

Solución aproximada de la ecuación KdV por el método de los elementos finitos Taylor - Petrov - Galerkin

Lida Buitrago García

Universidad EAFIT
Escuela de Ciencias y Humanidades
Departamento de Ciencias Básicas
Maestría en Matemáticas Aplicadas
Medellín

Solución aproximada de la ecuación KdV por el método de los elementos finitos Taylor - Petrov - Galerkin

Lida Buitrago García

Trabajo de Grado presentado para optar el título de Magister en
Matemáticas Aplicadas

Director
Jairo Villegas Gutiérrez

Universidad EAFIT
Escuela de Ciencias y Humanidades
Departamento de Ciencias Básicas
Maestría en Matemáticas Aplicadas
Medellín

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por su constante apoyo y comprensión, a mi director de proyecto el Profesor Jairo Villegas Gutiérrez por su impulso y apoyo para finalizar este trabajo y cumplir con el objetivo, a la Universidad EAFIT, que por medio del Departamento de Ciencias Básicas y sus profesores me brindaron los conocimientos durante el desarrollo de la maestría.

Gracias a mi amigo Héctor Vega por su gran colaboración y ayuda en la programación en MATLAB.

Finalmente a todos aquéllos quienes de una u otra forma me animaron y apoyaron a cumplir este objetivo.

Índice general

Índice general	IV
Índice de figuras	VI
1. Preliminares	4
1.1. Introducción	4
1.2. Análisis Funcional	4
1.2.1. Formas bilineales	7
1.2.2. Distribuciones y espacios de Sobolev	8
1.3. B-Spline	9
1.4. Polinomios de Legendre	12
1.4.1. Ortogonalidad	16
2. Ecuación diferencial Korteweg-de Vries (KdV)	18
2.1. Introducción	18
2.2. Formulación del problema variacional de frontera	18
2.3. Ondas Dispersivas	21
2.3.1. Relaciones de dispersión: Velocidades de fase y de grupo	22
2.4. Ecuación Korteweg-de Vries	23
2.4.1. Solución Exacta de la ecuación KdV	24
2.4.2. Leyes de conservación	26
3. Método de elementos finitos	29
3.1. Introducción	29
3.2. Formulación del método	30
4. Solución aproximada de la ecuación KdV	33
4.1. Introducción	33
4.2. Método de Taylor - Petrov - Galerkin para la ecuación KdV	33
4.3. Cálculos y simulación	42

5. Conclusiones y recomendaciones	61
Bibliografía	63

Índice de figuras

4.1. Onda solitaria: solución exacta con $t = 0$	43
4.2. Solución aproximada U_N para $N = 4$ elementos	47
4.3. Onda solitaria propagada para tiempos desde 0 hasta 3 con $\Delta t = 0,5$	47
4.4. Comparación de onda solitaria exacta y aproximada con $t = 0$ y $N = 8$	48
4.5. Onda solitaria propagada para tiempos desde 0 hasta 3 con $N = 8$	49
4.6. Onda solitaria propagada para tiempos desde 0 hasta 3 con $N = 16$	50
4.7. Onda solitaria con $\Delta t = 0,001$ y $N = 16$	50
4.8. Soliton: $N = 32, \Delta t = 0,001$	52
4.9. Soliton: $N = 40, \Delta t = 0,001$	52
4.10. Soliton: $N = 40, \Delta t = 0,0006$	53
4.11. Soliton: $N = 40, \Delta t = 0,0001$	53
4.12. Soliton: $N = 6, \Delta t = 0,005$	54
4.13. Soliton: $N = 10, \Delta t = 0,005$	54
4.14. Solución exacta para $t = 0, u(x, 0) = e^{-x^2}$	55
4.15. Comparación solución exacta y solución aproximada para $t = 0$	56
4.16. Solución aproximada $\mu = 0,04, N = 4$	57
4.17. Solución aproximada $\mu = 0,04, N = 4$	57
4.18. Solución U_n con $\mu = 0,001$ y $N = 4$	59
4.19. Solución U_n con $\mu = 0,001$ y $N = 8$	59
4.20. Solución U_n con $\mu = 0,000048$ y $N = 16$	60

Introducción

La ecuación Korteweg - de Vries es una ecuación diferencial en derivadas parciales no lineal, sobre la cual se han realizado diversas investigaciones como modelo matemático, con el fin de encontrar soluciones exactas y soluciones aproximadas. En [19] la ecuación KdV se centra en el estudio para diferentes sistemas físicos, uno de ellos es el problema de Cauchy y también el problema periódico en la variable espacial.

En Curry [8], se considera la Aproximación de Padé, que supone a la solución de la ecuación KdV como el cociente de funciones polinómicas de exponenciales decrecientes, y luego define un operador de diferenciación bilineal conocido como el D-operador Hirota que permite expresar la ecuación KdV en términos de una forma bilineal y así obtener finalmente la solución.

El método de Galerkin también ha sido utilizado para resolver la ecuación KdV. Este método consiste en hallar la solución aproximada a partir de considerar a la solución como una combinación lineal de funciones base, que pueden ser funciones polinómicas [6], [17], Polinomios cúbicos de Hermite [24], Spline o B-Spline [1], [31]. En [24], se toman como funciones base a Hermite cúbicos, ésta es una opción particularmente adecuada cuando se requiere la derivada de la función como solución. Desafortunadamente una interpolación de este tipo conduce al crecimiento de errores substanciales en la solución para pequeños pasos de tiempo; el método de Galerkin para polinomios cúbicos de Hermite considera una gran cantidad de cálculo computacional, pero si se requieren derivadas de la solución puede ser el método a utilizar y aunque muchas soluciones teóricas están disponibles para la ecuación KdV, se eligen los solitones individuales como medio para comparar varios métodos numéricos.

El método de Petrov-Galerkin para ondas dispersivas no lineales, enfoca su estudio para encontrar la solución de la ecuación diferencial Korteweg-de Vries utilizando interpolantes lineales por tramos, este método emplea diferentes funciones de forma y funciones base, donde al considerar interpolantes lineales se reduce el esfuerzo de cálculo computacional. En [32], se considera las funciones prueba en términos de las funciones base para realizar la interpolación por Hermite cúbicos, en comparación con el método de Galerkin donde se emplean splines cúbicos como funciones base admitiendo de esta forma un término de disipación adicional en la KdV.

En síntesis, el método de Petrov- Galerkin proporciona una mejoría significativa en

relación al estudio de la exactitud y eficiencia en el cálculo de la solución, el cual es el resultado de un esfuerzo de cálculo menor que el asociado con el método estándar de Galerkin.

Mitchell [24] también presenta el método de Petrov-Galerkin para hallar la solución de la ecuación KdV, además de mostrar otros métodos de solución, uno de ellos es el método de dispersión inversa, el cual centra su atención en emplear condiciones iniciales obteniendo la forma reducida de la ecuación de Schrödinger, calcula la evolución en el tiempo de los datos de dispersión y resuelve la ecuación integral lineal Gelfand-Levitan para obtener la solución al problema inverso. Estudios concernientes al método numérico de solución están en relación a la discretización del espacio y tiempo de la ecuación facilitando su solución con el empleo del computador. En [37] las funciones base consideradas son Hermite racionales.

Otro trabajo que considera el estudio de los elementos finitos en la búsqueda de la solución de la ecuación KdV, es [7] en donde la aproximación de la solución se busca a partir del método de elementos finitos de mínimos cuadrados. La ecuación Korteweg - de Vries se establece como un sistema de primer orden, se introduce el método de elementos finitos de mínimos cuadrados con el fin de obtener la forma semidiscreta del tiempo. Al establecer un problema representativo, en donde la amplitud y el error de fase del solitón son analizados, se llega a la conclusión de que para solitones de amplitud pequeña existe una pequeña disipación o dispersión, mientras que para amplitudes altas estas influencias son significativas, ya que en este método la disipación es proporcional al tiempo, la reducción del paso mejora la situación pero aumenta el tiempo para realizar los cálculos computacionales; sin embargo el método resulta ser una buena alternativa para llegar a la solución aproximada.

Diversas modificaciones se han realizado al implementar el método de elementos finitos para solucionar una ecuación diferencial parcial. Una primera ha sido la selección de las funciones base, en algunos casos se han tomado funciones polinómicas, Polinomios cúbicos de Hermite, Splines o B- Splines de diferentes ordenes [5], [14], [18], [20], [27], [33]. Además de la discretización en el espacio que establece el método, se puede realizar discretización en el tiempo usando expansión en serie de Taylor, a dicho método se le llama método Taylor-Galerkin [3], [5], [22], [23], [34], [36].

En Canivar [5] se utiliza el método de elementos finitos Taylor-Galerkin para la ecuación Korteweg-de Vries con el objetivo de encontrar la solución aproximada con alta precisión; el método se implementa inicialmente realizando la partición del intervalo sobre el cual se está buscando la solución y se definen los B-Splines cúbicos sobre los subintervalos obtenidos. La solución aproximada de la ecuación diferencial se supone como una combinación lineal de los B-Spline. Luego se realiza la discretización en el tiempo usando expansión en serie de Taylor y así aplicar el método de Galerkin en la discretización del espacio, es decir, considera la función de peso y la aplica en el problema variacional que finalmente da la solución de la ecuación con la interpolación, en este artículo el autor considera tres tipos de problemas con los cuales realiza los cálculos y compara las soluciones aproximadas con las soluciones exactas llegando a la conclusión de que el error es pequeño

al analizar la estabilidad del problema.

El principal objetivo de este trabajo consiste en determinar una solución aproximada de la ecuación Korteweg-de Vries (KdV), sujeta a condiciones de frontera nulas y con condiciones iniciales dadas, mediante la aplicación del método de los elementos finitos Taylor - Petrov - Galerkin. La aplicación del método consiste inicialmente en realizar la discretización en el tiempo, usando la expansión en serie de tiempo discreta de Taylor, para luego realizar la discretización en el espacio usando como funciones base los polinomios de Legendre y como funciones de forma a B-spline cúbicos. Los cálculos son realizados usando MATLAB y comparando los resultados obtenidos con la solución exacta.

Organización del trabajo

El documento está organizado mediante cinco capítulos que permiten la adecuada lectura y comprensión del problema planteado y su solución. El Capítulo 1 se ocupa de describir las bases teóricas necesarias en cuanto a definiciones y teoremas del análisis funcional necesarios para abordar el método de los elementos finitos, además de describir las principales características de los Polinomios de Legendre y los B-Splines cúbicos, que son las funciones con las cuales se aplica el método de elementos finitos.

En el Capítulo 2 se presenta la teoría básica de la forma variacional de un problema de ecuaciones diferenciales parciales sujeto a condiciones iniciales y de frontera, además de describir las principales características de la ecuación Korteweg - de Vries.

En el Capítulo 3, se describen las principales características del método de elementos finitos para solucionar una ecuación diferencial parcial, en particular el método de Petrov - Galerkin que es el utilizado en el desarrollo del trabajo.

En el Capítulo 4 se muestra el desarrollo completo del método de los elementos finitos para la determinación de la solución aproximada de la ecuación KdV. Además se presentan los cálculos desarrollados en MATLAB para llegar a dicha solución aproximada

Finalmente en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo y algunos puntos de interés para futuras trabajos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

En este capítulo se presentan algunas definiciones del análisis funcional necesarias para tener una buena comprensión de este trabajo. Además se describen las principales características de los B-Splines y de los Polinomios de Legendre utilizadas en capítulos posteriores.

1.2. Análisis Funcional

Definición 1.1 Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^d con $d = 2, 3$ y $p \in [1, \infty)$, $p \geq 1$, se define

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\} \quad (1.1)$$

el espacio formado por todas las funciones definidas en Ω , medibles con $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$ y

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\} \quad (1.2)$$

Definición 1.2 Un operador lineal es un operador A definido sobre el espacio lineal normado E en otro F , $A : E \rightarrow F$, tal que

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v) \quad (1.3)$$

para todo u y $v \in D(A)$ con α y β escalares del campo K sobre el cual está definido el espacio E .

Definición 1.3 Un operador lineal A se dice acotado, si existe una constante $M > 0$ tal que para cualquier $u \in D(A)$ se cumple que

$$\|Au\|_F \leq M \|u\|_E \quad (1.4)$$

donde $\|\cdot\|_E$ es la norma del espacio E y $\|\cdot\|_F$ es la norma del espacio F .

Ejemplo 1.1 Uno de los operadores lineales más importantes del análisis es el operador diferenciación $D_y(x) = \frac{d}{dx}y(x) = y'(x)$. Este operador no se encuentra definido sobre todo el espacio de las funciones continuas $C[a, b]$, se restringe para el espacio $C^1[a, b]$, esto es, el espacio de las funciones con primera derivada continua y con campo en $C[a, b]$

$$\frac{d^n}{dx^n} : C^n[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

Es posible considerar el espacio más restringido $C^2[a, b]$, al considerar la ecuación diferencial $y'''(x) + y'(x) = f(x)$, la cual es equivalente en términos de operadores a $Ly(x) = y'''(x) + y'(x) = f(x)$, siendo L un operador de $C^2[a, b]$ en $C[a, b]$. [6].

Definición 1.4 Sea K un campo escalar, el funcional lineal l sobre un espacio vectorial E está definido como el operador lineal que asigna a un elemento $u \in E$ un escalar $l(u)$.

El espacio de todos los funcionales lineales l sobre el espacio normado E , $L(E, K) = E'$ se le denomina espacio dual de E .

Ejemplo 1.2 El operador integral $A : C[a, b] \rightarrow R$, definido por $A(f) = \int_a^b f(x)dx$, para todo $f \in C[a, b]$, es un funcional lineal sobre $C[a, b]$.

Ejemplo 1.3 Si $f : L^2(a, b) \rightarrow R$ definida por $\langle f, u \rangle = \int_a^b u(x)dx$ entonces f es un funcional lineal acotado.

Como f es lineal entonces se cumple que $\langle f, \alpha u + \beta v \rangle = \alpha \langle f, u \rangle + \beta \langle f, v \rangle$. Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy - Schwarz sobre L^2 se tiene que

$$|\langle f, u \rangle| = \left| \int_a^b 1u(x)dx \right| \leq \|1\|_{L^2} \|u\|_{L^2} = |b - a| \|u\|_{L^2}$$

lo cual indica que el funcional es acotado, por tanto f es un elemento del espacio dual $(L^2(a, b))'$

El teorema de representación de Riesz hace referencia a que si se tiene un espacio E con producto interno (u, v) con $u \in E$ y v un elemento arbitrario de E . El producto interno (u, v) puede ser interpretado como la acción de un funcional l , es decir, se puede tener la igualdad $\langle l, v \rangle = (v, u)$ para un u dado y un elemento arbitrario v del espacio con producto interno.

Teorema 1.1 Teorema de representación de Riesz Sea H un espacio de Hilbert y sea l un funcional lineal acotado sobre H . Entonces existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$\langle l, v \rangle = (v, u) \text{ para todo } v \in H \quad (1.5)$$

Además

$$\|l\| = \|u\| \quad (1.6)$$

Demostración:

Considerese un espacio de Hilbert H real. Si $l = 0$ entonces (1.5) y (1.6) se cumplen solo si $u = 0$, por tanto para que (1.5) se cumpla u debe ser diferente de cero, así que supóngase que $l \neq 0$, luego para cualquier v en H para el cual $\langle l, v \rangle = 0$ entonces se debe tener que $(v, u) = 0$, esto implica que u debe ser ortogonal a cualquier miembro del espacio nulo del funcional l , es decir $u \in N^\perp(l)$, así que la existencia de u se mostrará considerando a $N(l)$ y a $N^\perp(l)$. [28]

Existencia: Si el espacio nulo $N(l) = H$ entonces l es un funcional lineal cero y se puede definir que $u = 0$. Si $N(l) \neq H$, entonces existe un elemento u_0 de $N^\perp(l)$ diferente de cero. Si $z = \langle l, v \rangle u_0 - \langle l, u_0 \rangle v$ para cualquier $v \in H$, entonces

$$\begin{aligned} \langle l, z \rangle &= \langle l, \langle l, v \rangle u_0 - \langle l, u_0 \rangle v \rangle \\ &= \langle l, v \rangle \langle l, u_0 \rangle - \langle l, u_0 \rangle \langle l, v \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego $z \in N(l)$.

Por otro lado, como $u_0 \in N^\perp(l)$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_0, z \rangle = \langle u_0, \langle l, v \rangle u_0 - \langle l, u_0 \rangle v \rangle \\ &= \langle l, v \rangle \langle u_0, u_0 \rangle - \langle l, u_0 \rangle \langle u_0, v \rangle \\ 0 &= \langle l, v \rangle \|u_0\|^2 - \langle l, u_0 \rangle \langle u_0, v \rangle \end{aligned}$$

de donde al despejar $\langle l, v \rangle$ se tiene $\langle l, v \rangle = \frac{\langle l, u_0 \rangle \langle u_0, v \rangle}{\|u_0\|^2}$ para todo $v \in H$.

