



**Portafolio de activos compuesto por contratos de futuros sobre índices  
bursátiles a partir del modelo Black-Litterman**

Por

**Sebastián Arango Castillo**

**Daniel Esteban Zapata Nohavá**

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Magister en Administración  
Financiera

Asesor

Mag. Juan Felipe Cardona Llano

UNIVERSIDAD EAFIT

Medellín, Agosto de 2021

## Contenido

1. Introducción .....	8
2. Antecedentes .....	9
2.1. Modelo de Markowitz .....	11
2.2. Modelo CPM .....	12
3. Objetivos .....	13
3.1 Objetivo general .....	13
3.2 Objetivos específicos .....	13
4. Método de referencia conceptual .....	14
4.1. Derivados estandarizados .....	14
4.2. Modelo Black-Litterman .....	15
4.3. Medidas de desempeño .....	19
4.3.1. Benchmark .....	19
4.3.2. Sharpe Ratio .....	20
4.3.3. Alpha .....	20
4.3.4. Tracking error .....	21
4.3.5. Information ratio .....	21
4.3.6. Backtesting .....	21
4.3.7. Batting average .....	22
5. Metodología .....	22
6. Resultados .....	30
6.1. Portafolios .....	30
6.2. Generación de alpha .....	32
6.3. Batting average e índice de información .....	36
7. Conclusiones y recomendaciones .....	40
Referencias .....	43

## Lista de tablas

Tabla 1. Descripción contratos de futuros a trabajar.....	24
Tabla 2. Restricciones del portafolio .....	28
Tabla 3. Portafolio sin restricciones.....	30
Tabla 4. Portafolio sin restricciones.....	30
Tabla 5. Portafolio sin cortos .....	31
Tabla 6. Portafolio sin cortos .....	31
Tabla 7. Portafolio sin restricciones.....	33
Tabla 8. Portafolio sin cortos .....	34

## Lista de gráficos

Gráfico 1. Exceso de retornos portafolio sin restricciones vs exceso de retornos S&P Balanced Global Bond and Equity Futures Index.....	33
Gráfico 2. Exceso de retornos portafolio sin cortos vs exceso de retornos S&P Balanced Global Bond and Equity Futures Index.....	34
Gráfico 3. Rendimientos mensuales portafolio sin restricciones vs S&P Balanced Global Bond and Equity Futures.....	37
Gráfico 4. Evolución portafolio sin restricciones vs Benchmark .....	38
Gráfico 5. Rendimientos mensuales portafolio sin cortos vs S&P Balanced Global Bond and Equity Futures .....	39
Gráfico 6. Portafolio sin cortos vs Benchmark .....	39

## Lista de ecuaciones

Ecuación 1. Retornos del modelo CAPM.....	13
Ecuación 2. Retornos implícitos en el equilibrio .....	16
Ecuación 3. Coeficiente de aversión al riesgo .....	16
Ecuación 4. Incertidumbre de los views de los inversionistas .....	17
Ecuación 5. Retornos esperados modelo B&L .....	18
Ecuación 6. Varianza de los retornos del modelo B&L.....	18
Ecuación 7. Equivalencia para llegar al retorno esperado. ....	18
Ecuación 8. Retorno esperado.....	18
Ecuación 9. Matriz de varianzas y covarianzas posterior .....	19
Ecuación 10. Ponderaciones óptimas del modelo B&L.....	19
Ecuación 11. Ratio de Sharpe .....	20
Ecuación 12. Eficiencia de la gestión patrimonial .....	20
Ecuación 13. Volatilidad del gestor .....	21
Ecuación 14. Exceso de alfa por unidad de riesgo.....	21
Ecuación 15. Rentabilidad del activo iésimo .....	25
Ecuación 16. Ponderaciones por capitalización .....	26
Ecuación 17. Modelo Black Litterman .....	27
Ecuación 18. Ponderaciones del modelo B&L .....	27
Ecuación 19. Varianza del portafolio.....	28
Ecuación 20. Regresión del modelo CAPM.....	32

## Lista de anexos

Anexo 1. Prueba de hipótesis de los retornos cola izquierda.....	46
Anexo 2. Prueba de hipótesis de las proporciones cola derecha.....	47
Anexo 3. Supuestos de Regresión Lineal en Portafolio sin Restricciones.....	48
Anexo 4. Supuestos de Regresión Lineal en Portafolio sin Cortos.....	49
Anexo 5. Demostración retornos en equilibrio .....	50
Anexo 6. Demostración valor esperado y varianza modelo B&L .....	51

## **Resumen**

Los derivados financieros, con exposición en el mercado internacional por medio de futuros que repliquen los índices bursátiles, generan una gran oportunidad de inversión en el mercado colombiano, por medio de instrumentos de especulación y mayores rendimientos esperados. Bajo este marco, y con el interés de utilizar vehículos de inversión alternativos, la presente investigación busca la construcción de un portafolio de activos, compuesto por contratos de futuros de índices bursátiles a partir del modelo Black-Litterman, evaluando la generación de exceso de rendimientos frente a una estrategia pasiva como *benchmark*.

**Palabras claves:** Black-Litterman, Futuros, Derivados, Índice bursátil.

## **Abstract**

Financial derivatives, with exposure in the international market through futures that replicate stock indexes, generate a great investment opportunity in the colombian market, through speculation instruments and higher expected returns. Under this framework, and with the interest of using alternative investment vehicles, this research seeks the construction of a portfolio of assets composed of futures contracts of stock indexes based on the Black-Litterman model, evaluating the generation of excess returns against to a passive strategy as a benchmark.

**Key words:** Black-Litterman, Futures, Derivatives, Index, Stocks.

## 1. Introducción

Los mercados financieros son cada vez más exigentes en términos de rentabilidad, asunción de riesgos y eficiencia en la asignación de recursos en los diferentes instrumentos de los que un inversionista pudiera disponer. En esta ocasión se abordarán los mercados de futuros estandarizados negociados en la Bolsa Mercantil de Chicago (CME por sus siglas en inglés), enfocados en los contratos cuyo subyacente sean índices bursátiles. Según Hull (2009), un contrato de futuros es un acuerdo para comprar o vender un activo en una fecha específica en el futuro a un precio determinado. Este tipo de instrumentos son negociados tradicionalmente con fines de cobertura o especulación, donde si la finalidad es cubrirse, se utilizará el mercado de futuros para administrar el riesgo del precio de los activos; mientras que si la idea es especular, se aceptará el riesgo con la intención de beneficiarse de los movimientos favorables del mercado.

La intención de esta investigación es profundizar en la viabilidad de la composición de un portafolio de contratos de futuros estandarizados, bajo la metodología desarrollada por Fisher Black y Robert Litterman, modelo donde la clave de la implementación es la combinación de dos principios establecidos de la teoría moderna de portafolios, la frontera eficiente de Markowitz y el modelo CAPM, que además, parte de un portafolio de equilibrio que corresponde al conjunto de retornos esperados que igualan la oferta y la demanda de activos financieros, si todos los inversionistas tienen las mismas perspectivas (Black & Litterman, 1992).

Durante las últimas dos décadas en Colombia se han presentado varios acontecimientos que van en detrimento del interés público o de los mismos inversionistas, quienes han querido asumir mayores niveles de riesgo e incluso lo han omitido a la espera de tener rendimientos destacables en situaciones donde ha primado la maximización de la rentabilidad como, por ejemplo, se podrían señalar los casos de los esquemas de ahorro colectivo colaborativo o esquemas piramidales, donde quienes recluten más participantes recibirían un beneficio económico sobre su inversión inicial.

También es clave mencionar la intervención de la comisionista de bolsa más grande del país, Interbolsa, o la quiebra que sufrieron las principales compañías dedicadas al descuento de libranzas y títulos valores e incluso el auge que están teniendo en los años más recientes las criptomonedas, que para el caso colombiano, aún no cuentan con una regulación clara y con las que ya se han presentado casos de fraude. Estas situaciones serán marcadas como antecedentes para justificar el hecho de que se pueden



estructurar nuevas herramientas para que inversionistas plenamente informados, tengan instrumentos que les permitan asumir riesgos altos o agresivos en mercados regulados y supervisados.

Está claro que la forma de medir el cumplimiento del objetivo trazado es mediante la comparación de un índice de referencia o *benchmark*, y con elementos como el *backtesting* y *el Batting Average*, se podrá determinar si es viable la implementación del portafolio bajo la metodología trabajada por Black-Litterman, de ahora en adelante B&L o B-L.

## **2. Antecedentes**

En las revisiones realizadas como antecedentes, se descubrió que parte de la producción académica se ha enfocado a temas relacionados con el modelo B&L, en cuanto al mercado de renta variable, renta fija, asignación de capital en portafolios multiactivos o incluso para marcar las diferencias que éste tiene con el modelo de mínima varianza de Markowitz. Así lo mencionan Bosiga (2006) y Luna & Tamayo (2015) en su aplicación del modelo B&L al mercado de renta variable colombiano, o Aguirre & Cardona (2017) en su portafolio de activos de renta fija TES colombianos, construido a partir de la aplicación del modelo B&L.

También Montoya & Maya (2016) en su comparación de metodologías de optimización de carteras: Markowitz vs B&L, para activos financieros colombianos. Esto por mencionar algunos de los proyectos evaluados y que sirven de base para entender que se hace necesario desarrollar y aprovechar las bondades del modelo B&L en el mercado de futuros estandarizados.

Si bien el mercado colombiano ha incorporado a lo largo del siglo XXI los derivados estandarizados y no estandarizados en el mercado no intermediado, el enfoque ha sido regional en términos de activos, su profundización por medio de los actores clave se ha visto tímida, y aún el pilar fundamental es la renta fija, evidenciada en los volúmenes de negociación.

Para la década 2010-2019, los montos negociados según la Bolsa de Valores de Colombia (2019), fueron en promedio año, los siguientes: \$992 billones para renta fija, \$750 billones en divisas, \$78 billones en derivados y \$63 billones de pesos para renta variable. Esto indica

una profundización del mercado del 4.1% en activos considerados derivados, mientras que la renta fija participa con más del 50.0% de recursos transados.

Además, de los profesionales con certificaciones vigentes en el Autorregulador del Mercado de Valores de Colombia (AMV), con corte al 31 de diciembre del 2019, se encuentran certificados el 22.8% de los mismos en derivados financieros, mientras que renta fija tiene una participación del 34.9% en las certificaciones profesionales.

Por otra parte, en el momento de la realización del estudio (que profundizaremos en el marco teórico), no se han encontrado fondos de inversión colectiva (FICs) en el sistema financiero colombiano para el público en general, que propongan una estrategia con base en activos de contratos de futuros sobre índices bursátiles a nivel global. Si bien existen FICs que basan su inversión en títulos como ETF's (*Exchange-Traded Fund*), que como instrumento se caracteriza como un conjunto de activos que cotizan en bolsa, diversificando riesgo en una canasta de títulos, estos no representan contratos de futuros.

Un mercado con robustez en los vehículos de inversión por medio de derivados propone una utilización de instrumentos alternativos a los tradicionales. Según Gray & Place (2003), estos traducen un aumento de los rendimientos por medio de la especulación. En la actualidad, no se encuentra en los mercados de negociación local un portafolio compuesto por contratos de futuros en índices bursátiles abierto hacia los inversionistas.

Los mencionados futuros de índices bursátiles han sido incorporados desde la década de los 90, por firmas comisionistas en los Estados Unidos. Al incorporar este concepto de contrato de futuros, ha permitido a los inversionistas institucionales así como a minoristas, la posibilidad de diversificar su cartera de activos y replicar el comportamiento de numerosas bolsas de valores alrededor del mundo (CME Group, 2013).

