

IDENTIFICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DINÁMICAS DE
UNA ESTRUCTURA SOMETIDA A EXCITACIÓN EN LA
BASE EMPLEANDO TÉCNICAS PARAMÉTRICAS (MÉTODO
DEL SUBESPACIO)

RUBÉN DARÍO GÓMEZ ARANGO

UNIVERSIDAD EAFIT
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL
MEDELLÍN

2014

IDENTIFICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DINÁMICAS DE
UNA ESTRUCTURA SOMETIDA A EXCITACIÓN EN LA
BASE EMPLEANDO TÉCNICAS PARAMÉTRICAS (MÉTODO
DEL SUBESPACIO)

RUBÉN DARÍO GÓMEZ ARANGO

Proyecto para optar por el título de Magister en Ingeniería

ASESOR:

JUAN CARLOS BOTERO PALACIO, PhD.

UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

MEDELLÍN

2014

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad EAFIT por creer en la investigación como uno de los aportes fundamentales de la academia a la sociedad. Al profesor Juan Carlos Botero Palacio por el apoyo brindado durante el desarrollo del presente trabajo y en general a cada una de las personas que de una u otra forma hicieron parte de mi formación personal y profesional.

RESUMEN

Se implementa el método del subespacio como una metodología para la identificación de sistemas utilizando técnicas paramétricas con la cual se pueden obtener los parámetros modales de estructuras a partir de registros obtenidos por medio de instrumentación.

Se estiman las propiedades dinámicas de un modelo estructural a escala 1:3 construido, instrumentado y ensayado en el laboratorio de ingeniería sísmica de la Universidad EAFIT. Se realizan pruebas de excitación en la base y obtienen registros de aceleración por medio de acelerómetros instalados en diferentes puntos del modelo bajo diferentes esquemas de instrumentación. A partir de los registros se identifican los doce primeros modos de la estructura utilizando el método del subespacio. Los resultados del proceso de identificación son comparados con los obtenidos al realizar un análisis modal convencional y con los resultados de investigaciones anteriores en las que se realizó un análisis espectral al mismo modelo estructural.

Los resultados obtenidos permiten validar la utilización del método del subespacio en la identificación de las propiedades dinámicas del modelo ensayado ya que éstos son consistentes con lo obtenido con modelos teóricos y con el análisis espectral realizado en investigaciones anteriores a partir de registros obtenidos por medio de instrumentación.

NOMENCLATURA

A	Matriz dinámica del modelo de estado de espacio discreto
A_c	Matriz dinámica del modelo de estado de espacio continuo
B	Matriz de entradas del modelo de estado de espacio discreto
B_c	Matriz de entradas del modelo de estado de espacio continuo
B_2	Matriz de localización de entradas
C	Matriz de salida del modelo de estado de espacio discreto
C_c	Matriz de salida del modelo de estado de espacio continuo
D	Matriz de transmisión directa del modelo de estado de espacio discreto
D_c	Matriz de transmisión directa del modelo de estado de espacio continuo
a_i, b_i	Matrices modales
C_a, C_v, C_d	Matrices de localización de salidas para aceleración, velocidad y desplazamiento
$f(t)$	Fuerza de excitación
f	Frecuencia [Hz]
f_i	Frecuencia modal [Hz]
i	Número de bloques fila de la matriz Hankel
j	Unidad imaginaria $j^2 = -1$
k	Instante de tiempo $t = k\Delta t$, $k \in \mathbb{N}$
L^T	Matriz de participación modal en el tiempo discreto $L^T = \Psi^{-1}B$
L_c^T	Matriz de participación modal en el tiempo continuo $L_c^T = \Psi^{-1}B_c$
l	Número de salidas
M, C_2, K	Matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del modelo de elementos finitos
m_2, c_2, k_2	Masa, amortiguamiento y rigidez del modelo de elementos finitos
m	Número de entradas
m_i	Masa modal
n	Orden del modelo de estado $n = 2n_2$
n_2	Número de grados de libertad del modelo de elementos finitos
Q, R, S	Matrices de covarianza de las secuencias de ruido w_k y v_k
$q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$	Vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración en el tiempo t
$u(t)$	Entrada en el tiempo, t
$u(k)$	Valor de la k -ésima entrada
V	Matriz de las formas modales en el tiempo discreto, $V = C\Psi$
V_c	Matriz de las formas modales en el tiempo continuo, $V_c = C_c\Psi$
v_k	Ruido medido en el instante de tiempo k
w_k	Ruido del modelo en el instante de tiempo k
$x(t)$	Estado en el tiempo, t
$x_m(t)$	Estado modal en el tiempo t , $x(t) = \Psi x_m(t)$
x_k	Estado en el instante k
$y(t)$	Salida en el tiempo t
y_k	Salida en el instante k
Δt	Periodo de muestreo
δ_k	Delta de Kronecker
Θ	Matriz de vectores propios complejos del modelo de elementos finitos (Caso de amortiguamiento no proporcional)

Λ	Matriz diagonal que contiene los valores propios del modelo de elementos finitos, λ_i
Λ_c	Matriz diagonal que contiene los valores propios del modelo del tiempo continuo, λ_i, λ_i^*
Λ_d	Matriz diagonal que contiene los valores propios del modelo del tiempo discreto, μ_i, μ_i^*
λ_i	Valor propio en el tiempo continuo
μ_i	Valor propio en el tiempo discreto
Φ	Matriz de vectores propios “reales” del modelo de elementos finitos (amortiguamiento proporcional)
ϕ	Vector propio “real” del modelo de elementos finitos (amortiguamiento proporcional)
ξ_i	Fracción de amortiguamiento crítico
Ψ	Matriz que contiene los vectores propios del modelo de estado de espacio
Ω	Matriz diagonal que contiene las frecuencias circulares de vibración ω_i [rad/s]
ω	Frecuencia circular [rad/s]
ω_i	Frecuencia circular modal [rad/s]

$(\cdot)^*$	Conjugada compleja
$(\cdot)^H$	Transpuesta conjugada compleja

CVA	C anonical V ariate A nalysis
MAC	M odal A ssurance C riterion
N4SID	N umerical algorithms for S ubspace S tate S pace S ystem I dentification
SUBID	S ubspace I dentification Algorithms
SVD	S ingular V alue D escomposition
ZOH	Z ero- O rders H old

TABLA DE CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS.....	i
RESUMEN.....	iii
NOMENCLATURA.....	v
TABLA DE CONTENIDO.....	vii
1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 OBJETIVO GENERAL.....	2
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	2
1.3 ANTECEDENTES.....	2
1.4 ENFOQUE DEL TRABAJO.....	4
1.5 ESQUEMA GENERAL DEL DOCUMENTO.....	4
2 MODELOS DE VIBRACIÓN DE ESTRUCTURAS.....	5
2.1 INTRODUCCIÓN.....	5
2.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.....	5
2.2.1 Planteamiento de estado.....	6
2.2.2 Determinación de los valores y vectores propios para el caso de vibración libre no amortiguada.....	7
2.2.3 Determinación de los valores y vectores propios para el caso con amortiguamiento proporcional.....	8
2.2.4 Determinación de los valores y vectores propios para el caso general.....	8
2.3 MODELO DE ESTADO DE ESPACIO CONTINUO.....	10
2.3.1 Modelo de estado para la vibración de una estructura.....	10
2.3.2 Parámetros modales.....	12
2.4 MODELO DE ESTADO DE ESPACIO DISCRETO.....	13
2.4.1 Características de los datos utilizados.....	13
2.4.2 Relación entre el tiempo continuo y el tiempo discreto.....	13
2.4.3 Parámetros modales.....	14
2.5 IDENTIFICACIÓN DETERMINISTA-ESTOCÁSTICA COMBINADA.....	15
2.6 IDENTIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS MODALES.....	16
2.6.1 Identificación de las matrices A , B , C y D del modelo de espacio utilizando el método del subespacio.....	16
2.6.2 Orden del modelo de estado espacio “n”.....	16
3 VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA IMPLEMENTADA.....	17
3.1 INTRODUCCIÓN.....	17
3.2 SEÑAL DE ENTRADA Y SEÑAL DE SALIDA.....	17
3.2.1 Señal de entrada.....	17
3.2.2 Señal de salida.....	18

3.3 SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD	18
3.3.1 Identificación determinista	18
3.3.2 Identificación estocástica	18
3.3.3 Análisis de resultados	19
3.4 SISTEMA DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD (2D)	20
3.4.1 Identificación determinista	20
3.4.2 Identificación estocástica	20
3.4.3 Análisis de resultados	23
3.5 SISTEMA DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD (3D)	23
3.5.1 Identificación determinista	24
3.5.2 Identificación estocástica	24
3.5.3 Análisis de resultados	29
3.6 CONCLUSIONES	30
4 APLICACIÓN	31
4.1 INTRODUCCIÓN	31
4.2 DISEÑO EXPERIMENTAL	31
4.2.1 Descripción del modelo de laboratorio	31
4.2.2 Instrumentación	32
4.2.3 Tratamiento de las señales	34
4.3 ANÁLISIS MODAL	34
4.4 PRUEBAS CON EXCITACIÓN EN LA BASE UTILIZANDO LA MESA VIBRADORA	36
4.4.1 Identificación de los parámetros modales	38
4.4.2 Análisis de resultados	49
4.5 CONCLUSIONES	50
4.6 COMPARACIÓN CON LAS RESULTADOS DE LAS TÉCNICAS NO PARAMÉTRICAS	51
5 CONCLUSIONES E INVESTIGACIONES FUTURAS	53
5.1 Conclusiones	53
5.2 Investigaciones futuras	53
6 ANEXOS	57
REFERENCIAS	68

1 INTRODUCCIÓN

En la concepción y diseño de cualquier estructura, se asumen valores que definen las propiedades físicas y geométricas de los materiales que se emplearán en su construcción, con estos valores se establece un modelo matemático que predice el comportamiento dinámico de la estructura cuando se vea sometida a cualquier tipo de excitación. Sin embargo, la variabilidad de las propiedades de los materiales, las hipótesis asumidas en los modelos matemáticos y la incertidumbre en los diferentes tipos de excitación hacen que el comportamiento real de la estructura difiera de lo proyectado en el diseño.

Ante la necesidad de evaluar los parámetros reales de una estructura que definen su comportamiento ante cargas dinámicas (periodos, amortiguamientos, formas modales y factores de participación), surge la posibilidad de realizar pruebas dinámicas experimentales. En la literatura se plantean dos grupos de pruebas experimentales; la primera se desarrolla empleando mediciones sísmicas y la segunda empleando mediciones de vibraciones ambientales. Con base en los registros obtenidos en estas pruebas se buscan los parámetros de la estructura necesarios para generar dicha respuesta, esto es conocido como proceso de identificación. El proceso de identificación puede realizarse utilizando técnicas paramétricas o técnicas no paramétricas. Las técnicas paramétricas estiman los valores de las propiedades estructurales necesarias para producir una óptima correlación entre las respuestas medidas y calculadas, mientras que las técnicas no paramétricas determinan las características del sistema estructural a partir del análisis de datos en el dominio del tiempo y de la frecuencia empleando técnicas espectrales.

En la literatura se puede encontrar el tema de las técnicas no paramétricas ampliamente tratado (Bendat y Pierson, 1993). En particular se hará referencia a (Henaó y Botero, 2013) ya que en dicho documento se muestra de manera general el alcance de estas técnicas y se presentan los resultados de su aplicación a un modelo ensayado en el laboratorio de ingeniería sísmica de la universidad EAFIT los cuales son objeto de comparación con los resultados obtenidos en la presente investigación utilizando técnicas paramétricas.

Entre las técnicas paramétricas se destaca el método del subespacio para la identificación de sistemas dinámicos el cual ha tenido importantes desarrollos en los últimos años. El presente trabajo se basa en los resultados obtenidos por (Ljung, 1999; Van Overschee y De Moor, 1996; Peeters, 2000). Por lo extenso del tema y por el enfoque que se le dio la investigación, en el presente trabajo se presentan sólo algunos de los principales tópicos de la identificación de sistemas por métodos de subespacio y de la identificación de parámetros modales, es por esto que no se presentan desarrollos matemáticos rigurosos de la metodología implementada, sin embargo, el lector interesado podrá encontrar el tema ampliamente tratado en la bibliografía de referencia.

El proyecto trata algunos de los desarrollos más recientes de la identificación de sistemas con métodos del subespacio y de la identificación de parámetros modales, sin embargo, son muchos los aspectos que no son tratados en el mismo, es por esto que se espera que se continúen los estudios al respecto para permitir que el grupo de investigación de la universidad EAFIT alcance un nivel competitivo que lo nivele en la frontera del conocimiento y que permita en el futuro aportar a la comunidad científica en la generación de nuevo conocimiento.

1.1 OBJETIVO GENERAL

Desarrollar herramientas computacionales propias que permitan identificar las propiedades dinámicas de un sistema sometido a pruebas de vibración ambiental o vibración forzada utilizando técnicas paramétricas (Método del subespacio).

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Definir procesos analíticos y matemáticos a emplear para la identificación de sistemas utilizando técnicas paramétricas.
- Elaborar un programa de cómputo en MATLAB, que implemente el método de subespacio para la identificación de las propiedades dinámicas de una estructura.
- Realizar pruebas experimentales de vibración forzada a un modelo estructural construido en acero utilizando la mesa vibradora de la universidad EAFIT.
- Comparar los resultados obtenidos mediante el método espectral y los obtenidos mediante el empleo de técnicas paramétricas.

1.3 ANTECEDENTES

La necesidad de evaluar las propiedades dinámicas de las estructuras, de validar los modelos matemáticos con los que éstas han sido concebidas y de tener una medida de su salud estructural a través del tiempo ha llevado a la búsqueda de metodologías para obtener esta información a partir de mediciones realizadas en estructuras reales. Este tema ha cobrado importancia debido a que la esbeltez de obras civiles y de edificios se ha incrementado significativamente en las últimas décadas debido a la demanda económica de materiales estructurales más eficientes, a importantes avances en el diseño estructural y en los métodos constructivos y a las tendencias de los diseños arquitectónicos (Reynders, 2009).

Un modelo matemático de un sistema físico sujeto a cargas variables en el tiempo puede establecerse con base en las leyes fundamentales de la dinámica y del análisis estructural. En este enfoque, conocido generalmente como el *problema directo*, se incorporan todos los aspectos que participan significativamente en el modelo con base en la importancia de cada parámetro. Los resultados de aplicar un modelo matemático determinado son muy sensibles a las características de dicho modelo, por lo que la incertidumbre asociada a tales características puede conducir a incertidumbres elevadas sobre la relación entre la respuesta real y la respuesta medida (González, 1995)

Una manera de validar los modelos matemáticos disponibles consiste en registrar las excitaciones y las respuestas de sistemas físicos y deducir de ambas la mejor manera de representar los sistemas involucrados. Este planteamiento se conoce como el *problema inverso*, que significa que la construcción del modelo matemático se basa en la respuesta experimental obtenida en el sistema físico real. Los datos experimentales se pueden obtener de registros fuertes de estructuras instrumentadas, de ensayos de prototipos en laboratorio en pruebas sobre mesas vibradoras o de ensayos en estructuras usando mediciones de vibración ambiental o vibración forzada (González, 1995)

El proceso de obtener un modelo a partir de los datos es llamado *Identificación de sistemas*. La identificación general de sistemas es una rama de investigación de la ingeniería eléctrica. La referencia más reconocida en el tema es el libro (Ljung, 1999). La aplicación de identificación de sistemas a vibración de estructuras es conocida como *Análisis modal experimental*, el sistema a identificar en este caso es el modelo modal que consiste en las frecuencias características, las razones de amortiguamiento, las formas modales y los factores de participación modal. (Peeters, 2000).

El proceso de identificación puede realizarse utilizando técnicas paramétricas que buscan la construcción del modelo matemático a partir de los datos o de técnicas no paramétricas, las cuales determinan las características del sistema con base en análisis espectral. Entre las técnicas paramétricas utilizadas en la

identificación de sistemas estructurales se pueden distinguir dos enfoques. Un primer enfoque que mediante un planteamiento de estado¹ de las ecuaciones de equilibrio dinámico (Ljung, 1999), permite obtener explícitamente las matrices de rigidez y amortiguamiento (K y C) del sistema analizado y un segundo enfoque que mediante un planteamiento modal (Beck y Jennings, 1980; Li Y. y Mau S.T., 1991) donde el sistema estructural es presentado como un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas, permite obtener explícitamente los parámetros modales asociados a diferentes modos de vibración. En ambos enfoques, los parámetros del modelo matemático son buscados utilizando el método de los mínimos cuadrados.

Como punto de partida para esta investigación, se estudiaron varios de los trabajos desarrollados en la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM, referentes a la identificación de sistemas y a su aplicación en diferentes estructuras (Pérez, 1995; González 1995; Noguez, 1996). La estructura general de estas investigaciones consta de las siguientes etapas:

- Seleccionar un modelo matemático y los parámetros desconocidos que se desean identificar, este modelo debe representar adecuadamente el sistema.
- Seleccionar una función criterio la cual evalúa el error entre lo registrado experimentalmente y lo esperado con el modelo matemático utilizando los parámetros seleccionados.
- Utilizar algoritmos de ajuste de los parámetros de tal forma que las diferencias entre las respuestas del modelo y las medidas experimentalmente expresadas a través de la función criterio sean minimizadas,

Entre los modelos estudiados se encuentran: modelos de cortante, modelos de cortante con amortiguamiento proporcional, modelos de flexión con matriz llena y modelos de flexión con proporciones. En estas investigaciones se encontró que la calidad del proceso de identificación depende en gran medida de la calidad del modelo matemático adoptado y de la cantidad de parámetros que se busca optimizar, adicionalmente se encontró que con la metodología implementada en dichas investigaciones se puede incurrir en errores de convergencia y de estabilidad numérica dependiendo del proceso de optimización y de los datos iniciales seleccionados.

En la búsqueda de una metodología que mejorara el proceso de optimización y que aumentara la confiabilidad de los resultados se desarrolló el método de subespacio. El tema es tratado inicialmente por (Ljung, 1999) y posteriormente por (Van Overschee y De Moor, 1996). El método se basa en teoría numérica, algebra lineal y estadística y a diferencia de otros métodos, éste no es iterativo y no tiene problemas de convergencia ni de estabilidad numérica. En el libro (Van Overschee y De Moor, 1996) se trata con detalle el tema, en éste se discuten claramente los fundamentos del método, sus alcances, sus limitaciones y su campo de aplicación en diferentes campos del conocimiento (ingeniería, economía, biología, biotecnología, etc.). En el libro se presentan varios ejemplos de aplicación y los algoritmos de identificación estocástica, identificación determinista e identificación combinada estocástica-determinista utilizados en el desarrollo de los mismos.

En el 2000, Bart Peeters presentó en su trabajo de doctorado (Peeters, 2000) la implementación del método del subespacio en la identificación de parámetros modales de estructuras instrumentadas.

¹ El planteamiento de estado es tratado con detalle en el capítulo 2

1.4 ENFOQUE DEL TRABAJO

Se buscó una metodología que permitiera identificar los parámetros modales de una estructura utilizando técnicas paramétricas, para esto se implementaron los algoritmos desarrollados por (Van Overschee y De Moor, 1993; Van Overschee y De Moor, 1994; Van Overschee y De Moor, 1996; Ljung, 1999) para la identificación de sistemas utilizando métodos de subespacio y (Peeters, 2000) para la obtención de parámetros modales utilizando los resultados obtenidos en el proceso de identificación.

Para validar la metodología se realizaron pruebas de vibración forzada a una estructura construida en acero y ensayada en la mesa vibradora del laboratorio de ingeniería sísmica de la universidad EAFIT. Con los datos obtenidos en las pruebas se identificaron los parámetros modales de la estructura utilizando técnicas paramétricas y se compararon los resultados con lo obtenido por el análisis espectral realizado a la misma estructura (Henao y Botero, 2013)

1.5 ESQUEMA GENERAL DEL DOCUMENTO

Capítulo 1

Se realiza una introducción, se presentan los objetivos y el alcance de la investigación.

Capítulo 2

Se discuten varios modelos de vibración de estructuras y se presenta el planteamiento de estado de la ecuación dinámica como punto de partida para la identificación de sistemas por el método del subespacio, se presentan algunos tópicos de la identificación de sistemas por el método del subespacio y cómo a partir de los resultados obtenidos del proceso de identificación, es posible obtener los parámetros modales de una estructura.

Capítulo 3

Se presenta la validación de la metodología implementada; para ello se realizan varias simulaciones sobre modelos estructurales de uno y de varios grados de libertad sobre los cuales se realiza un proceso de identificación determinista y estocástico; se analizan los resultados obtenidos y se presentan conclusiones al respecto.

Capítulo 4

Se presentan los resultados del proceso de identificación a una estructura real ensayada en el laboratorio de ingeniería sísmica de la universidad EAFIT, se hace una descripción del modelo ensayado, de los datos obtenidos en las pruebas y del procedimiento utilizado para la identificación de sus parámetros modales. Se realiza una comparación con los datos obtenidos para la estructura utilizando técnicas no paramétricas.

Capítulo 5

Se presentan las conclusiones del trabajo y las perspectivas para futuras investigaciones

2 MODELOS DE VIBRACIÓN DE ESTRUCTURAS

En este capítulo se discuten varios modelos de vibración de estructuras y se presenta el planteamiento de estado de la ecuación dinámica como punto de partida para la identificación de sistemas utilizando el método del subespacio. En la 2.1 se realiza una introducción al capítulo. En la sección 2.2 se presenta un ejemplo que busca mostrar el fundamento del planteamiento de estado y se discuten varios modelos de vibración de estructuras partiendo de la ecuación de equilibrio dinámico. En la sección 2.3 se presenta el modelo de espacio continuo y en la sección 2.4 el modelo de estado de espacio discreto. En la sección 2.5 se presenta el modelo de estado combinado *determinista estocástico* y en la sección 2.6 se presenta el procedimiento seguido para identificar los parámetros modales de estructuras instrumentadas a partir de los resultados obtenidos de los algoritmos N4SID y SUBID.

2.1 INTRODUCCIÓN

El cuerpo general de este capítulo se basa en el capítulo 2 de (Peeters, 2000). Para mayor claridad se han complementado algunos de los desarrollos de las expresiones matemáticas de acuerdo con lo presentado en (Valdés, 2004).

A través del capítulo se plantean varios modelos matemáticos a partir de la ecuación de equilibrio dinámico y se muestra como a partir de éstos es posible obtener sus características modales. Se presenta el planteamiento de estado como punto de partida para la identificación de sistemas por el método del subespacio y se expone la importancia de incluir las características propias del proceso de la obtención de los datos como la presencia del “ruido” en las señales y la incertidumbre propia de los modelos. Finalmente se indica como a partir de los datos obtenidos del proceso de identificación se pueden obtener los parámetros modales de una estructura instrumentada.

En este capítulo se presentan los desarrollos matemáticos necesarios para la estimación del modelo modal de una estructura a partir de los resultados obtenidos de un proceso de identificación paramétrica utilizando los algoritmos SUBID (Van Overschee y De Moor, 1996) y N4SID (Ljung, 1999)

2.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

La ecuación de equilibrio dinámico de un sistema de n_2 grados de libertad se puede representar por la siguiente ecuación diferencial:

$$M\ddot{q}(t) + C_2\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t) = B_2u(t) \quad (2.1)$$

Donde $M, C_2, K \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ son la matriz de masa, amortiguamiento y rigidez; $q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración respectivamente. El vector $f(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ es la fuerza de excitación, la cual se puede reescribir introduciendo una matriz $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ que especifica la localización de las entradas y un vector $u(t) \in \mathbb{R}^m$ que describe las m entradas en el tiempo. En esta aproximación por elementos finitos, las matrices de masa, M , y de rigidez, K , pueden ser obtenidas de la geometría de la estructura y de las propiedades de los materiales, sin embargo debido a la falta de constantes medibles o identificables de los materiales que gobiernan el amortiguamiento global de la estructura, ensamblar la matriz C_2 de la misma manera que las matrices M y K es prácticamente imposible. (Peeters, 2000).

En el proceso de identificación que implica la construcción de un modelo matemático a partir de los datos obtenidos mediante mediciones no es necesario medir todos los grados de libertad, la cantidad de los grados de libertad medidos dependerán en gran medida de la información que se requiera de la estructura, adicionalmente, se debe tener presente que en las mediciones experimentales el factor del ruido es un factor

determinante por lo que éste debe ser incluido de alguna manera en el modelo planteado para la identificación.

A pesar de que la ecuación (2.1) es una buena representación del comportamiento dinámico de las estructuras, ésta es una aproximación a su comportamiento real pues son varios los aspectos que no logran ser captados por esta ecuación, sin embargo, este modelo sirve como punto de partida en la construcción de modelos más elaborados que tengan en cuenta las variables inherentes al proceso de la obtención de los datos para lograr así que el modelo se ajuste al comportamiento real. Adicionalmente la ecuación (2.1) está planteada para el tiempo continuo mientras que las mediciones experimentales son de datos discretos. (Peeters, 2000).

2.2.1 Planteamiento de estado

En general una ecuación diferencial de n -ésimo orden se puede descomponer en n ecuaciones de primer orden llamado forma *espacio de estado*. En nuestro caso de estudio se busca escribir la ecuación de equilibrio dinámico, la cual es una ecuación diferencial de segundo orden en una ecuación diferencial de primer orden en forma de *espacio de estado*.

Considere la siguiente ecuación diferencial de segundo orden que describe el comportamiento dinámico de un sistema de un grado de libertad excitado en la base por una fuerza externa, \ddot{X}_g :

$$m_2 \ddot{q}(t) + c_2 \dot{q}(t) + k_2 q(t) = -m_2 \ddot{X}_g \quad (2.2)$$

Donde m_2 es la masa, c_2 el amortiguamiento y k_2 la rigidez del sistema. Definiendo las *variables de estado* $x_1 = q(t)$, $x_2 = \dot{q}(t)$ y sus primeras derivadas como $\dot{x}_1 = \dot{q}(t) = x_2$ y $\dot{x}_2 = \ddot{q}(t)$ El vector de estado que contiene los desplazamientos y las velocidades quedará definido como:

$$x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Y su primera derivada como:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Despejando $\ddot{q}(t)$ de la ecuación (2.2) se obtiene:

$$\ddot{q}(t) = -\frac{k_2}{m_2} q(t) - \frac{c_2}{m_2} \dot{q}(t) - \ddot{X}_g \quad (2.5)$$

Reemplazando los valores de las variables de estado y sus derivadas se obtiene una ecuación diferencial de primer orden en forma *espacio de estado*.