Por lo cual se concluye que $u = \frac{\langle l, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2} u_0$.

Unicidad: Supóngase que existen u y w del espacio E , tales que

$$\langle l, v \rangle = (v, u) = (v, w), \text{ para todo } v \in H$$

luego por linealidad del producto interno se tiene que $(v, u - w) = 0$ para todo $v \in H$.

Si $v = u - w$ entonces $u = w$.

Finalmente falta demostrar $\|l\| = \|u\|$. Como l es lineal y acotado, entonces se cumple que

$$|\langle l, v \rangle| = |(u, v)| \leq K \|v\|$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y tomando como $K = \|u\|$ se tiene que

$$\|l\| \leq \|u\|$$

Además $\|l\|^2 = |(u, u)| = \|u\|^2 \leq \|l\| \|u\|$ entonces $\|l\| \geq \|u\|$, por lo tanto se cumple que $\|l\| = \|u\|$.

Ejemplo 1.4 Sean l un funcional tal que $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, lo cual significa que l es un funcional real, por tanto por el teorema de Riesz se puede encontrar un único elemento $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle l, v \rangle = u \cdot v$. Si se define al funcional como $\langle l, v \rangle = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ para $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces existe $u = (1, 1, 1, \dots, 1)$ tal que $\langle l, v \rangle = u \cdot v$.

1.2.1. Formas bilineales

Otro operador importante que se utiliza en el trabajo con problemas de valores en la frontera y en particular en este trabajo son las formas bilineales.

Definición 1.5 Si E y F son espacios vectoriales, una forma bilineal $a : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como un operador que cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta w, v) &= \alpha a(u, v) + \beta a(w, v), \text{ para } u, w \in E \text{ y } v \in F \\ a(u, \alpha v + \beta w) &= \alpha a(u, v) + \beta a(u, w), \text{ para } u \in E \text{ y } v, w \in F \end{aligned} \quad (1.7)$$

con α y β números reales.

Ejemplo 1.5 Sea $E = F = C^1[a, b]$ los espacios vectoriales de las funciones con derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$. El operador $a : C^1[a, b] \times C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definido como

$$a(u, v) = \int_a^b (uv + u'v') dx$$

es una forma bilineal.

Se dice que la forma bilineal $a : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ donde E y F son espacios lineales normados, es continua, si es posible encontrar un número K positivo tal que

$$|a(u, v)| \leq K \|u\| \|v\|, \text{ para todo } u \in E \text{ y } v \in F$$

También una definición importante es la de una forma bilineal H -elíptica, [28]; se considera así a la forma bilineal $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ donde H es un espacio con producto interior, si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \text{ para todo } v \in H$$

esto indica que la forma bilineal H -elíptica es siempre no negativa y es cero solamente en el caso en que $v = 0$, lo cual significa que es definida positiva.

Un teorema importante que relaciona a las formas bilineales con los funcionales lineales es el Teorema de Lax -Milgram. Este teorema es utilizado en problemas de valores en la frontera y garantiza que existe u en un espacio de Hilbert H , tal que para todo v de H la forma bilineal y H-elíptica $a(u, v)$ es igual al funcional l . A continuación se da el enunciado del teorema, sin demostración.

Teorema 1.2 Teorema de Lax-Milgram. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y H-elíptica definida sobre H . Entonces dado cualquier funcional lineal l sobre H , existe un único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle l, u \rangle \text{ para todo } v \in H \quad (1.8)$$

1.2.2. Distribuciones y espacios de Sobolev

Una distribución, también llamada función generalizada, es una función infinitamente diferenciable donde la función y todas sus derivadas tienen soporte compacto [6], [28], es decir, es diferente de cero en un dominio de definición, llamado soporte, y fuera de éste es igual a cero, por lo cual la adherencia del dominio es un conjunto cerrado y acotado.

Definición 1.6 *Sea Ω un subconjunto abierto y no vacío de \mathbb{R}^d , se define:*

1. *El soporte de una función continua φ , como $\text{sop}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$.*
2. *El conjunto $C^\infty(\Omega) = \{\varphi : \varphi \text{ tiene derivadas continuas en } \Omega\}$.*
3. *El conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ tal que*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop}(\varphi) \subset \Omega, \text{ donde } \text{sop}(\varphi) \text{ es compacto}\} \quad (1.9)$$

4. *El conjunto $\mathcal{D}_K(\Omega)$, tal que*

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop}(\varphi) \subset K\}$$

donde K es un subconjunto compacto de Ω

Definición 1.7 *Una distribución en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, es una aplicación $T : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:*

1. *T es un funcional lineal*
2. *Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C_K > 0$ y un entero no negativo m_K tal que*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$$

donde α es un multiíndice¹.

¹Notación multiíndice: Sea \mathbb{Z}_+^n el conjunto de todas las n-uplas de enteros no negativos, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ tiene la forma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ donde cada $\alpha_i \geq 0$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

Teorema 1.3 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto, $u \in C^m(\Omega)$ y α un multiíndice tal que $|\alpha| \leq m$. Entonces²

$$\int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega) \quad (1.10)$$

Definición 1.8 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto, $m \geq 1$ un entero positivo y $p \in [1, \infty)$. Se define el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^{\alpha} f \text{ existe y pertenece a } L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\} \quad (1.11)$$

Los espacios de Sobolev $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, abierto, definidos anteriormente son espacios de Banach, y al definir el producto interno

$$\|u\|_{H^m}^2 = (u, v)_{H^m} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (D^{\alpha} u)(D^{\alpha} v) dx \text{ para todo } u, v \in H^m(\Omega)$$

el espacio de Sobolev es también un espacio de Hilbert con norma $\|u\|_{H^m}^2$.

1.3. B-Spline

La interpolación polinómica es un método numérico que permite aproximar funciones a partir de cierto número finito de imágenes conocidas de la función, sin embargo, presenta una desventaja ya que a medida que aumenta el grado del polinomio de interpolación, es posible que se presenten oscilaciones entre los puntos lo cual se disminuye cuando la interpolación polinómica se hace a trozos.

La interpolación polinómica a trozos consiste en dividir el conjunto de puntos (o nodos) en subconjuntos disyuntos que se interpolan con un polinomio de grado bajo, por lo cual la interpolación queda definida a trozos. Estas aproximaciones se pueden realizar utilizando diferentes técnicas entre las que están las de interpolación de Lagrange, de Newton, de Hermite, por Splines, a partir de los polinomios de Legendre, de Hermite, de Chebyshev, de Laguerre o las funciones de Jacobi.

Un Spline cúbico es una función polinómica cúbica a trozos que es dos veces continuamente diferenciable, por lo cual la función polinómica cúbica a trozos $s(x)$ es la interpolación de una función $f(x)$ en los nodos x_i , $0 \leq i \leq n$, de una partición P del intervalo $[a, b]$.

Dada la partición P del intervalo $[a, b]$ tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Sea $S_3(P)$ el espacio de todas las funciones $s(x) \in C^2[a, b]$ que son funciones polinómicas

²Se denota por $D^{\alpha} u$ la derivada parcial $D^{\alpha} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Si $|\alpha| = m$ entonces $D^{\alpha} u$ representa la m -ésima derivada parcial de u .

reducidas al subintervalo (x_i, x_{i+1}) , con $0 \leq i \leq n$, de $[a, b]$. Existe una función $s(x)$ en $S_3(P)$, que satisface las restricciones de interpolación

$$\begin{aligned} s'(x_0) &= f'(x_0) \\ s(x_i) &= f(x_i) \quad \text{para } 0 \leq i \leq n \\ s'(x_n) &= f'(x_n) \end{aligned} \quad (1.12)$$

a la función $s(x)$ se le denomina la interpolación spline cúbica de $f(x)$.

Definición 1.9 *Considérese la partición P uniformemente espaciada, con $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$, y nodos x_i . Se definen cuatro nodos adicionales $x_{-2} < x_{-1} < x_0$ y $x_n < x_{n+1} < x_{n+2}$ y se construyen las funciones $\phi_i(x)$ definidas como*

$$\phi_i(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & \text{si } x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & \text{si } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.13)$$

las cuales son continuamente diferenciables. Además se tiene que

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 4 & \text{si } j = i \\ 1 & \text{si } j = i - 1 \text{ o } j = i + 1 \\ 0 & \text{si } j = i + 1 \text{ o } j = i - 1 \end{cases}$$

y que $\phi_i(x) \equiv 0$, para toda $x \geq x_{i+2}$ y $x \leq x_{i-1}$.

Teorema 1.4 *Sea $\beta = \{\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}\}$ y sea $\phi_3(P) = \text{gen}(\beta)$. El conjunto β es linealmente independiente sobre $[a, b]$.*

Demostración: Ver [27]

Teorema 1.5 *Existe una única función $s(x) \in \phi_3(P)$ que satisface el problema de interpolación (1.12).*

Demostración:

Sea $s(x)$ una función del conjunto $\phi_3(P)$, entonces existen $a_{-1}, a_0, \dots, a_{n+1}$, tal que

$$s(x) = a_{-1}\phi_{-1} + a_0\phi_0 + \dots + a_{n+1}\phi_{n+1} \quad (1.14)$$

Como $s(x)$ satisface las condiciones (1.12), entonces se tiene que

$$\begin{aligned} s'(x_0) &= a_{-1}\phi'_{-1}(x_0) + a_0\phi'_0(x_0) + \dots + a_{n+1}\phi'_{n+1}(x_0) = f'(x_0) \\ s(x_i) &= a_{-1}\phi_{-1}(x_i) + a_0\phi_0(x_i) + \dots + a_{n+1}\phi_{n+1}(x_i) = f(x_i) \quad \text{para } 1 \leq i \leq n \\ s'(x_n) &= a_{-1}\phi'_{-1}(x_n) + a_0\phi'_0(x_n) + \dots + a_{n+1}\phi'_{n+1}(x_n) = f'(x_n) \end{aligned}$$

generando un sistema de ecuaciones lineales $(n+3) \times (n+3)$, que se puede escribir en la forma matricial $AX = B$ donde la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{h} & 0 & \frac{3}{h} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{3}{h} & 0 & \frac{3}{h} \end{pmatrix},$$

la matriz incognita es

$$X = (a_{-1}, a_0, \dots, a_{n+1})^T$$

y los términos independientes son

$$B = (f'(x_0), f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_n))$$

Debido a que la matriz es 3-diagonal, entonces por el teorema de Gershgorin, se tiene que A es no singular por lo que el sistema de ecuaciones tiene única solución, esto es $s(x)$ existe y es única, para dichas condiciones.

Los siguientes resultados se enuncian sin demostración, sin embargo ellas se pueden encontrar en [27]

Teorema 1.6 $\phi_3(P) = S_3(P)$.

Corolario 1: $\dim S_3(P) = n+3$ y $\beta = \{\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}\}$ es una base para $S_3(P)$.

Corolario 2: Existe un único spline $s(x)$ que resuelve el problema de interpolación y es llamado spline cúbico interpolante de $f(x)$.

Usando la misma demostración del teorema 1.5, es posible demostrar que existe un único $\bar{s}(x)$ spline interpolante dado por (1.13) tal que satisfaga el problema de interpolación

$$\begin{aligned} s''(x_0) &= f''(x_0) \\ s(x_i) &= f(x_i) \text{ para } 0 \leq i \leq n \\ s''(x_n) &= f''(x_n) \end{aligned}$$

En este caso la matriz de coeficientes toma la forma

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} \end{pmatrix}$$

1.4. Polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre son un ejemplo de polinomios ortogonales que son solución de varias ecuaciones diferenciales que modelan diversos fenómenos como reconocimiento de objetos o imágenes, distribución de temperaturas, entre otros [26]. Estos polinomios, por su propiedad de ortogonalidad, son utilizados para aproximar funciones, determinar soluciones de integrales, determinar raíces de funciones complejas, razón por la cual se pueden utilizar como funciones base en la aplicación del método Taylor-Petrov-Galerkin para determinar una solución aproximada a la ecuación diferencial Korteweg-de Vries.

Una de las ecuaciones diferenciales para la cual los polinomios de Legendre son solución es justamente la ecuación diferencial de Legendre (1.15)

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad (1.15)$$

con $-1 \leq x \leq 1$; $\lambda \in R$.

En primera instancia se trata de encontrar valores para λ de tal manera que la ecuación diferencial de Legendre tenga soluciones no triviales. Usando series de potencias, se considera que la solución de la ecuación tiene la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Sustituyendo entonces la solución en series en la ecuación

$$y'' - x^2 y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

se tiene que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0$$

reescribiendo la primera sumatoria con el índice desde cero

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0$$

escribiendo separadamente los términos para $n = 0$ y $n = 1$ e inicializando todas las sumatorias en $n = 2$, se reescribe la ecuación como

$$(2a_2x^0 + 6a_3x) + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^n - 2a_1x - \sum_{n=2}^{\infty} 2na_nx^n + \lambda a_0x^0 + \lambda a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda a_nx^n = 0$$

al reordenar y agrupar términos entonces,

$$2a_2 + 6a_3x - 2a_1x + \lambda a_0 + \lambda a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 + n - \lambda)a_n] x^n = 0$$

$$2a_2 + \lambda a_0 + (6a_3 - 2a_1 + \lambda a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 + n - \lambda)a_n] x^n = 0$$

Para que la igualdad a cero se cumpla el coeficiente en cada potencia de x debe ser cero, así que

$$2a_2 + \lambda a_0 = 0 \quad (1.16)$$

$$6a_3 - 2a_1 + \lambda a_1 = 0 \quad (1.17)$$

y para $n = 2, 3, \dots$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - [n(n+1) - \lambda]a_n = 0 \quad (1.18)$$

Despejando a_{n+2} de (1.18) se obtiene la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n; \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.19)$$

además de la ecuación (1.16)

$$a_2 = -\frac{\lambda}{2} a_0$$

Ahora, hallando, con (1.19), los coeficientes de índice par, a_{2n} ,

$$a_4 = \frac{6 - \lambda}{3 \cdot 4} a_2 = -\frac{\lambda(6 - \lambda)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a_0$$

$$a_4 = \frac{-\lambda(6 - \lambda)}{4!} a_0$$

$$a_6 = \frac{20 - \lambda}{5 \cdot 6} a_4 = \frac{-\lambda(6 - \lambda)(20 - \lambda)}{6!} a_0$$

se observa que son múltiplos de a_0 y se encuentran en términos de n y λ , con esto, el proceso se vuelve iterativo para el cálculo de cualesquier coeficiente.

Para el caso de los coeficientes impares, usando la ecuación (1.17)

$$a_3 = \frac{2 - \lambda}{6} a_1 = \frac{2 - \lambda}{3!} a_1$$

Luego, por la relación recursiva de (1.19)

$$a_5 = \frac{12 - \lambda}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{(2 - \lambda)(12 - \lambda)}{5!} a_1$$

$$a_7 = \frac{30 - \lambda}{6 \cdot 7} a_5 = \frac{(2 - \lambda)(12 - \lambda)(30 - \lambda)}{7!} a_1$$

lo cual muestra que los coeficientes de índice impar, a_{2n+1} , son múltiplos de a_1 y se encuentran en términos de n y λ , con esto el proceso se vuelve iterativo también, para el cálculo de cualesquier coeficiente.

Lo anterior, permite escribir la solución como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{\lambda}{2} x^2 - \frac{\lambda(6 - \lambda)}{4!} x^4 - \frac{\lambda(6 - \lambda)(20 - \lambda)}{6!} x^6 + \dots \right) +$$

$$a_1 \left(x + \frac{2 - \lambda}{3!} x^3 + \frac{(2 - \lambda)(12 - \lambda)}{5!} x^5 + \frac{(2 - \lambda)(12 - \lambda)(30 - \lambda)}{7!} x^7 + \dots \right)$$

Las series de los paréntesis son linealmente independientes con potencias pares e impares de x .

Sean

$$y_e(x) = 1 - \frac{\lambda}{2} x^2 - \frac{\lambda(6 - \lambda)}{4!} x^4 - \frac{\lambda(6 - \lambda)(20 - \lambda)}{6!} x^6 + \dots$$

$$y_0(x) = x + \frac{2 - \lambda}{3!} x^3 + \frac{(2 - \lambda)(12 - \lambda)}{5!} x^5 + \frac{(2 - \lambda)(12 - \lambda)(30 - \lambda)}{7!} x^7 + \dots$$

Con esto la solución general para la ecuación diferencial de Legendre es

$$y(x) = a_0 y_e(x) + a_1 y_0(x)$$

con a_0 y a_1 constantes arbitrarias.