Este estudio también surgió como la necesidad de ampliar el abanico de alternativas que los inversionistas tienen a su disposición para depositar sus recursos, puesto que han existido situaciones en las que los inversores han procurado maximizar el rendimiento, con un total desconocimiento del riesgo que se está asumiendo. Según Mejía Vergnaud (2008), la tasa de interés mensual que los inversores han llegado a percibir es 40% en esquemas piramidales,

llevándolos a perder la totalidad de su dinero a expensas de prácticas de captación ilegal de recursos.

Casos concretos para la economía colombiana también se encuentran en la quiebra de Interbolsa, la comisionista de bolsa más grande del país o incluso las compañías que captaron recursos para descontar facturas, libranzas o cualquier tipo de título valor y, que por actividades ilícitas, terminaron en la quiebra, causando un completo detrimento del interés público.

### **2.1. Modelo de Markowitz**

Dentro de las teorías modernas de portafolio podemos encontrar la de Harry Markowitz, la cual se originó en el año 1952, cuyo desarrollo plantea la composición de una cartera de mínima varianza, además de considerar más combinaciones de activos riesgosos, de acuerdo con el riesgo y retorno esperado según la información histórica.

Es clave mencionar que uno de los supuestos principales de esta teoría es que la elección de un portafolio u otro dependerá principalmente de los criterios que el inversionista plantee dentro de su estrategia y que, además, el comportamiento racional del inversor implicaría la elección de una combinación de activos con el máximo nivel rentabilidad posible, al mínimo riesgo posible (menor valor de desviación estándar). Dicho de otra manera, la aversión al riesgo es un criterio clave para este modelo.

También es importante comentar el papel que juega la diversificación en esta teoría, ya que mediante la medición del coeficiente de correlación, se puede tener una idea del impacto que puede tener, agregar o eliminar uno o varios activos del portafolio y así observar las variaciones que ello puede provocar en la desviación estándar de la cartera. De esta manera, con los rendimientos históricos de los activos y la correlación entre ellos, se podría estimar el portafolio óptimo para la inversión (Montoya & Maya, 2016).

El modelo desarrollado por Markowitz tiene limitaciones como, por ejemplo, que los retornos están calculados con información histórica y, por lo tanto, la correlación también será medida con datos históricos, lo que quiere decir que los resultados serán sensibles a eventos puntuales de las compañías, crisis y los ciclos económicos que no necesariamente condicionan que el desempeño futuro sea similar, lo que quiere decir que el desempeño pasado de un activo no

sirve para explicar el futuro. Otro de los aspectos controvertibles son las soluciones de esquina, las cuales se mitigan con estrategias o políticas de inversión para crear nuevas restricciones para el modelo.

Es así como surge el modelo de B&L, con aportes enfocadas a la medición de los retornos, a las soluciones de esquina y a los rendimientos negativos.

## **2.2. Modelo CAPM**

Este modelo fue desarrollado por William Sharpe en 1964 y se fundamenta en la idea de que cualquier inversionista debe esperar como retribución mínima de sus inversiones, la tasa libre de riesgo (AMV, 2021). Además, el modelo considera que se debe obtener una prima proporcional al riesgo asumido con las inversiones y cuenta con los siguientes supuestos fundamentales:

- a. Existen muchos inversionistas, cada uno con una riqueza limitada y diminuta en comparación con la del total de la economía. Los inversionistas son tomadores de precios, lo que quiere decir que sus operaciones no afectan el valor de los activos.
- b. Todos los agentes conservan sus activos durante el mismo horizonte de inversión.
- c. Las inversiones están limitadas al universo de activos financieros.
- d. No existen costos transaccionales ni impuestos.
- e. Todos los agentes son optimizadores de media-varianza, es decir, son aversos al riesgo y siguen los criterios del modelo de Markowitz.
- f. La información es perfecta y está disponible para todos los inversionistas.
- g. Existe una tasa libre de riesgo a la cual se puede fondear e invertir.

Si todos los agentes cuentan con información perfecta, y además tienen la capacidad de impactar los precios del mercado gracias a sus operaciones de compra o venta, donde permitan que los valores de los activos aumenten o disminuyan, los mismos también podrán diferenciarse, dependiendo de su aversión al riesgo, de lo cual, quienes destinen la mayor parte de sus recursos al activo libre de riesgo serán aquellos cuya aversión será más alta, mientras que aquellos que opten por asumir mayores niveles de volatilidad, con el fin de maximizar su rentabilidad, serán los menos aversos y quienes opten por destinar mayor parte de su capital a activos que se consideran con mayor riesgo idiosincrático.

El CAPM determina de esta manera el rendimiento de los activos, una vez que el mercado se encuentra en equilibrio, cuya ecuación sería la siguiente:

**Ecuación 1. Retornos del modelo CAPM**

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_m) - R_f)$$

Donde:

$E(R_i)$ : rendimiento esperado del activo  $i$ ésimo  $i$ .

$R_f$ : rendimiento esperado del activo libre de riesgo.

$\beta_i$ : medida de volatilidad relativa del activo  $i$  frente al mercado.

$(R_m)$ : rendimiento esperado del mercado.

Así las cosas, el modelo plantea que, en el punto de equilibrio, el inversionista mantendrá el portafolio de mercado.

### 3. Objetivos

#### 3.1 Objetivo general

Construir un portafolio de activos basado en contratos de futuros sobre índices bursátiles por medio del modelo Black-Litterman, con el fin de medir la generación de *alpha*.

#### 3.2 Objetivos específicos

- Desarrollar la teoría del modelo Black-Litterman que respalda el modelo de implementación propuesto.
- Identificar los derivados estandarizados (futuros) de los principales índices bursátiles en el mercado global.
- Seleccionar los activos para la ponderación de pesos del modelo, con un límite definido de máximo cinco en la canasta del portafolio, con la metodología propuesta por Black-Litterman.
- Implementar el modelo seleccionado y evaluar si se genera exceso de rendimiento (*Alpha*) por medio de *backtesting*, sobre una estrategia pasiva de inversión, mediante una regresión lineal del modelo CAPM.

- Validar la implementación del modelo por medio del cálculo del *batting average* y el índice de información.

#### **4. Método de referencia conceptual**

##### **4.1. Derivados estandarizados**

En primer lugar, se describirán los derivados estandarizados negociados en la Bolsa Mercantil de Chicago (CME por sus siglas en inglés). Los instrumentos que principalmente se abarcarán en esta investigación son los futuros, los cuales son contratos estandarizados para la compra y venta de activos financieros o materias primas, bajo condiciones preestablecidas en fechas futuras y que se llevan a cabo en un mercado organizado.

Un contrato de futuros debe tener por lo menos las siguientes características definidas: fecha de vencimiento, subyacente, indicar condiciones de entrega, tamaño del contrato y precio. Es importante mencionar que en los mercados de derivados estandarizados debe intervenir una figura que mitigue el riesgo de contraparte, como las cámaras de riesgo o de compensación, que para el caso puntual de la CME, se creó la CME Clearing que es propiedad de la bolsa de futuros y opciones, y que proporciona eficiencia en los mercados, gracias al cumplimiento de sus funciones enfocadas a la liquidación de cuentas de operaciones, compensación y administración de garantías de los contratos que allí participen. Según CME Group (2021), CME Clearing también regula la entrega, facilita el proceso de ejercicio de opciones y notifica los datos de operaciones.

Tradicionalmente, los operadores de futuros se dividen en dos categorías principales: coberturistas (*hedger*) y especuladores. Los coberturistas utilizan el mercado de futuros para administrar el riesgo frente a cambios en los precios de sus activos. Los especuladores aceptan ese riesgo, con el fin de beneficiarse de los movimientos de los precios (CME Group, 2021). Acá también podrían involucrarse los arbitrajistas, quienes buscan deficiencias del mercado para aprovecharse de ellas y obtener beneficios inmediatos sin la asunción de riesgos.

Adicionalmente, se deben tener presentes las condiciones faciales de un contrato de futuros y también conceptos del mercado, tales como:

- a. Tamaño del contrato: es la cantidad mínima del valor subyacente descrita en el contrato. Cada contrato de futuros tiene un tamaño estandarizado que no cambia.
- b. Valor del contrato: es el resultado de multiplicar el precio actual por el tamaño del contrato.
- c. *Tick* de precio: según CME Group (2021), un *tick* es la cantidad más pequeña de fluctuación que puede darse en el precio de un contrato particular.
- d. Interés abierto: es el número total de contratos de futuros largos o cortos en un mes de entrega o mercado específico, que aún no se han compensado o cumplido.
- e. Garantía: es la cantidad mínima de fondos que un inversionista debe depositar en una cámara de riesgo o de compensación, con el fin de ejecutar una posición larga o corta.
- f. Llamado a margen: los llamados a margen se dan cuando al momento de compensar las posiciones de los contratos de futuros, las liquidaciones de pérdidas y ganancias en sus valores agregados o para la jornada, arrojan un valor inferior al porcentaje denominado *margin call*, donde el inversionista deberá reponer la garantía depositada a su valor inicial.
- g. Garantía intradía: es una garantía de valor inferior en la que el bróker identifica que la posición será cerrada antes de finalizar la sesión de mercado.

#### **4.2. Modelo Black-Litterman**

Según Black & Litterman (1992), la clave del modelo es la combinación de dos principios establecidos de la teoría moderna de portafolios: la frontera eficiente de Markowitz y el modelo CAPM. Además, parte de un portafolio de equilibrio que corresponde al conjunto de retornos esperados que igualan la oferta y la demanda de activos financieros, si todos los inversionistas tienen las mismas perspectivas.

Parte de los aportes importantes que tiene este modelo es la capacidad de incorporar información muestral y no muestral, con el fin de minimizar el error de la estimación de los parámetros, donde la información no muestral hará parte de las expectativas o *views* que los inversionistas contemplan sobre el mercado.

De acuerdo con Bosiga (2006), el modelo B&L tiene 3 supuestos fundamentales:

1. El inversionista tiene una función de utilidad cóncava, es decir, es averso al riesgo.

2. Los supuestos detrás del modelo CAPM se cumplen.
3. Los rendimientos siguen una distribución normal.

Definiendo cada uno de los componentes del modelo Black Litterman se tiene lo siguiente:

a. Retorno de equilibrio ( $\Pi$ ).

El retorno de equilibrio se puede derivar del CAPM, donde los inversionistas están dispuestos a asumir el riesgo del mercado y no los riesgos no correlacionados, que se pueden mitigar con la diversificación, proporcionando un criterio de comparación contra el cual los inversionistas contrastarán sus expectativas o *views*.

Según Montoya & Maya (2016), también se podrá definir como la multiplicación de la aversión al riesgo del inversionista, el vector de capitalización de mercado de cada uno de los activos en el portafolio y la matriz de varianzas y covarianzas. Esto es definido de la siguiente manera:

**Ecuación 2.** *Retornos implícitos en el equilibrio*

$$\Pi = ASw$$

Donde:

$A$ : aversión al riesgo del inversionista.

$S$ : matriz de varianzas y covarianzas de los retornos de los activos.

$w$ : vector de pesos en el equilibrio de los activos.

$\Pi$ : retornos implícitos en el equilibrio.

También se debe hacer énfasis en la aproximación que se sugiere para el cálculo del coeficiente de aversión al riesgo.

**Ecuación 3.** *Coeficiente de aversión al riesgo*

$$A = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m^2}$$

Donde:

$E(R_m)$ : rendimiento esperado del mercado o *benchmark*.



$R_f$ : rendimiento promedio del activo libre de riesgo.

$\sigma_m^2$ : varianza del mercado o *benchmark*.

b. Confianza en los retornos de equilibrio ( $\tau$ ).

Según Valencia (2018a), el escalar  $\tau$  hace referencia al nivel de certidumbre que tiene el inversionista sobre los retornos de equilibrio. Lo que quiere decir que un valor pequeño de  $\tau$  daría mayor ponderación a los retornos, implicando una mayor confianza sobre su ocurrencia; pero un valor igual a 0 significa que el inversor no tiene certeza sobre las expectativas del mercado y, por lo tanto, el rendimiento potencial de la inversión sería igual a la del equilibrio.

c. Incorporación de las expectativas (*views* del mercado).