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{c_2}{m_2} x_2 - \ddot{X}_g \quad (2.6)$$

Expresando matricialmente se tiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ddot{X}_g \quad (2.7)$$

Reemplazando nuevamente los valores de las variables de estado y sus derivadas se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ddot{X}_g \quad (2.8)$$

Reemplazando (2.3) y (2.4) en (2.8) se tiene:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ddot{X}_g \quad (2.9)$$

El planteamiento de estado es muy útil en la solución de problemas de control y en particular en la identificación de sistemas que es la base para el presente trabajo.

2.2.2 Determinación de los valores y vectores propios para el caso de vibración libre no amortiguada

Haciendo cero la fuerza de excitación y el amortiguamiento en la ecuación (2.1) se obtiene:

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad (2.10)$$

Como el sistema dado por la ecuación (2.10) es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes, se supone que la solución es de la forma:

$$q(t) = \phi_i e^{\lambda_i t} \quad (2.11)$$

Hallando la primera y la segunda derivada de (2.11) y sustituyendo en (2.10) se tiene que:

$$[K + \lambda_i^2 M]\phi_i = 0 \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) representa un problema de valores característicos o propios o eigenvalores donde $\phi_i \in \mathbb{R}^{n_2}$ representa cada uno de los n_2 vectores propios reales y λ_i^2 se conocen como los valores característicos reales. Las n_2 frecuencias naturales del sistema se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\lambda_i^2 = -\omega_i^2 \quad (2.13)$$

Luego:

$$\lambda_i = j\omega_i \quad (2.14)$$

Sustituyendo (2.13) en (2.12), los valores característicos λ_i^2 se determinan al encontrar las raíces de la ecuación característica:

$$\det[K - \omega_i^2 M] = 0 \quad (2.15)$$

Donde $j = \sqrt{-1}$. Matricialmente la ecuación (2.12) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K\Phi - M\Phi\Omega^2 &= 0 \\ K\Phi &= M\Phi\Omega^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donde $\Phi \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ contiene los vectores propios como columnas y $\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{i\backslash} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ es una matriz diagonal que contiene las frecuencias naturales ω_i [rad/s]. Se puede probar que las siguientes propiedades de ortogonalidad se cumplen:

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} m_{i\backslash} \end{bmatrix}, \quad \Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} k_{i\backslash} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Donde m_i es la masa modal y k_i es la rigidez modal. Introduciendo (2.17) en (2.16) se obtiene:

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i} \quad (2.18)$$

2.2.3 Determinación de los valores y vectores propios para el caso con amortiguamiento proporcional

Para hallar los valores y vectores propios para el caso en el que el sistema representado por (2.1) tenga amortiguamiento proporcional se introduce la siguiente diagonalización de la matriz C_2 . Teniendo en cuenta la definición de la fracción de amortiguamiento $\xi_i = c_i/2m_i\omega_i$

$$\Phi^T C_2 \Phi = \begin{bmatrix} \backslash c_{i\backslash} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \backslash 2\xi_i\omega_i m_{i\backslash} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \backslash 2\xi_i\omega_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \backslash m_{i\backslash} \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \backslash m_{i\backslash} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Pre multiplicando la ecuación (2.1) e introduciendo la transformación $q(t) = \Phi q_m(t)$, donde $q_m(t)$ representan los desplazamientos modales:

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q}_m(t) + \Phi^T C_2 \Phi \dot{q}_m(t) + \Phi^T K \Phi q_m(t) = \Phi^T B_2 u(t) \quad (2.20)$$

Reemplazando (2.17), (2.18), (2.19) en (2.20):

$$\begin{bmatrix} \backslash m_{i\backslash} \end{bmatrix} \ddot{q}_m(t) + \Gamma \begin{bmatrix} \backslash m_{i\backslash} \end{bmatrix} \dot{q}_m(t) + \begin{bmatrix} \backslash m_{i\backslash} \end{bmatrix} \Omega^2 q_m(t) = \Phi^T B_2 u(t) \quad (2.21)$$

$$I \ddot{q}_m(t) + \Gamma \dot{q}_m(t) + \Omega^2 q_m(t) = \begin{bmatrix} \backslash 1 \\ \backslash m_{i\backslash} \end{bmatrix} \Phi^T B_2 u(t) \quad (2.22)$$

Igualando la parte derecha de la ecuación (2.22) a cero y teniendo en cuenta que una solución para la ecuación diferencial homogénea está dada por $q(t) = \phi_i e^{\lambda_i t}$ luego para $q_m(t) = e^{\lambda_i t}$. Reemplazando se puede encontrar que los valores propios satisfacen:

$$\lambda_i^2 + 2\xi_i\omega_i\lambda_i + \omega_i^2 = 0 \quad (2.23)$$

De donde se obtienen las siguientes soluciones:

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\xi_i\omega_i \pm j\omega_i\sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (2.24)$$

Donde el superíndice “*” denota el conjugado complejo.

2.2.4 Determinación de los valores y vectores propios para el caso general

La ecuación de equilibrio dinámico expresada como una ecuación diferencial de segundo orden (2.1) puede ser reformulada como una ecuación diferencial de primer orden utilizando el planteamiento de estado.

Definiendo el vector de estado:

$$x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Y su primera derivada como:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Utilizando la igualdad, $M\dot{q}(t) = M\dot{q}(t)$ la ecuación (2.1) puede reescribirse como:

$$\begin{pmatrix} M\ddot{q}(t) + C_2\dot{q}(t) \\ M\dot{q}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Kq(t) \\ -M\dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (2.27)$$

Incluyendo el vector de estado (2.25) y su derivada (2.26) se tiene:

$$\begin{pmatrix} C_2 & M \\ M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (2.28)$$

Definiendo:

$$P = \begin{pmatrix} C_2 & M \\ M & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (2.29)$$

La ecuación de segundo orden (2.1) es reformulada como una ecuación de primer orden es derivada:

$$P\dot{x}(t) + Qx(t) = W(t) \quad (2.30)$$

Para obtener los vectores y valores propios igualamos a cero la ecuación (2.30):

$$P\dot{x}(t) + Qx(t) = 0 \quad (2.31)$$

Una solución para la ecuación diferencial (2.31) es:

$$q(t) = \theta_i e^{\lambda_i t} \quad (2.32)$$

$$\dot{q}(t) = \theta_i \lambda_i e^{\lambda_i t} \quad (2.33)$$

$$\ddot{q}(t) = \theta_i \lambda_i^2 e^{\lambda_i t} \quad (2.34)$$

Definiendo Θ y Λ como las matrices que contienen respectivamente todos los vectores propios complejos θ_i , y todos los valores propios λ_i , se pueden escribir las ecuaciones (2.32), (2.33) y (2.34) matricialmente:

$$q(t) = \Theta e^{\Lambda t} \quad (2.35)$$

$$\dot{q}(t) = \Theta \Lambda e^{\Lambda t} \quad (2.36)$$

$$\ddot{q}(t) = \Theta \Lambda^2 e^{\Lambda t} \quad (2.37)$$

Incluyendo el vector de estado (2.25) y su derivada (2.26) se puede escribir (2.31) como:

$$P \begin{pmatrix} \Theta \Lambda e^{\Lambda t} \\ \Theta \Lambda^2 e^{\Lambda t} \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} \Theta e^{\Lambda t} \\ \Theta \Lambda e^{\Lambda t} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.38)$$

Incluyendo la parte conjugada para el valor y el vector propio:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta & \Theta^* \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$P \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta & \Theta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta & \Theta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{pmatrix} \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta & \Theta^* \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta & \Theta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.40)$$

$$P \begin{pmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta \Lambda & \Theta^* \Lambda^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta \Lambda & \Theta^* \Lambda^* \end{pmatrix} = 0 \quad (2.41)$$

Definiendo:

$$\Lambda_c = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta \Lambda & \Theta^* \Lambda^* \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Donde $\Lambda, \Theta \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$, son los valores y vectores propios del sistema original de segundo orden.

Se puede escribir el problema de valores y vectores propios como:

$$P\Psi\Lambda_c + Q\Psi = 0 \quad (2.43)$$

Donde $\Psi \in \mathbb{C}^{n \times n}$, contiene los $n=2n_2$ vectores propios complejos como columnas y $\Lambda_c = [\lambda_{i\setminus}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz diagonal que contiene los n valores propios complejos λ_i [rad/s].

Reemplazando (2.29) y (2.42) en (2.43) se tiene:

$$\begin{pmatrix} C_2 & M \\ M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta\Lambda & \Theta^*\Lambda^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta\Lambda & \Theta^*\Lambda^* \end{pmatrix} = 0 \quad (2.44)$$

$$\begin{pmatrix} C_2\Theta + M\Theta\Lambda & C_2\Theta^* + M\Theta^*\Lambda^* \\ M\Theta & M\Theta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K\Theta & K\Theta^* \\ -M\Theta\Lambda & -M\Theta^*\Lambda^* \end{pmatrix} = 0 \quad (2.45)$$

$$\begin{pmatrix} C_2\Theta\Lambda + M\Theta\Lambda^2 & C_2\Theta^*\Lambda^* + M\Theta^*\Lambda^{*2} \\ M\Theta\Lambda & M\Theta^*\Lambda^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K\Theta & K\Theta^* \\ -M\Theta\Lambda & -M\Theta^*\Lambda^* \end{pmatrix} = 0 \quad (2.46)$$

$$\begin{pmatrix} C_2\Theta\Lambda + M\Theta\Lambda^2 + K\Theta & C_2\Theta^*\Lambda^* + M\Theta^*\Lambda^{*2} + K\Theta^* \\ M\Theta\Lambda - M\Theta\Lambda & M\Theta^*\Lambda^* - M\Theta^*\Lambda^* \end{pmatrix} = 0 \quad (2.47)$$

$$C_2\Theta\Lambda + M\Theta\Lambda^2 + K\Theta = 0 \quad (2.48)$$

$$C_2\Theta^*\Lambda^* + M\Theta^*\Lambda^{*2} + K\Theta^* = 0 \quad (2.49)$$

Nótese que se utilizó el símbolo Θ en lugar del símbolo Φ como en el caso de amortiguamiento proporcional debido a que estos dos vectores son diferentes. Los valores y vectores propios λ_i se escribirán como:

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\xi_i\omega_i \pm j\omega_i\sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (2.50)$$

Se puede demostrar que las condiciones de ortogonalidad se mantienen:

$$\Psi^T P \Psi = [\lambda_{i\setminus}], \quad \Psi^T Q \Psi = [\lambda_{i\setminus}] \quad (2.51)$$

Luego P y Q pueden escribirse como:

$$P = \Psi^{-T} [\lambda_{i\setminus}] \Psi^{-1}, \quad Q = \Psi^{-T} [\lambda_{i\setminus}] \Psi^{-1} \quad (2.52)$$

donde $[\lambda_{i\setminus}]$, $[\lambda_{i\setminus}]$ son llamadas matrices modales. Introduciendo la ecuación (2.52) en (2.43) se obtiene:

$$\Lambda_c = [\lambda_{i\setminus}] = - \left[\frac{1}{a_{i\setminus}} \right] [\lambda_{i\setminus}] \quad (2.53)$$

2.3 MODELO DE ESTADO DE ESPACIO CONTINUO

2.3.1 Modelo de estado para la vibración de una estructura

La ecuación de estado

Después de convertir la ecuación de segundo orden (2.1) en una ecuación de primer orden (2.30), se busca normalizar esta segunda ecuación en términos de $\dot{x}(t)$. La normalización se obtiene pre-multiplicando (2.30) por P^{-1} .

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1}C_2M^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

$$P^{-1}P\dot{x}(t) + P^{-1}Qx(t) = P^{-1}W(t) \quad (2.55)$$

$$\dot{x}(t) = -P^{-1}Qx(t) + P^{-1} \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (2.56)$$

Reemplazado los valores de P^{-1} y Q se obtienen $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$, con $n=2n_2$ y m entradas del sistema.

$$A_c = -P^{-1}Q = - \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1}C_2M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_2 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

$$B_c = P^{-1} \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1}C_2M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}B_2 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Luego la ecuación de estado puede escribirse como:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (2.59)$$

El subíndice “c” denota el tiempo continuo. En la sección 2.4 se presentan matrices equivalentes para el tiempo discreto y su relación con las matrices presentadas para el tiempo continuo. Usando la descomposición modal de P y Q (2.52) y la propiedad (2.53), A_c puede escribirse como:

$$\begin{aligned} A_c &= -P^{-1}Q = - \left(\Psi \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{a_i} \end{bmatrix} \Psi^T \right) \left(\Psi^{-T} \begin{bmatrix} b_i \\ \end{bmatrix} \Psi^{-1} \right) \\ &= \Psi \Lambda_c \Psi^{-1} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Se puede escribir el problema de valores y vectores propios como $A_c \Psi = \Psi \Lambda_c$, donde Λ_c contiene los valores propios y Ψ los vectores propios de A_c .

La ecuación de observación

En la práctica no todos los n_2 grados de libertad de una estructura son medidos. Si se asume que las medidas son tomadas en l localizaciones y que los sensores pueden ser de aceleración, velocidad o desplazamiento la ecuación de observación será:

$$y(t) = C_a \ddot{q}(t) + C_v \dot{q}(t) + C_d q(t) \quad (2.61)$$

Donde $y(t) \in \mathbb{R}^l$ son las salidas; $C_a, C_v, C_d \in \mathbb{R}^{l \times n_2}$ son las matrices de ubicación de las salidas para la aceleración, velocidad y desplazamiento. Estas matrices están compuestas de ceros y unos, donde los unos representan el lugar en donde están tomados los datos. Despejando la aceleración $\ddot{q}(t)$ de la ecuación de comportamiento dinámico (2.1) se tiene:

$$\ddot{q}(t) = M^{-1}[f(t) - C_2 \dot{q}(t) - Kq(t)] \quad (2.62)$$

Reemplazando en la ecuación (2.61):

$$y(t) = C_a M^{-1}[f(t) - C_2 \dot{q}(t) - Kq(t)] + C_v \dot{q}(t) + C_d q(t) \quad (2.63)$$

$$y(t) = (C_d - C_a M^{-1}K)q(t) + (C_v - C_a M^{-1}C_2)\dot{q}(t) + C_a M^{-1}f(t) \quad (2.64)$$

Matricialmente,

$$y(t) = (C_d - C_a M^{-1} K \quad C_v - C_a M^{-1} C_2) \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} + C_a M^{-1} f(t) \quad (2.65)$$

Reemplazando $f(t) = B_2 u(t)$ y utilizando la definición del vector de estado (2.25) se tiene:

$$y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \quad (2.66)$$

Donde $C_c \in \mathbb{R}^{l \times n}$ es la matriz de salida y $D_c \in \mathbb{R}^{l \times m}$ es la matriz de transmisión directa.

$$C_c = (C_d - C_a M^{-1} K \quad C_v - C_a M^{-1} C_2), \quad D_c = C_a M^{-1} B_2 \quad (2.67)$$

En el caso en el que sólo se tengan registros de la aceleración, $C_v = C_d = 0$, luego C_c puede escribirse como:

$$C_c = (-C_a M^{-1} K \quad -C_a M^{-1} C_2) \quad (2.68)$$

Modelo de estado de espacio "state-space model"

Combinando las ecuaciones (2.59) y (2.66) se obtiene el modelo de estado de espacio para el tiempo continuo.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t) \end{aligned} \quad (2.69)$$

El orden del modelo de estado de espacio, n es definido como la dimensión del vector de estado, las ecuaciones de movimiento se escribieron en la forma de estado de espacio y pueden ser utilizadas para obtener la respuesta $y(t)$ de la estructura dada una cierta entrada $u(t)$. El vector de estado $x(t)$ contiene los desplazamientos y las velocidades de todos los grados de libertad.

2.3.2 Parámetros modales

El modelo de estado de espacio (2.69) puede transformarse en el modelo modal (complejo) de estado utilizando la siguiente transformación en donde $x_m(t) \in \mathbb{C}^n$:

$$x(t) = \Psi x_m(t) \quad (2.70)$$

Y su primera derivada:

$$\dot{x}(t) = \Psi \dot{x}_m(t) \quad (2.71)$$

Reemplazando (2.70) y (2.71) en (2.69) se tiene:

$$\begin{aligned} \Psi \dot{x}_m(t) &= A_c \Psi x_m(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c \Psi x_m(t) + D_c u(t) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Para despejar $\dot{x}_m(t)$, pre multiplicamos por Ψ^{-1} :

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} \Psi \dot{x}_m(t) &= \Psi^{-1} A_c \Psi x_m(t) + \Psi^{-1} B_c u(t) \\ y(t) &= C_c \Psi x_m(t) + D_c u(t) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Utilizando la descomposición de A_c (2.60) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= \Psi^{-1} \Psi \Lambda_c \Psi^{-1} \Psi x_m(t) + \Psi^{-1} B_c u(t) \\ y(t) &= C_c \Psi x_m(t) + D_c u(t) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Se obtiene

$$\dot{x}_m(t) = \Lambda_c x_m(t) + \Psi^{-1} B_c u(t) \quad (2.75)$$

$$y(t) = C_c \Psi x_m(t) + D_c u(t)$$

Introduciendo las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} L_c^T &= \Psi^{-1} B_c \\ V_c &= C_c \Psi \end{aligned} \quad (2.76)$$

La ecuación (2.75) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= \Lambda_c x_m(t) + L_c^T u(t) \\ y(t) &= V_c x_m(t) + D_c u(t) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Las matrices modales de entrada y de salida, L_c^T y V_c , representan la matriz de participación modal y las formas modales respectivamente que pueden obtenerse a partir de los datos.

Utilizando las expresiones (2.42) y (2.68) para el caso en el que sólo se tengan registros de aceleración, la matriz de que contiene las formas modales puede escribirse como:

$$V_c = (-C_a M^{-1} K \quad -C_a M^{-1} C_2) \begin{pmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta \Lambda & \Theta^* \Lambda^* \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

$$V_c = (-C_a M^{-1} K \Theta - C_a M^{-1} C_2 \Theta \Lambda \quad -C_a M^{-1} K \Theta^* - C_a M^{-1} C_2 \Theta^* \Lambda^*) \quad (2.79)$$

Despejando K de las ecuaciones (2.48) y (2.49)

$$K = -M \Theta \Lambda^2 \Theta^{-1} - C_2 \Theta \Lambda \Theta^{-1} \quad (2.80)$$

$$K = -M \Theta^* \Lambda^{*2} \Theta^{*-1} - C_2 \Theta^* \Lambda^* \Theta^{*-1} \quad (2.81)$$

Combinando (2.80) y (2.81) en (2.79)

$$V_c = C_a (\Theta \Lambda^2 \quad \Theta^* \Lambda^{*2}) \quad (2.82)$$

2.4 MODELO DE ESTADO DE ESPACIO DISCRETO

2.4.1 Características de los datos utilizados

Hasta el momento las expresiones que se han presentado son válidas para el tiempo continuo, mientras que en realidad los datos en las pruebas experimentales son discretos. Para ajustar los datos a los modelos matemáticos es necesario convertir las expresiones del tiempo continuo al tiempo discreto. La aproximación utilizada en este trabajo consiste en asumir un intervalo de tiempo Δt [s] fijo debido a la instrumentación. Las ecuaciones escritas para el tiempo continuo son discretizadas y resueltas para todos los instantes de tiempo discretos k , donde $t = k\Delta t$, $k \in \mathbb{N}$. Suponiendo que los datos son constantes en el intervalo de muestreo, lo que se conoce como **Zero-Order Hold (ZOH)**, el modelo de estado de espacio continuo (2.69) es convertido a un modelo de estado de espacio discreto:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + B u_k \\ y_k &= C x_k + D u_k \end{aligned} \quad (2.83)$$

2.4.2 Relación entre el tiempo continuo y el tiempo discreto

Bajo la suposición anterior, las matrices A , B , C y D del modelo de espacio de estado discreto se relacionan con las matrices A_c , B_c , C_c y D_c del modelo de estado de espacio continuo por medio de las siguientes relaciones.

$$A = e^{A_c \Delta t}, \quad B = \int_0^{\Delta t} e^{A_c \tau} \delta \tau B_c = (A - I) A_c^{-1} B_c \quad (2.84)$$

$$C = C_c, \quad D = D_c$$

2.4.3 Parámetros modales

Los valores propios de la matriz de estado A son encontrados al incluir la descomposición de los valores propios de la matriz continua A_c (2.60) en la ecuación (2.84).

$$A = e^{A_c \Delta t} = e^{\Psi \Lambda_c \Psi^{-1} \Delta t} \quad (2.85)$$

Utilizando la expansión en series de McLaurin

$$e^M = \sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} M^k = [I] + [M] + \frac{1}{2!} [M]^2 + \frac{1}{3!} [M]^3 + \dots \quad (2.86)$$

Luego

$$e^{A_c \Delta t} = [I] + [A_c] \Delta t + \frac{1}{2!} [A_c]^2 \Delta t^2 + \frac{1}{3!} [A_c]^3 \Delta t^3 + \dots \quad (2.87)$$

$$e^{\Psi \Lambda_c \Psi^{-1} \Delta t} = [I] + [\Psi][\Lambda_c][\Psi^{-1}] \Delta t + \frac{1}{2!} [\Psi][\Lambda_c]^2[\Psi^{-1}] \Delta t^2 + \frac{1}{3!} [\Psi][\Lambda_c]^3[\Psi^{-1}] \Delta t^3 + \dots \quad (2.88)$$

$$e^{\Psi \Lambda_c \Psi^{-1} \Delta t} = \Psi \left[[I] + [\Lambda_c] \Delta t + \frac{1}{2!} [\Lambda_c]^2 \Delta t^2 + \frac{1}{3!} [\Lambda_c]^3 \Delta t^3 + \dots \right] \Psi^{-1} \quad (2.89)$$

Luego

$$e^{A_c \Delta t} = e^{\Psi \Lambda_c \Psi^{-1} \Delta t} = \Psi e^{\Lambda_c \Delta t} \Psi^{-1} = \Psi \Lambda_d \Psi^{-1} = \Psi \left[\mu_i \right] \Psi^{-1} \quad (2.90)$$

De la ecuación (2.90) se puede concluir que los vectores propios discretos son los mismos vectores propios continuos y los valores propios discretos, denotados como μ_i , se relacionan con los valores propios continuos de acuerdo con:

$$\mu_i = e^{\lambda_i \Delta t} \Leftrightarrow \lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t} \quad (2.91)$$

Finalmente se obtienen las frecuencias y amortiguamientos a partir de:

$$\omega_i = |\lambda_i| = \frac{|\ln(\mu_i)|}{\Delta t} \quad (2.92)$$

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$$

$$\xi_i = \frac{-\text{Real}(\lambda_i)}{\omega_i} = \frac{\ln(\mu_i)}{|\ln(\mu_i)|} \quad (2.93)$$

De forma similar a (2.76) las matrices discretas de participación modal y de las formas modales observadas se escriben como:

$$L^T = \Psi^{-1} B$$

$$V = C \Psi \quad (2.94)$$

Los factores de participación modal discretos son diferentes a los factores de participación modal continuos debido a la diferencia entre las matrices B y B_c (2.84), por el contrario las formas modales son las mismas tanto en el tiempo continuo como en el tiempo discreto.

2.5 IDENTIFICACIÓN DETERMINISTA-ESTOCÁSTICA COMBINADA

En el proceso de identificación es necesario incluir el *ruido* inherente al proceso de toma de los datos en el modelo matemático para lograr que este se ajuste al comportamiento real de la estructura que se está analizando. Al incluir las componentes estocásticas (el ruido) en el *modelo de estado de espacio discreto* (2.83) se obtiene el siguiente *modelo determinista-estocástico de espacio de estado discreto*.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k + v_k \end{aligned} \quad (2.95)$$

Donde $w_k \in \mathbb{R}^n$ es el ruido debido a perturbaciones e incertidumbres del modelo y $v_k \in \mathbb{R}^l$ es el ruido debido a la falta de precisión de los sensores utilizados en el proceso de la obtención de los datos. Tanto w_k como v_k son señales que no pueden ser medidas pero se supone que son medidas estacionarias y con media cero que poseen características de un ruido blanco y que tienen las siguientes matrices de covarianza

$$E \left[\begin{pmatrix} w_p \\ v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_q^T & v_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \delta_{pq} \quad (2.96)$$

Donde E es el valor esperado, δ_{pq} es el delta de Kronecker (si $p=q$ $\delta_{pq} = 1$, de otro modo $\delta_{pq} = 0$); p y q son dos tiempos arbitrarios, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times l}$ y $R \in \mathbb{R}^{l \times l}$ son las matrices de covarianza de las secuencias de ruido w_k y v_k . En la Figura 2.1 (Van Overschee y De Moor, 1996) se presenta de forma esquemática el modelo combinado.

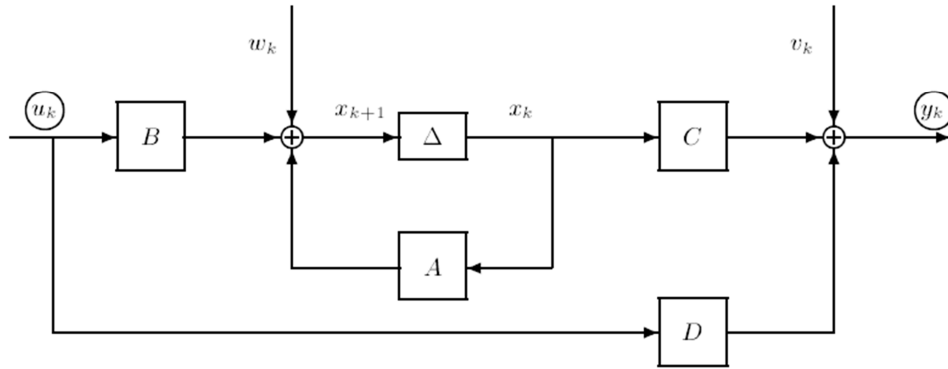


Figura 2.1 (Figura 4.2-Van Overschee y De Moor, 1996) Sistema lineal determinista-estocástico invariante en el tiempo. Sistema con entradas u_k , salidas y_k y estados x_k , descrito por las matrices A , B , C y D y matrices de covarianza Q , S , R . el símbolo Δ representa el retraso. En el problema de identificación combinado, las señales de entrada y de salida son medidas.