Calculando algunas soluciones particulares se tiene:

$$\begin{aligned} \text{con } \lambda = 0 \text{ y } a_1 = 1 & \quad y(x) = 1 \\ \text{con } \lambda = 2 \text{ y } a_1 = 1 & \quad y(x) = a_1 x \\ \text{con } \lambda = 6 \text{ y } a_1 = 0 & \quad y(x) = a_0(1 - 3x^2) \\ \text{con } \lambda = 12 \text{ y } a_1 = 0 & \quad y(x) = a_1(x - \frac{5}{3}x^3) \\ \text{con } \lambda = 20 \text{ y } a_1 = 0 & \quad y(x) = a_0(1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4) \end{aligned}$$

y así sucesivamente para otras soluciones.

Se debe tener en cuenta que los valores que λ puede tomar para que las soluciones sean polinomios (series infinitas) están dados por $\lambda = n(n+1)$; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, por tanto al estandarizar y tabular estas soluciones dado $\lambda = n(n+1)$, se deben elegir a_0 y a_1 de tal manera que la solución polinomial sea 1 en $x = 1$.

Los polinomios que resultan son los polinomios de Legendre, notados por $P_n(x)$, como caso particular se tiene que los seis primeros polinomios de Legendre son:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^2 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

Una característica importante de los polinomios de Legendre es que si n es par, todas las potencias de x en el polinomio son pares y si n es impar las potencias de x son impares, además que ellos son solución de la ecuación de Legendre para $-1 \leq x \leq 1$.

Existen varias formas numéricas de obtener los polinomios de Legendre, usando la función generadora $f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}$, mediante una relación de recurrencia o a partir de la fórmula de Rodriguez. La siguiente tabla presenta cada una de dichas formas, sin demostración, para más detalles se puede consultar a [26].

Polinomio	Observaciones
$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$	Si n es par hay singularidad para $x = 0$ y $n - 2k = 0$
$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}$	Si n es par hay singularidad para $x = 0$ y $n - 2k = 0$
$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^{n-k} (x+1)^k$	existe singularidad cuando $x = -1$ y $k = 0$
$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{n+1}$	$P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$
$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) - \frac{xP_n(x) - P_{n-1}(x)}{n+1}$	$P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$
$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2-1)^n)$	Fórmula de Rodriguez

1.4.1. Ortogonalidad

Los polinomios de Legendre son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$, para demostrarlo, considere los polinomios de Legendre P_n y P_m con n y m enteros no negativos, entonces se debe demostrar que

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

Como $P_n(x)$ y $P_m(x)$ son solución de la ecuación (1.15) para $\lambda = n(n+1)$, entonces

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0$$

y

$$[(1-x^2)P_m'(x)]' + m(m+1)P_m(x) = 0$$

al multiplicar la primera ecuación por $P_m(x)$ y la segunda por $P_n(x)$

$$\begin{aligned} [(1-x^2)P_n'(x)]' P_m(x) + n(n+1)P_n(x)P_m(x) &= 0 \\ [(1-x^2)P_m'(x)]' P_n(x) + m(m+1)P_m(x)P_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

al restarlas

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' P_m(x) - [(1-x^2)P_m'(x)]' P_n(x) + (n(n+1) - m(m+1))P_m(x)P_n(x) = 0$$

e integrar respecto de x

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 [(1-x^2) P_n'(x)]' P_m(x) dx - \int_{-1}^1 [(1-x^2) P_m'(x)]' P_n(x) dx \quad (1.20) \\ &= (m(m+1) - n(n+1)) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx \end{aligned}$$

Integrando por partes las dos integrales del lado izquierdo de la ecuación, tomando como $u = P_m(x)$ y $dv = [(1-x^2) P_n'(x)]' dx$, y $u = P_n(x)$ y $dv = [(1-x^2) P_m'(x)]' dx$, respectivamente se tiene que:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 [(1-x^2) P_n'(x)]' P_m(x) dx = (1-x^2) P_n'(x) P_m(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-x^2) P_n'(x) P_m'(x) dx \\ \text{y} & \int_{-1}^1 [(1-x^2) P_m'(x)]' P_n(x) dx = (1-x^2) P_m'(x) P_n(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-x^2) P_m'(x) P_n'(x) dx \end{aligned}$$

que al restarlas de acuerdo a la ecuación (1.20), da lugar a

$$0 = (m(m+1) - n(n+1)) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx$$

y como $n \neq m$ entonces $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0$, lo que indica que los polinomios de Legendre son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$.

Capítulo 2

Ecuación diferencial Korteweg-de Vries (KdV)

2.1. Introducción

En este capítulo se describe inicialmente la formulación del problema variacional de frontera, o forma débil, de un problema clásico de ecuaciones diferenciales parciales sujeto a condiciones de frontera homogéneas y con condiciones iniciales dadas. Además se realiza un resumen de las características de las ondas dispersivas, para finalmente presentar las propiedades principales de la ecuación Korteweg - de Vries (KdV).

2.2. Formulación del problema variacional de frontera

Las ecuaciones diferenciales parciales son ecuaciones en las cuales su función incógnita es una función de varias variables. Una ecuación diferencial parcial de orden m es una expresión de la forma (2.1)

$$F \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_m}} \right) = 0 \quad (2.1)$$

con variables independientes x_1, x_2, \dots, x_n y función incógnita $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ continua en el dominio de definición Ω de la ecuación.

La ecuación diferencial parcial puede ser lineal o no lineal, de orden m . Siendo las ecuaciones diferenciales parciales lineales clasificadas como Hiperbólicas, Elípticas o Parabólicas [30], y su clasificación depende básicamente de sus coeficientes, por ejemplo si la ecuación es de segundo orden con incógnita $u(x, y)$ y ecuación general (2.2)

$$\begin{aligned}
 A(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \\
 b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + c(x, y) u(x, y) = f(x, y)
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

definida en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, se tiene que:

- Si $B^2 - AC > 0$ en Ω , entonces la ecuación es elíptica en Ω
- Si $B^2 - AC = 0$ en Ω , entonces la ecuación es parabólica en Ω y
- Si $B^2 - AC < 0$ en Ω , entonces la ecuación es hipérbolica en Ω

Existen muchos problemas de aplicación que son modelados mediante ecuaciones diferenciales parciales, que se solucionan a partir de problemas de valor inicial o de condiciones en la frontera: Uno de estos problemas consiste en determinar la función u que satisface

$$Au = f \quad \text{sobre el dominio } \Omega \quad (2.3)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\left. \begin{aligned}
 B_0 u &= g_0 \\
 &\vdots \\
 B_{m-1} u &= g_{m-1}
 \end{aligned} \right\} \text{sobre } \Gamma \quad (2.4)$$

donde Γ es la frontera del dominio Ω y A es una ecuación diferencial parcial elíptica de orden $2m$ en un dominio de definición Ω .

La ecuación (2.3) con condiciones (2.4), se denomina la forma clásica o fuerte del problema, sin embargo para algunos problemas de valores en la frontera es posible que la solución no exista, debido a que la función u no satisface alguna de las condiciones. Por esta razón se busca la solución del problema usando el problema variacional de valores en la frontera, también llamada la forma débil del problema de valores en la frontera.

Las condiciones de frontera juegan un papel importante al buscar la solución del problema. Estas condiciones de frontera se pueden clasificar en dos tipos:

- Condiciones de frontera esenciales, en donde el orden es menor a m , y
- Condiciones de frontera naturales, para las cuales el orden es mayor o igual a m .

Para la formulación del problema variacional se considerarán condiciones de frontera esenciales, puesto que la solución del problema variacional se encuentra en el subespacio $H^m(\Omega)$. Dichas condiciones esenciales de frontera serán consideradas homogéneas, lo cual

no restringe el tipo de problemas a considerar. De aquí que el problema de valores en la frontera toma la forma

$$\begin{aligned} Au &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) \\ &= f \quad \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

sujeto a las condiciones

$$\left. \begin{array}{l} B_0 u = 0 \\ \vdots \\ B_{p-1} u = 0 \end{array} \right\} \text{esenciales} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} B_p u = g_p \\ \vdots \\ B_{m-1} u = g_{m-1} \end{array} \right\} \text{naturales}$$

Para definir el problema variacional de frontera, [6], [25], [28], primero se debe definir el espacio V en el cual se encuentra la solución del problema variacional, el cual es llamado el espacio de las funciones admisibles y está definido como

$$V = \{v \in H^m(\Omega) : B_j v = 0 \text{ sobre } \Gamma, j = 1, \dots, p-1\} \quad (2.7)$$

luego se multiplica a ambos lados de (2.5) por una función arbitraria $v \in V$, para después integrar y llegar a la forma

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad (2.8)$$

con la forma bilineal a definida mediante la expresión

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u D^\alpha v dx + \text{términos de la frontera} \quad (2.9)$$

Por lo cual la formulación del problema variacional de frontera consiste en encontrar una función $u \in V$ tal que satisface la igualdad (2.8) para todo $v \in V$.

Al igual que en la forma clásica, es posible establecer la existencia y unicidad de la solución del problema, dicho criterio se garantiza mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Sea V un espacio de Hilbert y sea $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y H - elíptica sobre V y $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo sobre V , entonces:*

- *el problema variacional de condiciones en la frontera que consiste en encontrar $u \in V$ que satisfice*

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \text{para todo } v \in V \quad (2.10)$$

tiene una y solo una solución

- la solución depende de manera continua sobre los datos en el sentido de que

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{V'} \quad (2.11)$$

donde $\|\cdot\|_{V'}$ es la norma en el espacio dual V' de V y α es una constante.

2.3. Ondas Dispersivas

Se puede definir que una onda es una señal que se transfiere de una parte de un medio a otra, con una velocidad de propagación dada, su origen puede deberse a cualquier disturbio ocasionado en el medio al variar alguna cantidad específica, pero que permite identificar claramente su ubicación en cualquier tiempo determinado.

Las ondas pueden clasificarse en dos clases, las ondas hiperbólicas que obedecen al modelo matemático de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas y las ondas dispersivas, las cuales no tienen un modelado matemático general.

Considérese inicialmente la ecuación de onda lineal unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda. Dicha ecuación describe la altura de una cuerda vibrante en función del tiempo y el espacio.

Si se considera que $\alpha = x - ct$ y $\beta = x + ct$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \end{aligned}$$

que al ser sustituido en la ecuación (2.12), se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} = 0$$

e integrando dos veces, entonces la solución de la ecuación tiene la forma $u = f(\alpha) + g(\beta)$, con f y g funciones arbitrarias que describen ondas que se mueven con velocidad constante y sin cambio de forma una hacia la parte negativa y la otra hacia la parte positiva [8],[39].

Si se escribe la ecuación (2.12) como el producto

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$$

entonces la solución de D'Alembert dice que si se considera la ecuación de onda simplificada

$$u_t + cu_x = 0$$

se tiene que la solución son ondas viajeras solamente a izquierda o a derecha, esto es $u(x, t) = f(x - ct)$, la cual no tiene cambio de forma.

Una *onda plana* es una solución de la ecuación (2.12) y tiene la forma

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (2.13)$$

donde A , k y ω son constantes. A k se le denomina número de onda, A es la amplitud de la onda y ω es la frecuencia angular.

El número de onda k está relacionado con la longitud de onda λ y la frecuencia ω , mediante la expresión $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$, de donde $\omega = ck$ denominada como la relación de dispersión para este tipo de ondas.

En general la relación de dispersión indica que la frecuencia ω depende del número de onda, así $\omega = \omega(k)$ y esto significa que existe una relación entre la energía del sistema y su momento.

Esto indica que para una onda plana (2.13), se tiene que $e^{i(kx - \omega t)} = e^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)}$, por tanto la velocidad de la onda depende del número de onda, lo que lleva a concluir que ondas con diferente número de onda se mueven a diferente velocidad, así que que el problema de propagación es dispersivo.

En conclusión, un problema de propagación de ondas es no dispersivo si la velocidad de la onda es constante, esto es $\frac{\omega(k)}{k} = \text{constante}$.

2.3.1. Relaciones de dispersión: Velocidades de fase y de grupo

Teniendo en cuenta que la energía en la onda es proporcional a la frecuencia y que el número de onda es proporcional al momento, la relación de dispersión es importante porque permite describir como se disipa la energía en un sistema dado, esto indica que es posible definir dos tipos de velocidades, la velocidad de la fase y la velocidad del grupo.

Definición 2.1 Para una onda de la forma $u(x, t) = f(kx - \omega t)$ donde k y ω son constantes, la velocidad de fase es

$$c_p := \frac{\omega}{k}$$

y la propagación de la energía en un sistema está dada por la velocidad de los paquetes de onda, dicha velocidad se denomina velocidad de grupo y está definida por

$$c_g := \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

En el caso de la onda plana, la velocidad de fase y la velocidad de grupo son iguales, puesto que $\omega(k) = ck$, por tanto,

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \frac{ck}{k} = c = c_g$$

Si se considera el caso de una ecuación linealizada de la forma

$$u_t + \varepsilon u_x + \mu u_{xxx} = 0$$

cuya solución es $u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$, entonces al derivar y sustituir en la ecuación

$$\begin{aligned} u_x &= ik e^{i(kx - \omega t)} \\ u_{xx} &= -k^2 e^{i(kx - \omega t)} \\ u_{xxx} &= -ik^3 e^{i(kx - \omega t)} \\ u_t &= -i\omega e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -i\omega e^{i(kx - \omega t)} + \varepsilon ik e^{i(kx - \omega t)} - i\mu k^3 e^{i(kx - \omega t)} &= 0 \\ ie^{i(kx - \omega t)} (-\omega + \varepsilon k - \mu k^3) &= 0 \end{aligned}$$

de donde $-\omega + \varepsilon k - \mu k^3 = 0$. Al despejar la frecuencia se tiene que la relación de dispersión entre la frecuencia ω y el número de onda k es $\omega = \varepsilon k - \mu k^3$.

A partir de allí, se tienen las velocidades de fase $c_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\varepsilon k - \mu k^3}{k} = \varepsilon - \mu k^2$ y $c_g = \varepsilon - 3\mu k^2$, así que la velocidad de grupo no es constante lo que lleva a concluir que la ecuación linealizada es una onda dispersiva, además si $\mu > 0$ entonces la velocidad de fase es mayor que la velocidad de grupo, $c_p > c_g$.

2.4. Ecuación Korteweg-de Vries

El estudio de los *solitones* u ondas solitarias se ha desarrollado desde hace muchos años, este fenómeno fue identificado formalmente hacia 1834, por el ingeniero escocés John Scott Russell, al observar el fenómeno que se formaba cuando un bote pequeño o barcaza, que se movilizaba por un canal de poca profundidad, se detenía abruptamente; en el instante en que la barcaza se detuvo, el ingeniero observó que se generaba una onda que se movía a gran velocidad y que aparentemente no presentaba cambio en su forma y velocidad por un periodo de tiempo bastante grande. Tiempo después y tras realizar muchos experimentos llegó a la conclusión de que existían ondas que se desvanecen y otras que mantienen su forma y velocidad [10],[24].

Hacia 1895, el matemático Holandés Diederick Korteweg y su estudiante Gustav de Vries, presentan la ecuación (2.14) que lleva sus nombres, Korteweg-de Vries (KdV), la cual modela el fenómeno de las ondas solitarias,

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \tag{2.14}$$

La ecuación KdV (2.14) tiene un término no lineal, que indica convección y un término de orden 3 que indica dispersión, el balance de estos dos efectos son los que forman los solitones. La ecuación fue obtenida a partir de un modelo simplificado de las ecuaciones

de Euler para ondas largas, donde $\varepsilon = (gh_0)^{\frac{1}{2}}$ y $\mu = \frac{1}{6}\varepsilon h_0^2$, con g la gravedad y h_0 la profundidad del agua.

En 1965, Zabusky y Kruskal [40], describen que los solitones son ondas localizadas muy especiales ya que presentan un comportamiento de partículas, es decir, que además de mantener su forma y velocidad por largo tiempo, con su velocidad proporcional a la amplitud de la onda, también mantienen su forma al colisionar con otro solitón, solo presentándose un cambio de fase. A raíz de este descubrimiento decidieron darle el nombre de *solitón* por tener las mismas características de partículas elementales como electrón, protón y fotón.