Las expectativas de los inversionistas se pueden expresar con las matrices que Black & Litterman (1992) definieron como P y Q, en donde se verán reflejadas las opiniones en términos de rentabilidad que se tiene sobre los activos del portafolio. P será la matriz de los *views* del mercado y Q será la de retornos esperados del portafolio.

d. Confianza en las expectativas ( $\Omega$ ).

Los valores que incorpore la matriz diagonal  $\Omega$  representará el nivel de confianza que los inversionistas tienen sobre las expectativas planteadas, de acuerdo con Valencia (2018a) si la confianza del administrador en los *views* es baja, entonces la composición del portafolio tenderá hacia el equilibrio; pero si la confianza es alta, entonces la composición final se desviará por los *views* y así se alejará del equilibrio. Este concepto se podrá expresar de la siguiente manera:

**Ecuación 4.** *Incertidumbre de los views de los inversionistas*

$$\Omega = \tau PSP^T$$

Donde:

$\tau$ : peso relativo de los retornos en equilibrio.

P: matriz de *views* del inversionista.

S: matriz de varianzas y covarianzas de los activos.

$\Omega$ : incertidumbre de *views* del inversionista.

e. Matriz de varianzas y covarianzas (S).

La matriz S recoge los valores de varianzas y covarianzas obtenidas de los activos en estudio.

Dicho lo anterior y con los elementos del modelo descritos, se pueden definir entonces la rentabilidad esperada ( $E(R)$ ) y la varianza de los retornos (M) de la siguiente manera:

**Ecuación 5.** *Retornos esperados modelo B&L*

$$E(R) = [(\tau S)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau S)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q]$$

**Ecuación 6.** *Varianza de los retornos del modelo B&L*

$$M = [(\tau S)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1}$$

Si los retornos siguen una distribución normal con media  $E(R)$  y varianza S, y suponiendo que el mercado tiende al equilibrio, se puede asociar que los retornos esperados tiendan a los arrojados por el modelo CAPM o  $\Pi$ . Partiendo de la siguiente ecuación será entendible:

**Ecuación 7.** *Equivalencia para llegar al retorno esperado*

$$P E(R) = Q + \varepsilon$$

Donde:

P: Es la matriz de dimensión  $k \times n$  de activos sobre los que se tiene un *view*.

Q: Es un vector de dimensión  $k \times 1$  que contiene los *views* de los retornos.

$\varepsilon$ : Vector aleatorio de dimensión  $k \times 1$  normalmente distribuido con media 0 y matriz diagonal de covarianzas  $\Omega$

Aplicando propiedades de las matrices se llega al siguiente resultado:

**Ecuación 8.** *Retorno esperado*

$$E(R) = \Pi + \tau S P^T [(P \tau S P^T) + \Omega]^{-1} (Q - P \Pi)$$

Donde es mucho más concluyente que en caso de no tener *views* sobre los activos o que la matriz P esté compuesta por ceros, implicará que el retorno esperado sea el de equilibrio.

Adicionalmente, He & Litterman (1999) proponen incluirle el error de la media de la matriz de varianzas y covarianzas, para hallar la covarianza posterior de la siguiente manera:

**Ecuación 9.** *Matriz de varianzas y covarianzas posterior*

$$S_p = S + M$$

Ahora, despejando de la ecuación anterior con la ecuación número 2, se encuentran los pesos del portafolio óptimo en la frontera eficiente del modelo B&L (Luna Ramírez & Tamayo Jaramillo, 2015).

**Ecuación 10.** *Ponderaciones óptimas del modelo B&L*

$$W_{B\&L} = \hat{\Pi}(AS_p)^{-1}$$

Donde  $\hat{\Pi}$  de dimensiones  $1 \times n$  es la media de las rentabilidades posteriores y  $S_p$  es la matriz de dimensiones  $n \times m$  de covarianzas de las rentabilidades posteriores.

### **4.3. Medidas de desempeño**

#### **4.3.1. Benchmark**

El *benchmark* es un parámetro, punto de referencia o un índice financiero, que se utiliza como herramienta para evaluar el desempeño de una estrategia de inversión.

De acuerdo con AMV (2019a), un *benchmark* es básicamente un portafolio de referencia, una herramienta que permite evaluar el desempeño de la gestión del administrador de portafolios. Las características que debe cumplir un índice de referencia son las siguientes:

- a. Preciso: los activos, así como las ponderaciones son claras.
- b. Replicable: la estrategia pasiva del *benchmark* es posible de replicar y comparar.
- c. Medible: se puede calcular de manera regular el rendimiento del *benchmark*.
- d. Apropiado: guarda coherencia con las estrategias utilizadas por el administrador del portafolio.
- e. El *benchmark* debe tener un tiempo de vigencia considerable donde se demuestre que la estrategia ha sido utilizada de manera consistente en el tiempo.

### 4.3.2. Sharpe Ratio

El ratio de Sharpe es la medida que permite analizar el exceso de retorno sobre la tasa libre de riesgo, que se obtiene en una inversión por cada unidad de riesgo que se asume. Según Bodie et al. (2014), la importancia del *trade off* entre la prima de riesgo y la desviación estándar, sugiere que la medición del atractivo de un portafolio dependerá de la relación entre la prima de riesgo y la desviación estándar de los rendimientos generados en exceso.

A continuación, se define el cálculo matemático del ratio de Sharpe:

**Ecuación 11.** *Ratio de Sharpe*

$$\text{Ratio de Sharpe} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

Donde:

$R_p$ : retorno del portafolio.

$R_f$ : retorno de la tasa libre de riesgo.

$\sigma_p$ : desviación estándar del portafolio.

### 4.3.3. Alpha

El *alpha* tiene dos metodologías de cálculo, por un lado, se puede considerar como el residuo de una regresión entre el retorno de un portafolio contra un factor de riesgo (*Alpha* de Jensen). Mientras que otra de manera, el cálculo se puede considerar como el exceso de retorno de un portafolio contra su índice de referencia o *benchmark*.

El *alpha* como exceso de retorno sirve para evaluar qué tan eficiente fue el proceso de selección de los activos en el portafolio. La fórmula para el cálculo es la siguiente:

**Ecuación 12.** *Eficiencia de la gestión patrimonial*

$$\alpha = R_p - R_b$$

Donde:

$R_p$ : retorno del portafolio.

$R_b$ : retorno del benchmark.

#### 4.3.4. Tracking error

De acuerdo con AMV (2019a), el *tracking error* representa la volatilidad de la diferencia que se genera entre la rentabilidad del portafolio y los retornos generados por el Benchmark. También se le conoce como la desviación estándar del *alpha* y se calcula de la siguiente manera:

**Ecuación 13. Volatilidad del gestor**

$$\text{Tracking error} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (R_p - R_b)^2}{N - 1}}$$

Donde:

$R_p$ : retorno del portafolio.

$R_b$ : retorno del benchmark.

N: número de periodos.

Se le conoce también como el riesgo del administrador del portafolio y representa los grados de libertad con los que el gestor podrá invertir en activos, que no están dentro del índice de referencia (Andbank, 2021).

#### 4.3.5. Information ratio

El *information ratio* permite determinar cuántas unidades de *alpha* se generan por cada unidad de volatilidad que asume para su generación. Gráficamente se encuentra lo siguiente:

**Ecuación 14. Exceso de alfa por unidad de riesgo**

$$\text{Information ratio} = \frac{\alpha}{\text{Tracking error}}$$

#### 4.3.6. Backtesting

AMV (2019b) afirma que el *backtesting* es el proceso en el que se replica un modelo o indicador, utilizando datos históricos y así comprobar si refleja de forma adecuada eventos pasados de relevancia en el análisis. También implica evaluar hacia atrás las conclusiones de un modelo en periodos anteriores o comparar con datos históricos.

#### **4.3.7. Batting average**

El *batting average* es una herramienta utilizada para medir la capacidad de un gestor de portafolio para vencer un índice de referencia o *benchmark*.

El cálculo es simple y resulta de dividir el número de días, semanas o meses, en los que el administrador del portafolio tuvo rendimientos por encima del índice de referencia sobre la cantidad total. Así se podrá hacer una proporción que podrá estar entre el 0% y el 100%, donde el hecho de tener un resultado superior al 50% implicará que el gestor vence al mercado o al *benchmark* más de la mitad de las veces.

Las principales características de esta herramienta son las siguientes:

- a. Sirve para medir la capacidad de un administrador de inversiones de alcanzar o superar los rendimientos del *benchmark*.
- b. Se debe calibrar para saber en qué porcentaje más allá del 50% verdaderamente se considerará exitoso al gestor.
- c. Al ser una medida relativa, implica que únicamente se concentra en la proporción de aciertos; pero no contempla el nivel de riesgo asumido por el inversionista para llegar al nivel alcanzado de éxitos.

### **5. Metodología**

Para la construcción del portafolio, ponderado por activos financieros basados en futuros de índices bursátiles de las bolsas de valores alrededor del mundo, se utilizó el modelo propuesto por Black-Litterman en el año 1990. Citando a Walters (2011), este modelo presenta dos contribuciones significativas frente al problema de la selección de activos.

En primer lugar, iniciar desde el equilibrio en el portafolio, por medio de pesos calculados para ponderar los activos seleccionados, pretende generar mayor exceso de rendimientos en el futuro. Esto parte de la premisa de la optimización en reversa, es decir, por medio del *backtesting*, seleccionar estos activos óptimos.

En segundo lugar, concede la posibilidad de otorgar un marco cuantitativo a supuestos o *views* del inversionista, como lo mencionan Black & Litterman (1992). Bajo estos puntos de

vista relativos, se logra llegar a una distribución combinada de los activos, dando lugar a diferentes desempeños del portafolio, de acuerdo con los supuestos iniciales.

Con estos elementos nombrados, es necesario elegir una canasta de activos para construir el portafolio, que posea una naturaleza similar al *benchmark*. Para esta investigación, el índice de referencia seleccionado fue el S&P Balanced Global Bond and Equity Futures Index, cuya estrategia de inversión se centra en los futuros de índices bursátiles de forma balanceada en renta fija y renta variable, como el S&P 500, Nikkei 225 y Euro Stoxx 50 en acciones, y para el caso de bonos el 10-Year US Treasury Note, Euro-Bund y 10-Year JGB.

Esta decisión se tomó después de analizar otros índices de futuros contruidos por la compañía Standard & Poor's, los cuales al fin y al cabo se descartaron por diferentes razones. Se estudió el caso del S&P Equity Futures and Currency Futures Indices, que invierte en el futuro de índices de renta variable como S&P500 y Dow Jones, además de monedas descritas como dólar estadounidense, yen japonés, dólar australiano y el euro. Esta opción fue rechazada por su concentración en renta variable para Norte América.

Además, se identificó el S&P Global Bond Futures Index, que pondera futuros de renta fija de las geografías localizadas en Estados Unidos, Europa, Canadá y Australia, con diferentes maduraciones de bonos soberanos. Sin embargo, no incorpora activos de renta variable que nutran el índice con otra naturaleza de instrumentos, por lo cual no fue seleccionado para esta investigación.

Frente al índice seleccionado, su tesis de diversificación se centra en la liquidez de los mercados de Estados Unidos, Europa y Japón, combinando instrumentos tanto de renta fija como variable, que permitan encontrar oportunidades de mercado adicionales frente a la volatilidad (S&P, 2020).

Por lo anterior, se tomaron cinco futuros de índices bursátiles que repliquen el comportamiento de las bolsas de valores, ubicadas en las geografías anteriormente mencionadas.

