

a. Simbolizar la proposición.

b. Realizar la tabla de verdad.

Solución

a. Simbolizar la proposición.

La proposición esta compuesta de tres proposiciones simples, cada una de ellas se simboliza de la siguiente manera:

l: Los leones son carnívoros.

h: Las vacas son herbívoras.

a: Las cebras son herbívoras.

Los conectivos lógicos que conforman la proposición compuesta son la “o” y el “si ... entonces”, por lo tanto la proposición se puede simbolizar de la siguiente manera:

$$(l \vee h) \rightarrow a$$

b. Realizar la tabla de verdad.

La proposición está compuesta por tres proposiciones simples, por lo tanto tiene 8 posibles valores de verdad.

l	h	$l \vee h$	$\rightarrow$	a
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V
F	F	F	V	F

Una forma rápida de hacer la tabla de verdad de una proposición compuesta es determinar el número de filas que tendrá la tabla. Si una proposición simple tiene n proposiciones simples, el número de posibilidades de valores de verdad es 2^n. Para la primera proposición se escribe V en las mitad de las posibilidades y F en el resto. Para la segunda, la mitad de la mitad de la primera se escribe V y luego se va combinando con F. Para las otras proposiciones se continua de la misma manera como se ilustra en la tabla anterior.

Luego se encuentra el valor de verdad de las proposiciones compuestas.

En la tabla anterior el valor de verdad de toda la proposición compuesta está dado por todas las posibilidades que se encuentran debajo del conectivo lógico $\rightarrow$.

Nota: Si se sabe el valor de verdad de las proposiciones simples, para saber el valor de verdad de toda la proposición compuesta, no hay necesidad de construir toda la tabla. Así, por ejemplo, si $l : V$, $h : F$, $a : V$ el valor de verdad de la proposición $(l \vee h) \rightarrow a$ es V como se puede observar en la tercera fila, de arriba hacia abajo, de la tabla anterior.

Ejemplo

Encuentre el valor de verdad de la proposición: “Si el sol es amarillo y sale por el oriente entonces se ve diariamente” Si se sabe que:

s: El sol es amarillo, es verdadera (V).

o: El sol sale por el oriente, es verdadera (V).

d: El sol se ve diariamente, es falsa (F).

Al simbolizar la proposición se tiene: $(s \wedge o) \rightarrow d$. Al colocar debajo de cada una de las proposiciones simbolizadas su valor de verdad y operarlos con los conectivos lógicos, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} (l & \wedge & o) & \rightarrow & d \\ V & & V & & F \\ & V & & & F \\ & & & F & \end{array}$$

Como se puede ver, el valor de verdad de la proposición es falso (F).

Ejercicio

Si se sabe $p: V$, $q: F$ y $t: F$ el valor de verdad de la proposición $(p \rightarrow q) \longleftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg t)$, es

a. V

b. F

2.6.1. Ejercicios

Simbolice cada una de las siguientes proposiciones y encuentre su valor de verdad.

1. Si Juan no va a clase o no estudia, fracasará en los exámenes y no será aplaudido.
2. Si no es el caso que Pedro atiende en clase y estudia en casa, entonces fracasará en los exámenes o no será aplaudido.
3. Únicamente si Rosa atiende en clase y estudia en casa, no se dará que fracase en los exámenes y no sea aplaudido.
4. Si no hay ruidos y no estás sordo, entonces debes oírme.
5. Si hay guerra, crecerá el paro y la inflación.

6. Cuando la bolsa baja mucho, entonces es conveniente comparar; y cuando la bolsa sube mucho, es conveniente vender.

7. Si no sabes mandarín ni japones, te contrato en mi empresa sí y sólo sí, sabes informática o contabilidad.

8. Si un triángulo tiene tres ángulos, un cuadrado tiene cuatro ángulos rectos. Un triángulo tiene tres ángulos y su suma vale dos ángulos rectos. Si los rombos tienen cuatro ángulos rectos, los cuadrados no tienen cuatro ángulos rectos. Por lo tanto los rombos no tienen cuatro ángulos rectos.

2.7. Tautología, contradicción y ambivalencia

Las proposiciones que surgen en las ciencias, la lógica proposicional las clasifica como tautologías, contradicciones o ambivalencias.

Tautología: es una proposición compuesta en la que para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones simples siempre se obtiene como valor de verdad: verdadero (V). Por ejemplo, la proposición $(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ es una tautología (comprobarlo construyendo la tabla de verdad).

Contradicción: es una proposición compuesta en la que para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones simples se obtiene como valor de verdad falso (F). Por ejemplo, la proposición $\neg[(\neg p \vee q) \longleftrightarrow (p \rightarrow q)]$ es una contradicción (comprobarlo construyendo la tabla de verdad).

Ambivalencia: es una proposición compuesta en la que dependiendo de la combinación de valores de verdad de las proposiciones simples se obtienen valores de verdad que pueden ser verdaderos (V) en unos casos y falsos (F) en otros. Compruebe que la proposición $(p \rightarrow q) \longleftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow q)$ es una ambivalencia.

Ejercicio La proposición $(p \vee q) \longleftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$, es

una

a. Tautología

b. Contradicción

c. Ambivalencia

En las diferentes ramas de la ciencia, las tautologías son las leyes universales o teoremas sobre los que construye su fundamento teórico. Es por ello que se hace necesario tener un dominio de las leyes de la lógica, pues permiten determinar cuáles proposiciones son tatológicas, contradictorias o ambivalentes.

2.8. Leyes de la lógica proposicional

Las leyes de la lógica proposicional son tautologías que a partir de un conjunto de premisas (proposiciones simples o compuestas) se pueden hacer deducciones lógicas.

Si se tienen las proposiciones p y $p \to q$ una de las leyes lógicas permite deducir q.

Ejemplo:

Está lloviendo

Si está lloviendo entonces está nublado

La deducción es: está nublado.

Las proposiciones p : está lloviendo, $p \to q$: si está lloviendo entonces está nublado, son las premisas y q : está nublado, es la conclusión o deducción.