2.4.1. Solución Exacta de la ecuación KdV

La solución de la ecuación KdV se ha estudiado en muchos trabajos, en [2], [8], [25] se describen algunos métodos de solución como la ecuación integral de Marchenko, el método de "inverse scattering Transform" o el método de Hirota, los cuales permiten obtener soluciones exactas de la ecuación. Aunque por la complejidad de los cálculos y procedimientos algebraicos, se han buscado soluciones aproximadas mediante diversos métodos numéricos, tales como el método de aproximación de Padé, el método de perturbación, el método de diferencias finitas o el de elementos finitos. A continuación se muestra la solución de tipo onda solitaria que admite la ecuación KdV, mediante la obtención de la solución canónica exacta [4], [11], [10].

Supóngase que la solución de la ecuación (2.14) es una función de onda viajera con la forma

$$u(x, t) = v(x - ct), \quad \text{con } x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (2.15)$$

para una función v , con velocidad de onda constante c . Si $\xi = x - ct$, con $u_t = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -c \frac{dv}{d\xi}$, $u_x = \frac{dv}{d\xi}$ y $u_{xxx} = \frac{d^3v}{d\xi^3}$, y se sustituye en la ecuación (2.14), entonces la función u es solución de la ecuación KdV si la función v es solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$-c \frac{dv}{d\xi} + \varepsilon v \frac{dv}{d\xi} + \mu \frac{d^3v}{d\xi^3} = 0 \quad (2.16)$$

al integrar una vez respecto de ξ

$$-cv + \varepsilon \frac{v^2}{2} + \mu \frac{d^2v}{d\xi^2} = A \quad (2.17)$$

con A constante de integración. Ahora multiplicando por $\frac{dv}{d\xi}$ a ambos lados de la igualdad (2.17),

$$-cv \frac{dv}{d\xi} + \varepsilon \frac{v^2}{2} \frac{dv}{d\xi} + \mu \frac{d^2v}{d\xi^2} \frac{dv}{d\xi} = A \frac{dv}{d\xi} \quad (2.18)$$

e integrar nuevamente respecto de ξ , se tiene

$$-c\frac{v^2}{2} + \varepsilon\frac{v^3}{6} + \mu\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 = Av + B \quad (2.19)$$

Teniendo en cuenta que la onda solución es una onda solitón, entonces si $|\xi| \rightarrow \infty$, entonces v , $\frac{dv}{d\xi}$ y $\frac{d^2v}{d\xi^2}$ tienden a cero, razón por la cual las constantes A y B son cero.

Así

$$-c\frac{v^2}{2} + \varepsilon\frac{v^3}{6} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 = 0$$

de la cual se despeja $\frac{dv}{d\xi}$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\xi} &= \pm\sqrt{\frac{cv^2}{\mu} - \varepsilon\frac{v^3}{3\mu}} \\ \frac{dv}{d\xi} &= \pm v\sqrt{\frac{c}{\mu} - \frac{\varepsilon}{3\mu}v} \end{aligned}$$

Separando variables e integrando respecto de ξ ,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v\sqrt{\frac{c}{\mu} - \frac{\varepsilon}{3\mu}v}} &= \pm d\xi \\ \xi + d &= -\int \frac{dv}{v\sqrt{\frac{c}{\mu} - \frac{\varepsilon}{3\mu}v}} \\ \xi &= -\int \frac{dv}{v\sqrt{\frac{c}{\mu} - \frac{\varepsilon}{3\mu}v}} - d \end{aligned}$$

con d constante de integración.

Si se toma a $v = \frac{3c}{\varepsilon} \sec h^2 y$ entonces $dv = -\frac{6c}{\varepsilon} \sec h^2 y \tanh y dy$, que al sustituir en la ecuación

$$\xi = -\int \frac{-\frac{6c}{\varepsilon} \sec h^2 y \tanh y dy}{\frac{3c}{\varepsilon} \sec h^2 y \sqrt{\frac{c}{\mu} - \frac{\varepsilon}{3\mu} \frac{3c}{\varepsilon} \sec h^2 y}} - d$$

y simplificando

$$\begin{aligned} \xi &= \int \frac{2 \tanh y dy}{\sqrt{\frac{c}{\mu} (1 - \sec h^2 y)}} - d \\ &= 2\sqrt{\frac{\mu}{c}} \int dy - d \end{aligned}$$

por tanto

$$\xi = 2\sqrt{\frac{\mu}{c}}y - d$$

Luego $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu}}\xi + d$, por tanto al reemplazar en $v = \frac{3c}{\varepsilon} \sec h^2 y$, se tiene

$$v = \frac{3c}{\varepsilon} \sec h^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu}}\xi + d \right)$$

$$v = \frac{3c}{\varepsilon} \sec h^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu}}(x - ct) + d \right)$$

Así que la solución exacta de la ecuación KdV (2.14) es

$$u(x, t) = \frac{3c}{\varepsilon} \sec h^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu}}(x - ct) + d \right) \quad (2.20)$$

$$u(x, t) = \frac{3c}{\varepsilon} \sec h^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu}}x - \frac{c}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu}}t + d \right)$$

Es importante hacer notar que no se toma como posible solución a la función $v = -\frac{3c}{\varepsilon} \csc h^2 y$ ya que no sería una solución de tipo onda solitaria, debido a que no es una función acotada si $\xi = 0$.

2.4.2. Leyes de conservación

La ecuación KdV tiene la propiedad de la integrabilidad, razón por la cual tiene muchas leyes de conservación [5] [8] [11], en este trabajo se considerarán tres de ellas. Teniendo en cuenta que la masa se define como

$$M := \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx \quad (2.21)$$

y la energía como

$$E := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (u(x, t))^2 dx \quad (2.22)$$

las dos primeras leyes de conservación a tener en cuenta son que la masa y la energía son independientes del tiempo, esto indica que tanto la masa como la energía en un solitón son constantes.

Para probar estas leyes se hallan las derivadas de M y de E respecto del tiempo, se probará que estas dos derivadas son cero, por tanto

$$\frac{dM}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} u_t dx$$

pero de 2.14, $u_t = -\varepsilon u u_x - \mu u_{xxx}$, al reemplazar

$$\frac{dM}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} (-\varepsilon u u_x - \mu u_{xxx}) dx$$

que al integrar se obtiene

$$\frac{dM}{dt} = -\varepsilon \frac{u^2}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \mu u_{xx} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

y como u y $u_{xx} \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= 0 \\ M &= C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx \end{aligned}$$

con C_1 constante.

De igual manera, considérese $\frac{dE}{dt}$, luego

$$\frac{dE}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} u u_t dx$$

al sustituir u_t

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u u_t dx &= \int_{-\infty}^{\infty} u (-\varepsilon u u_x - \mu u_{xxx}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-\varepsilon u^2 u_x - \mu u u_{xxx}) dx \end{aligned}$$

integrando

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\varepsilon \frac{u^3}{3} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \mu (u u_{xx}) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mu u_x u_{xx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu u_x u_{xx} dx = \mu \frac{(u_x)^2}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puesto que $u_{xx} \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$

Por tanto la energía es constante, esto es

$$E = C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (u(x, t))^2 dx$$

La tercera ley consiste en que la integral de $u^3 - \frac{3\mu}{\varepsilon} (u_x)^2$ respecto de x es constante, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(u^3 - \frac{3\mu}{\varepsilon} (u_x)^2 \right) dx$$

Para demostrar esta última ley, se multiplica la ecuación KdV por $3u^2$ y luego se le resta el producto u_x con la derivada respecto de x de la ecuación KdV [11], luego

$$3u^2 (u_t + \varepsilon u u_x + \mu u_{xxx}) - u_x \frac{\partial}{\partial x} (u_t + \varepsilon u u_x + \mu u_{xxx}) = 0$$

Capítulo 3

Método de elementos finitos

3.1. Introducción

El método de los elementos finitos es una poderosa herramienta que en la actualidad ha cobrado bastante fuerza en los campos de la ingeniería y la matemática. Este método permite resolver modelos matemáticos con cálculos menos complejos y se considera como uno de los métodos más eficaces para resolver problemas de ingeniería, ya que debido al fuerte auge y avance de programas computacionales se facilita la resolución de problemas donde las manipulaciones algebraicas no son el camino más adecuado.

Son muchas las limitantes que pueden existir al abordar un sistema complejo considerando una sola propiedad global, debido a esto, diversas disciplinas han requerido para la solución de sus problemas, particionar los sistemas en términos de sus componentes o "elementos" de tal manera que se pueda tener una información más detallada y concreta de éstos, para luego volver a reconstruirlo teniendo en cuenta la contribución de cada elemento y así establecer un patrón en su comportamiento, es por esto que el nombre *elemento finito* hace referencia al estudio de sistemas discretos, criterio unificado teniendo en cuenta la parte conceptual y numérica en el problema de estudio [42]. Este proceso, de ver un sistema complejo como un conjunto finito de elementos se denomina discretización y para el cual han existido bastantes estudios en la búsqueda de los métodos para llevarlo a cabo.

El génesis y desarrollo del método data de siglos atrás, cuando sus primeros estudios se basaron en el problema del discretizado, según, [13] los egipcios empleaban técnicas de discretización para las construcciones de las pirámides, también Arquímedes (287-212 ac) hizo uso del método en el cálculo de volúmenes de algunos sólidos y áreas de superficies; en china el matemático Liu Hui (300 dc) empleó la técnica del discretizado en el problema de encontrar la longitud de las circunferencias en un polígono regular de 3072 lados. En la actualidad, el método se encuentra en un amplio desarrollo con muchas publicaciones cada año relacionadas en campos aplicados a las ciencias en general.

Existen modelos donde su estudio requiere de un número finito de componentes correctamente definidos, problemas tales reciben el nombre de discretos. Sin embargo, existen sistemas en donde sus componentes no son tan evidentes y realizar tal partición puede

llevar a procesos indefinidos, de esta forma el problema podrá expresarse en términos de infinitésimos dando lugar a un modelo matemático en ecuaciones diferenciales parciales, sistemas de este tipo se denominan *continuos* [42]. La solución exacta de los problemas continuos ha sido posible mediante técnicas algebraicas, abordar problemas continuos reales demanda el uso de métodos diversos de discretización en donde el objetivo radica en buscar una aproximación que se acerque lo mejor posible a la solución continua en la medida que se incrementa el número de variables discretas. El estudio de problemas continuos sigue despertando el interés de matemáticos e ingenieros, algunas de sus técnicas se emplean en ecuaciones diferenciales y en diversas aproximaciones como lo son método de residuos ponderados, métodos de colocación y diferencias finitas.

3.2. Formulación del método

El método de los elementos finitos se utiliza en diferentes problemas. Para este trabajo el interés principal consiste en determinar una aproximación para la solución del problema variacional de frontera (2.10).

Definición 3.1 *Malla de elementos finitos: La malla de elementos finitos es el conjunto formado por E elementos finitos y G nodos que definen el dominio de definición.*

Los elementos finitos son el conjunto finito formado por los E subdominios $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_E$, que se obtienen al dividir el dominio de definición Ω del problema variacional (2.10), de tal manera que no se superponen y su unión es igual al dominio inicial, esto es,

$$\Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset \quad \text{y} \quad \bigcup_{e=1}^E \bar{\Omega}_e = \bar{\Omega}. \quad (3.1)$$

Por otra parte, los nodos o puntos nodales son puntos que generalmente se ubican en los vértices de los elementos, aunque es posible ubicar nodos adicionales contenidos en los elementos [28], [29].

Por ejemplo, si el dominio Ω es un subconjunto de \mathbb{R}^2 , entonces el dominio será una forma poligonal cuya frontera Γ está compuesta de segmentos de recta y los nodos son los puntos vértices de cada uno de los segmentos poligonales y/o en sus puntos medios. En el caso en que el dominio de definición sea en \mathbb{R} , los elementos serán subintervalos, cuyos extremos serán los nodos

Considérese una sucesión de subespacios de un espacio de Hilbert V , de dimensión finita $\{V^h\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a V , tal que $\bigcup_{h=1}^{\infty} V^h = V$ donde $V^h \subset V^{h+1} \subset V$, cuya base son las funciones N_i , con $i = 1, \dots, G$, esto es $V^h = \text{gen}\{N_i\}_{i=1}^G$.

Las funciones base N_i , de V^h , deben satisfacer las condiciones de frontera esenciales y además cumplen las siguientes propiedades:

- Las funciones N_i son acotadas y continuas en el dominio de definición, es decir, $N_i \in C(\bar{\Omega})$.

- Hay un total de G funciones base, una por cada nodo. N_i es diferente de cero solamente en los elementos que estén conectados al nodo i .
- N_i es igual a 1 en el nodo i , e igual a cero en los otros nodos: $N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
- La restricción $N_i^{(e)}$ de N_i para Ω_e es una función polinomial, esto es $N_i|_{\Omega_e} \equiv N_i^{(e)}$, con $N_i^{(e)} \in P_k(\Omega_e)$ para algún $k \geq 1$, donde $P_k(\Omega_e)$ es el espacio de los polinomios de grado mayor o igual a k sobre Ω_e .

Así el problema consiste en determinar la función aproximada $u_h \in V^h \subset V$ tal que satisface el problema

$$a(u_h, v_h) = \langle l, v_h \rangle \quad \text{para todo } v_h \in V^h \quad (3.2)$$

donde $u_h = \sum_{i=1}^G a_i N_i(x)$ y $v_h = \sum_{j=1}^G b_j N_j(x)$, por tanto al sustituir en (3.2) se obtiene

$$a \left(\sum_{i=1}^G a_i N_i, \sum_{j=1}^G b_j N_j \right) = \left\langle l, \sum_{j=1}^G b_j N_j \right\rangle \quad (3.3)$$

de donde por la bilinealidad de $a(\cdot, \cdot)$ y la linealidad de l se tiene que

$$\sum_{i=1}^G \sum_{j=1}^G a(N_i, N_j) a_i b_j = \sum_{j=1}^G \langle l, N_j \rangle b_j \quad (3.4)$$

al igualar a cero y reordenar

$$\sum_{j=1}^G b_j \left(\sum_{i=1}^G a(N_i, N_j) a_i - \langle l, N_j \rangle \right) = 0 \quad (3.5)$$

Si se define la matriz de rigidez K , con $K_{ij} = a(N_i, N_j)$ y el vector de carga F , con $F_j = \langle l, N_j \rangle$ se puede escribir a (3.5) como

$$\sum_{j=1}^G b_j \left(\sum_{i=1}^G K_{ij} a_i - F_j \right) = 0 \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta que b_j son coeficientes arbitrarios entonces para que la igualdad (3.6) se tenga se debe cumplir que

$$\sum_{i=1}^G K_{ij} a_i = F_j$$

el cual es un sistema de ecuaciones con incognitas a_i .

Para calcular la solución aproximada se obtiene a K_{ij} mediante la expresión $K_{ij} = a(N_i, N_j) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(N_i, N_j) dx$, la cual se puede escribir como una sumatoria de integrales sobre cada uno de los elementos finitos, esto es

$$\begin{aligned}
 a(N_i, N_j) &= \int_{\Omega} \mathcal{F}(N_i, N_j) d\Omega \\
 &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathcal{F}(N_i, N_j) d\Omega_e \\
 &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathcal{F}(N_i^{(e)}, N_j^{(e)}) d\Omega_e \\
 &= \sum_{e=1}^E a^{(e)}(N_i^{(e)}, N_j^{(e)})
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

De manera similar se halla a F_j , así

$$\begin{aligned}
 F_j &= \langle l, N_j \rangle = \int_{\Omega} \mathcal{G}(N_j) d\Omega \\
 &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathcal{G}(N_j) d\Omega_e \\
 &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathcal{G}(N_j^{(e)}) d\Omega_e \\
 &= \sum_{e=1}^E \langle l^{(e)}, N_j^{(e)} \rangle
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

De (3.7) y (3.8) se puede concluir que para obtener la matriz K y el vector F es suficiente con sumar los aportes de las matrices $K^{(e)}$ y $F^{(e)}$ obtenidas para cada uno de los elementos considerados, esto es

$$K = \sum_{e=1}^E K^{(e)} \text{ y } F = \sum_{e=1}^E F^{(e)} \tag{3.9}$$

en donde $K_{ij}^{(e)} = a^{(e)}(N_i^{(e)}, N_j^{(e)})$ y $F_j^{(e)} = \langle l^{(e)}, N_j^{(e)} \rangle$. [28], [29].

Dependiendo del tipo de funciones elegidas como funciones base, el método de elementos finitos será de diferente tipo. Si N_i y N_j son funciones del mismo tipo, entonces el método se denomina *Método de Galerkin*. Si se considera el problema (3.2) en donde $u_h \in U^h$ y $v_h \in V^h$ con U^h y V^h subespacios finito dimensionales del espacio de Hilbert V , con bases $\{N_i\}_{i=1}^G$ y $\{\phi_j\}_{j=1}^G$, tales que $K_{ij} = a(N_i, \phi_j)$ y $F_j = \langle l, \phi_j \rangle$ entonces el método toma el nombre de *Petrov - Galerkin*, en muchos artículos o textos de estudio se le denomina a las funciones N_i , como *funciones de forma* y a las funciones ϕ_j como *funciones base o de peso*.