**Tabla 1.** Descripción contratos de futuros a trabajar

Contrato de Futuros	Valor Nominal (USD)	Tick Mínimo (USD)	Garantía Intradía (USD)	Garantía Cierre (USD)	Margin Call
E-Mini S&P 500 Future	Valor Índice * \$50	12.5	1 700	11 000	45.0%
E-Mini Nasdaq 100 Future	Valor Índice * \$20	5.0	180	16 000	45.0%
Nikkei 225 USD Future	Valor Índice * \$5	25.0	825	8 000	35.0%
E-Mini FTSE 100 Future	Valor Índice * \$50	5.0	600	3 200	15.0%
US T Note 10 Y Future	100 000	15.6	381	1 525	50.0%

Fuente: CME Group y elaboración propia, 2021.

El contrato E-Mini S&P500 Future tiene como activo subyacente el comportamiento ponderado de las 500 acciones con mayor capitalización bursátil de las bolsas de valores de Estados Unidos. El E-Mini Nasdaq 100, a su vez, es un índice tecnológico de la bolsa del mismo nombre en EE.UU, que responde a la dinámica de las 100 acciones con mayor volumen de capitalización.

Nikkei 225 sigue el comportamiento de las 225 acciones con mayor peso relativo dentro de las negociaciones bursátiles en Japón, mientras que el FTSE 100 lo hace en la Bolsa de Valores de Londres, permitiendo la totalidad de las geografías del *benchmark*, agregando el futuro del US Treasury Note 10 Years, para culminar con un portafolio balanceado en subyacentes de naturaleza fija y variable.

Los futuros denominados E-Mini son considerados activos de mayor acceso para los inversionistas con menor tamaño, según CME Group (2011). En el caso del S&P 500, su contrato es un quinto del tamaño estándar, permitiendo un aumento de entrada de inversores en estos vehículos.

Después de seleccionados los títulos, se tomaron los precios históricos desde el 2 de abril del año 2012 hasta el 1 de abril del 2021, con periodicidad mensual, y así generar los rendimientos de los activos. La decisión de escoger las variaciones con esta frecuencia está dada por la mejor aplicación del supuesto de normalidad de los retornos (Morse, 1984).



Se incluye el año 2020 y 2021, con el objetivo de no excluir el impacto de la crisis bursátil producida por el Covid-19 en 2020, y la posterior recuperación en 2021, generando una mayor robustez del modelo por la inclusión de crisis bursátiles.

La fuente de información es la plataforma de inversión de CME Group. Esta compañía es la bolsa más grande del mundo en términos de derivados financieros, y posee la data histórica de los precios de los índices bursátiles en fechas específicas.

Con la estimación de los retornos de cada activo, se da lugar así al valor esperado de los rendimientos del vehículo de inversión por medio de su promedio simple. También, se calcularon los excesos de rendimiento, por medio de la diferencia de la media del desempeño del activo y el retorno libre de riesgo (para este estudio, la tasa del bono del Tesoro de Estados Unidos a 10 años).

**Ecuación 15.** *Rentabilidad del activo  $i$ ésimo*

$$E(R_i) = \frac{\sum_{j=1}^n R_j}{n}$$

Donde:

$E(R_i)$ : rendimiento esperado del activo  $i$ ésimo  $i$ .

$R_j$ : rendimiento del activo  $i$ ésimo en la posición  $j$ .

$n$ : número de periodos.

A su vez, se halló el coeficiente de aversión al riesgo, conocido como  $A$ , que mide la profundidad de intención con la cual se está dispuesto a invertir activos riesgosos del mercado, postulado por Sharpe (1994).

La varianza fue calculada como la desviación estándar de los rendimientos, elevado al cuadrado y, se generaron a su vez, la matriz de covarianzas entre los desempeños de los activos escogidos, conocida como  $S$ , para evidenciar la volatilidad de los instrumentos financieros de este estudio.

Para calcular las ponderaciones en el equilibrio, se utilizaron las capitalizaciones de mercado, siguiendo a Cheung (2009), de los activos subyacentes de los derivados, estableciendo una

participación inicial en el portafolio de acuerdo con estos pesos. Este vector se conoce como  $w$ .

**Ecuación 16. Ponderaciones por capitalización**

$$w_i = \frac{MarketCap_i}{MarketCap_t}$$

Donde:

$MarketCap_i$ : capitalización de mercado del activo subyacente  $i$ ésimo  $i$ .

$MarketCap_t$ : capitalización de mercado del total de activos.

$w_i$ : peso en el equilibrio del activo  $i$ ésimo  $i$ .

De allí surgió la posibilidad de estimar los retornos implícitos en el equilibrio, al realizar el producto matricial entre la aversión al riesgo ( $A$ ), la matriz de varianzas y covarianzas ( $S$ ) y el vector de pesos iniciales ( $w$ ), definidos en la ecuación 2.

Por otra parte, es de gran relevancia incorporar en el modelo los supuestos de mercado, en el cual se postulan los *views* del inversionista, en este caso, de los autores de este estudio para los futuros de los índices bursátiles, siendo Daniel Esteban Zapata Nohavá ejecutivo comercial de inversiones en Valores Bancolombia, y Sebastián Arango Castillo analista de gestión en los segmentos de Personas y Pyme en el Grupo Bancolombia.

Es así, que se construyó la matriz de *views*, como lo llaman Black & Litterman (1992) en el modelo, dando como resultado un tamaño matricial de expectativas de mercado, representado por  $Q$ , que mide cuantitativamente la expectativa de los autores de la investigación frente a los activos seleccionados y  $P$ , matriz binaria que refleja los *views* positivos y negativos sobre los contratos de futuros.

Continuando con la construcción del portafolio, se estimó la incertidumbre de los supuestos de inversión, que permite ser calculada por medio de la multiplicación matricial del escalar  $\tau$ , que para este caso se incorporará con el valor de 1 en línea con lo estipulado por Idzorek (2004), así como la matriz de *views* y covarianzas, mediante la ecuación 4.

Con estas definiciones, se cuantificaron los excesos de retorno esperados frente al activo libre de riesgo, con los futuros elegidos en la canasta y los conceptos expuestos en la metodología utilizada del modelo Black-Litterman.

**Ecuación 17. Modelo Black Litterman**

$$E(R) - Rf = [(\tau S)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau S)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q]$$

Para la asignación de ponderaciones de los vehículos de inversión en el portafolio, nombrado en el modelo B-L como *portafolio allocation* por Black & Litterman (1992), depende principalmente de las restricciones que se propongan los inversionistas. Para este caso de estudio, se decidió implementar tanto la selección de activos sin restricciones de venta en corto (*short selling*) para hallar un portafolio con estas propiedades, como también una canasta de activos con la regla de no realizar este tipo de operaciones, y únicamente obtener posiciones largas (de compra).

En la alocaación de activos sin restricciones, se generó un vector de pesos para el portafolio, por medio del producto entre la matriz de varianzas y covarianzas inversa, así como el exceso de retornos esperado, arrojado por el modelo de Black-Litterman. De esta manera, se permiten porcentajes negativos de ponderación, generando como resultado una venta en corto para el activo con esta característica. Es así como al realizar una posición de este estilo, se adquiere una expectativa bajista.

**Ecuación 18. Ponderaciones del modelo B&L**

$$Z = (S)^{-1} \mu$$

Donde:

$(S)^{-1}$ : matriz inversa de varianzas y covarianzas.

$\mu$ : vector de exceso de retornos esperado por los activos.

Z: vector de pesos arrojados por el modelo.

Con respecto al escenario de selección de títulos con condicionamiento sin venta en cortos, es decir, todos los futuros deben tener posiciones en largo y, por ende, porcentajes de pesos positivos, se utilizó como criterio la maximización del Sharpe Ratio, para obtener el

portafolio óptimo en cuanto a generación de retornos por cada unidad de riesgo, de acuerdo con Theron & van Vuuren (2018).

Para maximizar este indicador, se estimó el exceso de retorno esperado del portafolio, de acuerdo con el rendimiento de cada activo y su producto con el vector pesos, así como la varianza esperada de la canasta de futuros, y la posterior desviación estándar, siendo la raíz cuadrada del anterior término.

**Ecuación 19.** *Varianza del portafolio*

$$\sigma^2 = \gamma^T S \gamma$$

Donde:

$\gamma$ : vector de pesos arrojado por el modelo.

$S$ : matriz de varianzas y covarianzas.

$\sigma^2$ : varianza del portafolio.

También se utilizaron criterios de limitaciones frente a las posiciones en cuanto a las geografías y tipos de activos subyacentes de renta fija o variable, resumidos en la siguiente tabla:

**Tabla 2.** Restricciones del portafolio

Contrato de Futuros	Inclusión en Portafolio	Porcentaje Mínimo
E-Mini S&P 500 Future	Si	≥4%
E-Mini Nasdaq 100 Future	Si	≥4%
Nikkei 225 USD Future	Si	≥4%
E-Mini FTSE 100 Future	Si	≥4%
US T Note 10 Y Future	Si	≥4%

Fuente: Elaboración propia, 2021.

Para el porcentaje mínimo se tuvo en cuenta que cada futuro debía obtener una participación positiva de acuerdo con el *benchmark* seleccionado, que destina recursos a Estados Unidos, Europa y Japón. La cuantía porcentual se obtuvo de acuerdo con las diferentes iteraciones realizadas para encontrar un porcentaje óptimo, que fuera coherente con la naturaleza de los

derivados, que se presentan en número de contratos de valores nominales, traducándose en una regla dura del modelo de esta ponderación en línea con contratos enteros.

Después de realizados estos elementos, se dio paso a la elaboración de una regresión simple, proponiendo una regresión de las series de tiempo del exceso de rentabilidad del portafolio *versus* los excesos de rentabilidad del *benchmark*, bajo la estructura del modelo CAPM, para evaluar la generación de *alpha*, conocido en el argot financiero como el nivel de exceso de rendimientos de un inversionista sobre el cual ha batido a un *benchmark* del mercado (estrategia pasiva), con el objetivo de evaluar si la estrategia activa supera a la pasiva, de acuerdo al *backtesting* generado.

En el cálculo de esta regresión se realiza la prueba *t-student*, para verificar que los parámetros *alpha* y *beta* del procedimiento sean estadísticamente significativos, según Novales (2017). Cuando el t-estadístico otorgue un valor por encima de 2, se considerará que es posible rechazar la hipótesis nula, sobre la cual el parámetro es 0, con un 95% de confianza, mientras que, si este valor arroja un número inferior, no será adecuada aceptar la hipótesis alternativa, en la cual el estimador es diferente a cero.

Ya que es un modelo de regresión lineal simple, se deben comprobar los supuestos de media cero de las perturbaciones, normalidad de las mismas, homocedasticidad de la varianza del error mediante la prueba de estadístico F y autocorrelación en los residuos por medio del estadístico Durbin-Watson, para brindarle más robustez a los parámetros que resultan de la aplicación de este método.

Se corroborará además si la media de rendimientos del portafolio es estadísticamente significativa en comparación con el *benchmark*, mediante la prueba de hipótesis de cola izquierda para las medias de dos muestras, con una confianza del 95%.

Así, para continuar con la verificación de los resultados, se utilizaron métodos como el *batting average*, para validar si el modelo es significativo en exceso de rendimientos, frente a una estrategia pasiva o índice, como el S&P Balanced Global Bund and Equity Futures. Frente a este método, se utiliza la proporción de veces en las cuales el modelo venció al índice pasivo, en donde se concluye que si la ponderación de activos seleccionados bate en más del 50% de las veces en desempeño al *benchmark*, puede resultar en una estrategia

exitosa. Para este caso de estudio, se utilizará un indicador del 60%, para ubicarse 10 percentiles por encima de la media.