Hay varias formas de representar está ley lógica, entre las que se encuentran:

$$(p \wedge (p \to q)) \to q$$

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to q} \\ q \end{array}$$

$$(p \wedge (p \to q)) \vdash q$$

En los tres casos se lee "si se tiene p y $p \to q$ se sigue (se deduce) q". El símbolo $\vdash$ se lee como, "se sigue" o "deduce".

Compruebe que $(p \wedge (p \to q)) \to q$ es una tautología. Esta ley lógica se llama "Modus ponens" y reconocerla en los teoremas y ejercicios propuestos en matemáticas es fundamental para su comprensión y solución.

2.9. Algunas leyes de la lógica proposicional

La siguiente es una lista básica de las leyes lógicas que es utilizan más a menudo en matemáticas.

Modus ponens: $((p \to q) \wedge p) \vdash q$, se lee "si p entonces q; p; por lo tanto q".

Modus tollens: $((p \to q) \wedge \neg q) \vdash \neg p$, se lee "si p entonces q; $\neg q$; por lo tanto $\neg p$".

Silogismo Hipotético: $((p \to q) \wedge (q \to r)) \vdash (p \to r)$, se lee "si p entonces q; si q entonces r; por lo tanto, si p entonces r".

Silogismo Disyuntivo: $((p \vee q) \wedge \neg p) \vdash q$, se lee "si p o q; no p; por lo tanto, q".

Dilema Constructivo: $((p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)) \vdash (q \vee s)$, se lee "si p entonces q; y si r entonces s; pero p o r; por lo tanto q o s".

Dilema Destructivo: $((p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\neg q \vee \neg s)) \vdash (\neg p \vee \neg r)$, se lee "si p entonces q; y si r entonces s; pero no q o no s; por lo tanto no p o no r".

Dilema Bidireccional: $((p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee \neg s)) \vdash (q \vee \neg r)$, se lee "$p$ entonces q; y si r entonces s; pero p o no s; por lo tanto q o no r".

Simplificación: $(p \wedge q) \vdash p$, se lee "p y q son verdaderos; por lo tanto p es verdadero".

Conjunción: $p, q \vdash (p \wedge q)$, se lee "p y q son verdaderos separadamente; entonces son verdaderos conjuntamente.".

Adición: $p \vdash (p \vee q)$, se lee "p es verdadero; por lo tanto la disyunción $(p$ o $q)$ es verdadera".

Composición: $((p \to q) \wedge (p \to r)) \vdash (p \to (q \wedge r))$, se lee "si p entonces q; y si p entonces r; por lo tanto si p es verdadero entonces q y r son verdaderos".

Teorema de De Morgan (1) $\neg(p \wedge q) \vdash (\neg p \vee \neg q)$, se lee "la negación de $(p$ y $q)$ es equivalente a (no p o no q)".

Teorema de De Morgan (2): $\neg(p \vee q) \vdash (\neg p \wedge \neg q)$, se lee "la negación de $(p$ o $q)$ es equivalente a (no p y no q)".

Conmutación (1): $(p \vee q) \vdash (q \vee p)$, en general "($p$ o q) es equivalente a (q o p)".

Conmutación (2): $(p \wedge q) \vdash (q \wedge p)$, en general "($p$ y q) es equivalente a (q y p)".

Conmutación (3): $(p \leftrightarrow q) \vdash (q \leftrightarrow p)$, en general "($p$ es equivalente a q) es equivalente a (q es equivalente a p)".

Asociación (1): $(p \vee (q \vee r)) \vdash ((p \vee q) \vee r)$, en general "$p$ o (q o r) es equivalente a (p o q) o r".

Asociación (2): $(p \wedge (q \wedge r)) \vdash ((p \wedge q) \wedge r)$, en general "$p$ y (q y r) es equivalente a (p y q) y r".

Distribución (1): $(p \wedge (q \vee r)) \vdash ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$, en general "$p$ y (q o r) es equivalente a (p y q) o (p y r)".

Distribución (2): $(p \vee (q \wedge r)) \vdash ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$, en general "$p$ o (q y r) es equivalente a (p o q) y (p o r)".

Doble Negación: $p \vdash \neg\neg p$, en general "p es equivalente a la negación de no p".

Transposición: $(p \to q) \vdash (\neg q \to \neg p)$, en general "si p entonces q es equivalente a si no q entonces no p".

Implicación material: $(p \to q) \vdash (\neg p \vee q)$, en general "si p entonces q es equivalente a no p o q".

Equivalencia material (1): $(p \leftrightarrow q) \vdash ((p \to q) \wedge (q \to p))$, en general "($p$ sí y solo sí q) es equivale a (si p es verdadero entonces q es verdadero) y (si q es verdadero entonces p es verdadero)".

Equivalencia material (2): $(p \leftrightarrow q) \vdash ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$, en general "($p$ si q) es equivale a cualquiera de los dos (p y q son verdaderos) o (tanto p como q son falsos)".

Equivalencia material (3): $(p \leftrightarrow q) \vdash ((p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q))$, en general "($p$ si q) es equivale a tanto (p como no q son verdaderos) y (no p o q es verdadero).

Exportación: $((p \wedge q) \to r) \vdash (p \to (q \to r))$, se tiene "desde si p y q son verdaderos, entonces r es verdadero) se puede probar que (si q es verdadero entonces r es verdadero, si p es verdadero)".

Importación: $(p \to (q \to r)) \vdash ((p \wedge q) \to r)$, se tiene "si p entonces (si q entonces r) es equivalente a si p y q entonces r".

Tautología (1): $p \vdash (p \vee p)$, en general "p es verdadero es equivale a p es verdadero o p es verdadero".

Tautología (2): $p \vdash (p \wedge p)$, en general "p es verdadero es equivale a p es verdadero y p es verdadero".

Tertium non datur" (Ley de Tercero Excluido): $\vdash (p \vee \neg p)$, en general "p o no p es verdadero".

Principio de no contradicción: $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$, en general "$p$ y no p es falso, es una proposición verdadera".