Capítulo 4

Solución aproximada de la ecuación KdV

4.1. Introducción

Para determinar la solución aproximada de la ecuación KdV se utilizará el método de los elementos finitos Taylor-Petrov-Galerkin, en el cual la discretización para la variable tiempo t se realiza usando discretización en serie discreta de Taylor y para la discretización en el espacio se consideran, como funciones de forma a B-Spline cúbicos y como funciones base o peso a los polinomios de Legendre. Dichas funciones son adecuadas ya que cumplen con las condiciones de continuidad, integrabilidad y ortogonalidad exigidas para aplicar el método.

4.2. Método de Taylor - Petrov - Galerkin para la ecuación KdV

Considérese el problema de valores en la frontera

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} u(a, t) = u(b, t) = 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0 \\ u_{xx}(a, t) = u_{xx}(b, t) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (4.3)$$

con ecuación diferencial parcial Korteweg - de Vries, para ε y μ constantes, sujeta a las condiciones de frontera iguales a cero y con condiciones iniciales $u(x, t)$.

El dominio de definición espacial de este PVF es el intervalo $\Omega = [a, b]$, y los subíndices x y t indican las derivadas parciales de u respecto del espacio y del tiempo respectivamente.

Se buscará determinar la solución del problema usando el método de elementos finitos Taylor - Petrov - Galerkin. Esto significa, discretizar inicialmente el tiempo mediante la expansión en serie de Taylor, para luego realizar la discretización espacial mediante la aplicación del método Petrov - Galerkin usando como funciones de forma B-Spline cúbicos y como funciones base polinomios de Legendre

Para realizar la discretización en el tiempo se tiene en cuenta que por la expansión en serie de Taylor [9] para el tiempo se obtiene

$$u_t^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} u_{tt}^n - O(t^2) \quad (4.4)$$

y por la ecuación (4.1), $u_t = -\varepsilon u u_x - \mu u_{xxx}$, luego si se deriva (4.1) respecto del tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} u_{tt} &= (-\varepsilon u u_x - \mu u_{xxx})_t \\ &= -\varepsilon u_t u_x - \varepsilon u (u_x)_t - \mu (u_{xxx})_t \end{aligned} \quad (4.5)$$

Por lo cual considerando la función u en un paso del tiempo

$$\begin{aligned} u_{tt}^n &= -\varepsilon u_t^n u_x^n - \varepsilon u^n (u_x)_t^n - \mu (u_{xxx})_t^n \\ &= -\varepsilon u_t^n u_x^n - \varepsilon u^n (u_t^n)_x - \mu (u_t^n)_{xxx} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$= -\varepsilon \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) u_x^n - \varepsilon u^n \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_x - \mu \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_{xxx} \quad (4.7)$$

al reemplazar u_t^n de (4.1) y u_{tt}^n de (4.6) en (4.4) se tiene

$$\begin{aligned} -\varepsilon u^n u_x^n - \mu u_{xxx}^n &= \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \left[-\varepsilon \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) u_x^n \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon u^n \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_x - \mu \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_{xxx} \right] \end{aligned}$$

al simplificar se tiene

$$\begin{aligned} -\varepsilon u^n u_x^n - \mu u_{xxx}^n &= \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) u_x^n + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} u^n \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_x \\ &\quad + \frac{\mu \Delta t}{2} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_{xxx} \end{aligned}$$

ahora, realizando las derivadas y reordenando

$$\begin{aligned} &\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \left[\frac{u^{n+1}}{\Delta t} u_x^n - u_x^n \frac{u^n}{\Delta t} + u^n \frac{u_x^{n+1}}{\Delta t} - u^n \frac{u_x^n}{\Delta t} \right] + \varepsilon u^n u_x^n \\ &= -\mu u_{xxx}^n - \frac{\mu \Delta t}{2} \left[\frac{u_{xxx}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{u_{xxx}^n}{\Delta t} \right] \end{aligned}$$

multiplicando por Δt la ecuación

$$\begin{aligned} & u^{n+1} - u^n + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} [u^{n+1} u_x^n - 2u_x^n u^n + u^n u_x^{n+1}] + \varepsilon \Delta t u^n u_x^n \\ &= -\mu \Delta t u_{xxx}^n - \frac{\mu \Delta t}{2} [u_{xxx}^{n+1} - u_{xxx}^n] \end{aligned}$$

la cual al reagrupar se obtiene

$$u^{n+1} - u^n + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} [u^{n+1} u_x^n - 2u_x^n u^n + u^n u_x^{n+1} + 2u^n u_x^n] = -\frac{\mu \Delta t}{2} [u_{xxx}^{n+1} - u_{xxx}^n + 2u_{xxx}^n]$$

al simplificar y reordenar los términos para u^{n+1} y u^n

$$u^{n+1} + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} [u^{n+1} u_x^n + u^n u_x^{n+1}] + \frac{\mu \Delta t}{2} u_{xxx}^{n+1} = u^n - \frac{\mu \Delta t}{2} u_{xxx}^n \quad (4.8)$$

Por lo tanto, la ecuación (4.1) ha sido discretizada únicamente en el tiempo, por tanto se tiene que la ecuación (4.8) depende únicamente de espacio; Ahora se aplica el método de Petrov - Galerkin, a la forma débil de la ecuación diferencial (4.8), con función de peso $w(x)$, para discretizar el espacio.

Inicialmente para aplicar el método, se realiza una partición para el dominio de definición Ω , con tamaño del subintervalo uniforme h , $N + 1$ puntos nodales x_m tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_m < x_{m+1} < \dots < x_{N-1} < x_N = b$, y $\Omega_m = [x_m, x_{m+1}]$ y $h = x_{m+1} - x_m$. Al plantear el problema variacional para el elemento de muestra Ω_m , se multiplica la ecuación discretizada (4.8) por la función de peso $w(x)$,

$$u^{n+1} w + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} [u^{n+1} u_x^n + u^n u_x^{n+1}] w + \frac{\mu \Delta t}{2} u_{xxx}^{n+1} w = u^n w - \frac{\mu \Delta t}{2} u_{xxx}^n w \quad (4.9)$$

y luego integrando respecto de x sobre el intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b \left(u^{n+1} w + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} u^{n+1} u_x^n w + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} u^n u_x^{n+1} w + \frac{\mu \Delta t}{2} u_{xxx}^{n+1} w \right) dx = \int_a^b \left(u^n w - \frac{\mu \Delta t}{2} u_{xxx}^n w \right) dx$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b u^{n+1} w dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_a^b u^{n+1} u_x^n w dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_a^b u^n u_x^{n+1} w dx + \frac{\mu \Delta t}{2} \int_a^b u_{xxx}^{n+1} w dx \\ &= \int_a^b u^n w dx - \frac{\mu \Delta t}{2} \int_a^b u_{xxx}^n w dx \end{aligned}$$

o con notación acorde a la partición

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_N} u^{n+1} w dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} u^{n+1} u_x^n w dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} u^n u_x^{n+1} w dx + \frac{\mu \Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} u_{xxx}^{n+1} w dx \\ &= \int_{x_0}^{x_N} u^n w dx - \frac{\mu \Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} u_{xxx}^n w dx \end{aligned}$$

aplicando integración por partes en los términos en los cuales se tienen derivadas de tercer orden, tomando $t = w$ y $dv = u_{xxx}^{n+1} dx$ en la primera y, $t = w$ y $dv = u_{xxx}^n dx$ en la segunda, se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_N} u^{n+1} w dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} u^{n+1} u_x^n w dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} u^n u_x^{n+1} w dx + \frac{\mu \Delta t}{2} \left[w u_{xx}^{n+1} \Big|_{x_0}^{x_N} \right. \\ & \left. - \int_{x_0}^{x_N} u_{xx}^{n+1} w_x dx \right] = \int_{x_0}^{x_N} u^n w dx - \frac{\mu \Delta t}{2} \left[w u_{xx}^n \Big|_{x_0}^{x_N} - \int_{x_0}^{x_N} u_{xx}^n w_x dx \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

al evaluar en los límites de integración y teniendo en cuenta que las condiciones de frontera son cero, la ecuación (4.10) toma la forma

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_N} u^{n+1} w dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} u^{n+1} u_x^n w dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} u^n u_x^{n+1} w dx - \frac{\mu \Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} u_{xx}^{n+1} w_x dx \\ & = \int_{x_0}^{x_N} u^n w dx + \frac{\mu \Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} u_{xx}^n w_x dx \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ahora, considerando como funciones de peso (funciones base) a los polinomios de Legendre $P_m(x)$, que por simplicidad en la escritura se escribirán solamente como P_m , la ecuación (4.11) para el elemento m , $[x_m, x_{m+1}]$,

$$\begin{aligned} & \int_{x_m}^{x_{m+1}} u^{n+1} P_i dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} u^{n+1} u_x^n P_i dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} u^n u_x^{n+1} P_i dx \\ & - \frac{\mu \Delta t}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} u_{xx}^{n+1} P_i' dx = \int_{x_m}^{x_{m+1}} u^n P_i dx + \frac{\mu \Delta t}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} u_{xx}^n P_i' dx \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por otra parte, si se considera que la solución aproximada toma la forma

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t)$$

donde $\phi_m(x)$ es el B-Spline cúbico (4.20) y $\delta_m(t)$ es una función paramétrica discretizada en el tiempo, se tiene que $U'_N = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi'_m(x) \delta_m(t)$ y $U''_N = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi''_m(x) \delta_m(t)$, donde la comilla indica la derivada respecto de x .

Al reemplazar la función U y sus derivadas por su función aproximación entonces (4.12) toma la forma

$$\begin{aligned}
& \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\sum_{j=-1}^{N+1} \phi_j \delta_j^{n+1} \right) P_i dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\sum_{j=-1}^{N+1} \phi_j \delta_j^{n+1} \right) \left(\sum_{k=-1}^{N+1} \phi'_k \delta_k^n \right) P_i dx \quad (4.13) \\
& + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\sum_{k=-1}^{N+1} \phi_k \delta_k^n \right) \left(\sum_{j=-1}^{N+1} \phi'_j \delta_j^{n+1} \right) P_i dx - \frac{\mu \Delta t}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\sum_{j=-1}^{N+1} \phi_j'' \delta_j^{n+1} \right) P_i' dx \\
& = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\sum_{j=-1}^{N+1} \phi_j \delta_j^n \right) P_i dx + \frac{\mu \Delta t}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\sum_{j=-1}^{N+1} \phi_j'' \delta_j^n \right) P_i' dx
\end{aligned}$$

Como los B-Spline ϕ_j están definidos para $j = m-1, m, m+1, m+2$, la integral $\int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\sum_{j=-1}^{N+1} \phi_j \delta_j^{n+1} \right) \left(\sum_{k=-1}^{N+1} \phi'_k \delta_k^n \right) P_i dx$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}
& \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \left\{ \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \phi'_k \delta_k^n \right) \phi_{m-1} \delta_{m-1}^{n+1} + \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \phi'_k \delta_k^n \right) \phi_m \delta_m^{n+1} \right. \\
& \left. + \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \phi'_k \delta_k^n \right) \phi_{m+1} \delta_{m+1}^{n+1} + \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \phi'_k \delta_k^n \right) \phi_{m+2} \delta_{m+2}^{n+1} \right\} dx \\
& = \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j (\phi'_k \delta_k^n) \delta_j^{n+1} dx \right)
\end{aligned}$$

de igual manera la integral

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\sum_{k=-1}^{N+1} \phi_k \delta_k^n \right) \left(\sum_{j=-1}^{N+1} \phi'_j \delta_j^{n+1} \right) P_i dx = \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi'_j (\phi_k \delta_k^n) \delta_j^{n+1} dx \right)$$

Ahora reemplazando estas integrales en la ecuación (4.13), se tiene que la ecuación a

resolver en cada elemento se escribe como

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j dx \right) \delta_j^{n+1} - \mu \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i' \phi_j'' dx \right) \delta_j^{n+1} \right. \\
& \left. + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j (\phi_k' \delta_k^n) \delta_j^{n+1} dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j' (\phi_k \delta_k^n) \delta_j^{n+1} dx \right) \right] \\
& = \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j dx \right) \delta_j^n + \mu \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i' \phi_j'' dx \right) \delta_j^n
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Al tomar como factor común a δ_j^{n+1} en el lado izquierdo de la ecuación (4.14) y en el lado derecho a δ_j^n , entonces

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j dx \right) - \mu \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i' \phi_j'' dx \right) \right. \\
& \left. + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j (\phi_k' \delta_k^n) dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j' (\phi_k \delta_k^n) dx \right) \right] \delta_j^{n+1} \\
& = \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j dx \right) + \mu \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i' \phi_j'' dx \right) \right] \delta_j^n
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Analizando cada uno de los términos de la ecuación (4.15) se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j dx \right) \delta_j^{n+1} & = \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_{m-1} dx \right) \delta_{m-1}^{n+1} + \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_m dx \right) \delta_m^{n+1} + \\
& + \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_{m+1} dx \right) \delta_{m+1}^{n+1} + \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_{m+2} dx \right) \delta_{m+2}^{n+1} \\
\sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i' \phi_j'' dx \right) \delta_j^{n+1} & = \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i' \phi_{m-1}'' dx \right) \delta_{m-1}^{n+1} + \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i' \phi_m'' dx \right) \delta_m^{n+1} + \\
& + \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i' \phi_{m+1}'' dx \right) \delta_{m+1}^{n+1} + \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i' \phi_{m+1}'' dx \right) \delta_{m+2}^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j (\phi_k \delta_k^n) dx \right) \delta_j^{n+1} &= \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_{m-1} (\phi_k \delta_k^n) dx \right) \delta_{m-1}^{n+1} \\ &+ \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_m (\phi_k \delta_k^n) dx \right) \delta_m^{n+1} \\ &+ \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_{m+1} (\phi_k \delta_k^n) dx \right) \delta_{m+1}^{n+1} \\ &+ \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_{m+2} (\phi_k \delta_k^n) dx \right) \delta_{m+2}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi'_j (\phi_k \delta_k^n) dx \right) \delta_j^{n+1} &= \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi'_{m-1} (\phi_k \delta_k^n) dx \right) \delta_{m-1}^{n+1} \\ &+ \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi'_m (\phi_k \delta_k^n) dx \right) \delta_m^{n+1} \\ &+ \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi'_{m+1} (\phi_k \delta_k^n) dx \right) \delta_{m+1}^{n+1} \\ &+ \left(\sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi'_{m+2} (\phi_k \delta_k^n) dx \right) \delta_{m+2}^{n+1} \end{aligned}$$

luego si $A_i^e = \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_{m-1} dx, \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_m dx, \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_{m+1} dx, \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_{m+2} dx \right)$,

$$B_i^e = \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi''_{m-1} dx, \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi''_m dx, \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi''_{m+1} dx, \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi''_{m+2} dx \right),$$

$$C_{ij}^e = \sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j (\phi'_k \delta_k^n) dx \quad \text{y} \quad D_{ij}^e = \sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi'_j (\phi_k \delta_k^n) dx$$

Se llega a que la ecuación (4.15) toma la forma matricial para el elemento e

$$\left[A^e + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} C^e + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} D^e - \frac{\mu \Delta t}{2} B^e \right] (\delta^e)^{n+1} = \left[A^e + \frac{\mu \Delta t}{2} B^e \right] (\delta^e)^n \quad (4.16)$$

con $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$.

Para facilitar los cálculos de los elementos de las matrices, es posible reescribir las matrices C y D , esto es

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j (\phi'_k \delta_k^n) dx = \sum_{k=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j \phi'_k dx \right) \delta_k^n \\ &= \sum_{k=m-1}^{m+2} L_{ijk} \delta_k^n \end{aligned}$$

donde $L_{ijk} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi_j \phi'_k dx$ y

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \sum_{k=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi'_j (\phi_k \delta_k^n) dx = \sum_{k=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi'_j \phi_k dx \right) \delta_k^n \\ &= \sum_{k=m-1}^{m+2} N_{ijk} \delta_k^n \end{aligned}$$

donde $N_{ijk} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_i \phi'_j \phi_k dx$.

Las matrices A^e , B^e , L^e y N^e son matrices independientes de los parámetros δ , esto es que solo dependen de las funciones base y de las funciones de forma, razón por la cual es posible determinarlas mediante las integrales ya definidas anteriormente.