Esto será comprobado estadísticamente por medio de la prueba de hipótesis con el estadístico Z de cola derecha, para muestras de más de 30 datos, respecto a las proporciones. Se comparó la proporción estimada, en este caso el *batting average*, y la relación deseada del 60%, con una confianza del 95%.

Por último, para ejercer una evaluación aún más robusta del resultado del modelo, se implementó el índice de información, conocido como *information ratio (IR)*, el cual calcula por medio del cociente entre la diferencia del promedio del desempeño del portafolio y la media del desempeño del índice pasivo, frente a la desviación típica del exceso de los rendimientos frente al *benchmark*, conocido como *tracking error*. Por lo tanto, se provee de información para indicar si el modelo genera excesos de rendimientos en el tiempo sobre la estrategia pasiva, como lo mencionan Gupta et al. (1999). En caso de que este indicador sea mayor que 0, se genera unidades de rendimiento por cada unidad de volatilidad, lo cual es positivo para el desempeño del portafolio.

## 6. Resultados

### 6.1. Portafolios

Con respecto a los resultados de ponderación, mediante el modelo Black-Litterman, se obtuvieron los siguientes hallazgos en cuanto a asignación de capital, así como de garantías, de acuerdo a la naturaleza de los derivados:

**Tabla 3.** Portafolio sin restricciones

Activo	Valor Cierre	Multiplicador	Número de Contratos	Valor Contrato USD	% Part. Contratos
E-Mini S&P 500 Future	4 010	50	5	1 002 500	99.3%
E-Mini Nasdaq 100 Future	13 316	20	5	1 331 600	131.8%
Nikkei 225 USD Future	29 695	5	1	148 475	14.7%
E-Mini FTSE 100 Future	1 008	20	78	1 572 558	-155.7%
US T Note 10 Y Future	100 000	1	1	100 000	9.9%

Fuente: Elaboración propia con datos de Nasdaq.com e Investing.com, 2021.

**Tabla 4.** Portafolio sin restricciones

Activo	Garantía	Valor Garantía USD	% Part. Garantías	Apalancamiento
E-Mini S&P 500 Future	11 000	55 000	14.0%	18
E-Mini Nasdaq 100 Future	16 000	80 000	20.3%	17
Nikkei 225 USD Future	8 000	8 000	2.0%	19
E-Mini FTSE 100 Future	3 200	249 600	63.3%	6
US T Note 10 Y Future	1 525	1 525	0.4%	66

Fuente: Elaboración propia con datos de Nasdaq.com e Investing.com, 2021.

**Tabla 5.** Portafolio sin cortos

Activo	Valor Cierre	Multiplicador	Número de Contratos	Valor Contrato USD	% Part. Contratos
E-Mini S&P 500 Future	4 010	50	1	200 500	8.9%
E-Mini Nasdaq 100 Future	13 316	20	6	1 597 920	71.1%
Nikkei 225 USD Future	29 695	5	1	148 475	6.6%
E-Mini FTSE 100 Future	1 008	20	5	100 805	4.5%
US T Note 10 Y Future	100 000	1	2	200 000	8.9%

Fuente: Elaboración propia con datos de Nasdaq.com e Investing.com, 2021.

**Tabla 6.** Portafolio sin cortos

Activo	Garantía	Valor Garantía USD	% Part. Garantías	Apalancamiento
E-Mini S&P 500 Future	11 000	11 000	8.2%	18
E-Mini Nasdaq 100 Future	16 000	96 000	71.6%	17
Nikkei 225 USD Future	8 000	8 000	6.0%	19
E-Mini FTSE 100 Future	3 200	16 000	11.9%	6
US T Note 10 Y Future	1 525	3 050	2.3%	66

Fuente: Elaboración propia con datos de Nasdaq.com e Investing.com, 2021.

Es así como se observa que en el primer portafolio (sin restricciones), hay una exposición cercana a \$1.000.000 de dólares, presentando en garantías alrededor de \$394.000, mientras

que en la segunda selección de activos (sin cortos), se invierte en \$2.247.000 dólares, por medio de \$134.000 dólares de colateral. En el caso en el cual se evidencian porcentajes negativos, significa exposición en corto del activo.

## **6.2. Generación de alpha**

De acuerdo con los resultados anteriormente descritos, se generó el *backtesting* del modelo, en comparación con el desempeño del *benchmark*.

Para las regresiones, se aplicó el modelo CAPM:

### **Ecuación 20.** *Regresión del modelo CAPM*

$$R_p = \alpha_p + \beta_p * R_m + \varepsilon_p$$

Donde:

$R_p$ : exceso de rendimiento del portafolio frente a la tasa libre de riesgo.

$\alpha_p$ : *alpha* o intercepto.

$\beta_p$ : *beta* o medida del riesgo sistémico (pendiente).

$R_m$ : exceso de rendimiento del mercado frente a la tasa libre de riesgo.

$\varepsilon_p$ : residuos o medida del riesgo idiosincrático del portafolio.



**Tabla 7.** Portafolio sin restricciones

<i>Estadísticas de la regresión</i>					
Coefficiente de correlación múltiple	0.180				
Coefficiente de determinación R <sup>2</sup>	0.033				
R <sup>2</sup> ajustado	0.023				
Error típico	0.076				
Observaciones	108.000				

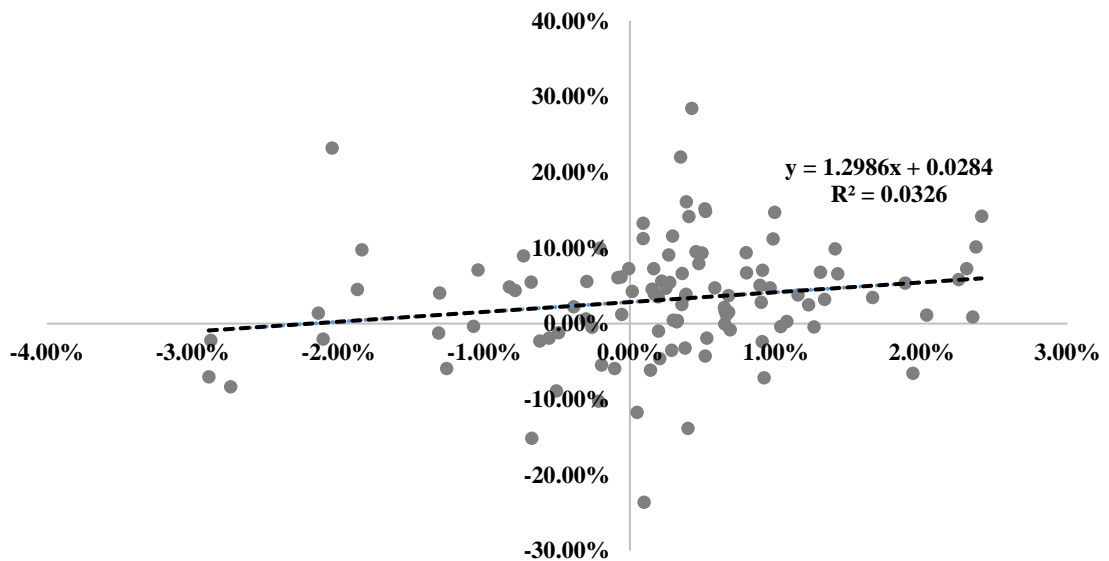
<i>Análisis de Varianza</i>					
	<i>Grados de libertad</i>	<i>Suma de cuadrados</i>	<i>Promedio de los cuadrados</i>	<i>F</i>	<i>Valor crítico de F</i>
Regresión	1.000	0.021	0.021	3.569	0.062
Residuos	106.000	0.613	0.006		
Total	107.000	0.634			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Error típico</i>	<i>Estadístico t</i>	<i>Probabilidad</i>	<i>Inferior 95%</i>	<i>Superior 95%</i>
Alpha	0.028	0.007	3.806	0.000	0.014	0.043
Beta	1.299	0.687	1.889	0.062	-0.064	2.661

Fuente: Elaboración propia con datos de Nasdaq.com e Investing.com, 2021.

**Gráfico 1.** Exceso de retornos portafolio sin restricciones vs exceso de retornos S&P  
Balanced Global Bond and Equity Futures Index



Fuente: Elaboración propia con datos de Nasdaq.com e Investing.com, 2021.

**Tabla 8.** Portafolio sin cortos

<i>Estadísticas de la regresión</i>					
Coefficiente de correlación múltiple	0.303				
Coefficiente de determinación R <sup>2</sup>	0.092				
R <sup>2</sup> ajustado	0.083				
Error típico	0.037				
Observaciones	108.000				

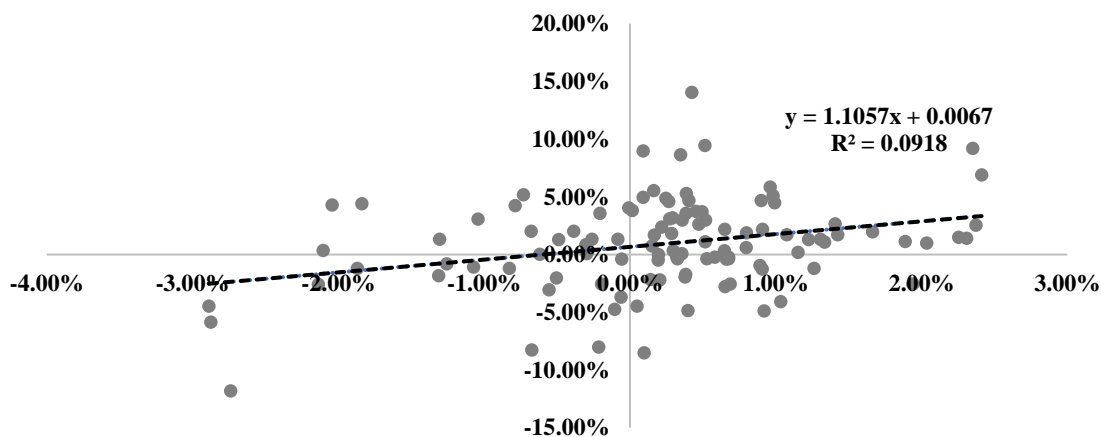
<i>Análisis de Varianza</i>					
	<i>Grados de libertad</i>	<i>Suma de cuadrados</i>	<i>Promedio de los cuadrados</i>	<i>F</i>	<i>Valor crítico de F</i>
Regresión	1.000	0.015	0.015	10.719	0.001
Residuos	106.000	0.148	0.001		
Total	107.000	0.163			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Error típico</i>	<i>Estadístico t</i>	<i>Probabilidad</i>	<i>Inferior 95%</i>	<i>Superior 95%</i>
Alpha	0.007	0.004	1.817	0.072	-0.001	0.014
Beta	1.106	0.338	3.274	0.001	0.436	1.775

Fuente: Elaboración propia con datos de Nasdaq.com e Investing.com, 2021.

**Gráfico 2.** Exceso de retornos portafolio sin cortos vs exceso de retornos S&P Balanced Global Bond and Equity Futures Index



Fuente: Elaboración propia con datos de Nasdaq.com e Investing.com, 2021.

En el caso del portafolio en el cual se posibilitan los cortos, muestra un estadístico t superior a 2 (valor crítico) en el *alpha*, indicando que con una confianza del 95%, se puede afirmar que es estadísticamente significativo, con un valor del 2.84%. El *beta* o pendiente del portafolio arroja un resultado de 1.299, considerándose una canasta de activos agresiva frente al *benchmark* cuando el valor es superior a 1, sin embargo, con un estadístico t inferior a 2, se establece que no se puede afirmar que sea significativo, con un 95% de confianza. En este orden de ideas, si el exceso de rentabilidad de mercado incrementa en una unidad, el exceso de rentabilidad del portafolio lo hará en 1.299.

