UNIVERSIDAD EAFIT

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Iniciación al Cálculo

Racionalización

Pedro Vicente Esteban Duarte

Presentación

La racionalización es una operación que permite eliminar raíces de numeradores o denominadores. Para ello, se utilizan las reglas de las potencias y las de factorización. Para racionalizar una fracción, se debe multiplicar el numerador y el denominador por un factor que elimine la raíz o las raíces, bien sean del numerador o del denominador. La nueva expresión debe ser equivalente a la que se tenía inicialmente.

Este módulo tiene los siguientes objetivos:

Objetivo general

Aplicar reglas de potenciación y factorización para eliminar raíces de fracciones aritméticas y algebraicas bien sea del numerador o del denominador.

Objetivos específicos

- Utilizar la racionalización de numeradores o denominadores para eliminar radicales.
- Utilizar la racionalización, cuando sea necesario, para simplificar o reescribir una expresión algebraica.

Los conceptos expuestos y los ejercicios planteados son básicos para comprender conceptos fundamentales del Cálculo y de las Matemáticas en general.

El tiempo estimado para la solución del taller es de tres (3) horas.

En su estudio y solución le deseamos muchos éxitos.

1. Racionalización de un monomio

Para racionalizar un monomio de la forma $\dfrac{a}{\sqrt[m]{b^n}}$, con $a \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $m > n$, se debe multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por la raíz del denominador cuyo radicando se eleva a la diferencia entre el índice y el exponente. Si el exponente es mayor que el índice, antes de racionalizar se simplifica la raíz.

Ejemplos

a. Racionalizar el denominador de la fracción $\frac{2}{\sqrt[3]{4^2}}$. En este caso el índice de la raíz es 3 y el exponente es 2. Por lo tanto, la diferencia entre el índice y el exponente es $3-2=1$. Luego, en el numerador y el denominador de la fracción se debe multiplicar por $\sqrt[3]{4}$.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4^2}\sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{4} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

En la anterior expresión la fracción de la izquierda y la de la derecha son iguales numéricamente (comprobarlo).

b. Racionalizar el numerador de la fracción $\frac{\sqrt[5]{7}}{9}$. En este caso, el índice de la raíz es 5 y el exponente es 1. Por lo tanto, la diferencia entre el índice y el exponente es $5-1=4$. Luego, en el numerador y el denominador de la fracción se debe multiplicar por $\sqrt[5]{7^4}$.

$$\frac{\sqrt[5]{7}}{9} = \frac{\sqrt[5]{7}\sqrt[5]{7^4}}{9\sqrt[5]{7^4}} = \frac{\sqrt[5]{7^5}}{9\sqrt[5]{7^4}} = \frac{7}{9\sqrt[5]{7^4}}$$

c. Racionalizar el denominador de la fracción $\frac{1}{\sqrt[3]{2^5}}$. En este caso, el índice de la raíz es 3 y el exponente es 5. Por lo tanto, la diferencia entre el índice y el exponente es $3-5=-2$. En este caso, es conveniente simplificar la raíz.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}}$$

Como se puede observar, el factor racionalizante es $\sqrt[3]{2^2}$, por lo tanto

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2^5}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2(2)} = \frac{\sqrt[3]{2}}{4}$$

d. Racionalizar el numerador de $\frac{\sqrt{x}}{4}$. En este caso, el índice de la raíz es 2 y la potencia es 1. Por lo tanto, el factor racionalizante es $\sqrt{x}$.

$$\frac{\sqrt{x}}{4} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x^2}}{4\sqrt{x}} = \frac{x}{4\sqrt{x}}$$

Aquí se debe tener en cuenta que x no puede tomar el valor de cero (0) para todas las fracciones que involucren raíces en el denominador.