Para determinar la solución final de la ecuación se suman los aportes de cada uno de los elementos, llegando al sistema matricial de $(N+3) \times (N+3)$

$$\left[A + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} C(\delta) + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} D(\delta) - \frac{\mu \Delta t}{2} B \right] \underset{\sim}{\delta}^{n+1} = \left[A + \frac{\mu \Delta t}{2} B \right] \underset{\sim}{\delta}^n \quad (4.17)$$

con $\underset{\sim}{\delta} = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1})^T$ como incógnitas del sistema.

Para determinar las incógnitas del sistema (4.17), es necesario tener en cuenta las condiciones de frontera y las condiciones iniciales del problema.

Como la solución aproximada tiene la forma $U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t)$, y los B-spline se anulan fuera del intervalo $[x_{m-2}, x_{m+2}]$, entonces los valores de la función aproximada en el nodo $x = x_m$ queda en términos de δ , así

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ hU'_m &= 3(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}) \\ h^2U''_m &= 6(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

con $h = x_m - x_{m-1}$, y las comillas indican la primera y segunda derivada de U_N respecto de x .

Por tanto al evaluar en $x_0 = a$ y $x_N = b$ se tiene que $m = 0$ y $m = N$ respectivamente, luego

$$\begin{aligned} U_0(a, t) &= \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 = 0 \\ U''_0(a, t) &= 6(\delta_{-1} - 2\delta_0 + \delta_1) = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

y

$$\begin{aligned} U_N(a, t) &= \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} = 0 \\ U_N''(a, t) &= 6(\delta_{N-1} - 2\delta_N + \delta_{N+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Al resolver este sistema para $\delta_{-1}, \delta_0, \delta_N$, y δ_{N+1} , se llega a que son iguales a cero, es decir, $\delta_{-1} = \delta_0 = \delta_N = \delta_{N+1} = 0$. Haciendo que el sistema matricial de ecuaciones sea ahora de tamaño $(N-1) \times (N-1)$.

Por otro lado, la condición inicial permite obtener los valores $\tilde{\delta}^{n+1}$ que describen la evolución en el tiempo a partir del vector inicial $\tilde{\delta}^0$. Con dicho vector se resuelve el sistema matricial de ecuaciones (4.17) con incógnitas $\tilde{\delta}^{n+1}$.

Como la solución aproximada tiene la forma $U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t)$, entonces si $t = 0$ se tiene que $U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0$, en donde la $U_N(x, 0) = f_N(0)$ debe cumplir con las siguientes dos condiciones:

- Debe ser igual a la condición inicial $u(x, 0)$ en los nodos x_i , $i = 0, \dots, N$, generando N condiciones y
- La segunda derivada de la condición aproximada U'' debe ser igual a la segunda derivada de la condición inicial en los límites del intervalo considerado.

Esto significa que se debe resolver el sistema de ecuaciones ,

$$\begin{aligned} U_N''(x_0, 0) &= 0 \\ U_N(x_m, 0) &= u(x_m, 0) \text{ para } 0 \leq m \leq N \\ U_N''(x_N, 0) &= 0 \end{aligned}$$

con incógnitas $\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0$. Así, usando (4.18), se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} U_N''(x_0, 0) &= 6\delta_{-1} - 12\delta_0 + 6\delta_1 = 0 \\ U_N(x_0, 0) &= \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 = u(x_0, 0) \\ U_N(x_1, 0) &= \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 = u(x_1, 0) \\ U_N(x_2, 0) &= \delta_1 + 4\delta_2 + \delta_3 = u(x_2, 0) \\ &\vdots \\ U_N(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} = u(x_N, 0) \\ U_N''(x_N, 0) &= 6\delta_{N-1} - 12\delta_N + 6\delta_{N+1} = 0 \end{aligned}$$

el cual se puede escribir en forma matricial $A\tilde{\delta}^0 = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\delta}^0 = (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0)^T \text{ y } B = (0, u(x_0, 0), u(x_1, 0), \dots, u(x_N, 0), 0).$$

4.3. Cálculos y simulación

Para mostrar la aplicación del método se han considerado dos problemas de valores iniciales, el primer caso considera la solución exacta de la ecuación con solución de onda solitaria "soliton" al considerar como condición inicial a la función $u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(Ax + D)$. En el segundo caso se considera como condición inicial a la condición inicial de Maxwellian $u(x, 0) = e^{-x^2}$, [5], [12], [41].

El análisis del error presentado en el método se realizará mediante las normas L_2 y L_∞ definidas por [29]

$$L_2 = \|u - U^m\|_2 = \sqrt{h \sum_j^N |u_j - U_j^m|^2}$$

y

$$L_\infty = \|u - U^m\|_\infty = \max_j |u_j - U_j^m|$$

Ejemplo 4.1 *Considérese como constantes $\varepsilon = 1$, $\mu = 4,84 \times 10^{-4}$, sobre el intervalo $[a, b] = [-1, 1]$ y el tiempo en $t \in [0, 3]$, con $\Delta t = 0,05$. Así el problema a resolver es*

$$u_t + uu_x + 4,84 \times 10^{-4} u_{xxx} = 0 \text{ con } -1 \leq x \leq 1$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{cases} u(-1, t) = u(1, t) = 0 \\ u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0 \\ u_{xx}(-1, t) = u_{xx}(1, t) = 0 \end{cases}$$

y condición inicial

$$u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(Ax + D)$$

$$\text{con } A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu}} \text{ y } D = -6.$$

La solución exacta para este problema en $t = 0$ se muestra en la Figura (4.1)

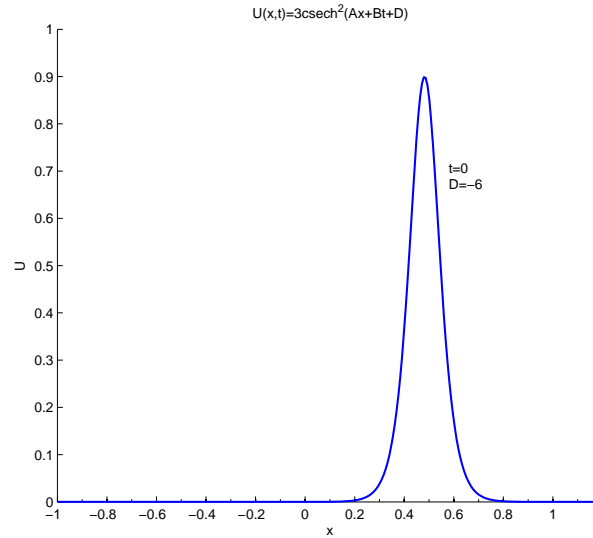


Figura 4.1: Onda solitaria: solución exacta con $t = 0$

Al aplicar el método se considera, inicialmente, la partición P del intervalo $[-1, 1]$, con 4 elementos y 5 nodos por tanto $N = 4$. Así: $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, con $h = \frac{1}{2} = x_m - x_{m-1}$, para $m = 0, \dots, 4$.

Obteniendo el sistema matricial

$$[A + 0,0025C(\delta^n) + 0,0025D(\delta^n) - 1.21 \times 10^{-6}B] \tilde{\delta}^{n+1} = [A + 1.21 \times 10^{-6}B] \tilde{\delta}^n \quad (4.21)$$

La siguiente tabla muestra los elementos definidos junto con los nodos de conectividad, lo que indica que al realizar el ensamble del sistema los elementos ubicados en las posiciones de los nodos de conectividad se suman.

Núm	Elemento	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4
1	$[x_0, x_1] = [-1, -\frac{1}{2}]$	-1	0	1	2
2	$[x_1, x_2] = [-\frac{1}{2}, 0]$	0	1	2	3
3	$[x_2, x_3] = [0, \frac{1}{2}]$	1	2	3	4
4	$[x_3, x_4] = [\frac{1}{2}, 1]$	2	3	4	5

Debido a que los polinomios de Legendre cambian de acuerdo al elemento considerado, las matrices A, B, C y D cambian en cada uno de los elementos. Para el caso considerado

la matriz A , para el primer elemento es

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \int P_1 \phi_{-1} & \int P_1 \phi_0 dx & \int P_1 \phi_1 dx & \int P_1 \phi_2 dx & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \int P_2 \phi_{-1} dx & \int P_2 \phi_0 dx & \int P_2 \phi_1 dx & \int P_2 \phi_2 dx & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \int P_3 \phi_{-1} dx & \int P_3 \phi_0 dx & \int P_3 \phi_1 dx & \int P_3 \phi_2 dx & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \int P_4 \phi_{-1} dx & \int P_4 \phi_0 dx & \int P_4 \phi_1 dx & \int P_4 \phi_2 dx & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el segundo

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int P_2 \phi_0 dx & \int P_2 \phi_1 dx & \int P_2 \phi_2 dx & \int P_2 \phi_3 dx & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int P_3 \phi_0 dx & \int P_3 \phi_1 dx & \int P_3 \phi_2 dx & \int P_3 \phi_3 dx & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int P_4 \phi_0 dx & \int P_4 \phi_1 dx & \int P_4 \phi_2 dx & \int P_4 \phi_3 dx & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int P_5 \phi_0 dx & \int P_5 \phi_1 dx & \int P_5 \phi_2 dx & \int P_5 \phi_3 dx & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y así de manera sucesiva para los otros dos elementos. Al hacer el ensamble de los cuatro elementos y teniendo en cuenta la conectividad de los nodos se obtiene finalmente como matriz A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & A_{13}^{(1)} & A_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21}^{(1)} & \sum_{e=1}^2 A_{22}^{(e)} & \sum_{e=1}^2 A_{23}^{(e)} & \sum_{e=1}^2 A_{24}^{(e)} & A_{25}^{(2)} & 0 & 0 \\ A_{31}^{(1)} & \sum_{e=1}^2 A_{32}^{(e)} & \sum_{e=1}^3 A_{33}^{(e)} & \sum_{e=1}^3 A_{34}^{(e)} & \sum_{e=2}^3 A_{35}^{(e)} & A_{36}^{(3)} & 0 \\ A_{41}^{(1)} & \sum_{e=1}^2 A_{42}^{(e)} & \sum_{e=1}^3 A_{43}^{(e)} & \sum_{e=1}^4 A_{44}^{(e)} & \sum_{e=2}^4 A_{45}^{(e)} & \sum_{e=3}^4 A_{46}^{(e)} & A_{47}^{(4)} \\ 0 & A_{52}^{(2)} & \sum_{e=2}^3 A_{53}^{(e)} & \sum_{e=2}^4 A_{54}^{(e)} & \sum_{e=2}^4 A_{55}^{(e)} & \sum_{e=3}^4 A_{56}^{(e)} & A_{57}^{(4)} \\ 0 & 0 & A_{63}^{(3)} & \sum_{e=3}^4 A_{64}^{(e)} & \sum_{e=3}^4 A_{65}^{(e)} & \sum_{e=3}^4 A_{66}^{(e)} & A_{67}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & A_{74}^{(4)} & A_{75}^{(4)} & A_{76}^{(4)} & A_{77}^{(4)} \end{pmatrix}$$

por tanto al realizar los cálculos de las integrales se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} -0,1125 & -1.1 & -0,9625 & -0,075 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0906 & 0,6375 & -0,1062 & -0,5624 & -0,0594 & 0 & 0 \\ -0,0645 & -0,1991 & 0,5918 & 0,0411 & -0,4572 & -0,0527 & 0 \\ 0,0396 & -0,0332 & -0,2231 & 0,4336 & -0,2231 & -0,0332 & 0,0396 \\ 0 & -0,0293 & -0,3281 & -0,0161 & 0,0989 & -0,0791 & 0,0198 \\ 0 & 0 & -0,0275 & -0,0652 & 0,1259 & -0,0402 & 0,0069 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0296 & 0,1314 & -0,0027 & 0,0005 \end{pmatrix}$$

De manera similar se obtienen las matrices B , C y D , teniendo en cuenta que las matrices C y D dependen de $\delta^n(t)$, luego

$$B = \begin{pmatrix} 6,0 & 6,0 & -6,0 & 6,0 & 0 & 0 & 0 \\ -15,0 & 12,0 & 18,0 & -12,0 & -3,0 & 0 & 0 \\ 22.875 & -37.5 & -7.875 & 33.375 & -7.5 & -3.375 & 0 \\ -26.813 & 59.25 & -38.063 & 0 & 38.063 & -59.25 & 26.813 \\ 0 & -3.5156 & 18.375 & -34.547 & 54.703 & -61.688 & 26.672 \\ 0 & 0 & 7.9922 & -16.969 & 34.453 & -49.969 & 24.492 \\ 0 & 0 & 0 & -4.0854 & 30.901 & -49.545 & 22.73 \end{pmatrix}$$

Por simplicidad en la muestra de los resultados, para el caso de C y D se presentan los elementos de las matrices $C^{(1)}$ y $D^{(1)}$ correspondientes al primer elemento $[x_0, x_1] = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, así:

$$\begin{aligned} C_{11}^{(1)} &= 0,4643\delta_{-1} + 0,3821\delta_0 - 0,8071\delta_1 - 0,0393\delta_2 \\ C_{12}^{(1)} &= 3,1571\delta_{-1} + 5,6286\delta_0 - 7,5286\delta_1 - 1,2571\delta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{13}^{(1)} &= 1,5929\delta_{-1} + 6,1964\delta_0 - 5,6214\delta_1 - 2,1679\delta_2 \\
C_{14}^{(1)} &= 0,0357\delta_{-1} + 0,5429\delta_0 - 0,2929\delta_1 - 0,2857\delta_2 \\
C_{21}^{(1)} &= -0,3996\delta_{-1} - 0,2665\delta_0 + 0,6442\delta_1 + 0,0219\delta_2 \\
C_{22}^{(1)} &= -2,4772\delta_{-1} - 2,7415\delta_0 + 4,8897\delta_1 + 0,3290\delta_2 \\
C_{23}^{(1)} &= -1,0844\delta_{-1} - 1,8924\delta_0 + 2,7254\delta_1 + 0,2513\delta_2 \\
C_{24}^{(1)} &= -0,0138\delta_{-1} - 0,0496\delta_0 + 0,0656\delta_1 - 0,0022\delta_2 \\
C_{31}^{(1)} &= 0,3173\delta_{-1} + 0,1355\delta_0 - 0,4489\delta_1 - 0,0039\delta_2 \\
C_{32}^{(1)} &= 1,6817\delta_{-1} + 0,0616\delta_0 - 2,1469\delta_1 + 0,4036\delta_2 \\
C_{33}^{(1)} &= 0,5382\delta_{-1} - 1,5904\delta_0 - 0,0489\delta_1 + 1,1011\delta_2 \\
C_{34}^{(1)} &= -0,0060\delta_{-1} - 0,2942\delta_0 + 0,1134\delta_1 + 0,1868\delta_2 \\
C_{41}^{(1)} &= -0,2309\delta_{-1} - 0,0217\delta_0 + 0,2615\delta_1 - 0,0089\delta_2 \\
C_{42}^{(1)} &= -0,9458\delta_{-1} + 1,4827\delta_0 + 0,1005\delta_1 - 0,6374\delta_2 \\
C_{43}^{(1)} &= -0,1051\delta_{-1} + 2,8476\delta_0 - 1,4601\delta_1 - 1,2824\delta_2 \\
C_{44}^{(1)} &= 0,0162\delta_{-1} + 0,3320\delta_0 - 0,1675\delta_1 - 0,1806\delta_2
\end{aligned}$$

y para D

$$\begin{aligned}
D_{11}^{(1)} &= 0,4643\delta_{-1} + 3,1571\delta_0 + 1,5929\delta_1 + 0,0357\delta_2 \\
D_{12}^{(1)} &= 0,3821\delta_{-1} + 5,6286\delta_0 + 6,1964\delta_1 + 0,5429\delta_2 \\
D_{13}^{(1)} &= -0,8071\delta_{-1} - 7,5286\delta_0 - 5,6214\delta_1 - 0,2929\delta_2 \\
D_{14}^{(1)} &= -0,0393\delta_{-1} - 1,2571\delta_0 - 2,1679\delta_1 - 0,2857\delta_2 \\
D_{21}^{(1)} &= -0,3996\delta_{-1} - 2,4772\delta_0 - 1,0844\delta_1 - 0,0138\delta_2 \\
D_{22}^{(1)} &= -0,2665\delta_{-1} - 2,7415\delta_0 - 1,8924\delta_1 - 0,0496\delta_2 \\
D_{23}^{(1)} &= 0,6442\delta_{-1} + 4,8897\delta_0 + 2,7254\delta_1 + 0,0656\delta_2 \\
D_{24}^{(1)} &= 0,0219\delta_{-1} + 0,3290\delta_0 + 0,2513\delta_1 - 0,0022\delta_2 \\
D_{31}^{(1)} &= 0,3173\delta_{-1} + 1,6817\delta_0 + 0,5382\delta_1 - 0,0060\delta_2 \\
D_{32}^{(1)} &= 0,1355\delta_{-1} + 0,0616\delta_0 - 1,5904\delta_1 - 0,2942\delta_2 \\
D_{33}^{(1)} &= -0,4489\delta_{-1} - 2,1469\delta_0 - 0,0489\delta_1 + 0,1134\delta_2 \\
D_{34}^{(1)} &= -0,0039\delta_{-1} + 0,4036\delta_0 + 1,1011\delta_1 + 0,1868\delta_2 \\
D_{41}^{(1)} &= -0,2309\delta_{-1} - 0,9458\delta_0 - 0,1051\delta_1 + 0,0162\delta_2 \\
D_{42}^{(1)} &= -0,0217\delta_{-1} + 1,4827\delta_0 + 2,8476\delta_1 + 0,3320\delta_2 \\
D_{43}^{(1)} &= 0,2615\delta_{-1} + 0,1005\delta_0 - 1,4601\delta_1 - 0,1675\delta_2 \\
D_{44}^{(1)} &= -0,0089\delta_{-1} - 0,6374\delta_0 - 1,2824\delta_1 - 0,1806\delta_2
\end{aligned}$$