La regla lógica del Modus tollens, también se conoce con el nombre de razonamiento indirecto, es muy utilizada en las ciencias para hacer deducciones. Se puede escribir de las siguientes maneras.

$$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$$

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q \quad\quad} \\ \neg p \end{array}$$

$$((p \to q) \wedge \neg q) \vdash \neg p$$

En el lenguaje natural se lee de la siguiente manera: "si p implica q, y q es falso, entonces p también es falso".

Comprobación: escribir cada una de las leyes lógicas de diferentes maneras y utilizando las tablas lógicas comprobar que son tautologías.

2.9.1. Ejercicios

Aplicando las reglas de la lógica, comprobar que de las premisas dadas se deduce la inferencia dada. Justifique cada uno de los pasos dados, escribiendo la regla o reglas lógicas utilizadas en cada paso.

1. $$\begin{array}{l} q \\ (p \vee q) \to t \\ \hline t \vee s \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \to r \\ \hline r \vee s \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \to r \\ \hline r \vee s \end{array}$$

5. $$\begin{array}{l} p \wedge q \\ r \\ (p \wedge r) \to s \\ \hline s \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \to c \\ q \to c \\ \hline (p \wedge q) \to c \end{array}$$

7. $$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ s \to t \\ s \vee p \\ \hline r \vee t \end{array}$$

8. $$\begin{array}{l} p \to q \\ (q \vee r) \to s \\ s \to (t \to m) \\ p \wedge \neg\neg t \\ \hline m \end{array}$$

9. $$\begin{array}{l} \neg p \to q \\ (\neg p \to \neg q) \wedge s \\ \hline p \end{array}$$

10. $$\begin{array}{l} p \to (q \land r) \\ q \land r \\ r \to s \\ \hline p \to s \end{array}$$

11. Aplicando reducción al absurdo.

$$\begin{array}{l} p \to \neg r \\ q \land r \\ \hline \neg p \end{array}$$

3. Conjuntos

La teoría de conjuntos es la base de la matemática moderna. Las relaciones, teoremas, leyes o proposiciones se realizan sobre las características de los elementos de un conjunto o de varios conjuntos. Por ejemplo, la definición de función relaciona dos conjuntos, uno llamado dominio y el otro el rango de la función.

Para definir las propiedades de los conjunto se requiere el estudio de la lógica de predicados en la que se utilizan los cuantificadores existencial ($\exists$) y universal ($\forall$).

3.1. Cuantificadores existencial y universal

En el lenguaje corriente se utilizan frases como "Existe un estudiante que perdió el curso de deportes" o "Todos los estudiantes ganaron el año".

Estos enunciados corresponden a la lógica de predicados y se caracterizan por hacer uso de los cuantificadores existencial y universal.

3.1.1. Estructura general de los enunciados de la lógica de predicados

En general, en los enunciados de la lógica de predicados, se tienen elementos que cumplen o no una propiedad determinada. En su simbolización, los individuos se denotan con letras minúsculas x, y, z, entre otras. Las propiedades con letras mayúsculas A, B, C,P, Q, entre otras.

Ejemplo:

El enunciado "Existe un estudiante que perdió el curso de deportes", se puede simbolizar de la siguiente manera:

Ex: x es un estudiante.

Dx: x perdió el curso de deportes.

Simbolización: $(\exists x)(Ex \rightarrow Dx)$

Ejemplo:

El enunciado “Todos los estudiantes ganaron el año”, se puede simbolizar de la siguiente manera:

Ey: y es un estudiante.

Gy: y ganó el año.

Simbolización: $(\forall y)(Ey \rightarrow Gy)$

Ejemplo:

El enunciado “Todos los carros que utilizan combustibles fósiles contaminan”, se puede simbolizar de la siguiente manera:

Cz: z es un carro.

Fz: z utiliza combustibles fósiles.

Kz: z contamina.

Simbolización: $(\forall z)((Cz \wedge Fz) \rightarrow Kz)$

Ejercicio

Para el enunciado “Ningún rey es futbolista”, si
Rx: x es un rey
Fx: x es futbolista
Su simbolización es

a. $(\exists x)(Rx \rightarrow Fx)$

b. $(\exists x)(Rx \rightarrow \neg Fx)$

c. $(\forall x)(Rx \rightarrow Fx)$

d. $(\forall x)(Rx \rightarrow \neg Fx)$

Ejercicio

Para el enunciado "Algunos perros no saben cantar", si
Px: x es un perro
Cx: x sabe cantar
Su simbolización es

a. $(\forall x)(Px \to Cx)$

b. $(\forall x)(Px \lor \neg Cx)$

c. $(\exists x)(Px \land \neg Cx)$

d. $(\exists x)(Px \to Cx)$

Ejercicio

Para el enunciado "Hay hombres que ni son libres ni sienten ningún deseo de serlo", si
Hx: x es un hombre
Lx: x es libre
Dx: x siente deseo de ser libre
Su simbolización es

a. $(\exists x)(Hx \land Lx \land \neg Dx)$

b. $(\exists x)(Hx \land \neg Lx \land \neg Dx)$

c. $(\forall x)(Hx \land \neg Lx \land \neg Dx)$

d. $(\forall x)(Hx \land Lx \land \neg Dx)$

Ejercicio

Para el enunciado "El alma feliz a es alma alegre, paciente, humilde y servicial", si
Fx: x es un alma feliz
Ax: x es un alma alegre
Px: x es un alma paciente
Hx: x es un alma humilde
Sx: x es un alma servicial
Su simbolización es

a. $(\forall x)(Fx \rightarrow (Ax \wedge Hx \wedge Px \wedge Sx))$

b. $(\forall x)(Fx \vee (Ax \wedge Hx \wedge Px \wedge Sx))$

c. $(\exists x)(Fx \rightarrow (Ax \wedge Hx \wedge Px \wedge Sx))$

d. $(\exists x)(Fx \rightarrow \neg(Ax \wedge Hx \wedge Px \wedge Sx))$

3.2. Ejercicios

Simbolizar cada uno de los siguientes enunciados.

1. Todos los hombres son mortales.
2. Todo número al cuadrado es positivo.
3. En cualquier fracción el denominador debe ser diferente de cero.
4. En las raíces pares el argumento debe de ser positivo.
5. Existen casas flotantes y colgantes.
6. Si una flor es roja y es una rosa entonces tiene espinas.
7. Algunos estudiantes llegan tarde a clase.
8. María es una mujer o María tiene el pelo largo.
9. Algunos equipos de fútbol contratan jugadores extranjeros.