En el caso en el que no se conozcan datos de la entrada al sistema, u_k , por ejemplo en el caso de las pruebas de vibración ambiental, el modelo (2.95) quedará descrito como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{aligned} \quad (2.97)$$

En el presente trabajo se llamara *identificación determinista* a aquel proceso que se realice conociendo las señales de entrada y de salida del sistema e *identificación estocástica* al proceso que se realice conociendo sólo las señales de salida.

2.6 IDENTIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS MODALES

2.6.1 Identificación de las matrices A , B , C y D del modelo de espacio utilizando el método del subespacio

El proceso de identificación por el método de subespacio parte de (2.95) o (2.97) y busca con base en conceptos de teoría de sistemas, algebra lineal y estadística identificar las matrices A , B , C y D de dichos sistemas. Para esto se implementan los algoritmos SUBID y N4SID. Una vez identificadas las matrices se obtienen los parámetros modales del sistema aplicando lo propuesto por (Peeters, 2000) y expuesto en la sección 2.4.3

2.6.2 Orden del modelo de estado espacio “ n ”

En algunas metodologías utilizadas para la identificación de sistemas utilizando técnicas paramétricas se requiere suministrar una serie de parámetros como condiciones iniciales para realizar el ajuste de los datos obtenidos experimentalmente al modelo, sin embargo, en los algoritmos del método del subespacio se usa un planteamiento de estado en donde el único “parámetro” es el orden del sistema, n .

Tanto el algoritmo SUBID como N4SID requieren que se defina el valor de n para realizar el proceso de identificación de las matrices A , B , C y D . En aplicaciones estructurales, el valor de n , se relaciona con los grados de libertad n_2 mediante la expresión:

$$n = 2n_2 \quad (2.98)$$

Como se indicó en la sección 2.3.1 las dimensiones de las matrices de estado se relacionan con el orden del modelo; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz dinámica del sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de entradas, $C_c \in \mathbb{R}^{l \times n}$ es la matriz de salida y $D_c \in \mathbb{R}^{l \times m}$ es la matriz de transmisión directa. En la Figura 2.2 se presentan de forma esquemática las matrices de estado con sus respectivas dimensiones relacionadas con el orden del modelo, n , el número de entradas, m y el número de salidas l del sistema.

$A_{n \times n}$	$B_{n \times m}$
$C_{l \times n}$	$D_{l \times m}$

Figura 2.2 Dimensiones de las matrices de estado

Número de bloques fila en la matriz Hankel, i

El número de bloques fila en la matriz Hankel cumple un papel fundamental en los algoritmos de identificación del subespacio. Este número se relaciona con el orden del modelo, n y el número de salidas, l , mediante la siguiente expresión:

$$i \geq 2 \frac{n_{max}}{l} \quad (2.99)$$

Al incrementar el valor del número de bloques fila, se incrementa la precisión en el proceso de identificación pero a su vez se incremente el tiempo computacional requerido por los algoritmos. Debido al incremento del poder computacional algunos autores recomiendan utilizar un valor de 8 en lugar de 2 en la ecuación (2.99):

$$i = 8 \frac{n_{max}}{l} \quad (2.100)$$

3 VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA IMPLEMENTADA

En este capítulo se presenta la validación de la metodología implementada, en la sección 3.1 se describe el procedimiento utilizado. En la sección 3.2 se describen las señales de entrada y de salida utilizadas en el proceso de validación. En las secciones 3.3, 3.4 y 3.5 se describen los modelos estructurales utilizados y los resultados de las simulaciones para el proceso de identificación determinista y estocástica, finalmente en la sección 3.6 se analizan los resultados obtenidos y se presentan las conclusiones al respecto.

3.1 INTRODUCCIÓN

Para validar la metodología se plantearon tres sistemas estructurales y se realizaron 60 simulaciones (20 por cada sistema). El proceso de simulación consistió en generar 20 señales artificiales y excitar con éstas cada uno de los sistemas para obtener su respuesta en términos de aceleración en uno o varios de sus grados de libertad. A partir de las respuestas obtenidas se identificaron sus periodos y los amortiguamientos. Los sistemas estudiados fueron:

- Sistema de un grado de libertad
- Sistema de varios grados de libertad en dos dimensiones (2D)
- Sistema de varios grados de libertad en tres dimensiones (3D)

El procedimiento utilizado es el siguiente; para cada uno de los sistemas las propiedades de geometría y de masa son conocidas lo que permite conocer por análisis dinámico convencional los parámetros modales como los periodos, los amortiguamientos y las formas modales, los cuales se comparan con los obtenidos por el proceso de identificación.

El sistema es excitado con ruido blanco que es la señal de entrada y se obtienen las respuestas en uno o varios grados de libertad según sea el caso las cuales corresponden a las señales de salida. Posteriormente se utilizan las señales de entrada y de salida para realizar el proceso de identificación de las matrices de estado y se encuentran los parámetros modales, periodos, amortiguamiento de cada uno de los sistemas.

Para cada uno de los sistemas se realizaron dos procesos de identificación de las matrices del modelo de estado; El primero es un proceso *determinista* en donde se conocen la señal de entrada (Excitación del sistema) y la respuesta de uno o de varios grados de libertad ante dicha excitación, en este caso se identifican las matrices A , B , C y D del modelo de estado (2.95). El segundo es un proceso *estocástico* en donde se conocen las respuestas de uno o de varios grados de libertad ante una excitación pero se desconoce la señal que excita el sistema, en este caso se identifican las matrices A y C del modelo de estado (2.97). La identificación de las matrices se realizó utilizando los algoritmos SUBID (Van Overschee y De Moor, 1993; Van Overschee y De Moor, 1994; Van Overschee y De Moor, 1996) y N4SID (Ljung, 1999). Una vez identificadas las matrices del modelo de estado se calcularon las frecuencias y las fracciones de amortiguamiento de acuerdo con (2.92) y (2.93).

3.2 SEÑAL DE ENTRADA Y SEÑAL DE SALIDA

3.2.1 Señal de entrada

En la etapa de validación, cada uno de los sistemas fue excitado con una señal aleatoria con características de ruido blanco ² para excitar todas las frecuencias de los sistemas en igual proporción. Se utilizó a función “randn” de MATLAB para generar una muestra de 10.000 datos. El valor de la k -ésima muestra

² El ruido blanco es una señal aleatoria que tiene una densidad espectral de potencia “Power Spectral Density” (PSD) uniforme lo que significa sus componentes frecuenciales tienen la misma intensidad. (Clough and Penzien, 1993)

corresponde a la variable u_k de la ecuación (2.95). En la Figura 3.1 se muestra una parte de la señal de ruido blanco utilizado como señal de excitación.

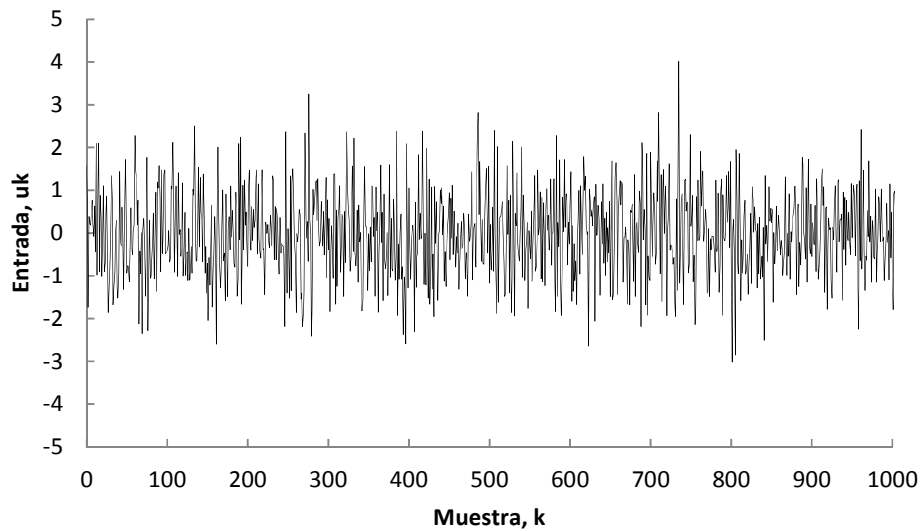


Figura 3.1 Parte del ruido blanco de una de las señales utilizada como señal de entrada

3.2.2 Señal de salida

Para cada una de las corridas en el proceso de validación se obtiene la respuesta de uno o de varios grados de libertad en términos de aceleración; esta respuesta se obtiene al excitar cada uno de los sistemas con la señal de entrada descrita anteriormente. El valor de la k -ésima muestra corresponde a la variable y_k de la ecuación (2.95)

3.3 SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD

Para cada una de las 20 simulaciones se realizó un análisis dinámico convencional a un sistema de un grado de libertad utilizando el programa *Dinámica Estructural* (Botero, 2013). Para obtener la respuesta del sistema en términos de aceleración se propusieron valores de un segundo (1s) para el periodo y de 0.05 para la fracción de amortiguamiento crítico (Ver Tabla 3.1)

Tabla 3.1 Valores de periodo y amortiguamiento propuestos para el sistema de un grado de libertad

Modo	T(s)	ξ
1	1	0.05

3.3.1 Identificación determinista

Para el proceso de identificación determinista se utilizó la señal de entrada y la respuesta del sistema obtenida utilizando el programa *Dinámica Estructural* (Botero, 2013). Los resultados se presentan en la Tabla 3.2

3.3.2 Identificación estocástica

Para el proceso de identificación estocástico sólo se utilizó la respuesta del sistema obtenida utilizando el programa *Dinámica Estructural* (Botero, 2013). Los resultados se presentan en la Tabla 3.2

Tabla 3.2 Valores de periodos y amortiguamientos identificados para el sistema de un grado de libertad

Corrida	SUBID				N4SID			
	Determinista		Estocástico		Determinista		Estocástico	
	T(s)	ξ	T(s)	ξ	T(s)	ξ	T(s)	ξ
1	1	0.05	0.991	0.054	1	0.05	0.991	0.055
2	1	0.05	1.001	0.055	1	0.05	1.001	0.054
3	1	0.05	0.994	0.040	1	0.05	0.994	0.040
4	1	0.05	0.996	0.039	1	0.05	0.996	0.039
5	1	0.05	0.994	0.050	1	0.05	0.992	0.052
6	1	0.05	1.008	0.049	1	0.05	1.008	0.048
7	1	0.05	1.008	0.053	1	0.05	1.008	0.052
8	1	0.05	0.997	0.062	1	0.05	0.998	0.061
9	1	0.05	1.000	0.054	1	0.05	0.999	0.054
10	1	0.05	0.998	0.058	1	0.05	0.998	0.057
11	1	0.05	1.005	0.064	1	0.05	1.005	0.064
12	1	0.05	1.004	0.054	1	0.05	1.004	0.054
13	1	0.05	0.993	0.060	1	0.05	0.993	0.060
14	1	0.05	0.993	0.050	1	0.05	0.993	0.050
15	1	0.05	0.991	0.041	1	0.05	0.991	0.041
16	1	0.05	0.982	0.053	1	0.05	0.982	0.053
17	1	0.05	0.993	0.051	1	0.05	0.994	0.051
18	1	0.05	0.995	0.051	1	0.05	0.995	0.051
19	1	0.05	1.000	0.048	1	0.05	1.000	0.048
20	1	0.05	1.002	0.057	1	0.05	1.002	0.056
Media	1	0.05	0.997	0.052	1	0.05	0.997	0.052
Desviación E.	0	0.000	0.006	0.007	0	0.000	0.006	0.007

3.3.3 Análisis de resultados

El valor de la desviación estándar presentado en la Tabla 3.2 indica el buen ajuste de los datos que se obtuvo en el proceso de validación.

Para el sistema de un grado de libertad se identificaron correctamente los valores del periodo y del amortiguamiento tanto en el proceso determinista como en el proceso estocástico utilizando ambos algoritmos. En la Tabla 3.3 y en la Tabla 3.4 se presenta una comparación entre los valores del análisis modal (ver Tabla 3.1) y los identificados para el periodo y el amortiguamiento respectivamente.

Tabla 3.3 Comparación del periodo identificado con el valor del análisis modal

Modo	Análisis Modal	Periodo T(s)			
		SUBID		N4SID	
		Determinista	Estocástico	Determinista	Estocástico
1	1.0	1.0	0.997	1.0	0.997

Tabla 3.4 Comparación del amortiguamiento identificado con el valor del análisis modal

Modo	Análisis Modal	Amortiguamiento ξ			
		SUBID		N4SID	
		Determinista	Estocástico	Determinista	Estocástico
1	0.050	0.050	0.052	0.050	0.052

3.4 SISTEMA DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD (2D)

Se realizó un modelo en el programa SAP2000® utilizando elementos tipo “Frame” (Ver Figura 3.2). Se hizo análisis modal para obtener los valores de periodo y amortiguamiento de referencia, (Ver Tabla 3.5) y se realizó un análisis en el tiempo “Time History” utilizando como señal de excitación cada una de las 20 señales de entrada generadas para el proceso de validación para obtener la respuesta en términos de aceleración en algunos de los nudos de la estructura

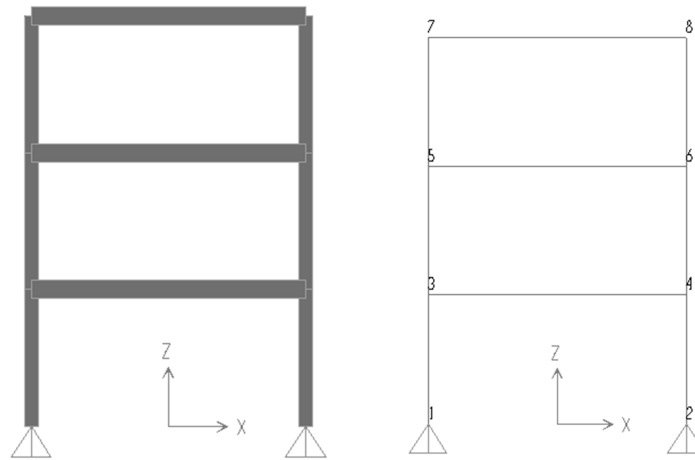


Figura 3.2 Modelo SAP2000® del sistema de varios grados de libertad en dos dimensiones

Tabla 3.5 Valores de periodo y amortiguamiento obtenidos del análisis modal

Modo	T(s)	ξ
1	0.42281	0.05
2	0.1078	0.05
3	0.0570	0.05

3.4.1 Identificación determinista

Para el proceso de identificación determinista se utilizó la señal de entrada y las respuestas en términos de aceleración de los nudos 4, 6 y 8 obtenidas del análisis en el tiempo en dirección X. Los resultados se presentan en la Tabla 3.6 y Tabla 3.8 para los algoritmos SUBID y N4SID respectivamente.

3.4.2 Identificación estocástica

Para el proceso de identificación estocástico se utilizaron sólo las respuestas en términos de aceleración de los nudos 4, 6 y 8 obtenidas del análisis en el tiempo en dirección X. Los resultados se presentan en la Tabla 3.7 y Tabla 3.9 para los algoritmos SUBID y N4SID respectivamente.

Tabla 3.6 Valores de periodos y amortiguamiento identificados para el sistema de varios grados de libertad (2D) mediante un proceso determinista utilizando el algoritmo SUBID

Corrida	SUBID					
	Determinista					
	$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	ξ_1	ξ_2	ξ_3
1	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
2	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
3	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
4	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
5	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
6	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
7	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
8	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
9	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
10	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
11	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
12	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
13	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
14	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
15	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
16	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
17	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
18	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
19	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
20	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
Media	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
Desviación E.	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tabla 3.7 Valores de periodos y amortiguamiento identificados para el sistema de varios grados de libertad (2D) mediante un proceso estocástico utilizando el algoritmo SUBID

Corrida	SUBID					
	Estocástico					
	$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	ξ_1	ξ_2	ξ_3
1	0.4251	0.1077	0.0577	0.0571	0.0512	0.0675
2	0.4249	0.1079	0.0575	0.0437	0.0558	0.0494
3	0.4237	0.1078	0.0572	0.0600	0.0441	0.0587
4	0.4250	0.1075	0.0572	0.0504	0.0498	0.0568
5	0.4216	0.1080	0.0575	0.0420	0.0483	0.0670
6	0.4276	0.1078	0.0571	0.0455	0.0507	0.0598
7	0.4211	0.1079	0.0571	0.0532	0.0471	0.0523
8	0.4233	0.1076	0.0569	0.0488	0.0464	0.0539
9	0.4232	0.1080	0.0576	0.0493	0.0507	0.0542
10	0.4212	0.1072	0.0575	0.0480	0.0482	0.0628
11	0.4186	0.1079	0.0574	0.0515	0.0506	0.0616
12	0.4216	0.1074	0.0571	0.0481	0.0454	0.0634
13	0.4235	0.1076	0.0574	0.0453	0.0496	0.0569
14	0.4241	0.1077	0.0573	0.0518	0.0493	0.0584
15	0.4232	0.1079	0.0576	0.0560	0.0525	0.0581
16	0.4207	0.1075	0.0580	0.0511	0.0507	0.0784
17	0.4244	0.1077	0.0574	0.0434	0.0527	0.0586
18	0.4199	0.1078	0.0574	0.0485	0.0471	0.0548
19	0.4212	0.1073	0.0570	0.0520	0.0509	0.0630
20	0.4232	0.1077	0.0568	0.0496	0.0514	0.0604
Media	0.4229	0.1077	0.0573	0.0498	0.0496	0.0598
Desviación E.	0.0021	0.0002	0.0003	0.0046	0.0027	0.0064

Tabla 3.8 Valores de periodos y amortiguamiento identificados para el sistema de varios grados de libertad (2D) mediante un proceso determinista utilizando el algoritmo N4SID

Corrida	N4SID					
	Determinista					
	$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	ξ_1	ξ_2	ξ_3
1	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
2	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
3	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
4	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
5	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
6	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
7	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
8	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
9	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
10	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
11	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
12	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
13	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
14	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
15	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
16	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
17	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
18	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
19	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
20	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
Media	0.4228	0.1078	0.0570	0.05	0.05	0.05
Desviación E.	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tabla 3.9 Valores de periodos y amortiguamiento identificados para el sistema de varios grados de libertad (2D) mediante un proceso estocástico utilizando el algoritmo N4SID

Corrida	N4SID					
	Estocástico					
	$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	ξ_1	ξ_2	ξ_3
1	0.4249	0.1078	0.0569	0.0544	0.0503	0.0531
2	0.4244	0.1078	0.0572	0.0458	0.0534	0.0461
3	0.4240	0.1078	0.0569	0.0574	0.0447	0.0520
4	0.4250	0.1077	0.0567	0.0482	0.0513	0.0498
5	0.4215	0.1082	0.0569	0.0406	0.0484	0.0511
6	0.4276	0.1078	0.0569	0.0485	0.0536	0.0490
7	0.4217	0.1079	0.0567	0.0536	0.0495	0.0470
8	0.4224	0.1077	0.0568	0.0456	0.0477	0.0498
9	0.4223	0.1079	0.0570	0.0495	0.0495	0.0488
10	0.4206	0.1072	0.0570	0.0470	0.0511	0.0490
11	0.4185	0.1078	0.0570	0.0525	0.0493	0.0550
12	0.4221	0.1072	0.0570	0.0504	0.0476	0.0501
13	0.4234	0.1074	0.0570	0.0435	0.0505	0.0494
14	0.4241	0.1079	0.0570	0.0487	0.0502	0.0518
15	0.4230	0.1079	0.0573	0.0532	0.0513	0.0536
16	0.4219	0.1075	0.0568	0.0487	0.0522	0.0486
17	0.4242	0.1078	0.0570	0.0421	0.0510	0.0529
18	0.4189	0.1077	0.0572	0.0493	0.0481	0.0509
19	0.4220	0.1075	0.0568	0.0520	0.0522	0.0525
20	0.4242	0.1077	0.0567	0.0506	0.0521	0.0501
Media	0.4228	0.1077	0.0569	0.0491	0.0502	0.0505
Desviación E.	0.0021	0.0002	0.0002	0.0042	0.0022	0.0022

3.4.3 Análisis de resultados

El valor de la desviación estándar presentado en la Tabla 3.6, Tabla 3.7, Tabla 3.8 y Tabla 3.9 indica el buen ajuste de los datos que se obtuvo en el proceso de validación.

Para el sistema de varios grados de libertad en dos direcciones (2D) se identificaron correctamente los valores de los periodos y de los amortiguamientos tanto en el proceso determinista como en el proceso estocástico utilizando ambos algoritmos. En la Tabla 3.10 y en la Tabla 3.11 se presenta una comparación entre los valores del análisis modal (ver Tabla 3.5) y los identificados para los periodos y amortiguamientos respectivamente.

Tabla 3.10 Comparación de los periodos identificados con los valores del análisis modal para el sistema de varios grados de libertad en dos direcciones (2D)

Modo	Análisis modal	Periodo T(s)			
		SUBID		N4SID	
		Determinista	Estocástico	Determinista	Estocástico
1	0.4228	0.4228	0.4229	0.4228	0.4228
2	0.1078	0.1078	0.1077	0.1078	0.1077
3	0.0570	0.0570	0.0573	0.0570	0.0569

Tabla 3.11 Comparación de los amortiguamientos identificados con los valores del análisis modal para el sistema de varios grados de libertad en dos direcciones (2D)

Modo	Análisis modal	Amortiguamiento ξ			
		SUBID		N4SID	
		Determinista	Estocástico	Determinista	Estocástico
1	0.050	0.050	0.0498	0.050	0.0491
2	0.050	0.050	0.0496	0.050	0.0502
3	0.050	0.050	0.0598	0.050	0.0505

3.5 SISTEMA DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD (3D)

Se realizó un modelo en el programa SAP2000® utilizando elementos tipo “Frame” (Ver Figura 3.3). Se hizo análisis modal para obtener los valores de periodo y amortiguamiento de referencia, (Ver Tabla 3.12) y se realizó un análisis en el tiempo “Time History” utilizando como señal de excitación cada una de las 20 señales de entrada generadas para el proceso de validación para obtener la respuesta en términos de aceleración en algunos de los nudos de la estructura en las direcciones X e Y locales.

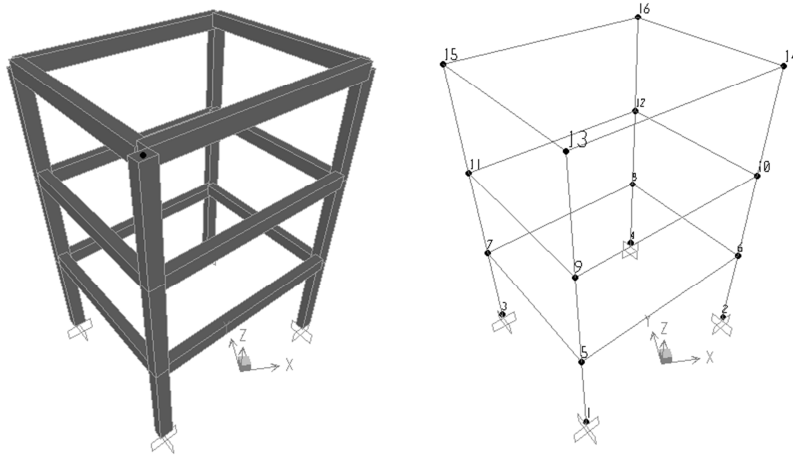


Figura 3.3 Modelo SAP2000® del sistema de varios grados de libertad en tres dimensiones

Tabla 3.12 Valores de periodo y amortiguamiento obtenidos del análisis modal

Modo	T(s)	ξ
1	0.4499	0.05
2	0.4137	0.05
3	0.3972	0.05
4	0.2026	0.05
5	0.1430	0.05
6	0.1318	0.05
7	0.1228	0.05
8	0.1078	0.05
9	0.0850	0.05
10	0.0821	0.05
11	0.0670	0.05
12	0.0638	0.05

3.5.1 Identificación determinista

Para el proceso de identificación determinista se utilizó la señal de entrada y las señales de salida en términos de aceleración de los nudos 6, 7, 10, 14 y 15 obtenidas del análisis en el tiempo en direcciones locales (Ver Figura 3.3). Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 3.14 para el algoritmo SUBID y en la Tabla 3.17 y Tabla 3.18 para el algoritmo N4SID.

3.5.2 Identificación estocástica

Para el proceso de identificación estocástico se utilizaron sólo las señales de salida en términos de aceleración de los nudos 6, 7, 10, 14 y 15 obtenidas del análisis en el tiempo en direcciones locales (Ver Figura 3.3). Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 3.15 y Tabla 3.16 para el algoritmo SUBID y en la Tabla 3.19 y Tabla 3.20 para el algoritmo N4SID.

Tabla 3.15 Valores de periodos identificados para el sistema de varios grados de libertad (3D) mediante un proceso estocástico utilizando el algoritmo SUBID.