Cuando el numerador y el denominador tienen varios productos con raíces se procede de igual manera, como se muestra en el siguiente ejemplo.

e. Racionalizar el denominador de $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}\sqrt[4]{7^3}}$. El factor racionalizante de la primera raíz es $\sqrt[5]{3^3}$ y el de la segunda es $\sqrt[4]{7}$. Al multiplicar el numerador y el denominador por estos factores se obtiene

$$\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}\sqrt[4]{7^3}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{3^2}\sqrt[5]{3^3}\sqrt[4]{7^3}\sqrt[4]{7}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{3^5}\sqrt[4]{7^4}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}\sqrt[4]{7}}{3(7)} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}\sqrt[4]{7}}{21}$$

Ejercicio

Al racionalizar el denomidor del monomio $\frac{5}{\sqrt[3]{11}}$, se obtiene

a. $5\sqrt[3]{11}$

b. $\frac{5\sqrt[3]{121}}{11}$

c. $\frac{5\sqrt[3]{11}}{11}$

d. $\frac{5\sqrt[3]{121}}{\sqrt{11}}$

Ejercicio

Al racionalizar el numerador del monomio $\frac{\sqrt[4]{x}}{7}$, para $x \neq 0$, se obtiene

a. $\frac{7x}{\sqrt[4]{x}}$

b. $7x\sqrt{x}$

c. $\frac{x}{7\sqrt[4]{x^3}}$

d. $\frac{7x}{(\sqrt[4]{x})^3}$

2. Racionalización de binomios con raíces cuadradas

En muchos ejercicios aparecen expresiones de la forma $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ o $a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$ en los numeradores o denominadores. Para simplificarlas, se requiere encontrar factores que permitan reescribirlas en forma equivalente, sin raíces en el numerador o denominador.

Para encontrar dichos factores se parte de la diferencia de cuadrados $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. Si x e y son números positivos, $x-y$ se puede escribir como una diferencia de cuadrados de la siguiente forma:

$$x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

De esta forma, se tiene que si en una fracción aparece:

- $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ el factor racionalizante es $\sqrt{x} + \sqrt{y}$.
- $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ el factor racionalizante es $\sqrt{x} - \sqrt{y}$.

Ejemplos

a. Racionalizar el denominador de la fracción $\frac{x}{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}}$.

Solución

El término que aparece en el denominador es $\sqrt{2x} - \sqrt{3y}$, por lo tanto el factor racionalizante es $\sqrt{2x} + \sqrt{3y}$, de donde

$$\frac{x}{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}} = \frac{x(\sqrt{2x}+\sqrt{3y})}{(\sqrt{2x}-\sqrt{3y})(\sqrt{2x}+\sqrt{3y})} = \frac{x(\sqrt{2x}+\sqrt{3y})}{(\sqrt{2x})^2-(\sqrt{3y})^2} = \frac{x(\sqrt{2x}+\sqrt{3y})}{2x-3y}$$

La expresión es valida para $y \neq \frac{2}{3}x$

b. Racionalizar el numerador de la fracción $\frac{\sqrt{x}+5}{7}$

Solución

El término que aparece en el numerador es $\sqrt{x} + 5$, por lo tanto el factor racionalizante es $\sqrt{x} - 5$, de donde

$$\frac{\sqrt{x}+5}{7} = \frac{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)}{7(\sqrt{x}-5)} = \frac{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)}{7(\sqrt{x}-5)} = \frac{(\sqrt{x})^2-5^2}{7(\sqrt{x}-5)} = \frac{x-25}{7(\sqrt{x}-5)}$$

Ejercicio

Al racionalizar el numerador de la expresión $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{4}$ se obtiene

a. $\frac{2-x}{4(\sqrt{2}+\sqrt{x})}$

b. $\frac{2-x}{2(\sqrt{2}+\sqrt{x})}$

c. $\frac{2}{4(\sqrt{2}+\sqrt{x})}$

d. $\frac{-x}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}$

3. Racionalización de binomios con raíces cúbicas

Al racionalizar fracciones en las que aparecen términos como $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$, $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$, $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}$ o $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}$, se deben encontrar factores que eliminen las raíces, bien sea del numerador o del denominador.

Para encontrar los factores correspondientes que eliminan las raíces, se deben tener presente las fórmulas de la suma o diferencia de cubos.