3.3. Negación de los cuantificadores existencial y universal

En el lenguaje corriente un predicado puede ser negado. Por ejemplo: "Todos los días hace calor" lo negamos diciendo "Existe un día en el que no hace calor". Al simbolizar los dos expresiones se tiene:

Dx: x es un día

Cx: en x hace calor.

$(\forall x)(Dx \to Cx)$ y su negación $(\exists x)(Dx \wedge \neg Cx)$

La negación del cuantificador universal $(\forall x)(Px)$ es $\neg(\forall x)(Px)$ que lógicamente equivale a $(\exists x)(\neg Px)$. En palabras se expresa como: la negación de la universal afirmativa es la existencial negativa.

La negación del cuantificador existencial $(\exists x)(Px)$ es $\neg(\exists x)(Px)$ que lógicamente equivale a $(\forall x)(\neg Px)$. En palabras se expresa como: la negación de la existencial afirmativa es la universal negativa.

Ejemplos:

1. Escriba de dos maneras equivalentes la negación de $(\forall x)(Px \vee Qx)$

$$\begin{aligned} \neg(\forall x)(Px \vee Qx) \quad &\longleftrightarrow \quad (\exists x)(\neg(Px \vee Qx)) \text{ Negación del universal} \\ &\longleftrightarrow \quad (\exists x)(\neg Px \wedge \neg Qx) \text{ De Morgan} \end{aligned}$$

2. Escriba de dos maneras equivalentes la negación de $(\exists x)(Px \to Qx)$

$$\begin{aligned} \neg(\exists x)(Px \to Qx) \quad &\longleftrightarrow \quad (\forall x)(\neg(Px \to Qx)) \text{ Negación del existencial} \\ &\longleftrightarrow \quad (\forall x)(\neg(\neg Px \vee Qx)) \text{ Implicación material} \\ &\longleftrightarrow \quad (\forall x)(Px \wedge \neg Qx)) \text{ De Morgan y doble negación} \end{aligned}$$

Nota: de los ejemplos anteriores se puede deducir que no existe una sola manera de expresar un mismo predicado. Con los cuantificadores existencial y universal, siguen siendo validas las leyes lógicas estudiadas anteriormente.

Ejercicio

Al negar el predicado $(\forall x)(\neg Px \wedge Qx)$ se obtiene

a. $(\exists x)(Qx \wedge Px)$

b. $(\exists x)(Qx \vee Px)$

c. $(\exists x)(Px \to Qx)$

d. $(\exists x)(Qx \to Px)$

Ejercicio

Al negar el predicado $(\exists x)(Px \to (Qx \to Rx))$ se obtiene

a. $(\forall x)(Px \wedge Qx \wedge \neg Rx)$

b. $(\forall x)(Px \wedge \neg Qx \wedge Rx)$

c. $(\forall x)(\neg Px \wedge Qx \wedge Rx)$

d. $(\forall x)(\neg Px \wedge \neg Qx \wedge Rx)$

3.4. Definición de conjunto y operaciones entre conjuntos

Un conjunto es una colección de elementos, que es considerada en sí misma como un objeto. Los elementos pueden ser números, letras, animales, plantas, entre otros. Los elementos de un conjunto se representan con letras minúsculas del alfabeto (a, b, c,..., z) y los conjuntos con letras mayúsculas (A, B, C,..., Z).

Si x es un elemento y pertenece al conjunto A, simbólicamente se representa como $x \in A$ y se lee "x pertenece a A". El símbolo "$\in$" se lee como "pertenece". Si el elemento x no pertenece al conjunto A se escribe $x \notin A$ y se lee como "x no pertenece a A". El símbolo "$\notin$" se lee "no pertenece".

3.4.1. Representación de conjuntos

Para representar un conjunto y sus elementos se tienen diferentes formas. Entre las más utilizadas, se encuentran:

Extensión: es cuando se nombran todos los elementos de un conjunto. Por ejemplo $A = \{a, e, i, o, u\}$, representa el conjunto de todas las vocales del alfabeto castellano. En este caso A es el nombre del conjunto y a, e, i, o, u son cada uno de sus elementos.

Comprensión: es cuando se da una fórmula verbal o matemática que determina cada uno de los elementos del conjunto. Por ejemplo: $A = \{x/x \text{ es una vocal del alfabeto castellano}\}$

El símbolo $\{x/Px\}$ o $\{x : Px\}$ se llama el discriminante y se utiliza para definir conjuntos por extensión.

Diagrama de Venn: en una figura cerrada se colocan al interior los elementos del conjunto y por fuera de ella el nombre.

Ejercicio

El conjunto $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, por comprensión, se puede determinar como

a. $W = \{x/x$ es un elemento de los diez primeros números naturales$\}$

b. $W = \{x/x$ es un elemento del sistema posicional de base base 9$\}$

c. $W = \{x/x$ es un número natural$\}$

d. $W = \{x/x$ es un elemento del sistema posicional de base base 10$\}$

3.4.2. Cardinalidad de un conjunto

El cardinal de un conjunto se define como el número de elementos que tiene el conjunto. Si A es un conjunto, el cardinal de A se denota como $\#(A)$.

Por ejemplo, si $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ el cardinal de N es $\#(N) = 10$, que corresponde al número de elementos que contiene el conjunto N.

El cardinal de un conjunto puede ser finito o infinito. Es finito, cuando se le puede asignar un número natural finito, 5, 10, 1000, 10000000, entre otros. Es infinito, cuando no se le puede asignar un número natural finito.

Para representar por extensión un conjunto infinito, se acostumbra escribir los primeros elementos del conjunto y utilizar tres puntos $(\ldots)$, para representar que los elementos se podrían continuar escribiendo de esa forma.

Ejemplos:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots,\}$ representa al conjunto de todos los números naturales.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2-1, 0, 1, 2, 3, \ldots,\}$ representa al conjunto de todos los números enteros.