Corrida	SUBID											
	Estocástico											
	T ₁ (s)	T ₂ (s)	T ₃ (s)	T ₄ (s)	T ₅ (s)	T ₆ (s)	T ₇ (s)	T ₈ (s)	T ₉ (s)	T ₁₀ (s)	T ₁₁ (s)	T ₁₂ (s)
1	0.4430	0.4264	0.4104	0.2453	0.1462	0.1319	0.1205	0.1203	0.0875	0.0874	0.0671	0.0660
2	0.4503	0.4098	0.3898	0.2872	0.1443	0.1296	0.1240	0.1159	0.0883	0.0844	0.0681	0.0662
3	0.4595	0.4123	0.3854	0.2149	0.1460	0.1339	0.1223	0.1086	0.0853	0.0851	0.0680	0.0650
4	0.4472	0.4102	0.3842	0.3777	0.1408	0.1313	0.1216	0.1196	0.0957	0.0862	0.0679	0.0651
5	0.4641	0.4248	0.3944	0.2148	0.1445	0.1344	0.1233	0.1080	0.0872	0.0815	0.0677	0.0660
6	0.4486	0.4123	0.3954	0.2797	0.1453	0.1419	0.1229	0.1093	0.0852	0.0798	0.0668	0.0645
7	0.4552	0.4150	0.3813	0.2234	0.1511	0.1439	0.1207	0.1136	0.0942	0.0858	0.0672	0.0662
8	0.4551	0.4153	0.3868	0.2056	0.1449	0.1326	0.1217	0.1069	0.0917	0.0847	0.0675	0.0632
9	0.4588	0.4232	0.3914	0.2078	0.1429	0.1278	0.1257	0.1116	0.0911	0.0851	0.0697	0.0656
10	0.4474	0.4290	0.4110	0.3390	0.1444	0.1336	0.1228	0.1084	0.0883	0.0860	0.0675	0.0659
11	0.4514	0.4135	0.3896	0.2245	0.1411	0.1342	0.1248	0.1114	0.0942	0.0848	0.0678	0.0652
12	0.4551	0.4146	0.3984	0.3588	0.1568	0.1444	0.1227	0.1081	0.0907	0.0856	0.0684	0.0636
13	0.4504	0.4155	0.3974	0.2491	0.1445	0.1382	0.1234	0.1071	0.0924	0.0850	0.0682	0.0648
14	0.4577	0.4229	0.3967	0.2314	0.1518	0.1424	0.1241	0.1206	0.1030	0.0849	0.0670	0.0645
15	0.4693	0.4274	0.3978	0.2357	0.1418	0.1329	0.1204	0.1122	0.0926	0.0853	0.0687	0.0653
16	0.4513	0.4169	0.4046	0.2829	0.1444	0.1431	0.1258	0.1233	0.1050	0.0850	0.0679	0.0647
17	0.4557	0.4169	0.3914	0.1936	0.1423	0.1309	0.1213	0.1071	0.0845	0.0844	0.0673	0.0635
18	0.4601	0.4194	0.3904	0.2378	0.1438	0.1354	0.1255	0.1130	0.0903	0.0855	0.0667	0.0649
19	0.4530	0.4126	0.3820	0.3654	0.1445	0.1319	0.1245	0.1183	0.0893	0.0850	0.0696	0.0670
20	0.4546	0.4120	0.3892	0.2637	0.1436	0.1332	0.1224	0.1143	0.0856	0.0838	0.0678	0.0641
Media	0.4544	0.4175	0.3934	0.2619	0.1453	0.1354	0.1230	0.1129	0.0911	0.0848	0.0678	0.0651
Desviación E.	0.0062	0.0060	0.0084	0.0569	0.0039	0.0051	0.0017	0.0052	0.0055	0.0016	0.0008	0.0010

Tabla 3.16 Valores de amortiguamientos identificados para el sistema de varios grados de libertad (3D) mediante un proceso estocástico utilizando el algoritmo SUBID.

Corrida	SUBID											
	Estocástico											
	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}	ξ_{11}	ξ_{12}
1	0.0562	0.1052	0.0251	0.2473	0.0511	0.0646	0.0234	0.1623	0.0702	0.0319	0.0237	0.0665
2	0.0267	0.0355	0.1011	0.0323	0.0408	0.2235	0.0290	0.0086	0.0223	0.0569	0.0534	0.0582
3	0.0377	0.0276	0.0863	0.0494	0.0413	0.0163	0.0341	0.0375	0.0442	0.1501	0.0337	0.0550
4	0.0387	0.0339	0.2671	0.1849	0.0381	0.0457	0.1436	0.0280	0.0778	0.0401	0.0280	0.0309
5	0.0719	0.0264	0.0456	0.0604	0.0449	0.0008	0.0365	0.0436	0.0638	0.0339	0.0449	0.0454
6	0.0361	0.0344	0.1309	0.1115	0.0022	0.0361	0.0379	0.0217	0.0381	0.0350	0.0335	0.0367
7	0.0460	0.0284	0.0416	0.2218	0.1015	0.0571	0.0568	0.0231	0.0832	0.0485	0.0059	0.0535
8	0.0450	0.0336	0.0571	0.1294	0.0559	0.0558	0.0371	0.0535	0.0223	0.0436	0.0317	0.0482
9	0.0643	0.0323	0.0515	0.0243	0.0433	0.0199	0.0878	0.0658	0.0769	0.0342	0.0397	0.0465
10	0.0396	0.2149	0.0262	0.1478	0.0613	0.0158	0.0440	0.0266	0.1153	0.0395	0.0045	0.0569
11	0.0522	0.0384	0.0540	0.0168	0.0559	0.0686	0.0367	0.0512	0.0610	0.0343	0.0511	0.0198
12	0.0622	0.0483	0.0402	0.6535	0.0300	0.0465	0.0443	0.0414	0.0782	0.0518	0.0404	0.0455
13	0.0515	0.0519	0.0498	0.0628	0.0533	0.0256	0.0406	0.0668	0.0547	0.0387	0.0356	0.0328
14	0.0449	0.0258	0.0488	0.1186	0.0451	0.0603	0.0326	0.0029	0.0292	0.0428	0.0300	0.0580
15	0.0807	0.0375	0.0421	0.1315	0.0414	0.0190	0.0507	0.0789	0.0940	0.0422	0.0264	0.0446
16	0.0476	0.0962	0.0287	0.4087	0.0127	0.0846	0.0548	0.0122	0.0428	0.0425	0.0260	0.0330
17	0.0508	0.0305	0.0582	0.0473	0.0425	0.0021	0.0502	0.0639	0.0715	0.0239	0.0367	0.0300
18	0.0471	0.0240	0.0659	0.2678	0.0745	0.0587	0.0389	0.0533	0.0966	0.0382	0.0301	0.0201
19	0.0572	0.0380	0.3426	0.0400	0.0447	0.0122	0.0581	0.0244	0.0767	0.0433	0.0217	0.0434
20	0.0440	0.0309	0.0706	0.1212	0.0619	0.0020	0.0620	0.0512	0.0140	0.0392	0.0341	0.0380
Media	0.0500	0.0497	0.0817	0.1539	0.0471	0.0458	0.0500	0.0458	0.0616	0.0455	0.0316	0.0432
Desviación E.	0.0128	0.0445	0.0814	0.1538	0.0206	0.0488	0.0263	0.0346	0.0276	0.0257	0.0123	0.0129

Tabla 3.19 Valores de periodos identificados para el sistema de varios grados de libertad (3D) mediante un proceso estocástico utilizando el algoritmo N4SID.

Corrida	N4SID											
	Estocástico											
	T ₁ (s)	T ₂ (s)	T ₃ (s)	T ₄ (s)	T ₅ (s)	T ₆ (s)	T ₇ (s)	T ₈ (s)	T ₉ (s)	T ₁₀ (s)	T ₁₁ (s)	T ₁₂ (s)
1	0.4476	0.4187	0.4014	0.2319	0.1457	0.1352	0.1212	0.1099	0.0867	0.0834	0.0664	0.0650
2	0.4493	0.4078	0.3988	0.2355	0.1440	0.1270	0.1240	0.1114	0.0884	0.0845	0.0665	0.0646
3	0.4568	0.4091	0.3920	0.2035	0.1457	0.1344	0.1221	0.1085	0.0854	0.0813	0.0672	0.0642
4	0.4477	0.4145	0.4025	0.2238	0.1413	0.1292	0.1212	0.1113	0.0867	0.0867	0.0677	0.0646
5	0.4552	0.4218	0.3930	0.2128	0.1440	0.1368	0.1241	0.1077	0.0865	0.0812	0.0672	0.0643
6	0.4473	0.4101	0.3997	0.2078	0.1443	0.1418	0.1231	0.1085	0.0852	0.0808	0.0671	0.0642
7	0.4522	0.4137	0.3891	0.2067	0.1424	0.1334	0.1216	0.1091	0.0863	0.0832	0.0664	0.0653
8	0.4541	0.4141	0.3885	0.1958	0.1437	0.1304	0.1228	0.1064	0.0881	0.0841	0.0672	0.0638
9	0.4517	0.4204	0.3942	0.2131	0.1424	0.1266	0.1215	0.1084	0.0856	0.0854	0.0667	0.0653
10	0.4473	0.4049	0.4038	0.2517	0.1463	0.1377	0.1227	0.1065	0.0885	0.0856	0.0670	0.0643
11	0.4478	0.4107	0.3967	0.2119	0.1416	0.1299	0.1238	0.1087	0.0875	0.0846	0.0667	0.0646
12	0.4524	0.4111	0.4005	0.2121	0.1424	0.1422	0.1225	0.1073	0.0964	0.0855	0.0678	0.0637
13	0.4501	0.4136	0.3985	0.2117	0.1438	0.1394	0.1228	0.1082	0.0889	0.0849	0.0671	0.0645
14	0.4532	0.4198	0.3953	0.2111	0.1453	0.1321	0.1243	0.1167	0.1024	0.0848	0.0668	0.0640
15	0.4605	0.4204	0.3970	0.2008	0.1420	0.1316	0.1217	0.1097	0.0867	0.0838	0.0674	0.0642
16	0.4526	0.4102	0.4041	0.2012	0.1430	0.1286	0.1255	0.1235	0.1065	0.0849	0.0678	0.0639
17	0.4533	0.4158	0.3939	0.1903	0.1423	0.1289	0.1263	0.1132	0.0914	0.0846	0.0673	0.0638
18	0.4534	0.4154	0.3922	0.2110	0.1427	0.1297	0.1243	0.1085	0.0877	0.0855	0.0670	0.0638
19	0.4525	0.4140	0.3932	0.2205	0.1436	0.1306	0.1236	0.1084	0.0857	0.0790	0.0676	0.0649
20	0.4535	0.4119	0.3972	0.2154	0.1445	0.1375	0.1224	0.1092	0.0861	0.0831	0.0673	0.0638
Media	0.4519	0.4139	0.3966	0.2134	0.1436	0.1332	0.1231	0.1101	0.0893	0.0838	0.0671	0.0643
Desviación E.	0.0035	0.0046	0.0046	0.0141	0.0014	0.0048	0.0014	0.0040	0.0058	0.0019	0.0004	0.0005

Tabla 3.20 Valores de amortiguamientos identificados para el sistema de varios grados de libertad (3D) mediante un proceso estocástico utilizando el algoritmo N4SID.

Corrida	N4SID											
	Estocástico											
	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}	ξ_{11}	ξ_{12}
1	0.0641	0.0629	0.0049	0.1290	0.0579	0.0857	0.0558	0.0698	0.0244	0.0856	0.0371	0.0733
2	0.0295	0.0420	0.0683	0.0395	0.0490	0.1353	0.0402	0.0270	0.0243	0.0627	0.0509	0.0642
3	0.0413	0.0274	0.0588	0.0463	0.0465	0.0355	0.0437	0.0409	0.0468	0.0532	0.0467	0.0541
4	0.0501	0.0693	0.0360	0.0890	0.0524	0.0171	0.0494	0.0600	0.1125	0.0420	0.0434	0.0384
5	0.0690	0.0316	0.0404	0.0596	0.0403	0.0963	0.0443	0.0497	0.0635	0.0275	0.0487	0.0427
6	0.0407	0.0464	0.0755	0.0798	0.0049	0.0423	0.0443	0.0354	0.0468	0.0367	0.0503	0.0433
7	0.0502	0.0361	0.0311	0.0659	0.0505	0.1092	0.0504	0.0256	0.0476	0.1180	0.0254	0.0641
8	0.0435	0.0340	0.0580	0.0673	0.0492	0.0012	0.0447	0.0469	0.0512	0.0493	0.0385	0.0531
9	0.0609	0.0397	0.0448	0.0178	0.0420	0.0246	0.0879	0.0498	0.0697	0.0336	0.0574	0.0564
10	0.0509	0.0702	0.0249	0.1796	0.0694	0.0459	0.0495	0.0306	0.1094	0.0511	0.0317	0.0586
11	0.0535	0.0476	0.0547	0.0407	0.0441	0.1052	0.0406	0.0406	0.0937	0.0358	0.0560	0.0437
12	0.0541	0.0398	0.0593	0.1135	0.0566	0.0092	0.0455	0.0485	0.1717	0.0480	0.0462	0.0483
13	0.0485	0.0507	0.0474	0.0876	0.0462	0.0042	0.0469	0.0523	0.0388	0.0460	0.0469	0.0468
14	0.0474	0.0321	0.0411	0.0425	0.0507	0.0675	0.0615	0.0400	0.0509	0.0496	0.0493	0.0559
15	0.0667	0.0436	0.0417	0.0553	0.0425	0.0140	0.0528	0.0463	0.0582	0.0454	0.0461	0.0516
16	0.0509	0.0757	0.0328	0.1730	0.0477	0.0128	0.3816	0.0431	0.0558	0.0475	0.0428	0.0438
17	0.0508	0.0350	0.0593	0.0494	0.0322	0.1141	0.0504	0.0324	0.1013	0.0349	0.0444	0.0306
18	0.0527	0.0273	0.0541	0.0938	0.0572	0.0451	0.0561	0.0507	0.0998	0.0457	0.0374	0.0342
19	0.0542	0.0386	0.0578	0.0842	0.0479	0.0019	0.0515	0.0516	0.0543	0.0391	0.0509	0.0549
20	0.0473	0.0364	0.0549	0.1021	0.0618	0.0187	0.0519	0.0485	0.0297	0.0435	0.0494	0.0444
Media	0.0513	0.0443	0.0473	0.0808	0.0475	0.0493	0.0675	0.0445	0.0675	0.0498	0.0450	0.0501
Desviación E.	0.0092	0.0145	0.0163	0.0428	0.0130	0.0434	0.0746	0.0109	0.0368	0.0202	0.0078	0.0106

3.5.3 Análisis de resultados

Para el sistema de varios grados de libertad en tres direcciones (3D) se identificaron correctamente los valores de los periodos del sistema, esto se puede ver en la Tabla 3.13, Tabla 3.15, Tabla 3.17 y Tabla 3.19 en donde el valor de la desviación estándar obtenido es una medida del buen ajuste que se obtuvo de los datos en el proceso de validación y en la Tabla 3.21 en la que se presenta una comparación entre los valores del análisis modal (ver Tabla 3.12) y los identificados en el proceso determinista y estocástico para ambos algoritmos. Se puede ver que para el proceso determinista el valor identificado es el mismo que el valor obtenido del análisis modal y que para el proceso estocástico el valor identificado presenta pequeñas diferencias.

Los amortiguamientos del sistema se identificaron correctamente con el proceso determinista, esto se puede ver en la Tabla 3.14 y Tabla 3.18 donde el valor de la desviación estándar de los datos es cero y en la Tabla 3.22 donde se presenta una comparación entre los valores de los amortiguamientos obtenidos del análisis modal (ver Tabla 3.12) y los identificados en el proceso estocástico para ambos algoritmos. Sin embargo la pérdida de precisión cuando se realiza un proceso de identificación estocástico es notoria en algunos de los modos, por ejemplo el valor del amortiguamiento para el modo cuatro utilizando el algoritmo SUBID es de 0.1539 mientras que con el algoritmo N4SID es de 0.0808

Tabla 3.21 Comparación de los periodos identificados con los valores del análisis modal para el sistema de varios grados de libertad en tres direcciones (3D).

Modo	Análisis modal	Periodo T(s)			
		SUBID		N4SID	
		Determinista	Estocástico	Determinista	Estocástico
1	0.4499	0.4499	0.4544	0.4499	0.4519
2	0.4137	0.4137	0.4175	0.4137	0.4139
3	0.3972	0.3972	0.3934	0.3972	0.3966
4	0.2026	0.2026	0.2619	0.2026	0.2134
5	0.1430	0.1430	0.1453	0.1430	0.1436
6	0.1318	0.1318	0.1354	0.1318	0.1332
7	0.1228	0.1228	0.1230	0.1228	0.1231
8	0.1078	0.1078	0.1129	0.1078	0.1101
9	0.0850	0.0850	0.0911	0.0850	0.0893
10	0.0821	0.0821	0.0848	0.0821	0.0838
11	0.0670	0.0670	0.0678	0.0670	0.0671
12	0.0638	0.0638	0.0651	0.0638	0.0643

Tabla 3.22 Comparación de los amortiguamientos identificados con los valores del análisis modal para el sistema de varios grados de libertad en tres direcciones (3D).

Modo	Análisis modal	Amortiguamiento ξ			
		SUBID		N4SID	
		Determinista	Estocástico	Determinista	Estocástico
1	0.050	0.050	0.0500	0.050	0.0513
2	0.050	0.050	0.0497	0.050	0.0443
3	0.050	0.050	0.0817	0.050	0.0473
4	0.050	0.050	0.1539	0.050	0.0808
5	0.050	0.050	0.0471	0.050	0.0475
6	0.050	0.050	0.0458	0.050	0.0493
7	0.050	0.050	0.0500	0.050	0.0675
8	0.050	0.050	0.0458	0.050	0.0445
9	0.050	0.050	0.0616	0.050	0.0675
10	0.050	0.050	0.0455	0.050	0.0498
11	0.050	0.050	0.0316	0.050	0.0450
12	0.050	0.050	0.0432	0.050	0.0501

3.6 CONCLUSIONES

En los tres sistemas analizados cuando se contó con la señal de entrada para realizar un proceso de identificación determinista, los algoritmos utilizados presentaron un ajuste exacto con los datos obtenidos del análisis modal, tanto en el periodo como en el amortiguamiento, estos resultados pueden indicar que en estructuras en las que se pueda identificar la señal que excita el sistema, los datos obtenidos mediante el proceso de identificación son confiables, esto es posible en edificios que cuenten con instrumentación permanente y se vean sometidos a movimientos fuertes como en el caso de eventos sísmicos.

Es importante anotar que la validez de los algoritmos se mantiene mientras el sistema se encuentre en un rango lineal.

En el sistema de un grado de libertad y el sistema de varios grados de libertad en dos direcciones, cuando se realizó un proceso de identificación estocástico se encontró que los valores identificados se ajustaron bien a los valores obtenidos del análisis modal, sin embargo cuando se aumenta el número de grados de libertad como en el caso del sistema de varios grados de libertad en tres direcciones, los algoritmos pierden precisión en la estimación del amortiguamiento cuando no se cuenta con las señales de entrada, es decir cuando se realizó un proceso de identificación estocástico, estos resultados pueden indicar que en los casos en los que no se conozca claramente la señal que excita el sistema, como por ejemplo en el caso de las pruebas de las vibración ambiental los valores de amortiguamiento no son tan confiables como los valores de periodo identificados

Como era de esperarse el proceso de identificación determinista genera mejores ajustes que el proceso de identificación estocástico ya que al conocer la señal de entrada que excita la estructura, la incertidumbre en el modelo de identificación es menor, sin embargo, para los datos utilizados la diferencia entre los dos procesos es realmente poca.

Es de esperarse que la adquisición de datos en pruebas sobre estructuras instrumentadas tenga influencia en el nivel de ajuste por las condiciones propias del proceso como la presencia de ruido y falta de precisión de los equipos, es por esto que una buena calidad de los datos y un buen pre-procesamiento son fundamentales en el proceso de identificación de las propiedades dinámicas.

4 APLICACIÓN

Se presentan los resultados de realizar el proceso de identificación a una estructura real ensayada en laboratorio. En la sección 4.1 se describe el procedimiento utilizado para la identificación de los parámetros modales de la estructura a partir de los datos obtenidos en las pruebas de laboratorio realizadas. En la sección 4.2 se hace una descripción del modelo ensayado y de la instrumentación utilizada en la estructura. En la sección 4.3 se presentan los resultados del análisis modal realizado en SAP2000®. En la sección 4.4 se presentan los resultados de las pruebas de excitación en la base utilizando la mesa vibradora. En la sección 4.5 se presentan las conclusiones del proceso de identificación con técnicas paramétricas, específicamente utilizando el método del subespacio y finalmente en la sección 4.6 se realiza una comparación con los resultados obtenidos por (Henao y Botero, 2013) utilizando técnicas no paramétricas.

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los resultados de las pruebas de laboratorio realizadas sobre una estructura real de cinco niveles construida en acero estructural. Con los datos obtenidos de las pruebas se identificaron los parámetros modales utilizando técnicas paramétricas, específicamente métodos del subespacio, para ello se identifican las matrices del modelo de espacio (2.95) utilizando el algoritmo SUBID y se encontraron los valores de las frecuencias, las fracciones de amortiguamiento y formas modales de acuerdo con (2.92), (2.93) y (2.94). Los resultados se comparan con lo obtenido por (Henao y Botero, 2013) utilizando técnicas no paramétricas.

Las pruebas fueron realizadas en el laboratorio de ingeniería sísmica de la Universidad EAFIT en donde se construyó e instrumentó la estructura para la realización de los ensayos de vibración forzada con excitación en la base.

Un problema típico de la estimación paramétrica de un modelo, es la determinación correcta del orden del modelo de estado³ “ n ” el cual es el parámetro fundamental en la identificación del modelo. La experiencia práctica con modelos paramétricos en aplicaciones de análisis modal, ha enseñado que es mejor sobre-especificar el orden del modelo y luego eliminar los polos numéricos espurios. (Peeters, 2000). Una buena herramienta para alcanzar este objetivo es la implementación del diagrama de estabilización el cual es presentado en este capítulo.

Para facilitar el manejo de los datos se desarrolló un programa de cómputo mediante el software de programación MATLAB el cual se describe en detalle en el anexo A.2. Las gráficas presentadas en este capítulo son obtenidas del programa de cómputo desarrollado.

4.2 DISEÑO EXPERIMENTAL

4.2.1 Descripción del modelo de laboratorio

El modelo ensayado es una estructura de cinco niveles construida en perfiles de acero estructural. En la Tabla 4.1 se presentan las características generales del modelo ensayado y en la Figura 4.1 una vista general del mismo.

³ La importancia del orden del modelo de espacio se expone con detalle en la sección 2.6.2

Tabla 4.1 Características del modelo de análisis (Henaó y Botero, 2013).

Modelo de Análisis	
Sección Columnas	Rectangular 50x30x1.5 (mm)
Sección Vigas	Rectangular 50x30x1.5 (mm)
Número de Niveles	5
Dimensiones Generales	2.0 m x 2.0 m x 5.0 m
Altura de entrepiso	1m
Peso específico Acero	7850 kgf/cm ³
Placas de piso	2.0 m x 2.0 m x 6 mm
Peso Placa Entrepiso	195.4 kgf
Peso del modelo (Incluye Fundaciones)	1397 kgf

**Figura 4.1** Modelo de la estructura ensayada en el laboratorio.

4.2.2 Instrumentación

La instrumentación utilizada en los ensayos de laboratorio está compuesta por una serie de acelerómetros de alta precisión⁴ que registran y digitalizan las señales en tres direcciones ortogonales (X, Y, Z), un GPS que unifica la señal del tiempo de todas las señales y una unidad central denominada CUSP-Me que recibe las señales de los acelerómetros y del GPS mediante cables de Ethernet. La programación y control de los equipos se realiza con un equipo portátil conectado a la unidad central. Todos los instrumentos utilizados son de la marca *Canterbury Seismic Instruments* de Nueva Zelanda. En la Figura 4.2 se muestran los equipos utilizados en los ensayos.

⁴ Los acelerómetros registran 200 datos por segundo lo cual permite registrar frecuencias entre 0 y 100Hz. La precisión de estos es de ± 0.001 Gal ($1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$), es decir 0.0001 por ciento del valor de la gravedad y pueden registrar eventos con aceleraciones inferiores a cuatro veces el valor de la gravedad ($\pm 4 g$).

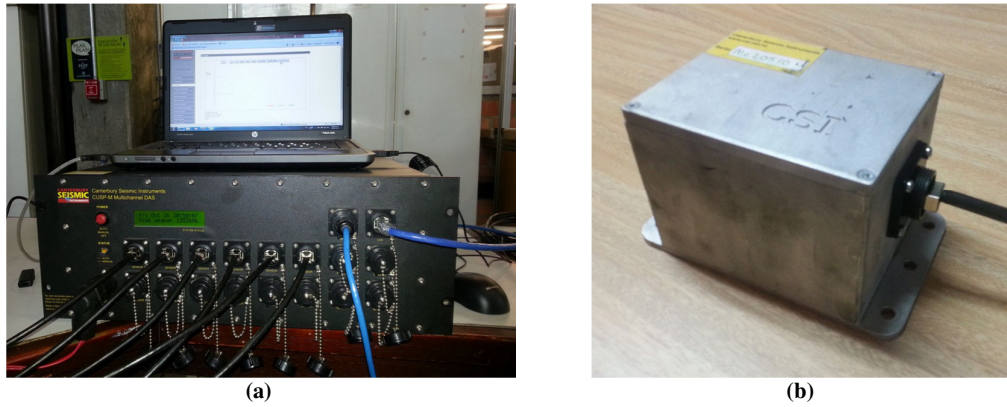


Figura 4.2 Equipos utilizados en los ensayos. (a) Unidad central para la recepción de los datos CUSP-Me. (b) Acelerómetro.

Las pruebas se realizaron con dos configuraciones de los acelerómetros en la estructura, las cuales se indican de forma esquemática en la Figura 4.3. Cada acelerómetro es fijado a la estructura mediante cajas metálicas como se indica en la Figura 4.4.