El coeficiente de determinación o  $R^2$  para este portafolio es un valor cercano a cero, de 0.0326, por lo cual el modelo CAPM con respecto al portafolio de mercado no se ajusta explicativamente al comportamiento de la canasta de activos, con la ponderación seleccionada, como consecuencia de la poca volatilidad que ofrece el *benchmark* en su *asset location*.

Los supuestos de la regresión lineal fueron comprobados en el Anexo 3, en los cuales se cumple media de residuos igual a cero, normalidad en la distribución de los mismos, la varianza de los residuos cumple la homocedasticidad frente a la varianza los retornos del portafolio y no presenta autocorrelación fuerte en las perturbaciones.

Frente al portafolio con restricciones, el *alpha* se interpreta como no significativo, puesto que el resultado del valor-p es superior al 5%, y se evalúa con una confianza del 95%. El *beta* por su parte, con un resultado de 1.106, se puede afirmar que es diferente de 0, ya que el valor-p es inferior al 5%, como también el estadístico t es superior a 2, dando así un portafolio agresivo en interpretación frente al portafolio de la estrategia pasiva. De esta manera, si el exceso de rentabilidad de mercado incrementa en una unidad, el exceso de rentabilidad del portafolio lo hará en 1.109.

Con el coeficiente de determinación o  $R^2$  para esta canasta sin restricciones arroja un valor cercano a cero, de 0.0918, por lo cual es posible conservar la misma conclusión del portafolio anterior, en donde el *benchmark* no explica claramente el comportamiento de la ponderación seleccionada, de acuerdo con su naturaleza de *asset-location*.

Los supuestos de la regresión lineal fueron comprobados en el Anexo 4. Los errores obtuvieron un promedio igual a cero, se cumple la normalidad en su distribución, la prueba de estadístico F otorgó como resultado no rechazar la homocedasticidad y por último se identificó que no se presenta autocorrelación fuerte de los residuos.

Para enriquecer aún más el análisis, se implementó la prueba de hipótesis de cola izquierda para la diferencia de las medias de rendimientos del modelo Black-Litterman y el activo de estrategia pasiva de referencia. Por medio del resultado del Anexo 1, se puede soportar estadísticamente que las medias de los retornos de ambos portafolios (sin restricciones y con restricciones) son mayores que los promedios de los rendimientos del *benchmark* con un 95% de confianza, ya que el estadístico de prueba  $z$  cae en la zona de rechazo en ambos casos para este tipo de prueba.

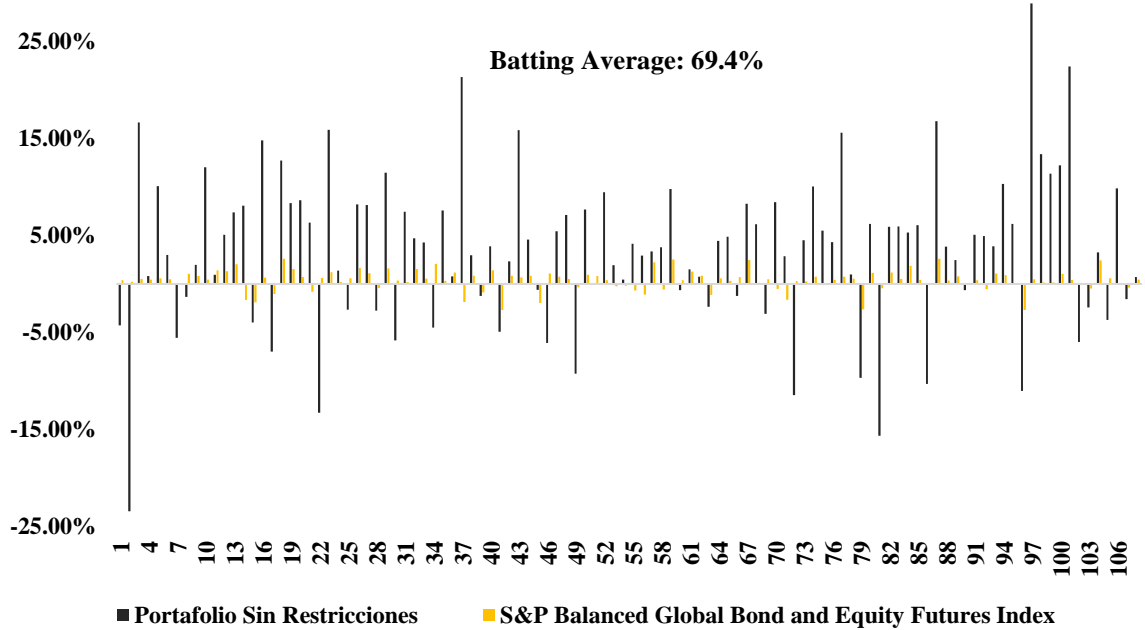
### **6.3. Batting average e índice de información**

#### **6.3.1 Portafolio sin restricciones**

En el portafolio sin restricciones, se encontró un *batting average* del 69.4% en el periodo analizado por *backtesting*. Por lo anterior, se espera que en este porcentaje de ocasiones el portafolio genere mayor rentabilidad que el S&P Balance Global Bond and Equity Futures.

Con evidencia estadística, por medio del Anexo 2, en el cual se elaboró una prueba de hipótesis de proporciones de cola derecha, se verifica que el *batting average* tiene soporte. Con un 95% de confianza, se establece que esta canasta de activos batirá en más de un 60% de las veces a la estrategia pasiva, puesto que el estadístico de prueba  $Z$  se ubicó en la zona de rechazo de esta prueba.

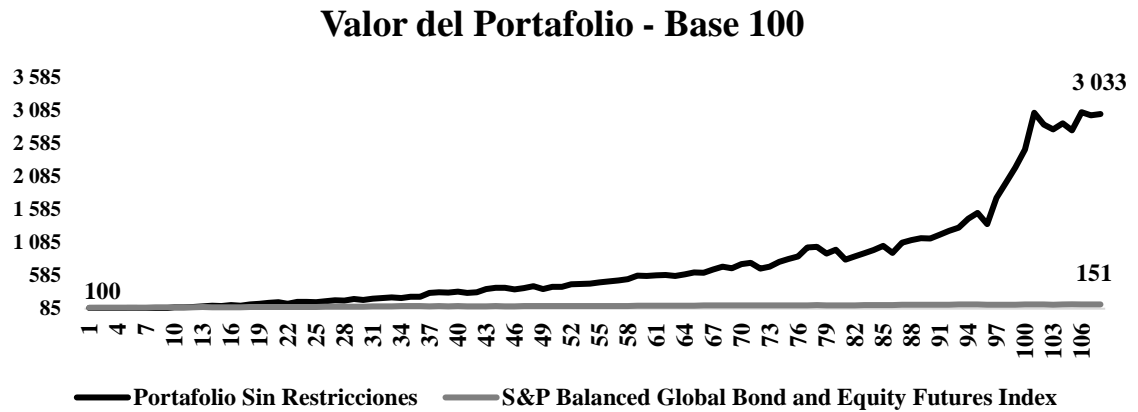
**Gráfico 3.** Rendimientos mensuales portafolio sin restricciones vs S&P Balanced Global Bond and Equity Futures



Fuente: Elaboración propia con datos de Nasdaq.com e Investing.com, 2021.

Por otra parte, se encontró que el portafolio en el periodo analizado tendría una tasa de crecimiento mensual compuesto de 3.52%, mientras que la estrategia pasiva obtendría un 0.39% en su desempeño. Por lo anterior, si un inversionista hubiera invertido 100 unidades monetarias desde el inicio del periodo mencionado, culminaría con 3,033 unidades monetarias, mientras que, con una inversión de igual magnitud en el *benchmark*, generaría 151 unidades.

**Gráfico 4.** Evolución portafolio sin restricciones vs Benchmark



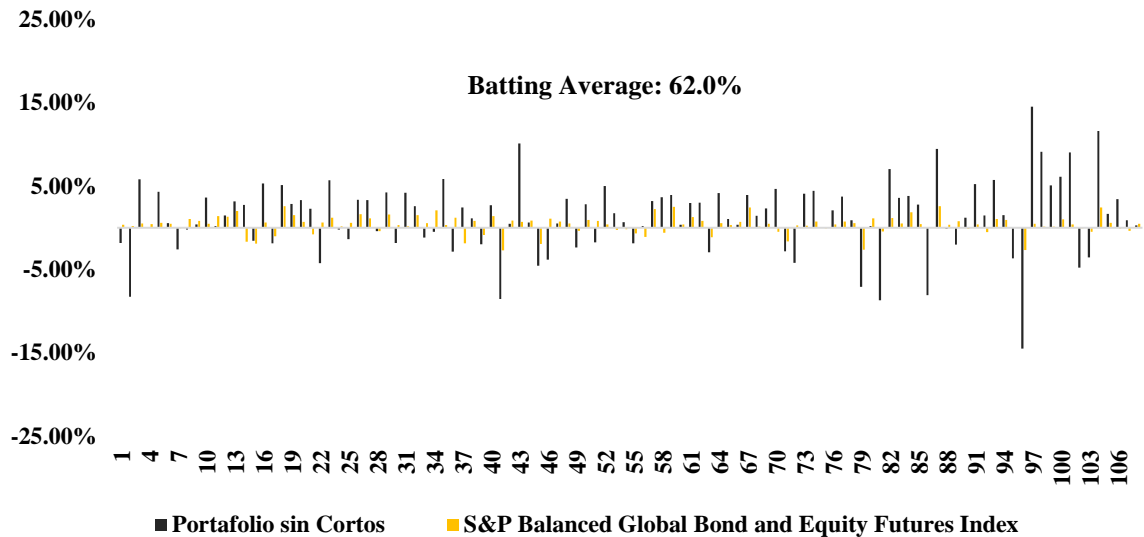
Fuente: Elaboración propia con datos de Nasdaq.com e Investing.com, 2021.

El índice de información evidenció un resultado de 0.41 en términos mensuales. Como este índice fue superior a 0, se menciona que el portafolio tiene la capacidad de generar exceso de rendimiento frente una canasta de referencia, teniendo en cuenta la desviación estándar de la diferencia de rendimientos entre estos dos tipos de activos.

### 6.3.2 Portafolio sin cortos

En el portafolio sin cortos, el *batting average* encontrado fue de 62.0% en el periodo analizado, sin embargo, de acuerdo con la prueba de hipótesis del Anexo 2, no hay evidencia estadística significativa que permita indicar que este portafolio batirá en una proporción superior del 60% al *mix* de activos de referencia del S&P Balance Global Bond and Equity Futures, ya que el estadístico de prueba Z no se ubica en la zona de rechazo, dando lugar a no poder rechazar la hipótesis nula.

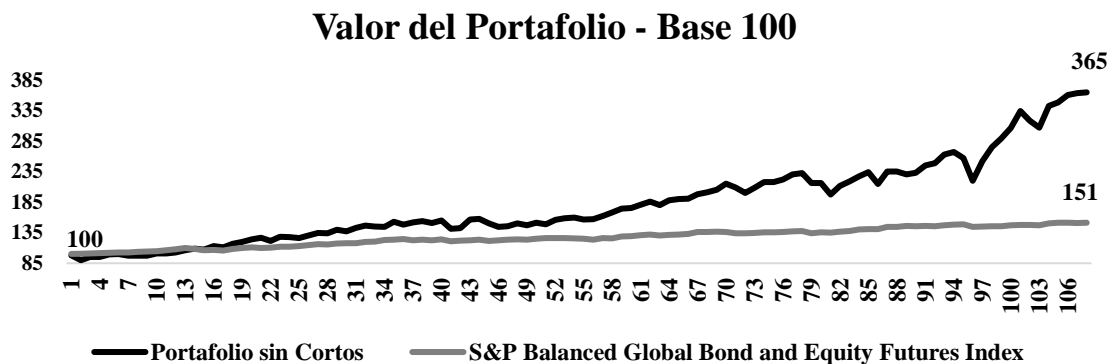
**Gráfico 5.** Rendimientos mensuales portafolio sin cortos vs S&P Balanced Global Bond and Equity Futures



Fuente: Elaboración propia con datos de Nasdaq.com e Investing.com, 2021.