Cuando el conjunto tiene cardinalidad infinita y existe una fórmula para describirlo, se puede hacer por comprensión.

Ejemplos:

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}$ representa al conjunto de todos los números racionales.

$\mathbb{Q}^* = \{x : x$ no se puede escribir como una fracción de números enteros$\}$ representa al conjunto de todos los números irracionales.

$P = \{p = 2n/n \in \mathbb{N}\}$ representa al conjunto de todos los números naturales pares.

$I = \{i = 2n+1/n \in \mathbb{N}\}$ representa al conjunto de todos los números naturales impares.

Ejercicio

El conjunto $P = \{p = 2n/n \in \mathbb{N}\}$, por extensión, se puede determinar como

a. $P = \{3, 4, 7, \ldots\}$

b. $P = \{2, 6, 12, \ldots\}$

c. $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$

d. $P = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Ejercicio

El conjunto $I = \{i = 2n+1/n \in \mathbb{N}\}$, por extensión, se puede determinar como

a. $I = \{3, 4, 7, \ldots\}$

b. $I = \{3, 5, 7, \ldots\}$

c. $I = \{1, 4, 6, \ldots\}$

d. $I = \{1, 5, 9, \ldots\}$

3.4.3. Conjunto universal

Un conjunto universal o de referencia, se escoge de acuerdo al tipo de conjuntos que se estén trabajando.

Ejemplos:

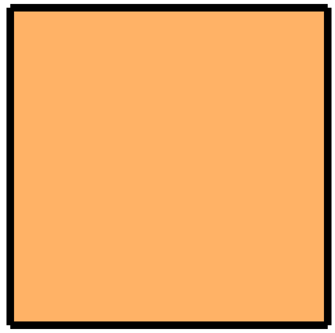
En el Cálculo de variable real, el conjunto universal son los números reales $\mathbb{R}$.

Cuando se trabaja con diagramas de Venn, el conjunto universal o de referencia se suele representar con un recuadro y fuera de el se le escribe el nombre de ese conjunto, como se puede ver en la siguiente gráfica:

Hay que tener en cuenta que el conjunto universal, o de referencia hay que tomarlo del contexto del que se estén tomando los conjuntos a analizar.

Ejercicios: Para los siguientes conjuntos determinar un conjunto universal.

$\mathbb{R}$



a. El conjunto de los animales cuadrúpedos.

b. El conjunto de los hinchas del Medellín.

c. El conjunto de los estudiantes del noveno grado de su colegio.

Ejercicio

Para el conjunto: Plantas de flores amarillas, un posible conjunto universal es

a. El conjunto de todas las plantas.

b. El conjunto de las plantas amarillas con pistilo blanco.

c. El conjunto de plantas rojas y amarillas.

d. Las plantas que visitan las abejas.

3.4.4. Conjunto vacío

El conjunto vacío es el conjunto al que no pertenece ningún elemento. Se denota por $\varnothing$ (conjunto vacío) o por $\{\,\}$ (conjunto vacío), en algunos textos se encuentra la relación $\varnothing = \{\,\}$.

$$\varnothing = \{x/x \neq x\} = \{\ \}$$

$$(\forall x)(x \in \varnothing \leftrightarrow x \neq x)$$

Ejercicio

El conjunto: el conjunto de los números naturales, múltiplos de 10 que son primos, es

a. Es el conjunto universal para los números primos.

b. Es vacío, no existe ningún número primo múltiplo de 10.

c. Es un conjunto con cardinal 1.

d. Es un conjunto finito.

Ejercicios: Determinar si los siguientes conjuntos son vacíos, en caso contrario listar sus elementos.

a. El conjunto de todos los números impares que es divisible por dos.

b. El conjunto de todos los primos que son pares.

c. El conjunto de todos los hombres que vuelan.

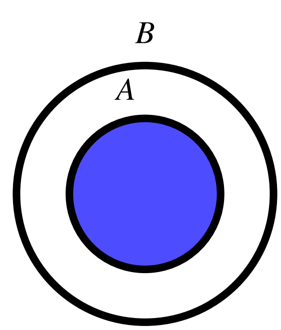
3.4.5. Relación de contención entre conjuntos

Si A y B son dos conjuntos la relación de contención de A en B se define como:

$$A \subset B \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B)$$

En palabras se lee: A está incluido en B sí y solamente sí todos los elementos de A también son elementos de B. El símbolo "$\subset$" se lee como "contenido".

En un diagrama de Venn se representa de la siguiente manera:

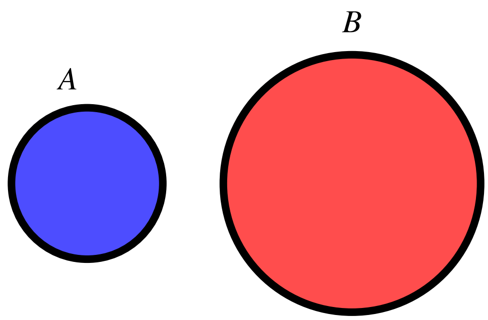


Si el conjunto A no está incluido en el conjunto B, se escribe:

$$A \not\subset B \leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$$

Que en palabras se puede leer como: El conjunto A no está incluido en el B sí y solo sí existe x que esta en A y x no está en B.

Gráficamente se puede representar como:



Propiedades de la inclusión entre conjuntos. Si A, B, C son dos conjuntos cualquiera, U es el conjunto universal y $\varnothing$ el conjunto vacío, se tiene:

a. $\varnothing \subset A$, el vacío está incluido en cualquier conjunto.

b. $A \subset U$, todo conjunto está incluido en el universal.

c. Si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$, si dos conjuntos se contienen entre sí, los dos conjuntos son iguales.

d. $A \subset A$, cualquier conjunto está incluido en sí mismo.

e. $((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \rightarrow (A \subset C)$, la inclusión es transitiva.

Ejemplo:

Determinar si el conjunto $A = \{1, 2, a, b, 3\}$ está contenido en el conjunto $B = \{1, 2, c, b, 3, d, 4\}$.

Solución:

Note que $a \in A$, pero $a \notin B$, por lo tanto A no está incluido en B. Se puede escribir como $A \not\subset B$.