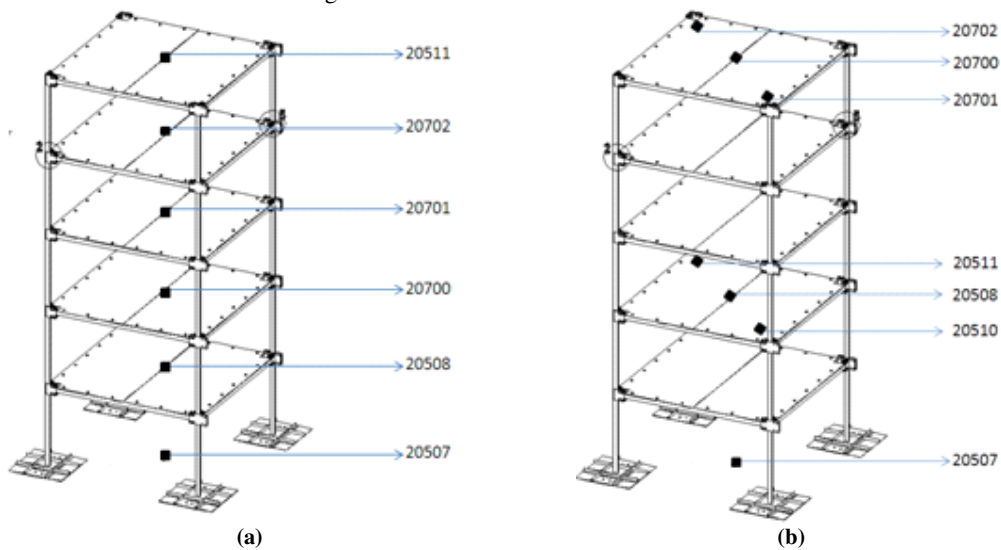


Figura 4.3 Localización de los sensores en la estructura. (a) Un acelerómetro en la mesa vibradora y un acelerómetro en cada nivel de la estructura. (b) Un acelerómetro en la mesa vibradora y tres acelerómetros en los niveles dos y cinco (Henao y Botero, 2013).



Figura 4.4 Fijación de los acelerómetros a la estructura. (a) Acelerómetros localizados en los niveles intermedios de la estructura. (b) Acelerómetro fijado a la mesa vibradora.

4.2.3 Tratamiento de las señales

Antes de utilizar las señales registradas por los acelerómetros en el proceso de identificación, es necesario adecuar los registros para eliminar de estos posibles errores generados en la adquisición de los datos. En el capítulo 4 de (Henao y Botero, 2013) se describen una serie de procedimientos para el tratamiento de los datos los cuales han sido implementados en el programa de cómputo desarrollado. A las señales registradas en los ensayos de excitación en la base se les realizó corrección de línea base y filtrado.

4.3 ANÁLISIS MODAL

En (Henao y Botero, 2013) se presenta un modelo de análisis realizado en el programa SAP2000® (Figura 4.5) con el cual se compararon los resultados de un análisis modal convencional con los resultados obtenidos del proceso de identificación utilizando técnicas *no paramétricas*. En este capítulo se utiliza dicho modelo para comparar los resultados del análisis modal convencional con lo obtenido en el proceso de identificación utilizando técnicas *paramétricas* específicamente el método del *subespacio*. En la Tabla 4.2 se presentan los resultados del análisis modal para los doce primeros modos de la estructura y en la Figura 4.6 se muestran esquemáticamente dichos modos.

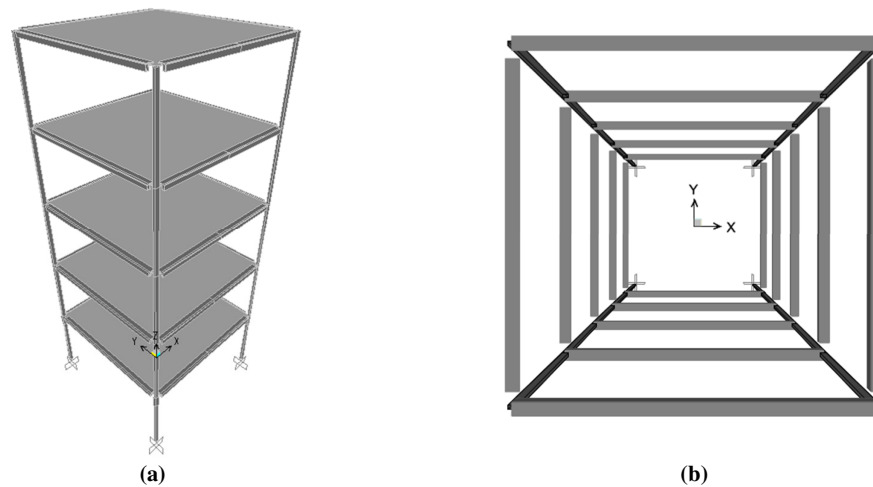


Figura 4.5 Modelo de análisis (Henao y Botero, 2013). (a) Vista general. (b) Vista superior. Las vigas y las columnas fueron modeladas como elementos tipo “Frame” y las placas de piso fueron modeladas como elementos tipo “shell”

Tabla 4.2 Resultados del análisis modal. x= traslación en dirección “x”, y= traslación en dirección “y”, z= rotación alrededor del eje “z”

Modo	f (Hz)	T(s)	Dirección
1	1.5064	0.6638	1y
2	1.9505	0.5127	1x
3	2.6650	0.3752	1z
4	4.4844	0.2230	2y
5	6.0190	0.1661	2x
6	7.3015	0.1370	3y
7	8.0765	0.1238	2z
8	9.6575	0.1035	4y
9	10.4443	0.0957	3x
10	11.1953	0.0893	5y
11	13.5892	0.0736	3z
12	14.8282	0.0674	4x

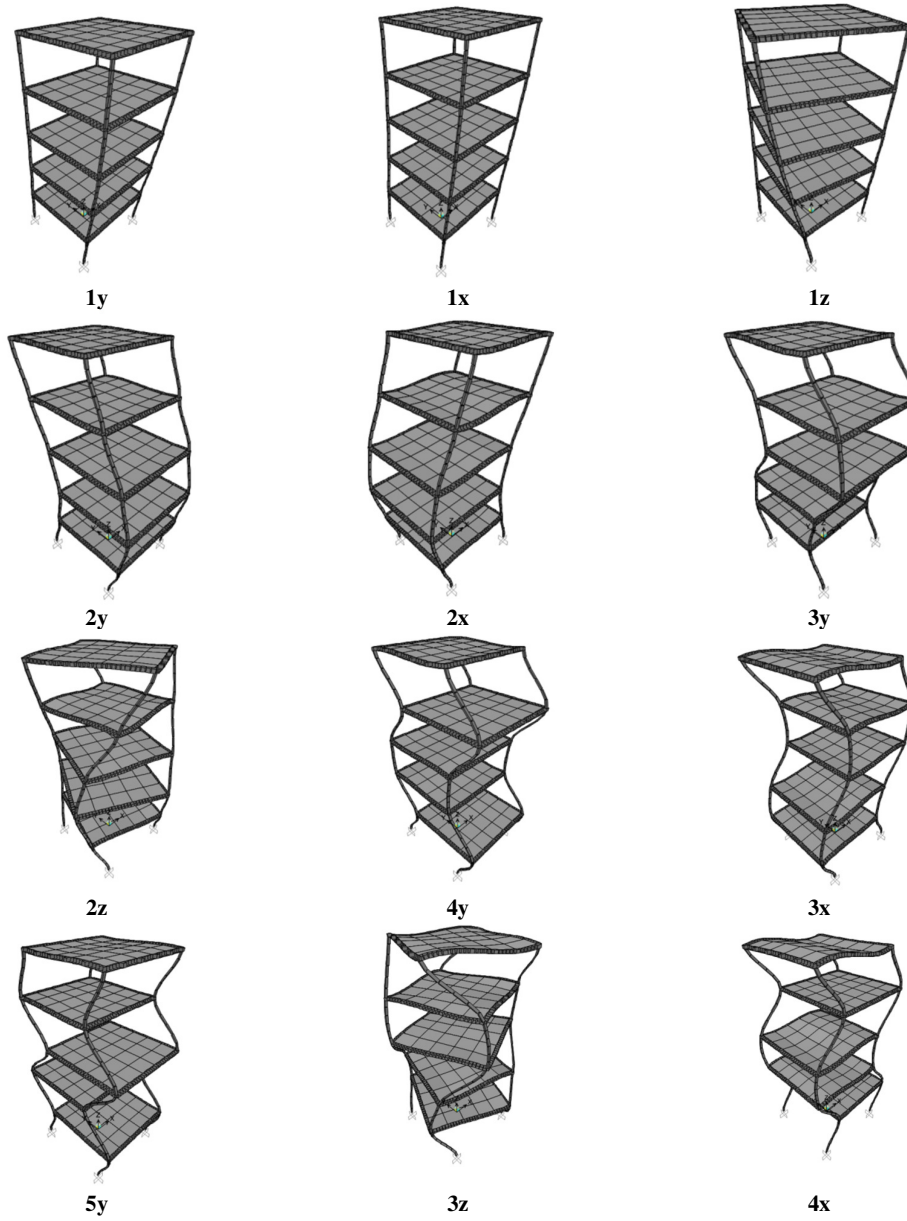


Figura 4.6 Doce primeros modos del modelo de análisis realizado en SAP2000® (Henao y Botero, 2013)

4.4 PRUEBAS CON EXCITACIÓN EN LA BASE UTILIZANDO LA MESA VIBRADORA

La mesa vibradora fue excitada por un gato hidráulico (Ver Figura 4.7) durante 30 segundos con una señal armónica de desplazamientos con una frecuencia de 1.4Hz (Ver Figura 4.8). Se realizaron pruebas con cinco niveles de excitación definidos en función de la amplitud del desplazamiento del gato de acuerdo con lo indicado en la Tabla 4.3

Tabla 4.3 Niveles de desplazamiento del gato.

Prueba	Desplazamiento del gato (cm)
1	0.2
2	0.4
3	0.6
4	0.8
5	1

Las señales registradas por el acelerómetro 20507 (Ver Figura 4.3) corresponden a la señales de entrada. El valor de la k -ésima muestra corresponde a la variable u_k de la ecuación (2.95). Las señales registradas por los sensores 20508, 20510, 20511, 20700, 20701 y 20702 (Ver Figura 4.3) corresponden a las señales de salida, el valor de la k -ésima muestra corresponde a la variable y_k de la ecuación (2.95). En la Figura 4.9 y Figura 4.10 se presentan ejemplos de las señales de entrada y salida utilizadas en el proceso de identificación.

Con los datos obtenidos de las pruebas, se identificaron las matrices A , B , C y D del modelo de estado de espacio (2.95) con el algoritmo SUBID y se obtuvieron los valores de las frecuencias, las fracciones de amortiguamiento y formas modales de acuerdo con (2.92), (2.93) y (2.94) .



Figura 4.7 Gato hidráulico utilizado para excitar la mesa vibradora.

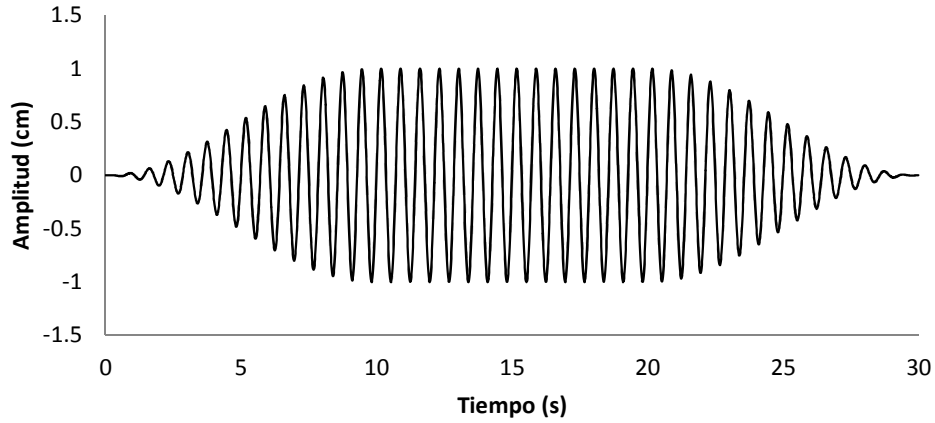


Figura 4.8 Señal armónica de excitación del gato hidráulico, duración 30 segundos, frecuencia 1.4Hz, suavizado de 0.33 y amplitud máxima de 1cm.

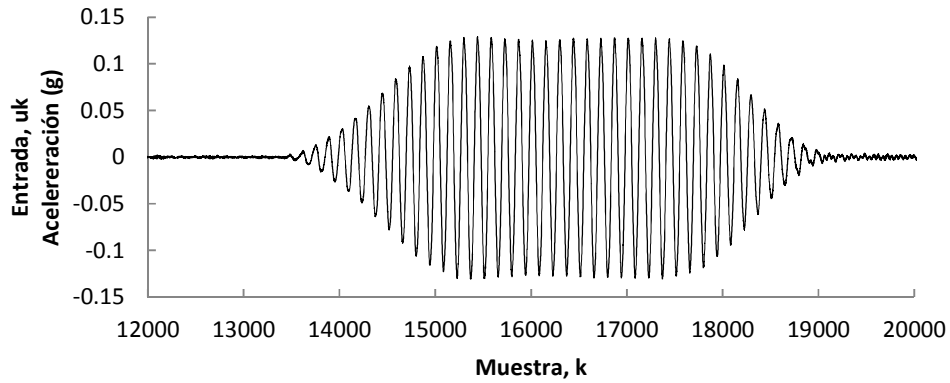


Figura 4.9 Parte de la señal de entrada registrada por el sensor 20507 en dirección "x" con un delta de tiempo de 0.005s cuando se aplicó un desplazamiento máximo al gato hidráulico de 1cm.

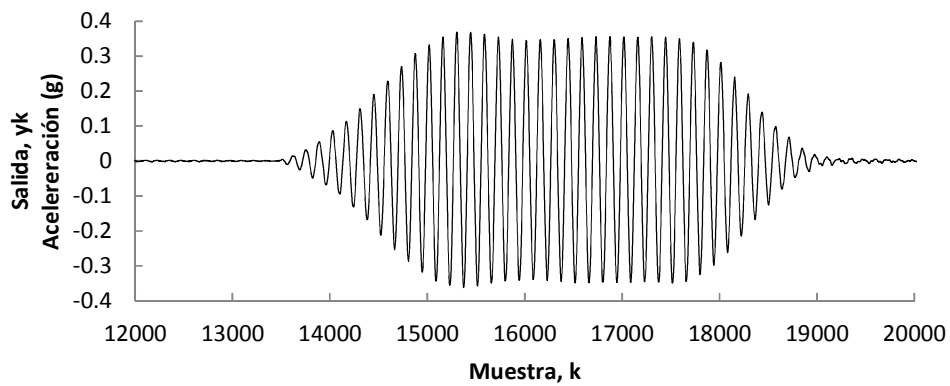


Figura 4.10 Parte de la señal de salida registrada por el sensor 20702 en dirección "x" con un delta de tiempo de 0.005s cuando se aplicó un desplazamiento máximo al gato hidráulico de 1cm.

4.4.1 Identificación de los parámetros modales

Un problema típico de la estimación paramétrica de un modelo utilizando métodos de subespacio, es la determinación correcta del orden del modelo de estado “ n ” el cual es el parámetro fundamental en la identificación del modelo. De acuerdo con lo expuesto en 2.6.2 el orden del modelo de espacio “ n ” se relaciona con los grados de libertad de la estructura “ n_2 ” de la siguiente manera:

$$n = 2n_2 \quad (4.1)$$

Es evidente que la cantidad de parámetros modales identificados del modelo de espacio dependen de la selección del orden del modelo, sin embargo, algunos de los parámetros identificados no corresponden a parámetros de la estructura. La experiencia práctica con modelos paramétricos en aplicaciones de análisis modal ha enseñado que es mejor sobre-especificar el orden del modelo y luego eliminar los valores que no corresponden a la estructura, estos valores son llamados “polos numéricos espurios”. (Peeters, 2000). Una buena herramienta para alcanzar este objetivo es la implementación del diagrama de estabilización, el cual busca establecer los parámetros modales “estables” para diferentes órdenes del modelo de estado de espacio.

Diagrama de estabilización

Para seleccionar los parámetros modales “estables” se realiza el proceso de identificación de las matrices A , B , C y D del modelo (2.95) para varios órdenes del modelo de estado de espacio⁵. Una vez identificadas las matrices se obtienen las frecuencias, las fracciones de amortiguamiento y formas modales de acuerdo con (2.92), (2.93) y (2.94). Los valores obtenidos de los parámetros modales en la iteración “ p ” se comparan con los valores obtenidos en la iteración “ $p+1$ ” y si la diferencia entre ambos es inferior a unos límites establecidos se dirá que el parámetro es estable. De acuerdo con lo expuesto por (Peeters, 2000) los criterios son los siguientes:

$$\begin{aligned} 100\% \frac{f^{(p)} - f^{(p+1)}}{f^{(p)}} &< 1\% \\ 100\% \frac{\xi^{(p)} - \xi^{(p+1)}}{\xi^{(p)}} &< 5\% \\ 100\%(1 - MAC(p, p + 1)) &< 2\% \end{aligned} \quad (4.2)$$

Donde “ p ” es el orden del modelo en donde la frecuencia, f , la fracción de amortiguamiento, ξ , y las formas modales $\{v\}$ son identificadas. The Modal Assurance Criterion (**MAC**) es la correlación cuadrada entre dos vectores modales:

$$MAC(p, p + 1) = \frac{\left| v^{(p)H} v^{(p+1)} \right|^2}{\left(v^{(p)H} v^{(p)} \right) \left(v^{(p+1)H} v^{(p+1)} \right)} \quad (4.3)$$

Por definición, **MAC** es un número entre 0 y 1. Este criterio es usado en aplicaciones de análisis modal frecuentemente ya que se caracteriza la correspondencia entre formas modales en un número.

Resultados obtenidos del proceso de identificación

⁵ La importancia del orden del modelo de espacio se expone con detalle en la sección 2.6.2

En la Figura 4.11, Figura 4.12, Figura 4.13, Figura 4.14, Figura 4.15, Figura 4.16, Figura 4.17, Figura 4.18, Figura 4.19 y Figura 4.20 se presentan los *diagramas de estabilización*⁶ encontrados para el juego de datos obtenidos de las pruebas con la configuración de la instrumentación mostrada en la Figura 4.3. En la Tabla 4.4 y Tabla 4.7 se presentan las frecuencias, los periodos y las fracciones de amortiguamiento estables del modelo de estado (2.95) de acuerdo con los criterios definidos en 4.4.1 para las señales de entrada y de salida definidas en 4.4 y para las configuraciones (a) y (b) de la Figura 4.3 respectivamente.

En la Tabla 4.5, Tabla 4.6, Tabla 4.8 y Tabla 4.9 se presenta una comparación entre las frecuencias y los periodos obtenidos del proceso de identificación con las frecuencias y periodos obtenidos del modelo analítico realizado en el programa de SAP2000® por (Henao y Botero, 2013).

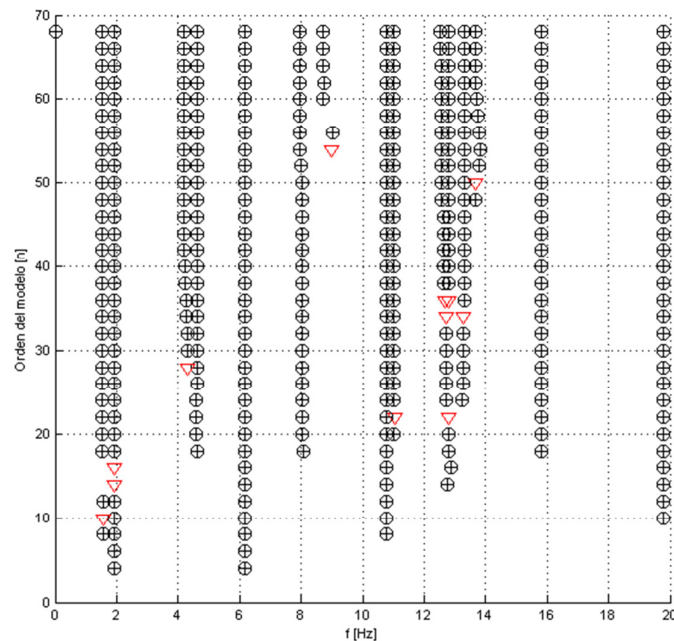


Figura 4.11 Diagrama de estabilización obtenido a partir de los datos correspondientes a la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (a) para un desplazamiento máximo del gato de **0.2cm**. El criterio utilizado fue, 1% para frecuencias, 5% para fracciones de amortiguamiento y 2% para las formas modales. Se indica el símbolo “⊕” para un polo estable en frecuencia, fracción de amortiguamiento y forma modal, el símbolo “▽” para un polo estable en frecuencia y en fracción de amortiguamiento y el símbolo “*” Para un polo estable sólo en la frecuencia.

⁶ Los diagramas de estabilización fueron obtenidos con ayuda del programa de cómputo desarrollado, en éstos sólo se presentan las frecuencias menores o iguales a 20Hz que son las de interés para la estructura.

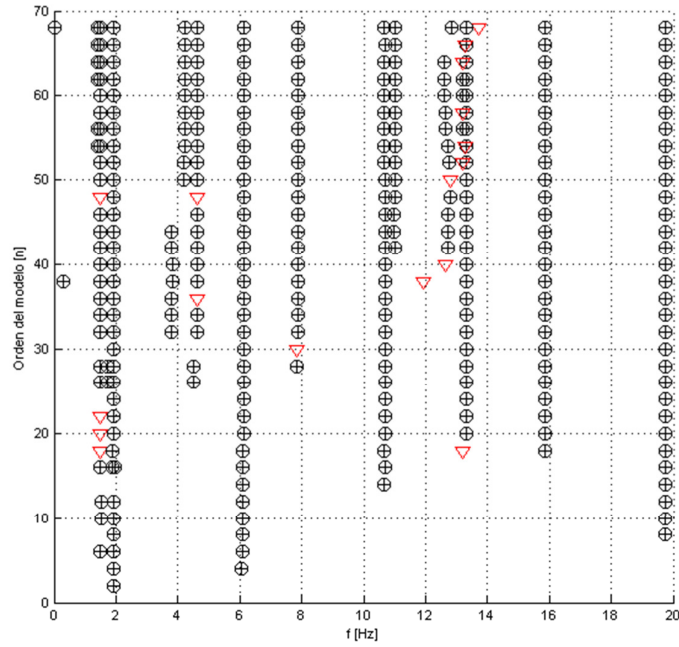


Figura 4.12 Diagrama de estabilización obtenido a partir de los datos correspondientes a la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (a) para un desplazamiento máximo del gato de **0.4cm**. El criterio utilizado fue, 1% para frecuencias, 5% para fracciones de amortiguamiento y 2% para las formas modales. Se indica el símbolo “+” para un polo estable en frecuencia, fracción de amortiguamiento y forma modal, el símbolo “▽” para un polo estable en frecuencia y en fracción de amortiguamiento y el símbolo “*” Para un polo estable sólo en la frecuencia.

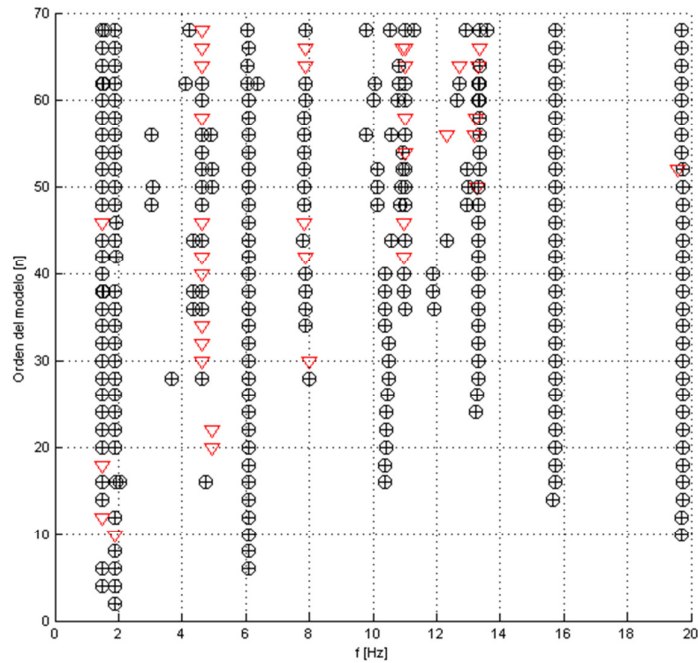


Figura 4.13 Diagrama de estabilización obtenido a partir de los datos correspondientes a la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (a) para un desplazamiento máximo del gato de **0.6cm**. El criterio utilizado fue, 1% para frecuencias, 5% para fracciones de amortiguamiento y 2% para las formas modales. Se indica el símbolo “+” para un polo estable en frecuencia, fracción de amortiguamiento y forma modal, el símbolo “▽” para un polo estable en frecuencia y en fracción de amortiguamiento y el símbolo “*” Para un polo estable sólo en la frecuencia.

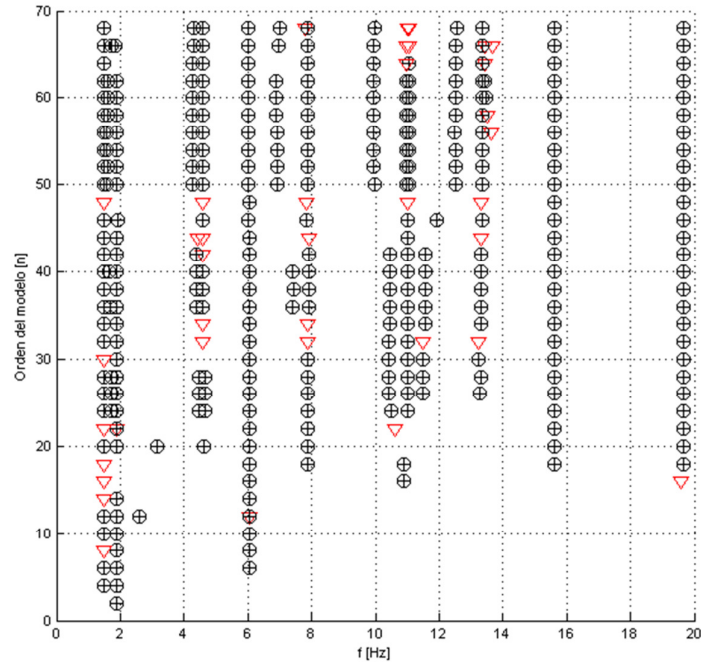


Figura 4.14 Diagrama de estabilización obtenido a partir de los datos correspondientes a la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (a) para un desplazamiento máximo del gato de **0.8cm**. El criterio utilizado fue, 1% para frecuencias, 5% para fracciones de amortiguamiento y 2% para las formas modales. Se indica el símbolo “+” para un polo estable en frecuencia, fracción de amortiguamiento y forma modal, el símbolo “▽” para un polo estable en frecuencia y en fracción de amortiguamiento y el símbolo “*” Para un polo estable sólo en la frecuencia.