En estas condiciones, la tasa de crecimiento mensual compuesta se observó en niveles de 1.23%, siendo superior frente a la tasa del *benchmark* del 0.39%. Es así como se puede medir el engrosamiento de una inversión desde base 100. Si en el periodo mencionado se invirtieron 100 unidades monetarias al inicio, al final obtendría 365 unidades en el portafolio sin cortos, frente a 151 en el índice de referencia.

**Gráfico 6.** Portafolio sin cortos vs Benchmark



Fuente: Elaboración propia con datos de Nasdaq.com e Investing.com, 2021.

El índice de información mostró un resultado de 0.23 en términos mensuales. Como este índice fue superior a 0, se menciona que el portafolio tiene la capacidad de generar exceso de rendimiento frente una canasta de referencia, teniendo en cuenta la desviación estándar de la diferencia de rendimientos entre estos dos tipos de activos.

## **7. Conclusiones y recomendaciones**

En este documento, se elaboró la construcción de un portafolio, compuesto por contratos de futuros de derivados estandarizados con activos subyacentes de índices bursátiles de Estados Unidos, Europa y Japón. Estos contratos son un gran reflejo de tesis de inversión que poseen los inversionistas frente a la dirección del mercado, en cuanto a rendimientos positivos o negativos.

Es por ello que el modelo Black-Litterman es una metodología adecuada para la construcción de esta canasta de activos, puesto que por la elaboración de la matriz de *views* de inversión, es posible incorporarlos al modelo y de esta manera incidir en la ponderación del portafolio, de acuerdo al desempeño histórico de los activos planteados.

Con este modelo planteado, se permite concluir los siguientes elementos:

- El planteamiento Black-Litterman en la búsqueda de ponderar activos en un portafolio permite porcentajes negativos, si en el desempeño histórico de un título este ha sido inferior a cero. Esto debe tomarse como una posición de venta en corto (apostarle a la baja del activo), para generar rendimientos positivos en el desarrollo de la inversión. En caso tal de únicamente incorporar posiciones largas en las tesis del inversionista, este debe ingresar restricciones de pesos no negativos en el modelo de optimización.
- Puesto que el modelo se encuentra basado en contratos de futuros estandarizados, en los cuales la unidad mínima es uno y deben ser número enteros y no porciones, la ponderación del portafolio debe ser ajustada bajo parámetros de contratos enteros, y de esta manera poder adquirir en el mercado estos títulos. Por lo anterior, en el proceso de optimización del modelo Black-Litterman debe incluirse esta condición.



- El valor agregado de los derivados, en este caso de contratos de futuros de índices bursátiles, es el apalancamiento que se permite bajo este vehículo de inversión. En el portafolio sin restricciones, se permite invertir en 2.54 veces el monto del colateral, incluso con activos de visión bajista, mientras que en portafolio sin cortos es posible incrementar la exposición 16.76 veces el colateral. Esta diferencia radica en los diferentes pesos de cada opción de canasta de activos, que poseen diferentes normas según su volatilidad.
- En la generación de *alpha* o exceso de rendimiento sobre un *benchmark*, es posible afirmar que el portafolio sin restricciones genera 2.84% más que el activo de referencia de forma mensual, de acuerdo con la evidencia estadística por medio del estadístico t mayor al valor crítico y el valor-p menor que el nivel de significancia. También se puede soportar estadísticamente que su media de retornos es mayor que los promedios de rendimiento del S&P Balanced Global Bond and Equity Futures.
- Para el caso del portafolio sin cortos, en la generación de *alpha*, no es posible afirmar que el exceso de rendimientos sea superior a cero, por lo cual no excedería el rendimiento del activo de referencia bajo esta metodología, ya que el valor del estadístico t fue inferior al valor crítico, y el valor-p fue superior al nivel de significancia. Sin embargo, bajo la prueba de hipótesis de cola izquierda para las medias, se puede indicar con un 95% que los retornos de este portafolio son mayores que los del *benchmark*.
- Para ambos tipos de portafolio encontrados en esta investigación, el *batting average* arrojó un resultado superior al 60%, no obstante, solo se encontró evidencia estadística en el portafolio sin restricciones bajo la prueba de hipótesis de proporciones de cola derecha, en la cual se batirá en más del 60% veces al *benchmark*. Por lo anterior, el portafolio con cortos tendrá mayor probabilidad que el portafolio con restricciones para generar rendimientos superiores en más oportunidades.
- El índice de información otorgó como resultado un valor superior a cero, indicando una gestión positiva del inversionista, dado el caso que seleccione estos portafolios de inversión, tomando en cuenta los valores esperados de rendimiento de los mismos, del *benchmark* y las volatilidades de estos activos. Este índice debe complementarse con la tolerancia al riesgo que cada inversionista está dispuesto a tomar, sin embargo, es

relevante comprender que los activos como los derivados son especulativos y de gran volatilidad.

Como recomendación clave para futuras investigaciones y profundización en el modelo Black-Litterman, la situación del mercado en desempeño histórico es un factor relevante en esta metodología e impactará significativamente la selección de activos. En el periodo seleccionado para este estudio, los índices bursátiles mundiales presentaron comportamientos positivos o negativos que derivaron en la asignación de pesos sobre el portafolio.

En casos como el derivado del FTSE 100, en donde el retorno esperado ha sido negativo en este periodo, la optimización arrojó una posición bajista en el activo, sin embargo, este escenario se pudo presentar distinto, por medio de un comportamiento histórico positivo que interprete el rendimiento esperado como superior a cero, dando lugar a una posición larga en este título. Por lo tanto, este será un parámetro crucial a tener en cuenta.

## Referencias

- Aguirre, M., & Cardona, J. (2017). *Portafolio de activos de renta fija TES colombianos construido a partir de la aplicación de un modelo Black-Litterman*.  
<https://www.repository.eafit.edu.co/handle/10784/11950>
- AMV. (2019a). *Guía administración de portafolios*. <https://www.amvcolombia.org.co/>
- AMV. (2019b). *Guía administración y control de riesgos financieros*.  
<https://www.amvcolombia.org.co/>
- AMV. (2021). *Operador Guía de Estudio Renta Variable*. <https://www.amvcolombia.org.co/wp-content/uploads/2021/01/Guia-Renta-Variable-Operador-enero-2021.pdf>
- Andbank. (2021). *Definición Tracking Error*. <https://www.andbank.es/>
- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global Portfolio Optimization. *Source: Financial Analysts Journal*, 48(5), 28–42.
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. (2014). *Investments* (Vol. 10).  
<https://www.pdfcoffee.com/investments-by-bodie-10th-edition-pdf-free.html>
- Bosiga, J. (2006). *Modelo Black-Litterman: Aplicación al mercado de renta variable colombiano*.  
<https://www.repository.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/13062/u713980.pdf?sequence=1>
- BVC. (2019). *Emisiones de acciones en Colombia y en MILA. ¿Qué hace falta para completar la tarea?*  
[https://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Mercados/informesbursatiles?com.tibco.ps.pagesvc.action=updateRenderState&rp.currentDocumentID=-7618fdd7\\_14759d442a0\\_441e0a0a600b&rp.attachmentPropertyName=Attachment&com.tibco.ps.pagesvc.targetPage=1f9a1c33](https://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Mercados/informesbursatiles?com.tibco.ps.pagesvc.action=updateRenderState&rp.currentDocumentID=-7618fdd7_14759d442a0_441e0a0a600b&rp.attachmentPropertyName=Attachment&com.tibco.ps.pagesvc.targetPage=1f9a1c33)
- Cheung, W. (2009). *The Black-Litterman Model Explained\**.  
[http://www.andreisimonov.com/NES/Litterman\\_Nomura.pdf](http://www.andreisimonov.com/NES/Litterman_Nomura.pdf)
- CME Group. (2011). *Guía de Futuros para los Operadores*, 20–21.  
<https://www.cmegroup.com/trading/files/traders-guide-to-futures-spn.pdf>
- CME Group. (2013). *Entendiendo los futuros sobre divisas*.  
<https://www.cmegroup.com/education/files/understanding-currency-futures-spanish.pdf>
- CME Group. (2021). *Guía de Futuros para los Operadores*.  
<https://www.cmegroup.com/es/education/a-traders-guide-to-futures.html#>

- CME Group. (2021). *Guía de Futuros para los Operadores Liderazgo de Pensamiento con una Perspectiva Global Cómo avanza el mundo*.  
<https://www.cmegroup.com/trading/files/traders-guide-to-futures-spn.pdf>
- Gray, S., & Place, J. (2003). Ensayos Derivados financieros. *Centro De Estudios Monetarios Latinoamericanos*, 45.
- Gupta, F., Prajogi, R., & Stubbs, E. (1999). The Information Ratio and Performance. *The Journal of Portfolio Management*, 26(1), 33–39. <https://doi.org/10.3905/jpm.1999.319779>
- He, G., & Litterman, R. (1999). The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios. *Goldman Sachs Investment Management Division*.
- Hull, J. C. (2009). *Introducción a los mercados de futuros y opciones* (6th ed.).  
[https://www.academia.edu/38246172/Introduccion\\_a\\_los\\_mercados\\_futuros\\_y\\_opciones\\_hull\\_6ta](https://www.academia.edu/38246172/Introduccion_a_los_mercados_futuros_y_opciones_hull_6ta)
- Idzorek, T. M. (2004). *A step-by-step guide to the Black-Litterman model incorporating user-specified confidence levels*. <https://www.cis.upenn.edu/~mkearns/finread/idzorek.pdf>
- Luna Ramírez, S., & Tamayo Jaramillo, M. (2015). *Aplicación del Modelo Black-Litterman al Mercado de Renta Variable Colombiano*. <https://www.eafit.edu.co/programas-academicos/pregrados/ingenieria-matematica/practicas-investigativas/Documents/aplicacion-modelo-black-litterman-mercado-renta.pdf>
- Mejía Vergnaud, A. (2008). Pirámides y “esquemas de Ponzi” son mecanismos financieros riesgosos e insostenibles. *El Tiempo*. <https://www.eltiempo.com/archivo/documento/CMS-3965844>
- Montoya, J. M., & Maya, C. (2016). *Comparación de metodologías de optimización de carteras: markowitz vs. black-litterman, para activos financieros colombianos*.  
<https://repository.eafit.edu.co/handle/10784/11504>
- Morse, D. (1984). An Econometric Analysis of the Choice of Daily Versus Monthly Returns in Tests of Information Content. *Journal of Accounting Research*, 22(2), 605.  
<https://doi.org/10.2307/2490667>
- Novales, A. (2017). *Midiendo el riesgo en mercados financieros*.  
<https://www.ucm.es/data/cont/media/www/pag-41460/VOLATILIDAD.pdf>
- Sharpe, W. F. (1994). The Sharpe Ratio. *The Journal of Portfolio Management*.  
<http://web.stanford.edu/~wfsarpe/art/sr/SR.htm>
- S&P. (2020). *S & P Balanced Global Bond and Equity-Futures Index Methodology*. May.  
<https://www.spglobal.com/spdji/en/indices/strategy/sp-balanced-global-bond-and-equity-futures-index/#overview>

Theron, L., & van Vuuren, G. (2018). The maximum diversification investment strategy: A portfolio performance comparison. *Cogent Economics and Finance*, 6(1). <https://doi.org/10.1080/23322039.2018.1427533>

Valencia, J. A. (2018a). *Modelo de Black-Litterman para la optimización de portafolios con views obtenidos por modelación de volatilidad*. [https://repository.eafit.edu.co/bitstream/handle/10784/13207/JorgeAndrei\\_ValenciaGarcia\\_2018.pdf?isAllowed=y&sequence=2](https://repository.eafit.edu.co/bitstream/handle/10784/13207/JorgeAndrei_ValenciaGarcia_2018.pdf?isAllowed=y&sequence=2)