Para la suma de cubos:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x+y=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2})$$

Para la diferencia:

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x-y=(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2})$$

Si en la fracción aparece

- $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$, el factor racionalizante es $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}$
- $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$, el factor racionalizante es $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}$
- $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}$, el factor racionalizante es $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$

- $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}$, el factor racionalizante es $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$

Ejemplos

a. Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{3}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Solución

En el denominador aparece la expresión $\sqrt[3]{x}-2$, que se puede reescribir en forma equivalente como $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{8}$, por lo tanto el factor racionalizante es $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8^2}$, de donde

$$\frac{3}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{3}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{8}}=\frac{3(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8^2})}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{8})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8^2})}=\frac{3(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8^2})}{(\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{8})^3}=\frac{3(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8^2})}{x-8}=\frac{3(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8}$$

b. Racionalizar el numerador de la expresión $\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{5}$.

Solución

En el numerador de la expresión aparece $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1$ por lo que el factor racionalizante es $\sqrt[3]{x}+1$, de donde

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{5}=\frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{5(\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{x+1}{5(\sqrt[3]{x}+1)}$$

Ejercicio

Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{2}{3+\sqrt[3]{2x}}$, se obtiene

a. $\frac{2(9+3\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4x^2})}{27+2x}$

b. $\frac{3(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{4x^2})}{2(1-x)}$

c. $\frac{2(9-3\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4x^2})}{27+2x}$

d. $\frac{3(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{4x^2})}{2-x}$

4. Racionalización de binomios con raíces de índice mayor a tres

En algunos ejercicios de cálculo se presentan algunos binomios con índices mayores a tres, para racionalizar fracciones en los que aparecen estos tipos de binomios, en la que $n\in\mathbb{Z}^+$, hay que tener en cuenta que

$$x+y=(x^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{n-1}{n}}-x^{\frac{n-2}{n}}y^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{n-3}{n}}y^{\frac{2}{n}}-\ldots-x^{\frac{1}{n}}y^{\frac{n-2}{n}}+y^{\frac{n-1}{n}})$$

$$x-y=(x^{\frac{1}{n}}-y^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}y^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{n-3}{n}}y^{\frac{2}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}y^{\frac{n-2}{n}}+y^{\frac{n-1}{n}})$$

Para $n=4$ se tiene:

$$x+y=(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{2}{4}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{4}}-y^{\frac{3}{4}})$$

$$x-y=(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{2}{4}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{4}}+y^{\frac{3}{4}})$$

Para $n=5$ se tiene:

$$x+y=(x^{\frac{1}{5}}+y^{\frac{1}{5}})(x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{5}}-x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{4}{5}})$$

$$x-y=(x^{\frac{1}{5}}-y^{\frac{1}{5}})(x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{3}{5}}+y^{\frac{4}{5}})$$

Ejemplo

Racionalizar el denominador de $\frac{y}{\sqrt[5]{x}-2}$.

Solución

La expresión $\sqrt[5]{x}-2$ se puede escribir como $\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{32}=x^{\frac{1}{5}}+(32)^{\frac{1}{5}}$ y su factor racionalizante es $x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{3}{5}}(32)^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{2}{5}}(32)^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{5}}(32)^{\frac{3}{5}}+(32)^{\frac{4}{5}}$, luego

$$\frac{y}{\sqrt[5]{x}-2}=\frac{y}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{32}}=\frac{y}{x^{\frac{1}{5}}+(32)^{\frac{1}{5}}}=\frac{y(x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{3}{5}}(32)^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{2}{5}}(32)^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{5}}(32)^{\frac{3}{5}}+(32)^{\frac{4}{5}})}{(x^{\frac{1}{5}}+(32)^{\frac{1}{5}})(x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{3}{5}}(32)^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{2}{5}}(32)^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{5}}(32)^{\frac{3}{5}}+(32)^{\frac{4}{5}})}=$$

$$\frac{y(x^{\frac{4}{5}}+2x^{\frac{3}{5}}+4x^{\frac{2}{5}}+8x^{\frac{1}{5}}+16)}{x-32}$$

5. Ejercicios

1. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{14}{\sqrt[3]{7^2}}$ se tiene que es igual a

   a. $\frac{2}{7}$

b. $\sqrt[3]{7}$
c. $2\sqrt[3]{7}$
d. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$

2. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{6}{\sqrt{3x}}$ se tiene que es igual a

   a. $\frac{2\sqrt{3x}}{x}$
   b. $\frac{2}{3x}$
   c. $\frac{\sqrt{3x}}{x}$
   d. $\frac{3\sqrt{3x}}{x}$

3. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{18}{\sqrt[6]{3^4}}$ se tiene que es igual a

   a. $9\sqrt[6]{3}$
   b. $6\sqrt[3]{3}$
   c. $2\sqrt[3]{3}$
   d. $3\sqrt[3]{3}$

4. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{6}{\sqrt{3}}$ se tiene que es igual a

   a. $\sqrt{3}$
   b. $2\sqrt{3}$
   c. $6\sqrt{3}$
   d. $\frac{2}{3}$

5. Al racionalizar el numerador de la expresión $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$ se tiene que es igual a

   a. $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
   b. $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$
   c. $\sqrt{x}-\sqrt{y}$
   d. $\frac{1}{x-y}$

6. Al racionalizar el numerador de la expresión $\frac{a\sqrt{3}}{3b}$ se tiene que es igual a

   a. $\frac{2b}{a\sqrt{3}}$
   b. $\frac{b}{a\sqrt{3}}$
   c. $\frac{a}{b\sqrt{3}}$

d. $\frac{-2a}{b\sqrt{3}}$

7. Al racionalizar el numerador de la expresión $\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{2a}$ se tiene que es igual a

a. $\frac{b}{2\sqrt[3]{ab^2}}$
b. $\frac{a}{2\sqrt[3]{ab^2}}$
c. $\frac{b}{2\sqrt[3]{a^2b}}$
d. $\frac{2b}{\sqrt[3]{ab^2}}$

8. Al racionalizar el numerador de la expresión $\frac{\sqrt{b}-2}{2b-8}$ se tiene que es igual a

a. $\frac{1}{2\sqrt{b}+2}$
b. $\frac{1}{\sqrt{b}+2}$
c. $\frac{1}{2(\sqrt{b}-2)}$
d. $\frac{1}{2(\sqrt{b}+2)}$

9. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{8}{\sqrt[5]{2^3}}$ se tiene que es igual a

a. $2\sqrt[5]{4}$
b. $8\sqrt[5]{4}$
c. $4\sqrt[5]{2}$
d. $4\sqrt[5]{4}$

10. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{50}{\sqrt[3]{5^4}}$ se tiene que es igual a

a. $10\sqrt[3]{25}$
b. $2\sqrt[3]{25}$
c. $2\sqrt[3]{5}$
d. $2\sqrt{25}$

11. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{6}{\sqrt[5]{3^4}}$ se tiene que es igual a

a. $2\sqrt[5]{3}$
b. $\sqrt[5]{3}$
c. $6\sqrt[5]{3}$
d. $2\sqrt{3}$

12. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{3x}{\sqrt[5]{x^2}}$ se tiene que es igual a

    a. $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{x}$
    b. $3\sqrt[5]{x^3}$
    c. $3\sqrt{x^3}$
    d. 3

13. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{5x}{\sqrt[3]{x^8}}$ se tiene que es igual a

    a. $\frac{5\sqrt[3]{x}}{x^2}$
    b. $5\sqrt[3]{x}$
    c. $\frac{5}{x}$
    d. $\frac{5\sqrt{x}}{x^2}$

14. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{2y}{\sqrt[4]{y^5}}$ se tiene que es igual a

    a. $\frac{2\sqrt{y^3}}{y}$
    b. $\frac{2\sqrt[4]{y^2}}{y}$
    c. $\frac{2\sqrt[4]{y^3}}{y}$
    d. $\frac{2\sqrt[4]{y^3}}{y^2}$

15. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{5y}{\sqrt[5]{y^7}}$ se tiene que es igual a

    a. $5\sqrt[5]{y^3}$
    b. $\frac{5\sqrt[5]{y^2}}{y}$
    c. $\frac{5\sqrt[5]{y^3}}{y^2}$
    d. $\frac{5\sqrt[5]{y^3}}{y}$

16. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{5m}{\sqrt[7]{m^{20}}}$ se tiene que es igual a

    a. $\frac{5\sqrt[7]{m}}{m^2}$
    b. $\frac{5\sqrt[7]{m}}{m^3}$
    c. $\frac{5\sqrt[7]{m}}{m}$

d. $\frac{5\sqrt{m}}{m^2}$

17. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{10}{\sqrt{5}-1}$ se tiene que es igual a

a. $\frac{10(\sqrt{5}+1)}{2}$

b. $\frac{5(\sqrt{5}-1)}{2}$

c. $\frac{1-5(\sqrt{5})}{2}$

d. $\frac{5(\sqrt{5}+1)}{2}$

18. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{8}{\sqrt{5}-1}$ se tiene que es igual a

a. $2\sqrt{5}+1$

b. $2(\sqrt{5}+1)$

c. $2(\sqrt{5}-1)$

d. $8(\sqrt{5}+1)$

19. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{2}{\sqrt{5}+3}$ se tiene que es igual a

a. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

b. $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$

c. $\sqrt{5}-3$

d. $2(\sqrt{5}+3)$

20. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ se tiene que es igual a

a. $3(\sqrt{7}+\sqrt{5})$

b. $6(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

c. $3(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

d. $2(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

21. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ se tiene que es igual a

a. $2(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

b. $-2(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

c. $4(\sqrt{3}-\sqrt{5})$

d. $2(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

22. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ se tiene que es igual a

a. 8
b. $2+\sqrt{6}$
c. $\sqrt{3}-1$
d. $\sqrt{6}-2$

23. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ se tiene que es igual a

a. $\frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}$
b. $\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$
c. $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}$
d. $\frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x+y}$

24. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{4}{\sqrt{3y}-1}$ se tiene que es igual a

a. $\frac{4(\sqrt{3y}-1)}{3y+1}$
b. $\frac{4(\sqrt{3y}+1)}{3y+1}$
c. $\frac{4(\sqrt{3y}+1)}{3y-1}$
d. $\frac{4(\sqrt{3y}-1)}{3y-1}$

25. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{5}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ se tiene que es igual a

a. $\frac{5(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x+y}$
b. $\frac{5(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x+y}$
c. $\frac{5(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$
d. $\frac{5(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}$

26. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{2}{\sqrt{x}-1}$ se tiene que es igual a

a. $\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x+1}$
b. $\frac{2(\sqrt{x}+1)}{x+1}$
c. $\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1}$
d. $\frac{2(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

27. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{3x-3y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ se tiene que es igual a

a. $3(\sqrt{x}+\sqrt{y})$
b. $3(\sqrt{x}-\sqrt{y})$
c. $\frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x+y}$
d. $\frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$

28. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{5x-20}{\sqrt{x}-2}$ se tiene que es igual a

a. $\frac{5(\sqrt{x}+2)}{x-4}$
b. $\frac{5(\sqrt{x}+2)}{x-4}$
c. $5(\sqrt{x}-2)$
d. $5(\sqrt{x}+2)$

29. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$ se tiene que es igual a

a. $\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$
b. $\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$
c. $\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$
d. $\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$

30. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$ se tiene que es igual a

a. $\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$
b. $\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$
c. $\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$
d. $\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$

31. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ se tiene que es igual a

a. $\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$
b. $\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$
c. $\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$
d. $\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$

32. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{5x-5}{\sqrt[3]{x}-1}$ se tiene que es igual a

    a. $5(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$
    b. $5(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)$
    c. $5(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-1)$
    d. $5(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-1)$

33. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ se tiene que es igual a

    a. $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$
    b. $a+b$
    c. $a-b$
    d. $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$

34. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{4x-4}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$ se tiene que es igual a

    a. $4(\sqrt[3]{x}+1)$
    b. $4(\sqrt[3]{x}-1)$
    c. $a-b$
    d. $4\sqrt[3]{x}-1$

6. Bibliografía

1. Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2008). Precálculo con avances de cálculo. McGraw-Hill Interamericana.

2. James, S., Redlin, L., Watson, S., Vidaurri, H., Alfaro, A., Anzures, M. B. J., & Fragoso Sánchez, F. (2007). Precálculo: matemáticas para el cálculo. México: Thomson Learning, 847.

3. Leithold, L., & González, F. M. (1998). Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica: con ejercicios para calculadora y graficadora. Oxford University Press.

4. Sullivan, M. (1998). Precálculo. Pearson Educación.