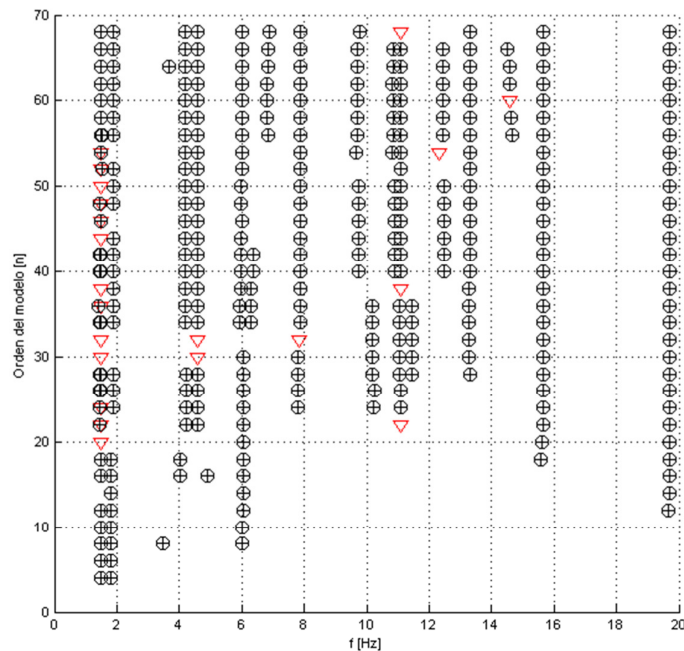


Figura 4.15 Diagrama de estabilización obtenido a partir de los datos correspondientes a la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (a) para un desplazamiento máximo del gato de **1.0cm**. El criterio utilizado fue, 1% para frecuencias, 5% para fracciones de amortiguamiento y 2% para las formas modales. Se indica el símbolo “+” para un polo estable en frecuencia, fracción de amortiguamiento y forma modal, el símbolo “▽” para un polo estable en frecuencia y en fracción de amortiguamiento y el símbolo “*” Para un polo estable sólo en la frecuencia.

Tabla 4.4 Frecuencias, periodos y fracciones de amortiguamiento del modelo de estado estables de acuerdo con lo definido en 4.4.1 obtenidos del diagrama de estabilización a partir de los datos obtenidos de la configuración de la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (a).

Parámetro estable	0.2cm			0.4cm			0.6cm			0.8cm			1cm		
	f (Hz)	T (s)	ξ	f (Hz)	T (s)	ξ	f (Hz)	T (s)	ξ	f (Hz)	T (s)	ξ	f (Hz)	T (s)	ξ
1	1.516	0.660	0.011	1.402	0.713	0.092	1.503	0.665	0.011	1.489	0.672	0.007	1.502	0.666	0.0474
2	1.929	0.518	0.007	1.501	0.666	0.007	1.896	0.527	0.025	1.595	0.627	0.033	1.899	0.527	0.0152
3	4.192	0.239	0.007	1.921	0.521	0.014	4.620	0.216	0.006	1.872	0.534	0.011	4.203	0.238	0.0076
4	4.617	0.217	0.003	4.222	0.237	0.021	6.056	0.165	0.014	4.283	0.233	0.016	4.576	0.219	0.0074
5	6.152	0.163	0.004	4.620	0.216	0.007	7.862	0.127	0.008	4.591	0.218	0.007	6.027	0.166	0.0124
6	7.948	0.126	0.005	6.113	0.164	0.006	10.820	0.092	0.018	6.029	0.166	0.009	6.832	0.146	0.0173
7	8.730	0.115	0.021	7.874	0.127	0.005	11.000	0.091	0.003	6.892	0.145	0.019	7.890	0.127	0.0072
8	10.760	0.093	0.003	10.670	0.094	0.005	12.720	0.079	0.005	7.887	0.127	0.005	9.712	0.103	0.0109
9	11.000	0.091	0.001	10.990	0.091	0.002	13.320	0.075	0.013	9.993	0.100	0.011	10.850	0.092	0.0118
10	12.540	0.080	0.001	12.600	0.079	0.008	13.340	0.075	0.001	10.970	0.091	0.004	11.100	0.090	0.0049
11	12.810	0.078	0.002	13.190	0.076	0.015	15.730	0.064	0.001	11.040	0.091	-	12.450	0.080	0.0080
12	13.310	0.075	0.001	13.330	0.075	0.0002	19.720	0.051	0.0002	12.520	0.080	0.007	13.300	0.075	0.0021
13	13.690	0.073	0.005	15.860	0.063	0.001	-	-	-	13.350	0.075	0.001	14.570	0.069	0.0106
14	15.830	0.063	0.003	19.760	0.051	0.0002	-	-	-	13.410	0.075	0.024	15.660	0.064	0.0012
15	19.780	0.051	0.001	-	-	-	-	-	-	15.610	0.064	0.006	-	-	-

Tabla 4.5 Comparación entre las frecuencias del modelo analítico realizado en SAP2000® y las identificadas con el método del subespacio utilizando la configuración de la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (a) para diferentes desplazamientos del gato.

Modo	Dirección	f (Hz) M. analítico	0.2cm		0.4cm		0.6cm		0.8cm		1cm	
			Identificado	% Error	Identificado	% Error	Identificado	% Error	Identificado	% Error	Identificado	% Error
1	1y	1.506	1.516	0.64%	1.501	0.36%	1.503	0.23%	1.489	1.16%	1.502	0.29%
2	1x	1.951	1.929	1.10%	1.921	1.51%	1.896	2.80%	1.872	4.03%	1.899	2.64%
3	1z	2.665	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	2y	4.484	4.617	2.96%	4.620	3.02%	4.620	3.02%	4.591	2.38%	4.576	2.04%
5	2x	6.019	6.152	2.21%	6.113	1.56%	6.056	0.61%	6.029	0.17%	6.027	0.13%
6	3y	7.302	-	-	-	-	-	-	6.892	5.61%	6.832	6.43%
7	2z	8.077	7.948	1.59%	7.874	2.51%	7.862	2.66%	7.887	2.35%	7.890	2.31%
8	4y	9.657	-	-	-	-	-	-	9.993	3.47%	9.712	0.56%
9	3x	10.444	10.760	3.02%	10.670	2.16%	10.820	3.60%	10.970	5.03%	10.850	3.88%
10	5y	11.195	11.000	1.74%	10.990	1.83%	11.000	1.74%	11.040	1.39%	11.100	0.85%
11	3z	13.589	13.310	2.05%	13.330	1.91%	13.340	1.83%	13.410	1.32%	13.300	2.13%
12	4x	14.828	15.830	6.76%	15.860	6.96%	15.730	6.08%	15.610	5.27%	14.570	1.74%

Tabla 4.6 Comparación entre los periodos del modelo analítico realizado en SAP2000® y los identificados con el método del subespacio utilizando la configuración de la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (a) para diferentes desplazamientos del gato.

Modo	Dirección	T (s) M. analítico	0.2cm		0.4cm		0.6cm		0.8cm		1cm	
			Identificado	% Error	Identificado	% Error	Identificado	% Error	Identificado	% Error	Identificado	% Error
1	1y	0.664	0.660	0.63%	0.666	0.36%	0.665	0.23%	0.672	1.17%	0.666	0.29%
2	1x	0.513	0.518	1.12%	0.521	1.54%	0.527	2.88%	0.534	4.19%	0.527	2.71%
3	1z	0.375	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	2y	0.223	0.217	2.87%	0.216	2.93%	0.216	2.93%	0.218	2.32%	0.219	2.00%
5	2x	0.166	0.163	2.16%	0.164	1.54%	0.165	0.61%	0.166	0.17%	0.166	0.13%
6	3y	0.137	-	-	-	-	-	-	0.145	5.94%	0.146	6.87%
7	2z	0.124	0.126	1.62%	0.127	2.57%	0.127	2.73%	0.127	2.40%	0.127	2.36%
8	4y	0.104	-	-	-	-	-	-	0.100	3.36%	0.103	0.56%
9	3x	0.096	0.093	2.93%	0.094	2.12%	0.092	3.47%	0.091	4.79%	0.092	3.74%
10	5y	0.089	0.091	1.78%	0.091	1.87%	0.091	1.78%	0.091	1.41%	0.090	0.86%
11	3z	0.074	0.075	2.10%	0.075	1.94%	0.075	1.87%	0.075	1.34%	0.075	2.17%
12	4x	0.067	0.063	6.33%	0.063	6.51%	0.064	5.73%	0.064	5.01%	0.069	1.77%

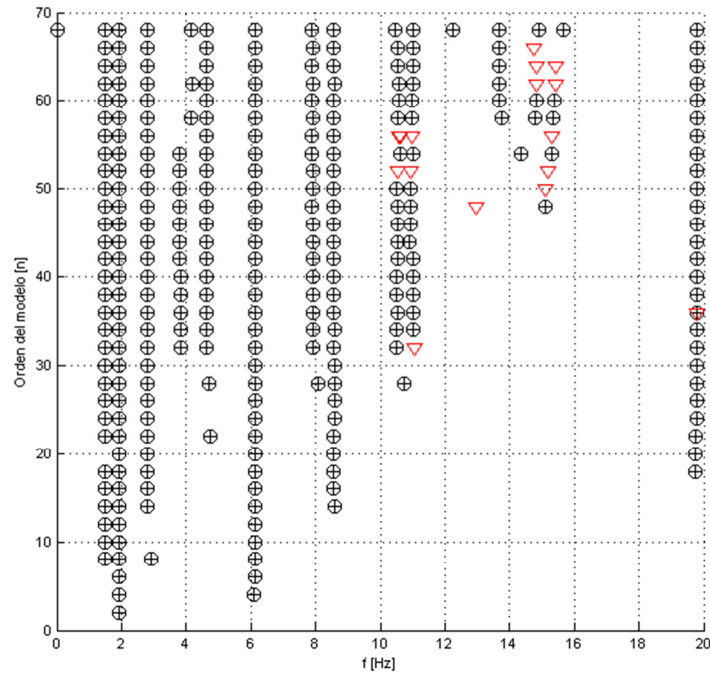


Figura 4.16 Diagrama de estabilización obtenido a partir de los datos correspondientes a la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (b) para un desplazamiento máximo del gato de **0.2cm**. El criterio utilizado fue, 1% para frecuencias, 5% para fracciones de amortiguamiento y 2% para las formas modales. Se indica el símbolo “ \oplus ” para un polo estable en frecuencia, fracción de amortiguamiento y forma modal, el símbolo “ ∇ ” para un polo estable en frecuencia y en fracción de amortiguamiento y el símbolo “*” Para un polo estable sólo en la frecuencia.

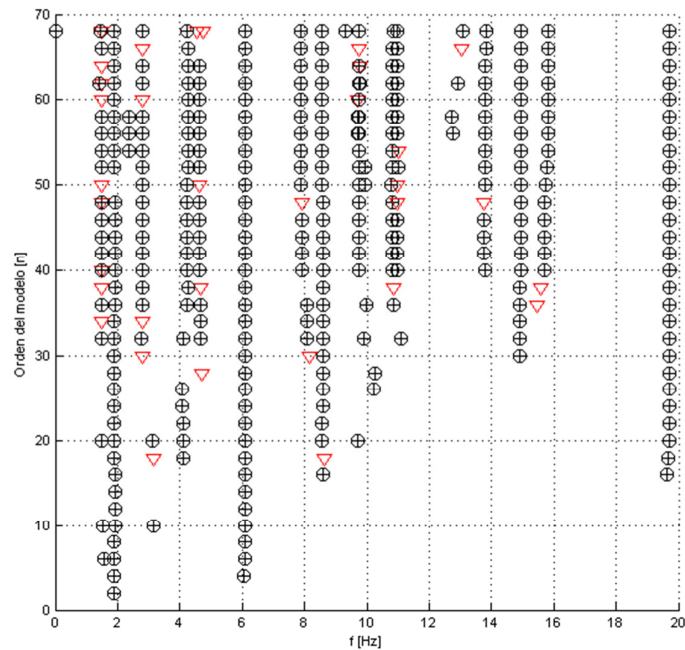


Figura 4.17 Diagrama de estabilización obtenido a partir de los datos correspondientes a la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (b) para un desplazamiento máximo del gato de **0.4cm**. El criterio utilizado fue, 1% para frecuencias, 5% para fracciones de amortiguamiento y 2% para las formas modales. Se indica el símbolo “ \oplus ” para un polo estable en frecuencia, fracción de amortiguamiento y forma modal, el símbolo “ ∇ ” para un polo estable en frecuencia y en fracción de amortiguamiento y el símbolo “*” Para un polo estable sólo en la frecuencia.

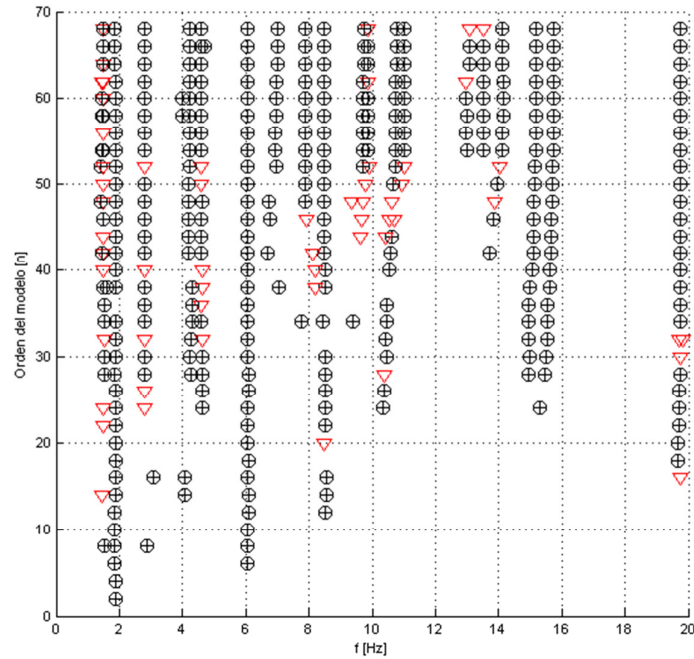


Figura 4.18 Diagrama de estabilización obtenido a partir de los datos correspondientes a la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (b) para un desplazamiento máximo del gato de **0.6cm**. El criterio utilizado fue, 1% para frecuencias, 5% para fracciones de amortiguamiento y 2% para las formas modales. Se indica el símbolo “+” para un polo estable en frecuencia, fracción de amortiguamiento y forma modal, el símbolo “▽” para un polo estable en frecuencia y en fracción de amortiguamiento y el símbolo “*” Para un polo estable sólo en la frecuencia.

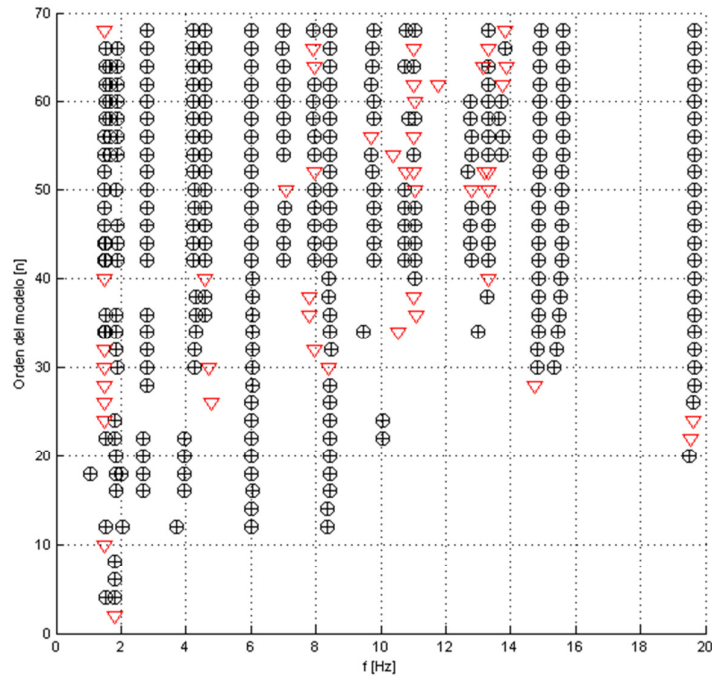


Figura 4.19 Diagrama de estabilización obtenido a partir de los datos correspondientes a la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (b) para un desplazamiento máximo del gato de **0.8cm**. El criterio utilizado fue, 1% para frecuencias, 5% para fracciones de amortiguamiento y 2% para las formas modales. Se indica el símbolo “+” para un polo estable en frecuencia, fracción de amortiguamiento y forma modal, el símbolo “▽” para un polo estable en frecuencia y en fracción de amortiguamiento y el símbolo “*” Para un polo estable sólo en la frecuencia.

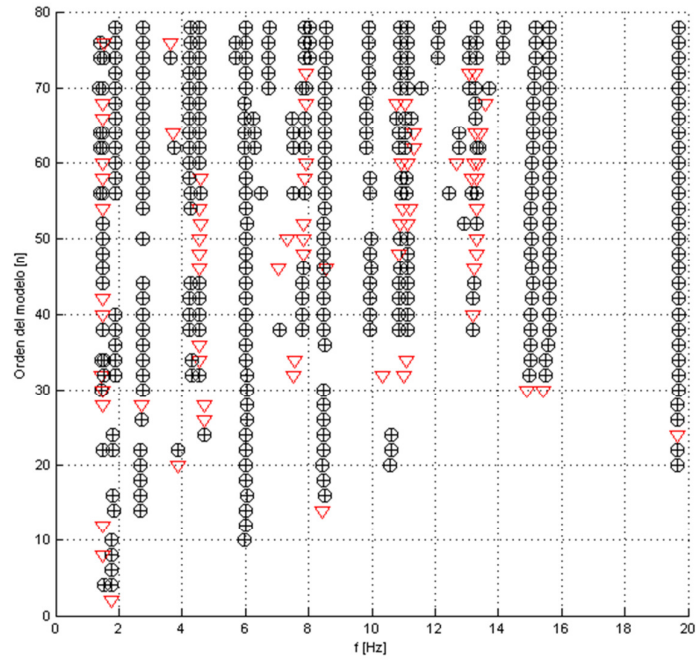


Figura 4.20 Diagrama de estabilización obtenido a partir de los datos correspondientes a la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (b) para un desplazamiento máximo del gato de **1.0cm**. El criterio utilizado fue, 1% para frecuencias, 5% para fracciones de amortiguamiento y 2% para las formas modales. Se indica el símbolo “+” para un polo estable en frecuencia, fracción de amortiguamiento y forma modal, el símbolo “▽” para un polo estable en frecuencia y en fracción de amortiguamiento y el símbolo “*” Para un polo estable sólo en la frecuencia.

Tabla 4.7 Frecuencias, periodos y fracciones de amortiguamiento del modelo de estado estables de acuerdo con lo definido en 4.4.1 obtenidos del diagrama de estabilización a partir de los datos obtenidos de la configuración de la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (b).

Parámetro estable	0.2cm			0.4cm			0.6cm			0.8cm			1cm		
	f (Hz)	T (s)	ξ	f (Hz)	T (s)	ξ	f (Hz)	T (s)	ξ	f (Hz)	T (s)	ξ	f (Hz)	T (s)	ξ
1	1.494	0.669	0.006	1.498	0.668	0.005	1.477	0.677	0.058	1.508	0.663	-	1.491	0.671	0.007
2	1.932	0.518	0.006	1.897	0.527	0.014	1.865	0.536	0.015	1.641	0.609	-	1.877	0.533	0.019
3	2.785	0.359	0.004	2.798	0.357	0.023	2.799	0.357	0.015	1.899	0.527	0.023	2.749	0.364	-
4	4.615	0.217	0.006	4.272	0.234	0.005	4.226	0.237	0.007	2.807	0.356	0.009	4.230	0.236	0.007
5	6.116	0.164	0.004	4.619	0.216	0.010	4.599	0.217	0.006	4.239	0.236	0.006	4.557	0.219	0.007
6	7.895	0.127	0.002	6.083	0.164	0.005	6.056	0.165	0.006	4.578	0.218	0.010	5.967	0.168	0.009
7	8.569	0.117	0.004	7.888	0.127	0.001	7.001	0.143	0.009	6.015	0.166	0.010	6.270	0.159	0.010
8	10.540	0.095	0.011	8.552	0.117	0.004	7.881	0.127	0.008	6.997	0.143	0.015	7.509	0.133	0.016
9	10.990	0.091	0.005	9.760	0.102	0.000	8.470	0.118	0.001	7.937	0.126	0.003	7.895	0.127	0.003
10	13.670	0.073	0.007	10.830	0.092	0.014	9.732	0.103	0.003	8.436	0.119	0.002	8.497	0.118	0.007
11	14.840	0.067	0.011	10.970	0.091	0.002	9.853	0.101	0.003	9.746	0.103	0.008	9.813	0.102	0.011
12	15.400	0.065	0.015	13.800	0.072	0.007	10.760	0.093	0.012	10.720	0.093	0.026	10.840	0.092	0.010
13	19.770	0.051	0.001	14.930	0.067	0.004	11.010	0.091	0.004	11.030	0.091	0.001	11.070	0.090	0.003
14	-	-	-	15.800	0.063	0.002	13.080	0.076	0.010	13.150	0.076	0.025	12.760	0.078	0.012
15	-	-	-	19.710	0.051	0.001	13.490	0.074	0.009	13.320	0.075	0.002	13.290	0.075	0.003
16	-	-	-	-	-	-	14.120	0.071	0.005	13.860	0.072	0.017	15.080	0.066	0.004
17	-	-	-	-	-	-	15.170	0.066	0.004	14.910	0.067	0.004	15.620	0.064	0.001
18	-	-	-	-	-	-	15.720	0.064	0.002	15.610	0.064	0.003	19.710	0.051	0.001
19	-	-	-	-	-	-	19.740	0.051	0.001	19.680	0.051	0.002	-	-	-

Tabla 4.8 Comparación entre las frecuencias del modelo analítico realizado en SAP2000® y las identificadas con el método del subespacio utilizando la configuración de la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (b) para diferentes desplazamientos del gato.

Modo	Dirección	f (Hz) M. analítico	0.2cm		0.4cm		0.6cm		0.8cm		1cm	
			Identificado	% Error	Identificado	% Error	Identificado	% Error	Identificado	% Error	Identificado	% Error
1	1y	1.506	1.494	0.82%	1.498	0.56%	1.477	1.95%	1.508	0.11%	1.491	1.02%
2	1x	1.951	1.932	0.95%	1.897	2.74%	1.865	4.38%	1.899	2.64%	1.877	3.77%
3	1z	2.665	2.785	4.50%	2.798	4.99%	2.799	5.03%	2.807	5.33%	2.749	3.15%
4	2y	4.484	4.615	2.91%	4.619	3.00%	4.599	2.55%	4.578	2.09%	4.557	1.62%
5	2x	6.019	6.116	1.61%	6.083	1.06%	6.056	0.61%	6.015	0.07%	5.967	0.86%
6	3y	7.302	-	-	-	-	7.001	4.12%	6.997	4.17%	7.509	2.84%
7	2z	8.077	7.895	2.25%	7.888	2.33%	7.881	2.42%	7.937	1.73%	7.895	2.25%
8	4y	9.657	-	-	9.760	1.06%	9.732	0.77%	9.746	0.92%	9.813	1.61%
9	3x	10.444	10.540	0.92%	10.830	3.69%	10.760	3.02%	10.720	2.64%	10.840	3.79%
10	5y	11.195	10.990	1.83%	10.970	2.01%	11.010	1.66%	11.030	1.48%	11.070	1.12%
11	3z	13.589	13.670	0.59%	13.800	1.55%	13.490	0.73%	13.320	1.98%	13.290	2.20%
12	4x	14.828	14.840	0.08%	14.930	0.69%	15.170	2.30%	14.910	0.55%	15.080	1.70%

Tabla 4.9 Comparación entre los periodos del modelo analítico realizado en SAP2000® y los identificados con el método del subespacio utilizando la configuración de la instrumentación indicada en la Figura 4.3 (b) para diferentes desplazamientos del gato.

Modo	Dirección	T (s) M. analítico	0.2cm		0.4cm		0.6cm		0.8cm		1cm	
			Identificado	% Error	Identificado	% Error	Identificado	% Error	Identificado	% Error	Identificado	% Error
1	1y	0.664	0.669	0.83%	0.668	0.56%	0.677	1.99%	0.663	0.11%	0.671	1.03%
2	1x	0.513	0.518	0.96%	0.527	2.82%	0.536	4.59%	0.527	2.71%	0.533	3.92%
3	1z	0.375	0.359	4.31%	0.357	4.75%	0.357	4.79%	0.356	5.06%	0.364	3.05%
4	2y	0.223	0.217	2.83%	0.216	2.91%	0.217	2.49%	0.218	2.04%	0.219	1.59%
5	2x	0.166	0.164	1.59%	0.164	1.05%	0.165	0.61%	0.166	0.07%	0.168	0.87%
6	3y	0.137	-	-	-	-	0.143	4.29%	0.143	4.35%	0.133	2.76%
7	2z	0.124	0.127	2.30%	0.127	2.39%	0.127	2.48%	0.126	1.76%	0.127	2.30%
8	4y	0.104	-	-	0.102	1.05%	0.103	0.77%	0.103	0.91%	0.102	1.59%
9	3x	0.096	0.095	0.91%	0.092	3.56%	0.093	2.93%	0.093	2.57%	0.092	3.65%
10	5y	0.089	0.091	1.87%	0.091	2.05%	0.091	1.68%	0.091	1.50%	0.090	1.13%
11	3z	0.074	0.073	0.59%	0.072	1.53%	0.074	0.74%	0.075	2.02%	0.075	2.25%
12	4x	0.067	0.067	0.08%	0.067	0.68%	0.066	2.25%	0.067	0.55%	0.066	1.67%

4.4.2 Análisis de resultados

La mesa vibradora de la Universidad EAFIT consta de una plataforma metálica de 36m^2 y un sistema motriz hidráulico que está en capacidad de inducir desplazamientos en una dirección hasta de diez centímetros. La plataforma está colgada mediante seis grupos de cables y para su estabilidad se desplaza por dos ejes laterales. El modelo ensayado fue excitado principalmente en la dirección “x” como se indica en la Figura 4.21 y Figura 4.22, sin embargo, los acelerómetros instalados en el modelo registraron señales en las direcciones “x” e “y”, esto se debe posiblemente a la existencia de pequeñas imperfecciones en las superficies laterales por donde la plataforma se desplaza. Las señales registradas en la dirección “y” son determinantes para la obtención de los parámetros modales de la estructura ya que si sólo se contara con el registro de las señales en dirección “x” no sería posible identificar los parámetros de la estructura correspondientes a la dirección “y”, sin embargo, como se puede ver en la Figura 4.23 el orden de magnitud entre ambas señales es muy diferente, lo que influye en el grado de precisión obtenido en el proceso de identificación cuando se utiliza el método del subespacio.