Walters, J. (2011). The Black-Litterman Model in Detail. *SSRN Electronic Journal*, February 2007, 1–65. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1314585>

## Anexos

### Anexo 1. Prueba de hipótesis de los retornos cola izquierda

Medias Portafolio sin Restricciones		Medias Portafolio sin Cortos	
$\mu$ Benchmark	0.39%	$\mu$ Benchmark	0.39%
$\mu$ Portafolio	3.52%	$\mu$ Portafolio	1.30%
$\sigma^2$ Benchmark	0.01%	$\sigma^2$ Benchmark	0.01%
$\sigma^2$ Portafolio	0.63%	$\sigma^2$ Portafolio	0.19%
n Benchmark	108	n Benchmark	108
n Portafolio	108	n Portafolio	108
Z	-4.05	Z	-2.11
$\alpha$	5%	$\alpha$	5%
$z_\alpha$	-1.64	$z_\alpha$	-1.64

Ho:  $\mu$  Benchmark -  $\mu$  Portafolio = 0

Ha:  $\mu$  Benchmark -  $\mu$  Portafolio < 0

$Z < z_\alpha$

Se rechaza Ho

Cae en zona de rechazo

Ho:  $\mu$  Benchmark -  $\mu$  Portafolio = 0

Ha:  $\mu$  Benchmark -  $\mu$  Portafolio < 0

$Z < z_\alpha$

Se rechaza Ho

Cae en zona de rechazo

Zona de Rechazo:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} < -z_\alpha$$

Fuente: Elaboración propia, 2021

**Anexo 2. Prueba de hipótesis de las proporciones cola derecha**

Proporciones Portafolio sin Restricciones		Proporciones Portafolio sin Cortos	
P	69.44%	P	62.04%
n	108	n	108
Po	60%	Po	60%
Ho: Po = 60%		Ho: Po = 60%	
Ha: P > 60%		Ha: P > 60%	
Z	2.00	Z	0.43
$\alpha$	5%	$\alpha$	5%
$z_{\alpha}$	1.64	$z_{\alpha}$	1.64
$Z > z_{\alpha}$		$Z < z_{\alpha}$	
Se rechaza Ho		No se rechaza Ho	
Cae en zona de rechazo		No cae en zona de rechazo	

Z de Prueba:

$$Z_{prueba} = \frac{\frac{x}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Fuente: Elaboración propia, 2021.

### Anexo 3. Supuestos de Regresión Lineal en Portafolio sin Restricciones

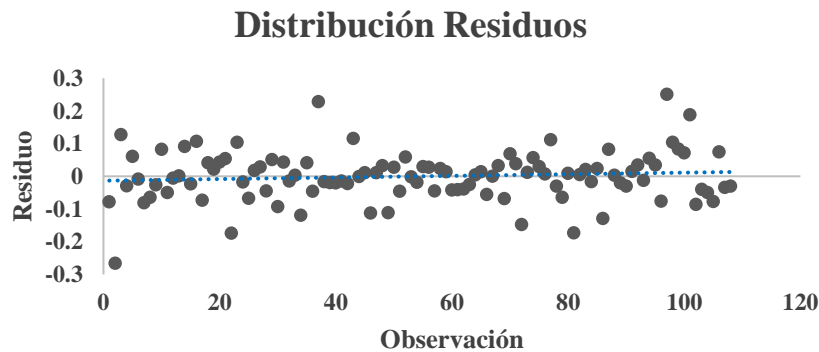
Supuestos Portafolio sin Restricciones		
$\mu$ Residuos		0.000%
$\sigma^2$ Residuos		0.574%
$\varepsilon \sim N(0, 0.574\%)$		
<b>Homocedasticidad Residuos</b>		
Prueba F para varianzas de dos muestras		
	<i>Pronóstico Portafolio Sin Restricciones</i>	<i>Residuos</i>
Media	3.518%	0.000%
Varianza	0.633%	0.574%
Observaciones	108.0000	108.0000
Grados de libertad	107.0000	107.0000
F	1.1024	
P(F<=f) una cola	0.3075	
Valor crítico para F (una cola)	1.3764	

Ho:  $\sigma^2$  Portafolio =  $\sigma^2$  Residuos

Ha:  $\sigma^2$  Portafolio  $\neq$   $\sigma^2$  Residuos

F < f( $\alpha=5\%$ )

No se rechaza Ho



#### Autocorrelación Residuos

Estadístico Durbin-Watson

Estadístico DW 2.35

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2}$$

Es cercano a 2. No se presenta autocorrelación fuerte.

Fuente: Elaboración propia, 2021.



#### Anexo 4. Supuestos de Regresión Lineal en Portafolio sin Cortos

##### Supuestos Portafolio sin Cortos

$\mu$ Residuos	0.000%
$\sigma^2$ Residuos	0.139%
$\varepsilon \sim N(0, 0.139\%)$	

##### Homocedasticidad Residuos

Prueba F para varianzas de dos muestras

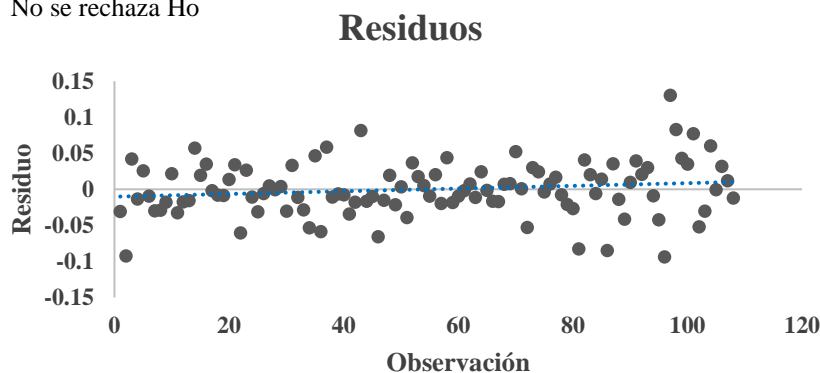
	Pronóstico Portafolio Sin Cortos	Residuos
Media	1.299%	0.000%
Varianza	0.189%	0.139%
Observaciones	108.0000	108.0000
Grados de libertad	107.0000	107.0000
F	1.3609	
P(F<=f) una cola	0.0563	
Valor crítico para F (una cola)	1.3764	

Ho:  $\sigma^2$  Portafolio =  $\sigma^2$  Residuos

Ha:  $\sigma^2$  Portafolio  $\neq$   $\sigma^2$  Residuos

F < f( $\alpha=5\%$ )

No se rechaza Ho



##### Autocorrelación Residuos

Estadístico Durbin-Watson	$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2}$
Estadístico DW	2.16

Es cercano a 2. No se presenta autocorrelación fuerte.

Fuente: Elaboración propia, 2021.

### **Anexo 5. Demostración retornos en equilibrio**

Parte del modelo CAPM:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_m) - r_f)$$

$$E((r_i) - r_f) = \beta_i(E(r_m) - r_f)$$

En términos vectoriales:

$$E((r) - r_f) = \beta_i(E(r_m) - r_f)$$

Exceso de retornos esperados:

$$\pi = E((r) - r_f)$$

$\mu_m = (E(r_m) - r_f)$ , Valor esperado del mercado

$$\pi = \beta\mu_m$$

Donde,

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2} = \frac{cov(r, r'w_m)}{\sigma_m^2}$$

Reemplazando en la ecuación del exceso de retornos esperados:

$$\pi = \frac{cov(r, r'w_m)}{\sigma_m^2} \mu_m$$

Dado que  $w_m$  es fijo, se tiene lo siguiente:

$$\pi = \frac{cov(r, r')w_m}{\sigma_m^2} \mu_m$$

Reorganizando:

$$\pi = \frac{E((r_m) - r_f)}{\sigma_m^2} cov(r, r')w_m$$

$$\pi = ASw_m$$

Fuente: Elaboración propia, 2021.

**Anexo 6. Demostración valor esperado y varianza modelo B&L**

Supuestos del modelo Black Litterman

1.  $PE(r) \setminus E(r) \sim N(Q, \Omega)$
2.  $E(r) \sim N(\pi, \tau S)$

Partiendo del teorema de Bayes:

$$P(E(r) \setminus PE(r)) = \frac{P(PE(r) \setminus E(r)) * P(E(r))}{P(PE(r))}$$

Aplicando la función de densidad de la distribución normal:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Reemplazando en los supuestos:

$$P(PE(r) \setminus E(r)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^k \det(\Omega)}} e^{-\frac{1}{2}(PE(r)-Q)' \Omega^{-1}(PE(r)-Q)}$$

$$P(E(r)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^n \det(\tau S)}} e^{-\frac{1}{2}(E(r)-\pi)' \tau S^{-1}(E(r)-\pi)}$$

Reemplazando en el numerador del teorema de Bayes:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi^k \det(\Omega)}} e^{-\frac{1}{2}(PE(r)-Q)' \Omega^{-1}(PE(r)-Q)} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi^n \det(\tau S)}} e^{-\frac{1}{2}(E(r)-\pi)' \tau S^{-1}(E(r)-\pi)} \right)$$

Resolviendo;

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi^k \det(\Omega)} * \sqrt{2\pi^n \det(\tau S)}} e^{\left(-\frac{1}{2}(PE(r)-Q)' \Omega^{-1}(PE(r)-Q) + \frac{-1}{2}(E(r)-\pi)' \tau S^{-1}(E(r)-\pi)\right)}$$

Desarrollando los términos:

$$(P'E(r)'\Omega^{-1}PE(r) - QP'E(r)'\Omega^{-1} - Q'\Omega^{-1}PE(r) + QQ'\Omega^{-1}) + (E(r)'(\tau S)^{-1}E(r) - \pi E(r)'((\tau S)^{-1} - \pi'(\tau S)^{-1}E(r) + \pi'(\tau S)^{-1}\pi$$

Dada la simetría entre  $\Omega$  y  $S$ , entonces;

$$QP'E(r)'\Omega^{-1} = Q'\Omega^{-1}PE(r)$$

$$\pi E(r)'((\tau S)^{-1} = \pi'(\tau S)^{-1} E(r)$$

Organizando y simplificando términos:

$$H = P'\Omega^{-1}P + (\tau S)^{-1}$$

$$C = Q\Omega^{-1}P + \pi(\tau S)^{-1}$$

$$A = QQ'\Omega^{-1} + \pi'(\tau S)^{-1}\pi$$

$$E(r)'HE(r) - 2C'E(r) + A$$

Dado que  $H = H'$  por simetría se tiene que,

$$E(r)'H'E(r) - 2C'E(r) + A$$

Se introduce la matriz identidad  $I = H^{-1}H$

$$\rightarrow (HE(r))' H^{-1}HE(r) - 2C'H^{-1}HE(r) + A$$

Utilizando nuevamente la matriz identidad y ordenando términos,

$$(E(r) - CH^{-1})' H(E(r) - H^{-1}C) - C'H^{-1}C + A$$

Al integrar,  $-C'H^{-1}C + A$  se anulan al no depender de  $PE(r)$  y al introducir nuevamente el exponente se tiene,

$$P(E(r)\backslash PE(r)) \approx e^{\frac{-1}{2}(E(r)-CH^{-1})' H(E(r)-H^{-1}C)}$$

Por lo tanto,

$$E(r)\backslash PE(r) \sim N([( \tau S)^{-1} + P^T \Omega^{-1}P]^{-1} [(\tau S)^{-1}\pi + P^T \Omega^{-1}Q], [( \tau S)^{-1} + P^T \Omega^{-1}P]^{-1})$$

Fuente: Elaboración propia, 2021.