Ejercicio

Para $D = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ y $E = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \}$, se tiene que $D \subset E$.

a. Verdadero, puesto que todos los elementos D están en E.

b. Falso, hay elementos de D que no están en E.

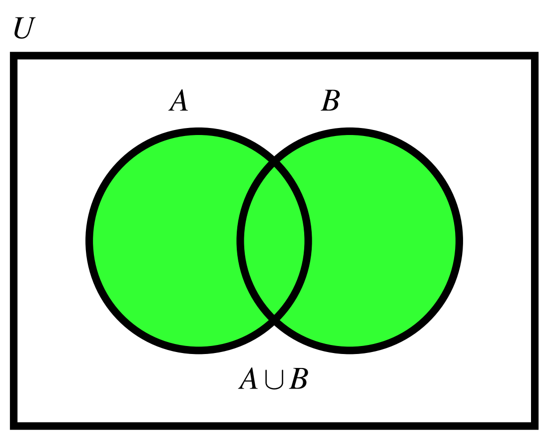
3.4.6. Unión entre conjuntos

Si A y B son dos conjuntos cualquiera, la unión entre ellos se define como:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

$$(\forall x)(x \in (A \cup B) \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$$

En palabras se puede expresar como: la unión entre el conjunto A y el B está formado por todos los elementos de A y todos los de B. Si los dos conjuntos tienen elementos en común, en la unión no se repiten. Gráficamente se representa como:



Propiedades de la unión entre conjuntos. Si A, B y C son conjuntos cualquiera, U es el conjunto universal y $\varnothing$ el vacío, se tiene que:

a. $A \cup A = A$, la unión de un conjunto consigo mismo es el mismo conjunto.

b. $A \cup \varnothing = A$, al unir cualquier conjunto con el vacío se obtiene el mismo conjunto.

c. $A \cup U = U$, al unirle al universal cualquier conjunto se obtiene el universal.

d. $A \cup B = B \cup A$, la unión entre conjuntos es conmutativa.

e. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, la unión entre conjuntos es asociativa.

f. $A \subset B \rightarrow A \cup B = B$. La unión de un conjunto B con un subconjunto suyo A lo deja inalterado.

g. $A \subset (A \cup B)$, $B \subset (A \cup B)$, tanto A como B están incluidos en A unión B.

h. $A \cap B = \varnothing$, si la intersección de dos conjuntos es el vacío, se dice que los dos conjuntos son disjuntos o disyuntos.

Ejercicios: Mediante diagramas de Venn compruebe todas las propiedades anteriores.

Ejemplo:

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, encuentre $A \cup B$.

Solución:

Como $A \subset B$, de acuerdo con una de las propiedades anteriores $A \cup B = B$.

Ejercicio

Si $A = \{a, 2, b, 3, c\}$ y $B = \{4, d, 5, e, 6, f, 7, g\}$, $A \cup B$ es

a. $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c, d, e, f, g\}$

b. $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, a, b, c, d, e, f, g\}$

c. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c, d, e\}$

d. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, c, d, e, f, g\}$

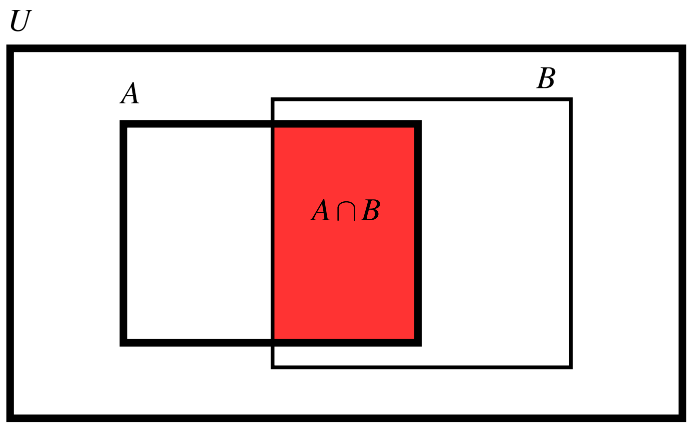
3.4.7. Intersección entre conjuntos

Si A y B son dos conjuntos cualquiera, la intersección entre ellos se define como:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

$$(\forall x)(x \in (A \cap B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$$

En palabras se puede expresar como: la intercesión entre el conjunto A y el B está formada por todos los elementos de A y todos los de B que son comunes a ambos conjuntos. Gráficamente se representa como:



Propiedades de la intersección entre conjuntos. Si A, B y C son conjuntos cualquiera, U es el conjunto universal y $\varnothing$ el vacío, se tiene que:

a. $A \cap A = A$, la intercesión de un conjunto consigo mismo es el mismo conjunto.

b. $A \cap \varnothing = \varnothing$, al interceptar cualquier conjunto con el vacío se obtiene el vacío.

c. $A \cap U = A$, al interceptar al universal con cualquier conjunto se obtiene el conjunto.

d. $A \cap B = B \cap A$, la intercesión entre conjuntos es conmutativa.

e. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, la intercesión entre conjuntos es asociativa.

f. $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, la intersección de A y B está incluido en A y está incluido en B.

g. $A \subset B \to (A \cup B) \subset A$, la intersección de un conjunto A con un conjunto B que lo contenga, deja a A inalterado.

h. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, la intersección de conjuntos distribuye con la unión de conjuntos.

i. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, la unión de conjuntos distribuye con la intersección de conjuntos.

   Ejercicios: Mediante diagramas de Venn compruebe todas las propiedades anteriores.

Ejemplo:

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, encuentre $A \cap B$.

Solución:

Como $A \subset B$, de acuerdo con una de las propiedades anteriores $A \cap B = A$.