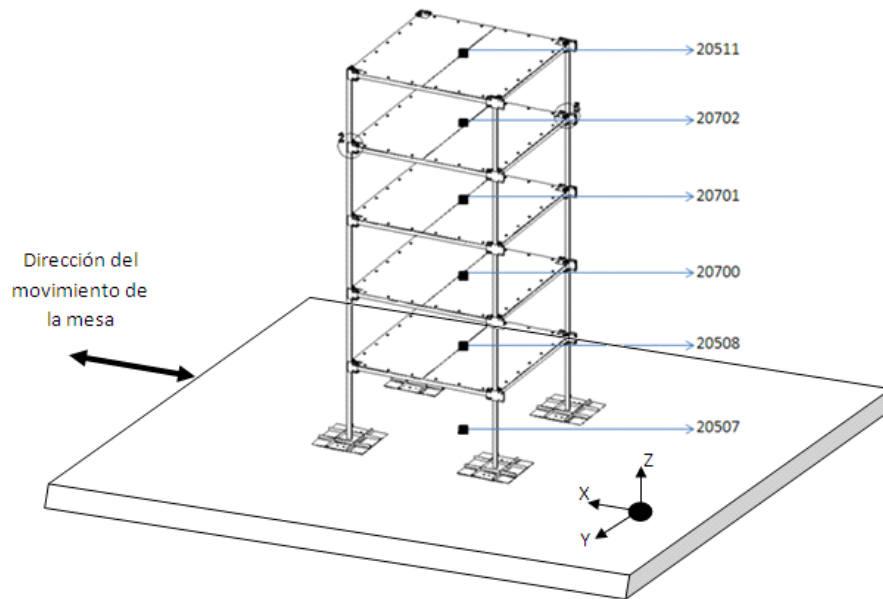


Figura 4.21 Localización de la estructura en la mesa vibradora con el primer esquema de instrumentación

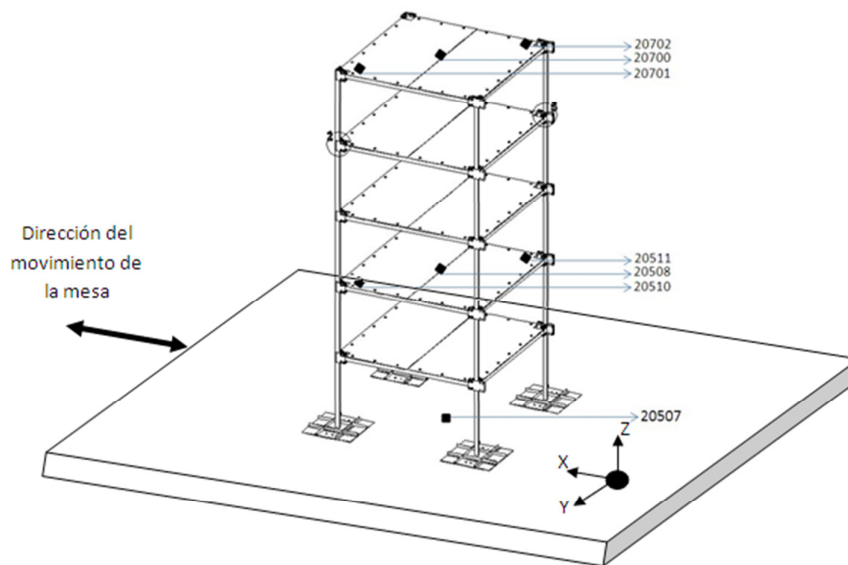


Figura 4.22 Localización de la estructura en la mesa vibradora con el segundo esquema de instrumentación

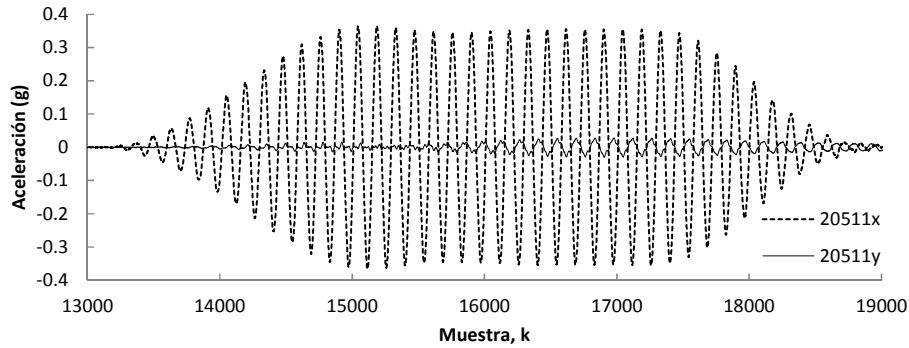


Figura 4.23 Parte de la señal de salida registrada por el sensor 20511 en las direcciones “x” e “y”

Las frecuencias de la estructura identificadas utilizando el método del subespacio, son consistentes con los valores obtenidos del modelo analítico realizado en el programa SAP2000® por (Henao y Botero, 2013), esto se puede notar en los porcentajes de error mostrados en la Tabla 4.5 y Tabla 4.8 los cuales en su mayoría no exceden el 10% para los dos esquemas de instrumentación utilizados.

Al comparar la Tabla 4.4 con la Tabla 4.5 para la configuración de la instrumentación indicada en la Figura 4.3(a) y la Tabla 4.7 con la Tabla 4.8 para la configuración de la instrumentación indicada en la Figura 4.3(b) se puede notar que no todas las frecuencias estables corresponden a modos de la estructura, algunas de estas frecuencias son propias del modelo matemático utilizado y de las características de los equipos utilizados en la instrumentación.

El proceso de identificación de los parámetros modales realizado a partir del el juego de datos de la configuración de instrumentación indicada en la Figura 4.3 (b) tiene un mejor ajuste con el modelo realizado en SAP2000® que los obtenidos utilizando el juego de datos de la configuración indicada en la Figura 4.3 (a).

Para las diez pruebas realizadas el valor de la frecuencia identificada varía muy poco con el nivel de la excitación la cual está representada en el movimiento de la mesa vibradora, sin embargo, el valor del amortiguamiento varía dependiendo del nivel de excitación de la estructura.

4.5 CONCLUSIONES

Con los datos obtenidos en las diez pruebas realizadas para la estructura con la configuración de la instrumentación indicada en la Figura 4.3, se realizó el proceso de identificación de las propiedades dinámicas utilizando técnicas paramétricas, específicamente el método del subespacio implementado en el algoritmo SUBID para la identificación de las matrices A , B , C y D del modelo de estado (2.95) y las expresiones (2.92) y (2.93) para el cálculo de las frecuencias y las fracciones de amortiguamiento. Los resultados obtenidos en las diez pruebas son consistentes con lo obtenido del modelo analítico realizado en el programa SAP2000®; con esto se puede concluir, que el modelo elaborado por (Henao y Botero, 2013) representa de una buena forma las características del modelo real construido y ensayado en el laboratorio.

Por la configuración de la mesa vibradora del laboratorio de ingeniería sísmica de la Universidad EAFIT, la estructura fue excitada principalmente en una de sus direcciones. Una forma de obtener registros con órdenes de magnitud similares en las direcciones “x” e “y” de la estructura es generando un ángulo entre la dirección de excitación de la mesa vibradora y la estructura a ensayar como se indica en la Figura 4.24.

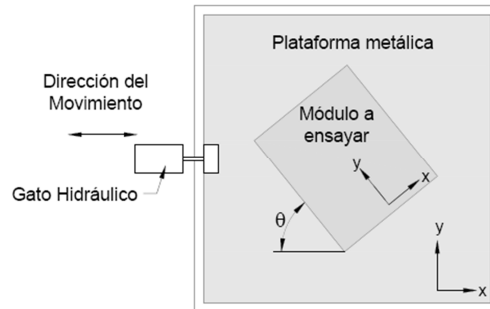


Figura 4.24 Disposición del modelo a ensayar en la mesa vibratora para excitar la estructura en todas sus direcciones

La calidad y cantidad de información obtenida de los ensayos está directamente relacionada con la cantidad y disposición de los equipos de instrumentación instalados en la estructura, esto se pudo notar al comparar los resultados de las dos disposiciones de instrumentación implementadas en los ensayos de laboratorio, en donde se observa, que al colocar los sensores en las esquinas del modelo se logra registrar una mayor excitación en la dirección “y” de la estructura lo que mejora el nivel de ajuste con respecto al modelo analítico realizado en SAP2000®

Para seleccionar las frecuencias correspondientes a la estructura en el diagrama de estabilización se podría realizar un análisis espectral previo, lo que permitiría eliminar las frecuencias correspondientes al modelo matemático.

4.6 COMPARACIÓN CON LAS RESULTADOS DE LAS TÉCNICAS NO PARAMÉTRICAS

En la Tabla 4.10 se presenta una comparación entre los parámetros modales identificados de la estructura construida y ensayada en el laboratorio utilizando técnicas paramétricas y técnicas no paramétricas⁷, para esto se realizaron tres tipos de pruebas a saber: Excitación en la base, vibración forzada y vibración ambiental. Los resultados de las pruebas de excitación en la base se presentan en la sección 4.4.1 y los resultados de las pruebas de vibración forzada y vibración ambiental se presentan en (Henao y Botero, 2013).

Los valores correspondientes a las pruebas de excitación en la base presentados en la Tabla 4.10, corresponden a los parámetros modales identificados con los datos de la configuración de instrumentación indicada en la Figura 4.3 (b) para un desplazamiento máximo del gato de 1cm (ver sección 4.4.1).

Las frecuencias identificadas utilizando técnicas paramétricas y técnicas no paramétricas son consistentes con lo obtenido con el modelo analítico realizado en SAP2000® para los tres primeros modos en cada una de las direcciones “x”, “y” y “z”. Lo anterior permite validar las metodologías implementadas para la identificación de parámetros modales de estructuras utilizando tanto el método del subespacio como el análisis espectral.

Con los datos obtenidos de las pruebas de excitación en la base, se lograron identificar tres frecuencias adicionales correspondientes a la estructura cuando se realizó el proceso de identificación utilizando el método del subespacio. Esto se puede explicar por el nivel de deformación inducido a la estructura en este tipo de pruebas, el cual evidentemente es mayor que en las otras dos pruebas realizadas.

⁷ La técnica paramétrica utilizada fue el método del subespacio y la técnica no paramétrica utilizada fue el análisis espectral.

Tabla 4.10 Comparación entre los resultados analíticos y los resultados obtenidos utilizando técnicas paramétricas (Método del subespacio) y técnicas no paramétricas (análisis espectral)

Modo	Dirección	Modelo Analítico			Modelo experimental (Excitación en la base)			Modelo Experimental (Vibración Forzada)			Modelo Experimental (Vibración Ambiental)		
		f (Hz)	T(s)	ξ (%)	f (Hz)	T (s)	ξ (%)	T (s)	f (Hz)	ξ (%)	T (s)	f (Hz)	ξ (%)
1	1y	1.506	0.664	5	1.491	0.671	0.710	0.67	1.5	0.8	0.67	1.5	1.2
2	1x	1.951	0.513	5	1.877	0.533	1.870	0.53	1.9	1.4	0.53	1.9	1.2
3	1z	2.665	0.375	5	2.749	0.364	-	0.36	2.7	-	0.36	2.7	-
4	2y	4.484	0.223	5	4.557	0.219	0.700	0.22	4.5	-	0.22	4.6	2.2
5	2x	6.019	0.166	5	5.967	0.168	0.930	0.17	6	-	0.17	6.1	3.3
6	3y	7.302	0.137	5	7.509	0.133	1.560	0.13	7.9	-	0.13	7.9	0.8
7	2z	8.077	0.124	5	7.895	0.127	0.300	0.12	8.5	-	0.12	8.5	-
8	4y	9.657	0.104	5	9.813	0.102	1.140	-	-	-	-	-	-
9	3x	10.444	0.096	5	10.840	0.092	1.010	0.09	10.8	-	0.09	10.8	1.2
10	5y	11.195	0.089	5	11.070	0.090	0.270	-	-	-	-	-	-
11	3z	13.589	0.074	5	13.290	0.075	0.340	0.07	14.9	-	0.07	14.9	-
12	4x	14.828	0.067	5	15.080	0.066	0.440	-	-	-	-	-	-

5 CONCLUSIONES E INVESTIGACIONES FUTURAS

5.1 Conclusiones

Se presentó una metodología para identificar parámetros modales de una estructura utilizando técnicas paramétricas implementando los algoritmos desarrollados por (Van Overschee y De Moor, 1993; Van Overschee y De Moor, 1994; Van Overschee y De Moor, 1996; Ljung, 1999) para la identificación de las matrices A , B , C y D del modelo (2.95) utilizando métodos de subespacio y (Peeters, 2000) para la obtención de parámetros modales utilizando los resultados del proceso de identificación.

Para validar la metodología, en el capítulo 3 se realizaron simulaciones con datos teóricos sobre varios sistemas estructurales y en el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos a partir de las pruebas de vibración forzada realizadas en la mesa vibradora del laboratorio de ingeniería sísmica de la universidad EAFIT.

El método del subespacio permite identificar las frecuencias de vibración, las fracciones de amortiguamiento crítico, las formas modales y los factores de participación de una estructura instrumentada, sin embargo, en el presente trabajo sólo se lograron implementar las metodologías necesarias para obtener de una forma confiable los dos primeros parámetros.

La aplicación conjunta del método del subespacio y del análisis espectral como herramientas para la identificación de las propiedades dinámicas de estructuras instrumentadas, permite tener mayor confiabilidad en los resultados obtenidos en el proceso de identificación. En la sección 4.6 se realizó una comparación de los resultados obtenidos al realizar un proceso de identificación con ambas metodologías a una estructura real y se encontró que éstos son consistentes con los resultados obtenidos al realizar un análisis modal convencional en el programa SAP2000®.

En la sección 4.4.2 se realizó una comparación entre los resultados obtenidos en las diez pruebas realizadas utilizando las disposiciones de instrumentación indicadas en la Figura 4.3. De esta comparación se puede concluir, que la cantidad y calidad de los parámetros modales identificados depende de la cantidad de sensores y la disposición que estos tengan en la estructura.

Se desarrolló un programa de cómputo mediante MATLAB el cual permite implementar el método del subespacio para la identificación de las propiedades dinámicas de estructuras, a partir de datos obtenidos como producto de un monitoreo estructural.

En la última década el método del subespacio ha tenido importantes desarrollos en el campo de la identificación de propiedades dinámicas y en la detección de daño en estructuras instrumentadas. Este trabajo pretende cerrar un poco la brecha del conocimiento que existe con respecto al tema en nuestro medio y se espera que sea el punto de partida para futuras investigaciones.

Es importante recalcar que los resultados presentados en el presente trabajo, se obtuvieron a partir de un proceso de simulación realizado con modelos y datos teóricos (Capítulo 3) y de los ensayos realizados a un modelo construido y ensayado en laboratorio (Capítulo 4) en donde se pueden controlar en gran medida las variables que influyen el comportamiento de la estructura ante una excitación conocida.

5.2 Investigaciones futuras

En la sección 3.5 de (Peeters, 2000) se propone una modificación al método propuesto por Van Overschee y De Moor para la identificación de sistemas implementado en el algoritmo SUBID (Van Overschee y De Moor, 1993; Van Overschee y De Moor, 1994; Van Overschee y De Moor, 1996)

introduciendo el concepto de sensores de referencia el cual podría implementarse como una alternativa adicional a las presentadas en el este trabajo.

En el presente trabajo se implementaron metodologías para obtener las frecuencias de vibración y las fracciones de amortiguamiento crítico de estructuras instrumentadas, sin embargo la representación gráfica de las formas modales y la obtención de los factores de participación son aspectos que requieren un mayor estudio.

En la práctica no todos los grados de libertad de una estructura pueden ser instrumentados. La información modal obtenida de la instrumentación de una estructura, dependerá de la ubicación de los sensores en ésta, por lo que se requiere la realización de pruebas experimentales que ayuden a encontrar la ubicación óptima de los sensores. Para el caso particular de las pruebas de excitación en la base con la mesa vibradora realizadas para este trabajo, se propone realizar ensayos generando un ángulo entre la estructura y la dirección del movimiento de la plataforma metálica como se indicó en la Figura 4.24 colocando un sensor en una de las esquinas de cada uno de los niveles del modelo ensayado.

La identificación de las propiedades dinámicas en donde se cuente con la señal que excita la estructura se limita a pruebas de laboratorio o a estructuras que cuenten con una instrumentación permanente por lo que es importante validar la metodología implementada con pruebas de vibración ambiental.

En (Peeters, 2000) se presentan dos alternativas para el cálculo de las formas modales. La primera se basa en la matriz de salida C identificada del modelo de estado mediante la expresión (2.94) y la segunda se basa en la utilización de la matriz de ubicación de salidas, C_a definida en la sección 2.3.1 mediante la expresión (2.82)

$$V = C\Psi \quad (5.1)$$

$$V_c = C_a(\Theta\Lambda^2 \quad \Theta^*\Lambda^{*2}) \quad (5.2)$$

En el presente documento se calcularon las formas modales a partir de la matriz de salida C . Esta metodología es utilizada en la construcción del diagrama de estabilización presentado en la sección 4.4.1, sin embargo, para lograr presentar gráficamente las formas modales de estructuras en tres dimensiones es necesario implementar el cálculo de éstas a partir de la matriz de ubicación de salidas, C_a

La metodología implementada es válida para un rango lineal de deformaciones, sin embargo, estructuras que se vean sometidas a movimientos de terreno fuerte pueden incurrir en un rango no lineal.

El número de filas de la matriz Hankel utilizadas en el proceso de identificación de las matrices A , B , C y D del modelo de estado, utilizando el algoritmo SUBID es determinante en su grado de precisión y tiempo computacional, por lo que profundizar en este aspecto permitirá optimizar los resultados obtenidos en el presente trabajo.

En (Reynders, 2009; Reynders, 2012) se presentan alternativas para depurar el diagrama de estabilización presentado en la sección 4.4.1. Estas alternativas pueden ser implementadas como complemento a lo realizado en este trabajo

En (Reynders, 2009; Reynders, 2012), se presentan algunos de los desarrollos más recientes en la identificación de sistemas utilizando el método del subespacio y se hace una descripción de tres problemas que se encuentran cuando el proceso de identificación de los parámetros modales es realizado con sólo datos de salida “*output-only measurements*”: Los factores de participación modal no pueden ser determinados, el contenido frecuencial de la excitación no puede ser controlado y finalmente la mayoría de los algoritmos utilizados en el análisis modal experimental sólo dan estimaciones puntuales para los parámetros modales, es decir no dan información del nivel de incertidumbre cuando se estiman a partir de una sola prueba. En dicho documento se presentan las estrategias para solucionar dichos problemas.

En (Peeters, 2000; Valdés, 2006; Reynders, 2009 y Reynders, 2012) se presentan aplicaciones en las que se utiliza el método del subespacio en la identificación de propiedades modales de estructuras instrumentadas; Estos documentos pueden servir como punto de partida para implementar las metodologías del presente trabajo en estructuras instrumentadas.

6 ANEXOS

A.1.DERECHOS DE AUTOR

En la herramienta computacional desarrollada se implementaron dos metodologías para la identificación de sistemas utilizando el método del subespacio. La primera es la propuesta por Peter Van Overshee y Bart De Moor con la implementación del algoritmo SUBID (Van Overschee y De Moor, 1993; Van Overschee y De Moor, 1994; Van Overschee y De Moor, 1996) y la segunda es la propuesta por Ljung con la implementación de los algoritmos numéricos N4SID (Numerical algorithms for Subspace State Space System Identification)

La implementación de los algoritmos SUBID en MATLAB pueden descargarse en línea del sitio de la Universidad KU Leuven (<http://homes.esat.kuleuven.be/~smc/sysid/software/>) y los algoritmos numéricos N4SID están implementados en MATLAB con la función “n4sid”.

Una vez identificado el sistema a partir de los algoritmos SUBID y N4SID, es decir, una vez identificadas las matrices del modelo de estado, A , B , C y D se implementa la metodología propuesta por (Peeters, 2000) para la obtención de los parámetros modales.

A.2.HERRAMIENTA COMPUTACIONAL DESARROLLADA

Para ilustrar el manejo del programa se anexan a este documento los archivos (“Entrada.txt”, “N1.txt”, “N2.txt” y “N3.txt”) utilizados en el proceso de validación presentado en la sección 3.4 para un sistema de varios grados de libertad (2D). Se indica paso a paso el proceso realizado y se introducen algunos conceptos importantes que no fueron tratados en el documento por el alcance que tiene el mismo.

A.2.1. PANTALLA DE INICIO

Desde la pantalla de inicio el usuario podrá navegar entre las diferentes opciones que ofrece el programa

1. Inicie el programa, se abrirá la ventana “Inicio” que es la pantalla principal del programa (Figura 6.1)

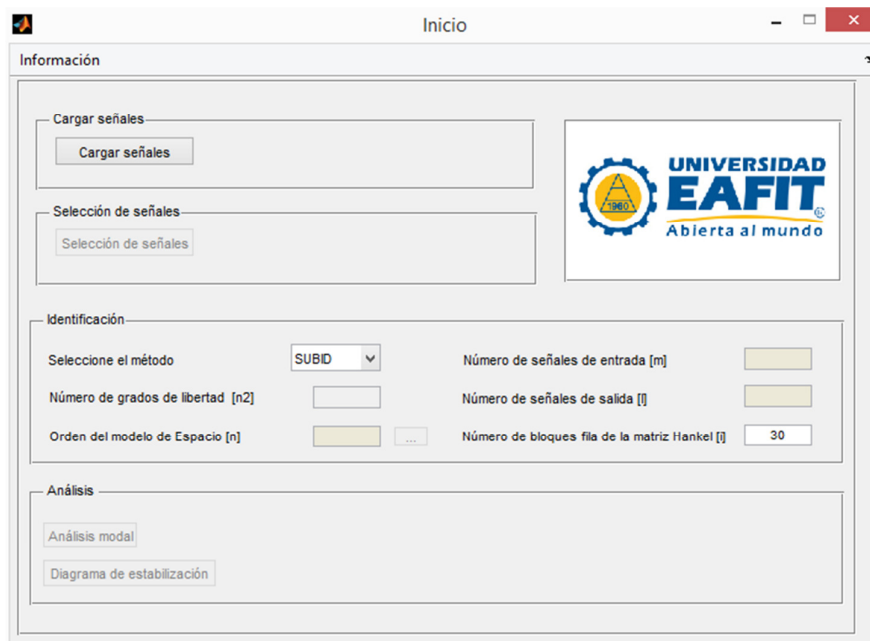


Figura 6.1 Ventana Inicio

- En la ventana “Inicio” (Figura 6.1) presione el botón “Cargar señales” y se abrirá la ventana “DatosEntrada” (Figura 6.2).

A.2.2. PRE-PROCESAMIENTO DE LAS SEÑALES

En esta parte del programa, el usuario podrá leer las señales con las que desea trabajar y realizar un pre-procesamiento de las mismas antes de iniciar el proceso de identificación. Los archivos de las señales que se deseen leer deben estar en formato (.txt), tener la misma cantidad de puntos y no tener líneas de encabezado.

- En el campo “Datos de entrada” (Figura 6.2) seleccione el número de señales que se desea leer, el intervalo de tiempo, el factor de escala y presione el botón “leer señales” (para el ejemplo se seleccionan 4 señales, un delta de tiempo de 0.02s y un factor de escala de uno).

Una vez leídas las señales, se grafica la primera señal (parte superior derecha de la ventana) y su espectro de Fourier (parte inferior derecha de la ventana). En el campo “Visualización” (Figura 6.2) se presentan características de la primera señal leída en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Para cambiar de señal se puede utilizar el menú desplegable “Archivo” en donde las señales leídas se identifican por el nombre del archivo del cual fueron leídas.

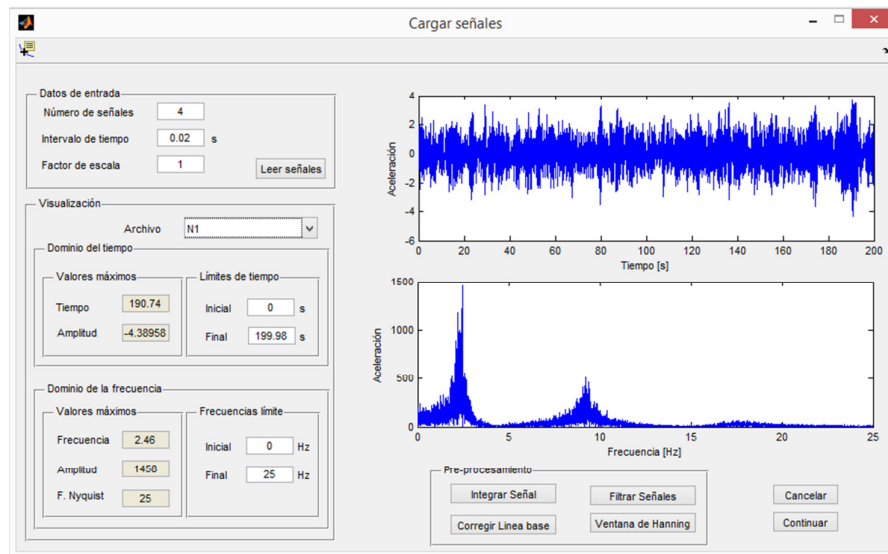


Figura 6.2 Ventana DatosEntrada

En el campo “Pre-procesamiento” (Figura 6.2) se ofrecen las opciones: Integrar señal, filtrar señales, corregir línea base y ventana de Hanning.