El sistema matricial de ecuaciones (4.21) es de $(N + 3) \times (N + 3) = 7 \times 7$, que al aplicar las condiciones de frontera iguales a cero, se reduce a un sistema de 3×3 . Resolviendo

el sistema para la condición inicial dada se obtiene como solución aproximada la función cuya gráfica se muestra en la Figura 4.2

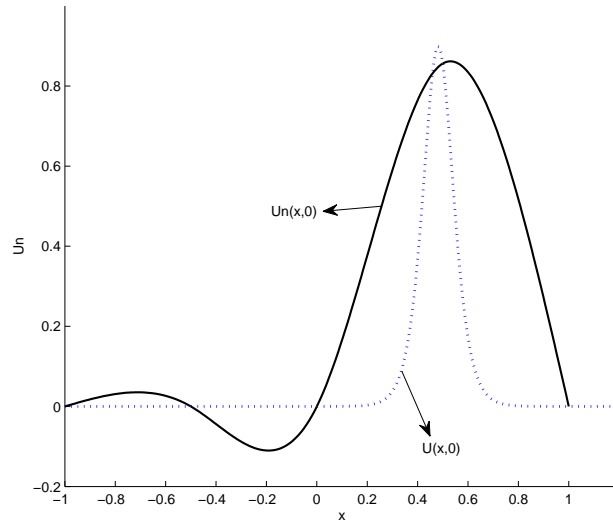


Figura 4.2: Solución aproximada U_N para $N = 4$ elementos

Al resolver el sistema y determinar la solución para diferentes valores de $t \in [0, 3]$, se obtienen las funciones aproximadas, ver la Figura 4.3,

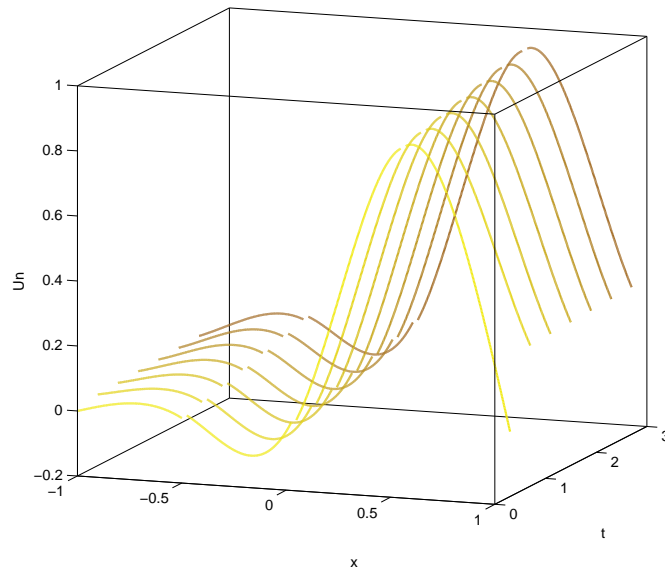


Figura 4.3: Onda solitaria propagada para tiempos desde 0 hasta 3 con $\Delta t = 0,5$

En la tabla siguiente se consigan los valores obtenidos del error y de las leyes de conservación C_1 , C_2 y C_3

t	C_1	C_2	C_3	L_2	L_∞
0	0,2790507037	0,1918476342	0,1395822179	7,4214880772	0,8617713752
0,5	0,3130413381	0,2180020404	0,1609575029	7,8326312864	0,8785614024
1,0	0,3182434652	0,2254276556	0,1693771541	7,9639922904	0,8949470742
1,5	0,3236491959	0,2332750113	0,1784309723	8,1006588894	0,9119888833
2,0	0,3292703014	0,2415767718	0,1881805835	8,2429405679	0,9297252992
2,5	0,3351195443	0,2503689362	0,1986951050	8,3911728372	0,9481980723
3,0	0,3412107806	0,2596912527	0,2100522350	8,5457198949	0,9674525721

Para el caso en que se toman $N = 4$ elementos se observa que el error obtenido es grande, razón por la cual se aplica el método aumentando el número de elementos, las Figuras 4.4 y 4.5 muestran el resultado obtenido al aumentar el número de elementos a 8, para las cuales el error disminuye de forma importante, tal como se puede verificar en la tabla que presenta dichos resultados.

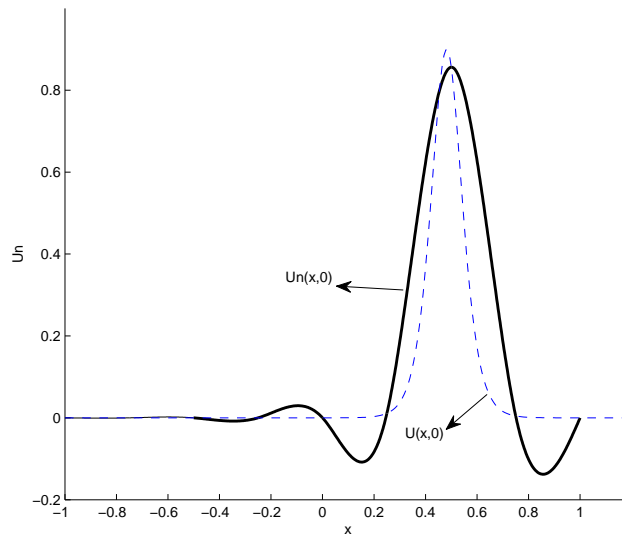


Figura 4.4: Comparación de onda solitaria exacta y aproximada con $t = 0$ y $N = 8$

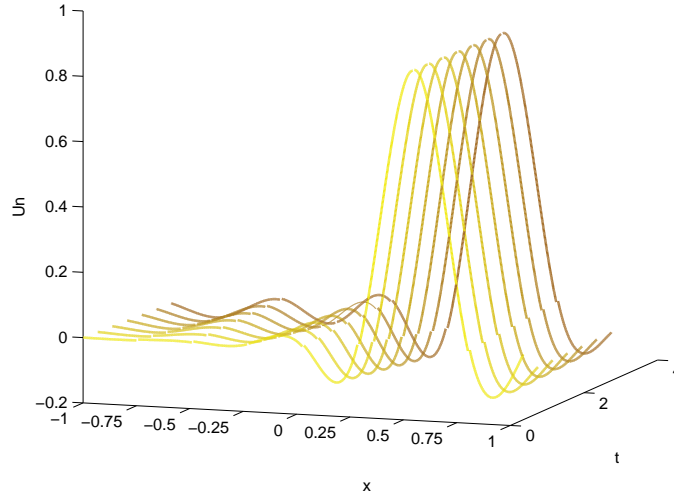


Figura 4.5: Onda solitaria propagada para tiempos desde 0 hasta 3 con $N = 8$

tal como se puede verificar en la tabla que presenta dichos resultados.

t	C_1	$C_2 \times 10^{-3}$	C_3	L_2	L_∞
0	-0,0222320757	0,0024261796	-0,8985275545	2,1657157956	1,0026155610
0,5	-0,0252988293	0,0028792835	-0,8218905964	2,2339871903	1,0193231143
1,0	-0,0245537694	0,0027337078	-0,7975160668	2,2191531640	1,0170361633
1,5	-0,0237569652	0,0025832788	-0,7726560887	2,2034955374	1,0145719583
2,0	-0,0229078251	0,0024289817	-0,7475560055	2,1870598292	1,0119285597
2,5	-0,0220058184	0,0022719014	-0,7224634364	2,1698993999	1,0091042336
3,0	-0,0210504805	0,0021132228	-0,6976236390	2,1520760325	1,0060974664

Sin embargo, si se sigue aumentando el número de elementos sin modificar la discretización en el tiempo, aunque el error disminuye en los primeros tiempos en los últimos dos el error aumenta, y la forma de la onda se verá considerablemente afectada, presentando oscilaciones, ver la Figura 4.6,

t	L_2	L_∞
0	1,2230785828	0,9033729286
0,5	1,3162861242	0,9354242749
1,0	1,4628413419	0,9697332293
1,5	1,6642615573	1,0073704683
2,0	1,9181464844	1,0486038359
2,5	2,2215402596	1,0936847507
3,0	2,5717614142	1,1428343527

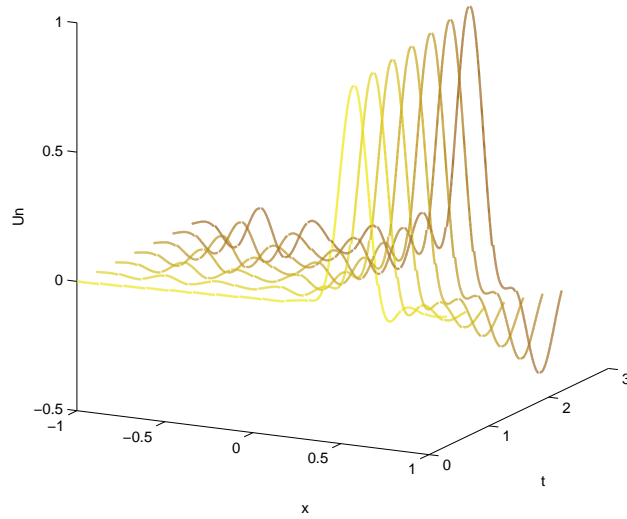


Figura 4.6: Onda solitaria propagada para tiempos desde 0 hasta 3 con $N = 16$

Al tomar $\Delta t = 0,001$, los cambios significativos se observan al tomar $N = 16$, el error obtenido es menor al anterior y las leyes de conservación disminuyen. La Figura 4.7 muestra las gráficas de la función para diferentes tiempos

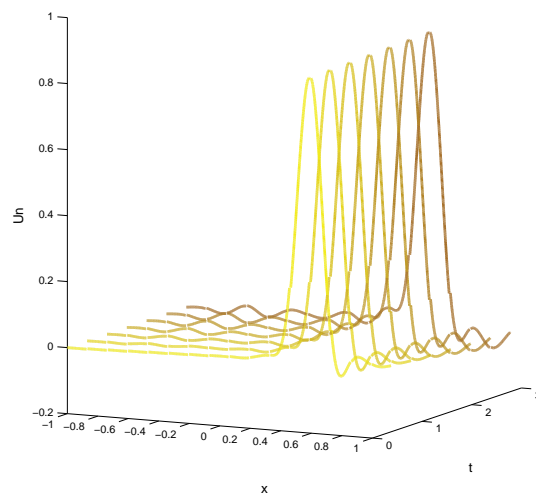


Figura 4.7: Onda solitaria con $\Delta t = 0,001$ y $N = 16$

con errores y constantes C_1 , C_2 y C_3 dadas en la tabla

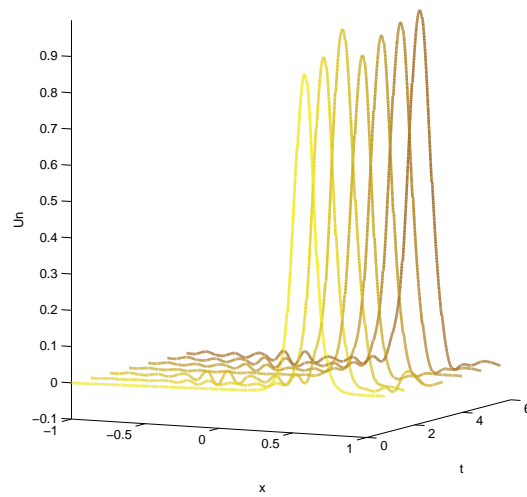
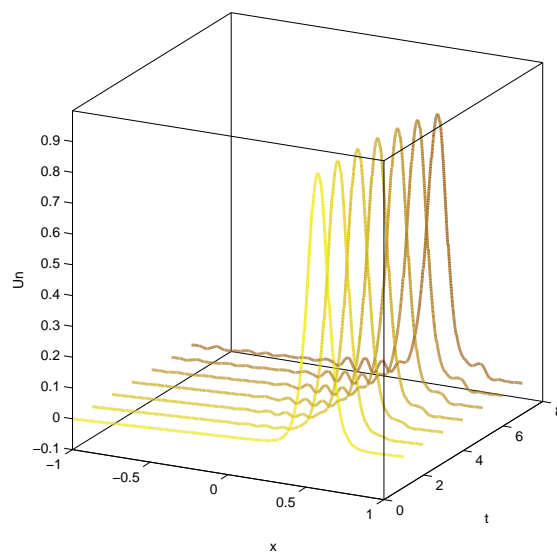
t	$C_1 \times 10^{-3}$	$C_2 \times 10^{-4}$	C_3	L_2
0	-0,0004666826	0,0021401946	-0,0218493987	1,2231461497
0,5	-0,0014980498	0,0190638528	-0,0311644029	1,2388852274
1,0	-0,0024680269	0,0525055846	-0,0710215465	1,2550851536
1,5	-0,0034564928	0,1039642448	-0,1429723677	1,2734277732
2,0	-0,0044637762	0,1744526250	-0,2540246929	1,2939435278
2,5	-0,0054902067	0,2650260468	-0,4118620586	1,3166551625
3,0	-0,0065361135	0,3767834628	-0,6248916132	1,3415780642

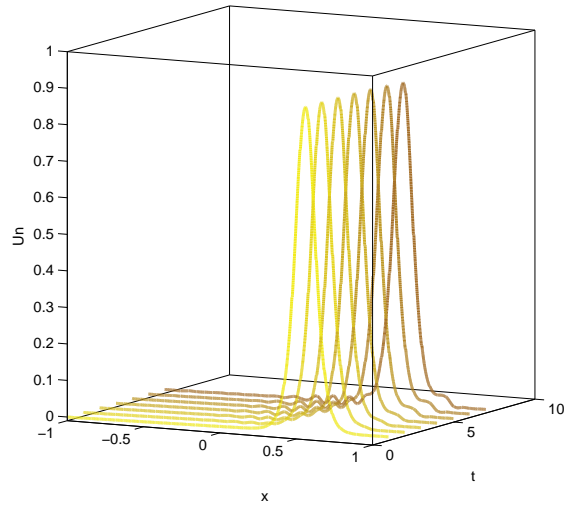
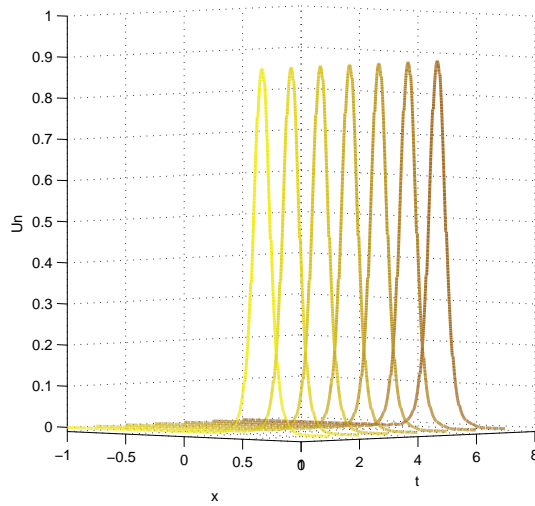
Con este valor de Δt , se observa que al aumentar el número de elementos finitos utilizados, el método proporciona una buena aproximación, ya que el error y los valores de las constantes C_1 , C_2 y C_3 son cercanos a cero, la siguiente tabla proporciona los errores obtenidos para 32 y 40 elementos