Ejercicio

Si $A = \{a, 2, b, 3, c\}$ y $B = \{4, d, 5, e, 6, f, 7, g\}$, $A \cap B$ es

a. $\varnothing$

b. A

c. B

d. $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, c, d, e, f, g\}$

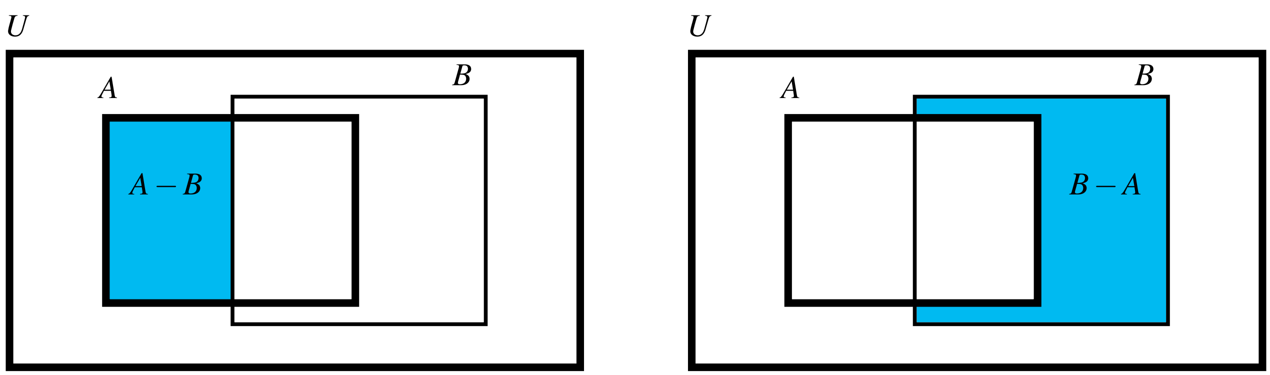
3.4.8. Diferencia entre conjuntos

Si A y B son dos conjuntos cualquiera, la diferencia $A - B$ se define como:

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$(\forall x)(x \in (A - B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$$

En palabras se puede expresar como: la diferencia del conjunto A con el conjunto B está formada por todos los elementos de A que no están en el conjunto B. Gráficamente se representa como:



Nota: La diferencia entre conjuntos no es conmutativa, como se puede observar en las gráficas anteriores.

Propiedades de la diferencia entre conjuntos. Si A, B y C son conjuntos cualquiera, U es el conjunto universal y $\varnothing$ el vacío, se tiene que:

a. $A - A = \varnothing$, la diferencia de un conjunto con el mismo es el vacío.

b. $A - \varnothing = A$, la diferencia entre un conjunto y el vacío es el conjunto.

c. $\varnothing - A = \varnothing$, la diferencia entre el vacío y un conjunto cualquiera en el vacío.

d. $A - U = \varnothing$, el conjunto A menos el conjunto universal es el vacío.

e. $U - A = A'$, el conjunto U menos A es igual al complemento de A.

f. $A - B \neq B - A$, la diferencia entre conjuntos no es conmutativa.

g. $A - B = \varnothing \leftrightarrow A \subset B$, si la diferencia entre conjuntos es el vacío, entonces uno de ellos está incluido en el otro.

h. $A - B = A \leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

i. $A - B = A \cap B'$, la diferencia $A - B$ es igual a A interceptado con el complemento de B.

Ejercicios: Mediante diagramas de Venn compruebe todas las propiedades anteriores.

Ejemplo:

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, encuentre $A - B$.

Solución:

Como $A \subset B$, de acuerdo con una de las propiedades anteriores $A - B = \varnothing$.

Ejercicio

Si $A = \{a, 2, b, 3, c\}$ y $B = \{4, d, 5, e, 6, f, 7, g\}$, $A - B$ es

a. $\varnothing$

b. B

c. A

d. $A - B = \{2, 3, 4, 5, c, d, e, f, g\}$

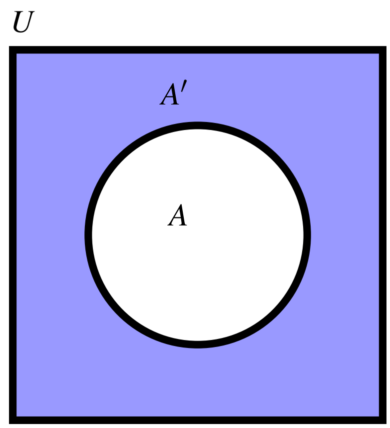
3.4.9. Complemento de un conjunto

Si A es un conjunto cualquiera, U es el conjunto universal y $A \subset U$, el complemento de A se define como:

$$A' = A^c = U - A = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$$

$$(\forall x)(x \in A' \leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A))$$

En palabras: el complemento del conjunto A son todos los elementos que no pertenecen a A. Gráficamente se representa como:



Propiedades del complemento de un conjunto. Si A es un conjunto cualquiera, U es el conjunto universal y $\varnothing$ el conjunto vacío, se tiene:

a. $A' \subset U$

b. $\varnothing' = U$

c. $U' = \varnothing$

Ejemplo:

Si $U = \{x \in \mathbb{N}/1 \leq x \leq 10\}$ y $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, encuentre A'.

Solución:

Recordemos que el complemento de un conjunto, son todos los elementos que no pertenecen al conjunto. Luego $A' = \{7, 8, 9, 10\}$.

Ejercicio

Si $U = \{x/x$ es una letra del alfabeto latino$\}$ y $E = \{x/x$ es una consonante del alfabeto latino$\}$, el complemento de E es

a. $F = \{a, i, o, u\}$

b. $A = \{a, e, i, o, u, l\}$

c. $A = \{a, e, i, o, u\}$

d. $A = \{m, a, e, i, o, u\}$

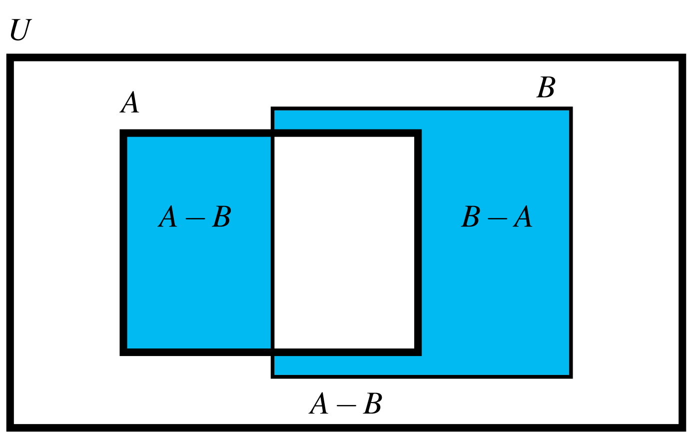
3.4.10. Diferencia simétrica entre conjuntos