Integrar señal: Las señales obtenidas por los acelerómetros son señales de aceleración, por lo que al integrarlas se obtienen señales de velocidad. Esta herramienta es útil ya que las señales obtenidas del proceso de instrumentación generalmente no están centradas sobre la línea de ceros, lo que genera que al integrar la señal de aceleraciones, se obtenga una señal de velocidades con una tendencia lineal, esto indica, que a las señales registradas se les debe hacer corrección de línea base antes de ser utilizadas en el proceso de identificación.

Corrección de línea base: Esta rutina centra el registro sobre la línea de ceros y elimina las tendencias lineales ocasionadas por los equipos de instrumentación en el proceso de la obtención de los datos.

Ventana de Hanning: Esta rutina multiplica el registro por la función de Hanning o del coseno cuadrado.

Filtrar señales: Al presionar el botón “Filtrar señales” localizado en el campo “Pre-procesamiento” (Figura 6.2) se abre la ventana “FiltrarSeñales” (Figura 6.3) en donde se presentan diferentes opciones para realizar el filtrado de las señales. En (Henao y Botero, 2013) se explica el uso de cada uno de estos filtros en el procesamiento de señales.

Las rutinas Filtrar, Corregir línea base y Ventana de Hanning fueron programadas por David Henao Ángel para el programa “Vibraciones” como parte del proyecto (Henao y Botero, 2013). Estas rutinas se utilizan en el programa con autorización de la Universidad EAFIT.



Figura 6.3 Ventana FiltrarSeñales

Ya que el proceso de validación presentado en la sección 3.4 para el sistema de varios grados de libertad (2D) se realizó con una serie de datos teóricos aleatorios en el programa SAP2000®, estos no están “contaminados” con “ruido” propio del proceso de toma de datos, por lo que para el ejemplo no se realiza corrección de línea base ni filtrado, sin embargo, estos dos pasos son comunes en el tratamiento de señales que son obtenidas en procesos de instrumentación en estructuras reales.

4. Presione el botón “Continuar” (Figura 6.2). El programa retorna a la pantalla de inicio (Figura 6.4)

A.2.3. SELECCIÓN DE SEÑALES

En esta parte del programa, el usuario puede seleccionar cuáles señales serán utilizadas en el proceso de identificación, además, podrá superponer las gráficas para visualizar la porción de los datos que considere más pertinentes para el proceso de identificación.

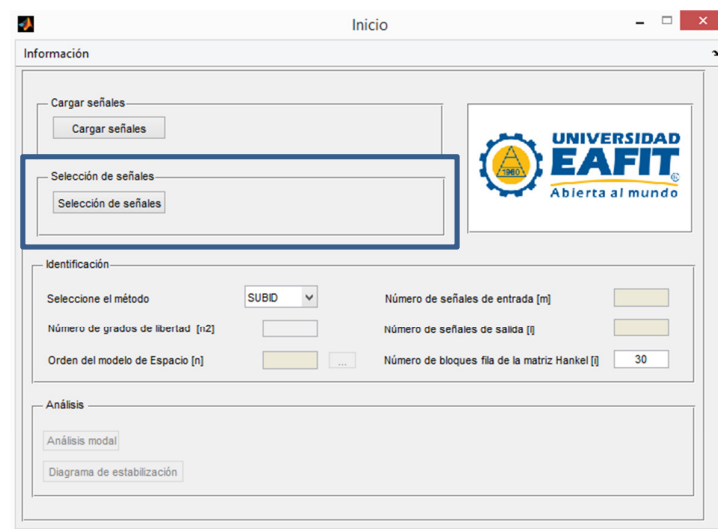


Figura 6.4 Ventana Inicio. Una vez se cargan las señales se activa el botón “Selección de señales”

5. Presione el botón “Selección de señales” (Figura 6.4) y se abrirá la ventana “Identificación” (Figura 6.5).
6. Todas las señales leídas aparecen en el la lista desplegable localizada en la parte superior izquierda de la ventana. Seleccione una señal de la lista y utilice los botones “Agregar” y “Quitar” localizados en los campos “Señales de entrada” y “Señales de salida” para desplazar las señales a las listas desplegables localizadas en la parte superior derecha de la ventana. (Para el ejemplo seleccione la señal “Entrada” y ubíquela en la lista desplegable del campo “Señales de entrada” y seleccione las señales “N1”, “N2” y “N3” y ubíquelas la lista desplegable del campo “Señales de salida”)
7. En el campo “Selección rango de datos” seleccione los tiempos inicial y final de las señales que desea utilizar. La selección de señales muy extensas pueden generar errores de desbordamiento por la forma como operan los algoritmos implementados. (Para el ejemplo se utilizarán los 10,000 puntos que para un delta de tiempo de 0.02s corresponde a 199.98s)

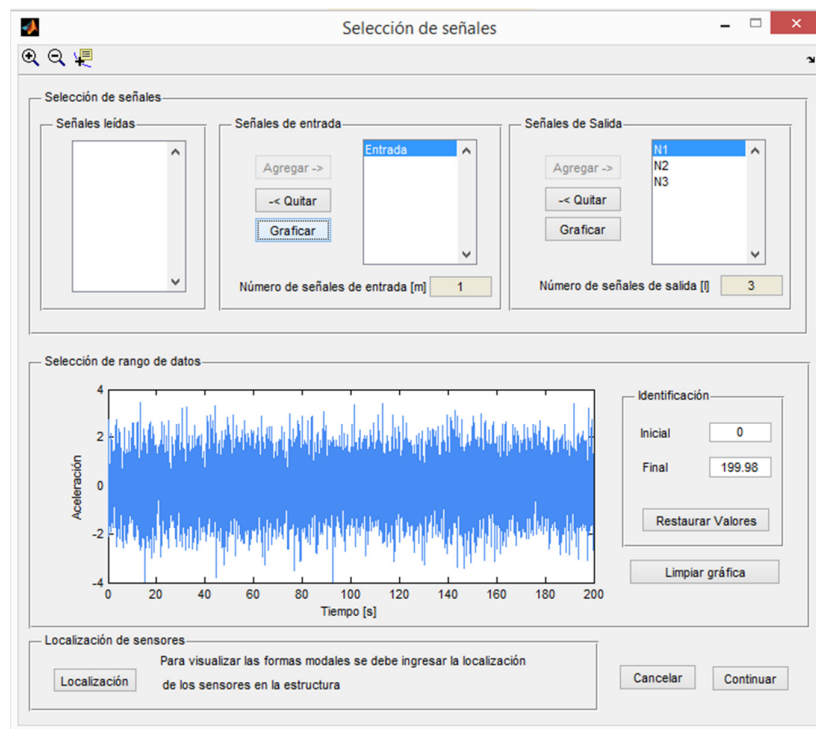


Figura 6.5 Ventana Identificación

8. Para ingresar la localización de los sensores en la estructura presione el botón “Localización” ubicado en el campo “Localización de sensores” y se abrirá la ventana “ID_sensores” (Figura 6.6). La localización de los sensores es importante si se desean visualizar las formas modales. Esta versión del programa sólo grafica las formas modales cuando se tiene un sólo sensor por nivel.
9. Teniendo en cuenta la identificación de la señal, ingrese las coordenadas “x” “y” y “z” en la estructura de cada uno de los sensores. (Para el ejemplo, ingrese los valores 3, 6 y 9 para la coordenada “z”).

10. Presione el botón “Continuar” y el programa retorna a la ventana “Identificación” (Figura 6.5).

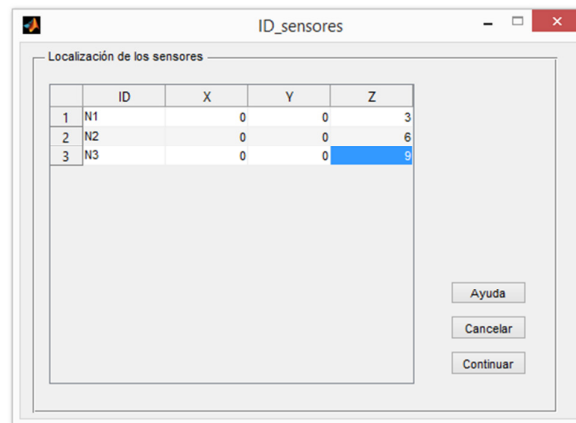


Figura 6.6 Ventana ID_sensores

11. Presione el botón “Continuar” en la ventana “Identificación” (Figura 6.5) y el programa retorna a la ventana “Inicio” (Figura 6.7).

A.2.4. IDENTIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS MODALES

En esta parte del programa el usuario podrá utilizar las señales seleccionadas para realizar el proceso de identificación de las matrices del modelo de estado utilizando los algoritmos SUBID y N4SID y de los parámetros modales de acuerdo con lo expuesto en la sección 2.4.3.



Figura 6.7 Ventana Inicio. Una vez se cargan las señales se activan las opciones del campo “Identificación”

12. En el campo “Identificación” seleccione en número de grados de libertad de la estructura analizada (Para el ejemplo, seleccione 3 grados de libertad).El programa automáticamente sugiere un orden del modelo de espacio y un número de filas de la matriz Hankel de acuerdo con lo presentado en la sección 2.6.2.

13. Presione el botón localizado a la derecha de la casilla donde aparece el orden del modelo de estado y se abrirá la ventana “Orden⁸” (Figura 6.8).

En (Van Overschee y De Moor, 1996) se presentan varias alternativas para determinar el orden, n del sistema (2.95). Entre las opciones que presenta el algoritmo SUBID para determinar el orden del modelo se encuentran los algoritmos “Canonical Variate Analysis” (CVA) y “Singular Value Descomposition” (SVD).

14. En la ventana “Orden” (Figura 6.8) seleccione en la lista desplegable el método que desea utilizar para obtener el orden del modelo.

El orden del modelo es en el cual se genere el “gap” en los ángulos principales diferentes de 90 grados el cual utiliza el algoritmo CVA (Figura 6.9) o en los valores singulares diferentes de cero el cual utiliza el algoritmo SVD (Figura 6.10).

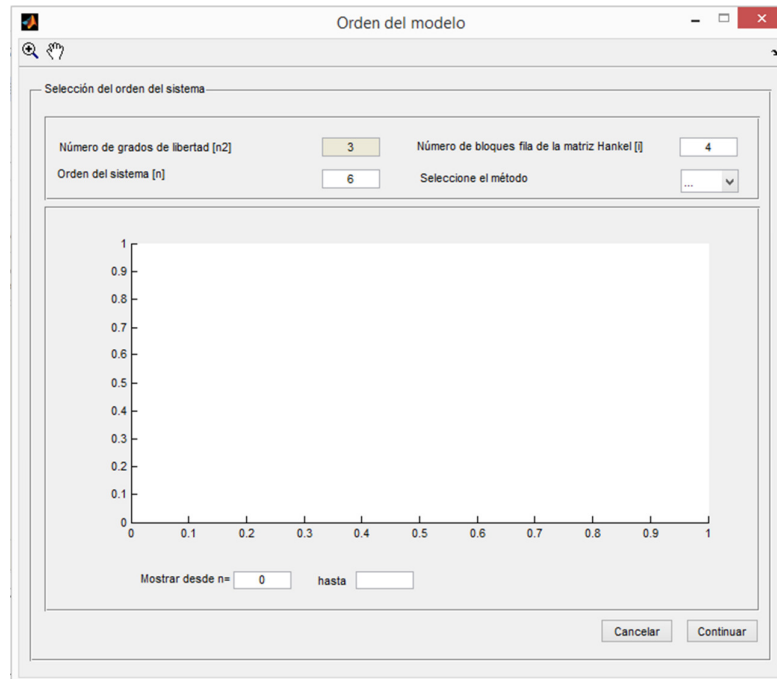


Figura 6.8 Ventana Orden

⁸ La ventana “Orden” sólo se habilita si en la ventana Inicio (Figura 6.7) se ha seleccionado el método SUBID en el campo “Identificación”

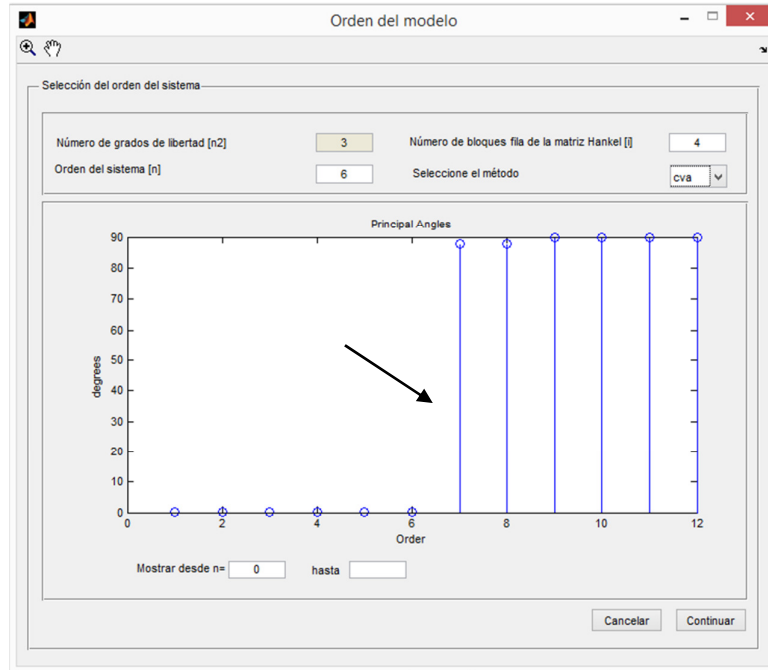


Figura 6.9 Gráfica de los ángulos principales diferentes de 90 grados para determinar el orden del modelo. Se observa que el “gap” se presenta para un orden del modelo de seis

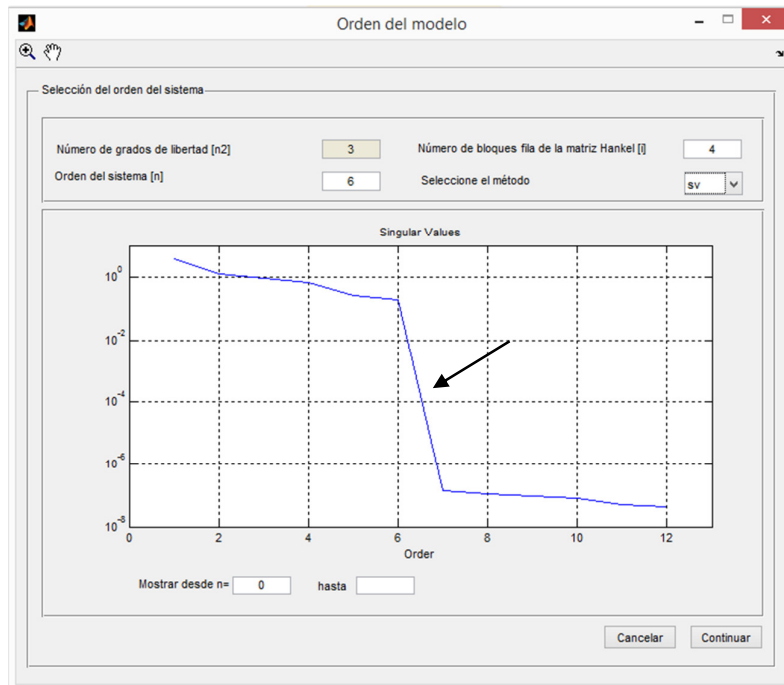


Figura 6.10 Gráfica de los valores singulares diferentes de cero para determinar el orden del modelo. Se observa que el “gap” se presenta para un orden del modelo de seis

15. Seleccione el orden del sistema (Para el ejemplo es claro que el orden del modelo es seis) y presione el botón “Continuar”. El programa regresa a la ventana “Inicio” (Figura 6.11).

Figura 6.11 Ventana Inicio. Una vez se seleccionan los parámetros para el proceso de identificación se activan los botones “Análisis modal” y “Diagrama de estabilización”

16. Para mejorar el proceso de identificación para el ejemplo se seleccionó un número de filas de la matriz Hankel de 30.
17. Presione el botón “Análisis modal” y se abrirá la ventana “Modal” (Figura 6.12) en donde se presentan los valores de periodo y de fracción de amortiguamiento identificados a partir de las señales y de los parámetros seleccionados previamente.

	Periodo	Amortiguamiento
1	0.4228	0.0500
2	0.1078	0.0500
3	0.0570	0.0500

Figura 6.12 Ventana Modal

18. En la ventana “Modal” (Figura 6.12) presione el botón “Formas Modales” y se abrirá la ventana “Formas” (Figura 6.13). En esta ventana se visualizan las formas modales de la estructura correspondientes a cada uno de los modos. Es importante anotar que el botón “Formas Modales” sólo se activa si se suministró la localización de los equipos en la ventana “Identificación” (Figura 6.5).

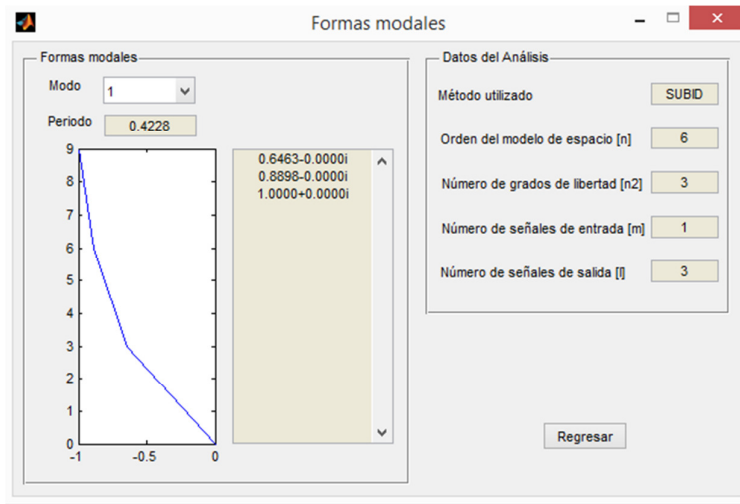


Figura 6.13 Ventana Formas

19. Presione el botón “Regresar” en la ventana “Formas” (Figura 6.13) y el programa regresa a la ventana “Modal” (Figura 6.12).
20. Presione el botón “Regresar” en la ventana “Modal” (Figura 6.12) y el programa regresa a la ventana “Inicio” (Figura 6.11).

Como se indicó en la sección 4.4.1 la experiencia práctica con modelos paramétricos en aplicaciones de análisis modal ha enseñado que es mejor sobre-especificar el orden del modelo y luego desechar los valores que no correspondan a la estructura. Para llevar a cabo esto, en el programa se ha implementado el diagrama de estabilización que permite calcular los parámetros modales para varios órdenes del modelo y realizar una comparación entre estos de una forma gráfica.

21. En la ventana “Inicio” (Figura 6.11) presione el botón “Diagrama de estabilización” y se abrirá la ventana “Estabilización” (Figura 6.14).
22. Seleccione el orden máximo del sistema, el número de filas de la matriz Hankel⁹ y los valores que se desean utilizar en los criterios de estabilización (ver sección 4.4.1). (Para el ejemplo seleccione 30 para el orden máximo del modelo y 30 para el número de filas de la matriz Hankel y los criterios de estabilización por defecto del programa).
23. Presione el botón “Calcular”

⁹ El programa sugiere por defecto un número de filas de la matriz Hankel de acuerdo con lo indicado en la sección 2.6.2, sin embargo este valor puede modificarse por el usuario para mejorar el nivel de ajuste en el proceso de identificación. Es importante anotar que al incrementar el número de filas de la matriz Hankel el tiempo de ejecución del programa se incrementa.

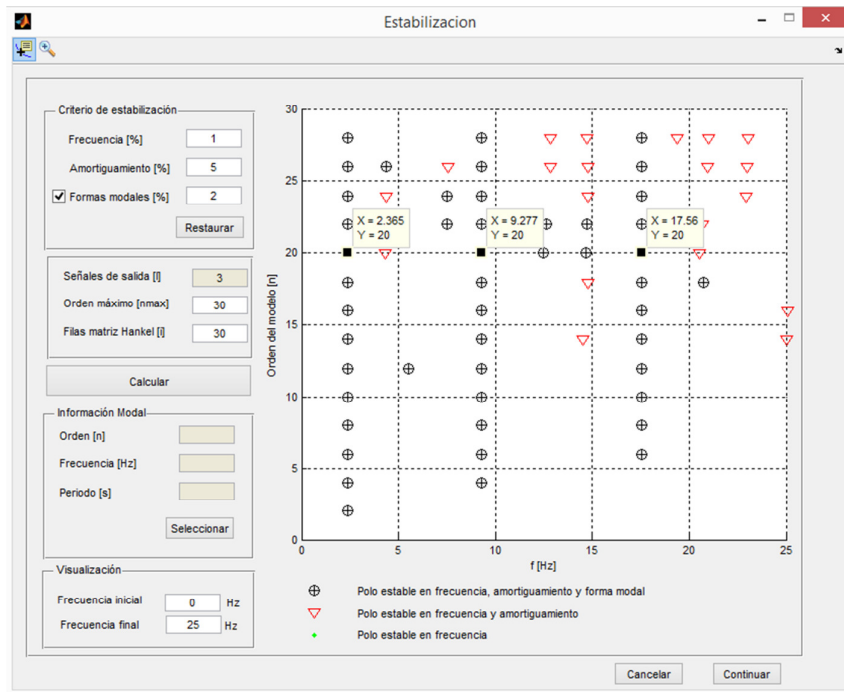


Figura 6.14 Ventana Estabilización donde se presenta el diagrama de estabilización.

En la Figura 6.14 se observa que las tres frecuencias seleccionadas son consistentes con los valores de los periodos reportados en el análisis modal (ver Figura 6.12).

24. Presione el botón “Continuar” en la ventana “Estabilización” y el programa regresará a la ventana “Inicio” (Figura 6.11).
25. Para salir del programa, presione la “X” localizada en la parte superior derecha de la ventana “inicio”

Para realizar el análisis modal y el diagrama de estabilización utilizando el algoritmo N4SID para la identificación de las matrices modales y posteriormente la identificación de los parámetros modales seleccione el método en la ventana principal (Figura 6.15) y siga los pasos indicados anteriormente.

Inicio

Información

Cargar señales

Cargar señales

Selección de señales

Selección de señales

Identificación

Seleccione el método N-4SID

Número de señales de entrada [m] 1

Número de grados de libertad [n2] 3

Número de señales de salida [l] 3

Orden del modelo de Espacio [n] 6

Número de bloques fila de la matriz Hankel [l] 4

Análisis

Análisis modal

Diagrama de estabilización

UNIVERSIDAD EAFIT Abierta al mundo

Figura 6.15 Ventana Inicio. Seleccionando el método N4SID en el campo “Identificación” se puede realizar el proceso de identificación con el algoritmo N4SID para posteriormente identificar los parámetros modales de la estructura.

REFERENCIAS

1. Beck J. L. y Jennings P. C. (1980), "Structural identification using lineal models and earthquake records", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.8, pp 145-160.
2. Bendat, J. & Piersol, A. G., 1993. *Engineering applications of correlation and spectral analysis*. John Wiley & Sons. New York:
3. Botero J.C. (2013). "Dinámica Estructural", Programa de cómputo, Versión 3.06 Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.
4. Clough R.W and Penzien J. (1993). *Dynamics of Structures*. Second Edition. McGraw-Hill, Inc. Singapore.
5. González R. (1995). "Análisis y predicción de comportamiento dinámico de estructuras usando identificación de sistemas y linealización equivalente", Tesis Doctoral, Facultad de ingeniería, UNAM, Ciudad de México.
6. Henao D. y Botero J. C. (2013). "Identificación de las propiedades dinámicas de una estructura sometida a vibración ambiental empleando análisis espectral", Informe proyecto, Departamento de ingeniería Civil, Universidad EAFIT, Medellín
7. Li Y. y Mau S. T. (1991) "A case study of MIMO system identification applied to building seismic records", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 20, pp 1045-1064.
8. Ljung L. (1999). *System Identification: Theory for the user*, Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.
9. Noguez F.J. (1996). "Identificación de sistemas estructurales a partir de su respuesta sísmica", Tesis de Maestría, Facultad de ingeniería, UNAM, Ciudad de México.
10. Peeters B. (2000). "System identification and damage detection in civil engineering", Ph.D thesis, Department of Civil Engineering, K.U. Leuven.
11. Pérez J. H. (1995). "Desarrollo y evaluación de modelos matemáticos aplicando técnicas de identificación de sistemas" Tesis de Maestría, Facultad de ingeniería, UNAM, Ciudad de México.
12. Reynders E. (2009). "System identification and modal analysis in structural mechanics", Ph.D thesis, Faculty of Engineering, K.U. Leuven.
13. Reynders E. (2012). "System Identification Methods for (Operational) Modal Analysis: Review and Comparison" *Archives of Computational Methods in Engineering*. Vol.19, pp.51-124
14. Valdés P (2004). "Identificación paramétrica de sistemas utilizando el método del subespacio", Memoria para optar al título de ingeniero civil, Universidad de Chile, Santiago, Chile.
15. Van Overschee P. y De Moor B. (1993), "Subspace algorithms for the stochastic identification problem", *Automática*, Vol. 29, No. 3, pp.649-660.

16. Van Overschee P. y De Moor B. (1994), "N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems", *Automática*, Special Issue on Statistical Signal Processing and Control, Vol. 30, No. 1, pp.75-93.
17. Van Overschee P. y De Moor B. (1996). *Subspace Identification for Linear Systems: Theory – Implementation – Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.