La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B está dada por:

$$A \triangle B = \{x/x \in (A-B) \vee x \in (B-A)\}$$

$$(\forall x)(x \in (A \triangle B) \leftrightarrow x \in (A-B) \vee x \in (B-A))$$

En palabras se puede expresar como: la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B está dada por los elementos que están en $A-B$ o en $B-A$. Gráficamente se puede representar como se puede observar en la siguiente figura:



Propiedades de la diferencia simétrica entre conjuntos. Si A, B y C son conjuntos cualquiera, U es el conjunto universal y $\varnothing$ el vacío, se tiene que:

a. $A \triangle A = \varnothing$, la diferencia simétrica de un conjunto con el mismo es el vacío.

b. $A \triangle \varnothing = A$, la diferencia simétrica entre un conjunto y el vacío es el conjunto.

c. $A \triangle U = A'$, el conjunto A diferencia simétrica con el conjunto universal es el complemento de A.

d. $U \triangle A = A'$, el conjunto U diferencia simétrica con A es igual al complemento de A.

e. $A \triangle B = B \triangle A$, la diferencia simétrica entre dos conjuntos es conmutativa.

f. $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

g. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

h. $A \subset B \to A \triangle B = B - A$

i. $A \triangle B = B \triangle A$, la diferencia simétrica es conmutativa.

j. $A \cap (B \triangle C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$, la intersección de conjuntos distribuye con la diferencia simétrica.
   Ejercicios: Mediante diagramas de Venn compruebe todas las propiedades anteriores.

Ejemplo:

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, encuentre $A \triangle B$.

Solución:

Como $A \subset B$, de acuerdo con una de las propiedades anteriores $A - B = A' = \{6, 7, 8\}$.

Ejercicio

Si $A = \{a, 2, b, 3, c\}$ y $B = \{4, d, 5, e, 6, f, 7, g\}$, $A \triangle B$ es

a. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c, d, e, f, g\}$

b. $\{3, 4, 5, 6, 7, a, b, c, d, e, f, g\}$

c. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c, d, e\}$

d. $\{1, 2, 3, 4, 5, c, d, e, f, g\}$

3.4.11. Conjunto potencia

Si A es un conjunto el conjunto potencia de A está formado por todos los subconjunto de A. El conjunto potencia de A se denota por $\mathcal{P}(A)$.

Ejemplo:

El conjunto potencia de $A = \{1,2\}$ está dado por el conjunto $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

En general, al conjunto potencia de A pertenecen el conjunto $\varnothing$ y el mismo A. Note que los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son conjuntos.

El cardinal del conjunto potencia de A, $\mathcal{P}(A)$ está dado por 2^n, en donde n es el cardinal del conjunto A.

Ejercicio

Si $B = \{a, b, c\}$, el conjunto potencia de B es

a. $\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

b. $\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

c. $\mathcal{P}(B) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

d. $\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Ejercicio

Si $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, el cardinal del conjunto potencia de D es

a. $\#(\mathcal{P}(B)) = 8$

b. $\#(\mathcal{P}(B)) = 16$

c. $\#(\mathcal{P}(B)) = 32$

d. $\#(\mathcal{P}(B)) = 64$

3.4.12. Producto cartesiano entre conjuntos

Si A y B son dos conjuntos el producto cartesiano de A por B se define como:

$$A \times B = \{(x,y)/x \in A \wedge y \in B\}$$

$$(\forall x)(\forall y)((x,y) \in A \times B \leftrightarrow x \in A \wedge y \in B)$$

El producto cartesiano de dos conjuntos se representa por todas las parejas ordenadas (x,y), en donde x pertenece al primer conjunto y y al segundo conjunto.

Ejemplo:

Gráficamente se puede representar como:

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{a, b\}$, el producto cartesiano $A \times B$ se puede representar como gráficamente como:

$$\begin{array}{c|cccc} b & (1,b) & (2,b) & (3,b) & (4,b) \\ a & (1,a) & (2,a) & (3,a) & (4,a) \\ \hline A \times B & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

o por:

$$\begin{array}{c|cccc} b & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ a & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \\ \hline A \times B & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

y como conjunto por:

$$A \times B = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,a),(1,b),(2,b),(3,b),(4,b)\}$$

Si $(x,y) \in A \times B$ se lee x está relacionado con y y se escribe xRy y se lee: x está relacionado con y, a R se le llama una relación y cualquier relación es un subconjunto del producto cartesiano.

Propiedades del producto cartesiano. Si A, B son conjuntos y $\varnothing$ es el vacío, las siguientes son algunas de las propiedades del producto cartesiano:

a. $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$

b. $A \times B \neq B \times A$

Ejercicio

Si $A = \{\clubsuit, \spadesuit\}$ y $B = \{\bigstar, \blacksquare\}$, $A \times B$ es

a. $A \times B = \{(\bigstar,\clubsuit), (\bigstar,\clubsuit), (\blacksquare,\spadesuit), (\blacksquare,\spadesuit)\}$

b. $A \times B = \{(\clubsuit,\bigstar), (\clubsuit,\bigstar), (\blacksquare,\spadesuit), (\blacksquare,\spadesuit)\}$

c. $A \times B = \{(\clubsuit,\bigstar), (\clubsuit,\bigstar), (\spadesuit,\blacksquare), (\blacksquare,\spadesuit)\}$

d. $A \times B = \{(\clubsuit,\bigstar), (\clubsuit,\bigstar), (\spadesuit,\blacksquare), (\spadesuit,\blacksquare)\}$

4. Bibliografía

1. Lipschutz, S., Castaño, J. M., & Moncada, E. R. (1970). Teoría y problemas de teoría de conjuntos y temas afines (No. QA 269. L56). McGraw-Hill.

2. Trillas, E. (1979). Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos. Stochastica, 3(1), 47-60.

3. Grattan-Guinness, I. (1984). Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910: Una introducción histórica.

Índice