$N = 32 \quad \Delta t = 0,001$		$N = 40 \quad \Delta t = 0,001$		$N = 40 \quad \Delta t = 0,0006$	
t	L_2	t	L_2	t	L_2
0	0,8584427823	0	0,767815659	0	0,7678156526
0,5	0,8535180978	0,5	0,7678476547	0,5	0,7678360876
1,0	0,8440498841	1,0	0,7678892109	1,0	0,7678553113
1,5	0,8657493682	1,5	0,7679495545	1,5	0,7678805132
2,0	0,8577013873	2,0	0,7680326660	2,0	0,7679123552
2,5	0,8552444992	2,5	0,7681469309	2,5	0,7679515835
3,0	0,8532795390	3,0	0,7683099413	3,0	0,7679993482

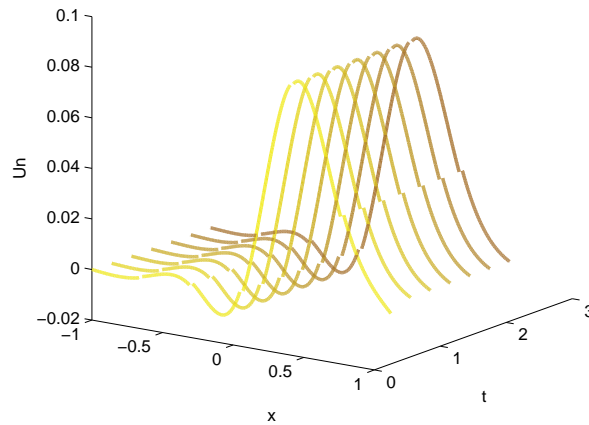
$N = 32 \quad \Delta t = 0,0001$		$N = 40 \quad \Delta t = 0,0001$	
t	L_2	t	L_2
0	0,8584427592	0	0,7678156436
0,5	0,8576406911	0,5	0,7678240327
1,0	0,8569154763	1,0	0,7678262411
1,5	0,8562459586	1,5	0,7678285665
2,0	0,8556106742	2,0	0,7678310157
2,5	0,8549917717	2,5	0,7678335949
3,0	0,8543729006	3,0	0,7678363100

Las Figuras 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11 muestran la gráfica de las ondas para varios tiempos y diversos números de elementos

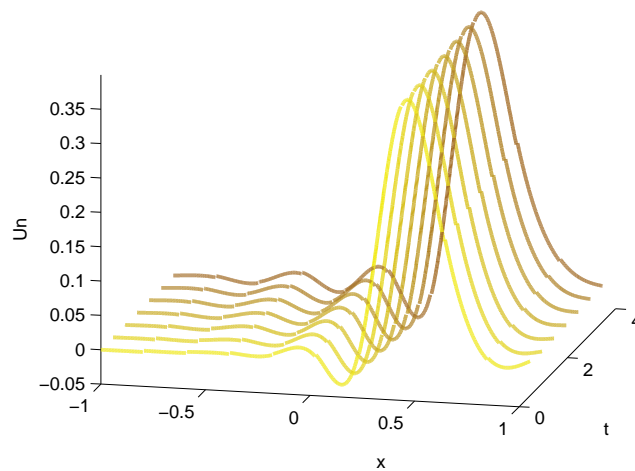
Figura 4.8: Soliton: $N = 32, \Delta t = 0,001$ Figura 4.9: Soliton: $N = 40, \Delta t = 0,001$

Figura 4.10: Soliton: $N = 40, \Delta t = 0,0006$ Figura 4.11: Soliton: $N = 40, \Delta t = 0,0001$

Es importante hacer notar que al elegir un número de elementos que no sea múltiplo de 4, la solución aproximada obtenida será de menor amplitud debido a que no se suman todos los aportes de los splines considerados en cada uno de los elementos, la Figura 4.12 muestra la solución obtenida con $N = 6$ elementos, en el elemento 5 y en el elemento 6 no se están considerando los 4 nodos necesarios para cada uno de los splines de dichos elementos

Figura 4.12: Soliton: $N = 6, \Delta t = 0,005$

de igual manera se observa lo que ocurre cuando se eligen 10 elementos, los últimos dos, 9 y 10, tendrán splines que consideran 3 y 2 nodos respectivamente, la Figura 4.13 muestra lo mencionado aquí

Figura 4.13: Soliton: $N = 10, \Delta t = 0,005$

Ejemplo 4.2 *Considérese el problema de valores en la frontera y condiciones iniciales,*

$$u_t + uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \text{ con } -1 \leq x \leq 1$$

donde $\varepsilon = 1$, y μ tomará diversos valores. Las condiciones de frontera

$$\begin{cases} u(-1, t) = u(1, t) = 0 \\ u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0 \\ u_{xx}(-1, t) = u_{xx}(1, t) = 0 \end{cases}$$

y condición inicial

$$u(x, 0) = e^{-x^2}$$

En este caso la función solución cuando $t = 0$ se muestra en la Figura 4.14

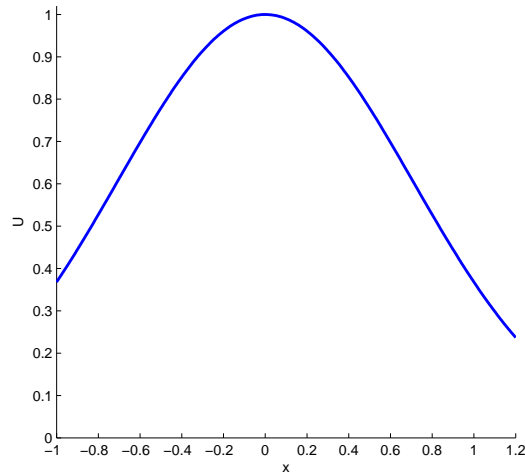


Figura 4.14: Solución exacta para $t = 0$, $u(x, 0) = e^{-x^2}$

Al igual que en el problema anterior se realizaron cálculos para diversos números de elementos y variando la constante μ .

Si se toma $\mu = 0,04$ con $N = 4$ se obtiene la Figura 4.15 para $t = 0$

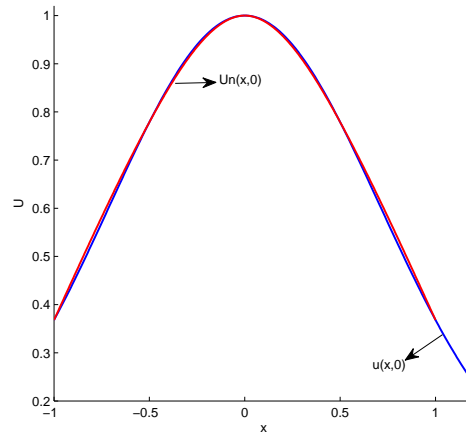


Figura 4.15: Comparación solución exacta y solución aproximada para $t = 0$

Al obtener la solución aproximada para $0 \leq t \leq 3$ con $\Delta t = 0,005$, con cuatro elementos, se tienen valores para las constantes C_1, C_2 y C_3 de acuerdo a la tabla, con error absoluto variante entre 0,4109 y 0,6857

t	C_1	C_2	C_3	L_2	L_∞
0	0,2894958286	0,1747324147	0,0687266762	3,1798668245	0,4109213419
0,5	0,1967319346	0,0913772933	-0,0286251135	4,8925081021	0,6044720775
1,0	0,1877300214	0,0832804713	-0,0284580344	5,0454706774	0,6220903646
1,5	0,1791220435	0,0758900372	-0,0280432297	5,1977090053	0,6390089814
2,0	0,1708976487	0,0691503574	-0,0274347091	5,3481465913	0,6552402576
2,5	0,1630459407	0,0630090781	-0,0266783093	5,4959350055	0,6708113353
3,0	0,1555555875	0,0574171124	-0,0258126379	5,6404157302	0,6857141801

las gráficas de las soluciones obtenidas se presentan en la Figura 4.16

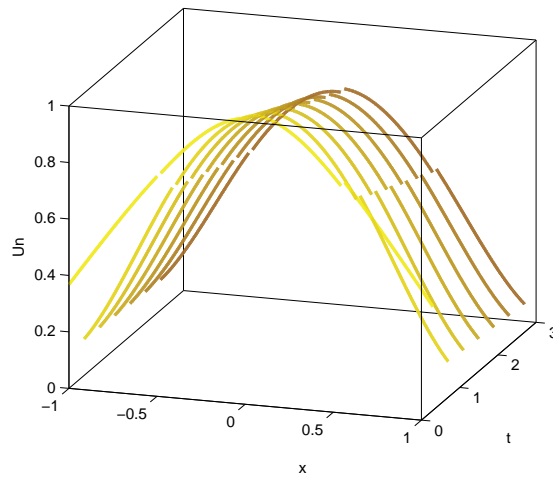


Figura 4.16: Solución aproximada $\mu = 0,04$, $N = 4$

Al aumentar el número de elementos se observan oscilaciones a medida que se aumenta el tiempo, ver Figura 4.17,

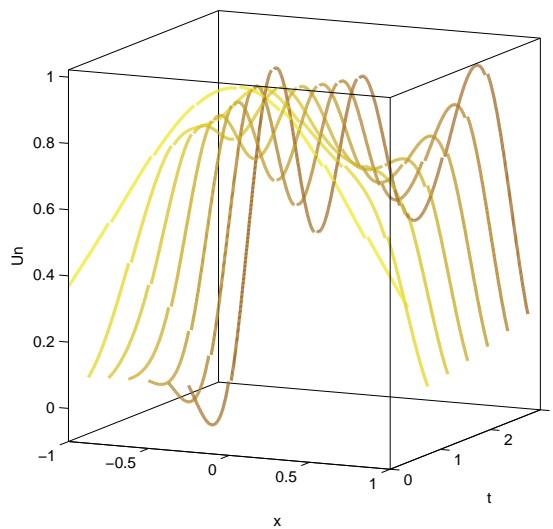


Figura 4.17: Solución aproximada $\mu = 0,04$, $N = 4$

Realizando cambios a μ se obtienen los siguientes resultados para las constantes C_1 ,

C_2 y C_3

$$\mu = 0,01 \quad N = 4$$

t	C_1	C_2	C_3
0	0,2894	0,1747	0,0992
0,5	0,2049	0,0990	0,0327
1,0	0,2036	0,0978	0,0321
1,5	0,2024	0,0966	0,0314
2,0	0,2012	0,0954	0,0307
2,5	0,1999	0,0943	0,0299
3,0	0,1987	0,0931	0,0293

$$\mu = 0,01 \quad N = 8$$

C_1	C_2	C_3
0,1169	0,0555	0,0219
0,0750	0,0265	-0,0112
0,0772	0,0281	-0,0112
0,0795	0,0297	-0,0112
0,0818	0,0313	-0,0112
0,0841	0,0331	-0,0111
0,0866	0,0349	-0,0109

$$\mu = 0,001 \quad N = 4$$

t	C_1	C_2	C_3
0	0,2894	0,1747	0,1083
0,5	0,2074	0,1014	0,0530
1,0	0,2087	0,1027	0,0540
1,5	0,2101	0,1040	0,0550
2,0	0,2114	0,1053	0,0560
2,5	0,2128	0,1066	0,0571
3,0	0,2142	0,1080	0,0582

$$\mu = 0,001 \quad N = 8$$

C_1	C_2	C_3
0,1169	0,0555	0,0262
0,0734	0,0256	0,0079
0,0745	0,0262	0,0081
0,0753	0,0267	0,0084
0,0762	0,0274	0,0087
0,0770	0,0279	0,0089
0,0778	0,0285	0,0093

$$\mu = 0,000048 \quad N = 4$$

t	C_1	C_2	C_3
0	0,0520	0,0217	0,0090
0,5	0,0306	0,0088	0,0015
1,0	0,0319	0,0095	0,0017
1,5	0,0333	0,0104	0,0020
2,0	0,0348	0,0114	0,0024
2,5	0,0365	0,0124	0,0028
3,0	0,0382	0,0137	0,0033

Como se observa en cada caso las leyes de conservación se mantienen dentro de rangos aceptables muy cercanos para cada uno de los tiempos. Algunas de las gráficas obtenidas se presentan a continuación.

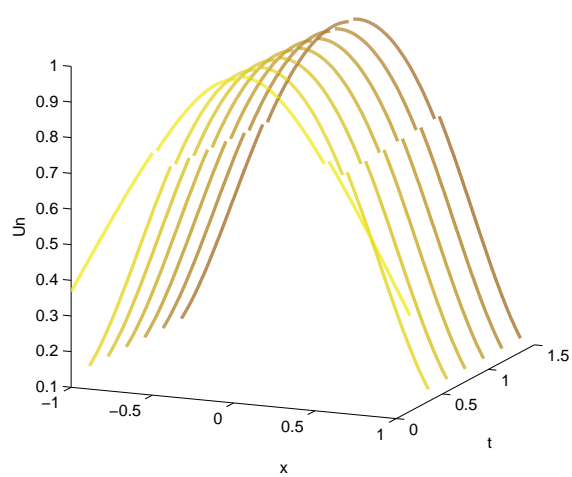


Figura 4.18: Solución U_n con $\mu = 0,001$ y $N = 4$

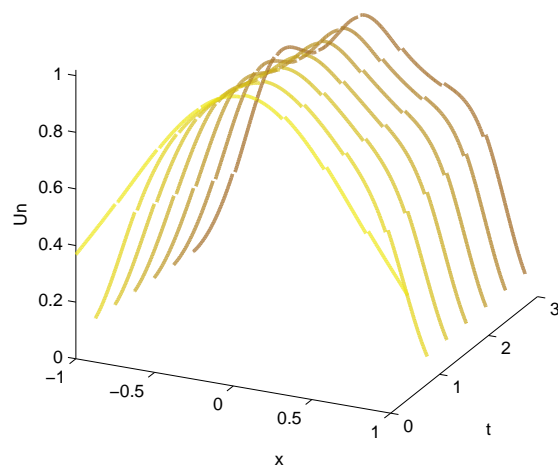


Figura 4.19: Solución U_n con $\mu = 0,001$ y $N = 8$

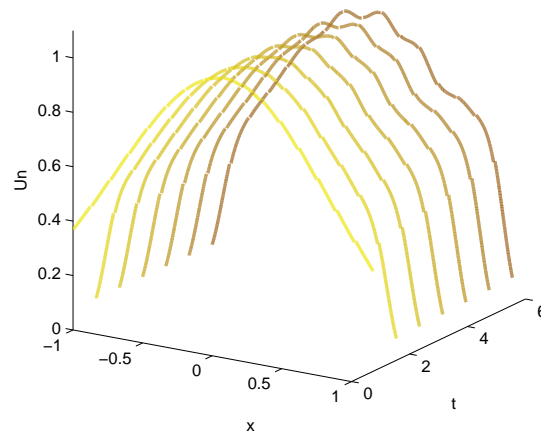


Figura 4.20: Solución U_n con $\mu = 0,000048$ y $N = 16$

Se observa que a medida que μ disminuye es posible aumentar el número de elementos para determinar la solución, sin que se presenten grandes variaciones en la forma de la onda a medida que pasa el tiempo.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

El objetivo de este trabajo es utilizar el método de elementos finitos Taylor-Petrov-Galerkin, para determinar una solución aproximada de la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) sujeta a condiciones de frontera nulas y condiciones iniciales dadas, e implementar el método a partir de un programa diseñado en Matlab. Las funciones de forma utilizadas fueron B-Splines cúbicos que son funciones polinómicas a trozos doblemente continuas y las funciones base elegidas los polinomios de Legendre; dichos polinomios son continuos y ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$, razón por la cual la solución y análisis de resultados se limitaron a este intervalo.

A partir de los resultados obtenidos se puede mencionar las siguientes conclusiones:

- Debido a que las funciones de forma son B-Splines cúbicos, el número de elementos finitos a elegir debe ser un múltiplo de cuatro, ya que para determinar un B-Spline cúbico son necesarios 4 puntos y un número de elementos menor a 4 o no múltiplo de este hace que no se sumen los aportes correspondientes a la solución debidos a cada uno de los splines, afectando directamente a la amplitud de la solución.
- A medida que se aumenta el número de elementos para calcular la solución, esta presenta oscilaciones en el progreso en el tiempo de la onda.
- Las oscilaciones que se presentan al aumentar el número de elementos se eliminan al aumentar la discretización en el tiempo, es decir disminuir Δt .
- Si se eligen valores de Δt pequeños, menores a 0,005, las aproximaciones de la solución son mejores si se aumenta el número de elementos considerados, los resultados muestran que el error disminuye.
- Las leyes de conservación para la ecuación KdV, obtenidas mediante el método se mantienen, es decir, tienden a un valor constante dentro del progreso en el tiempo de la solución.
- El método de elementos finitos Taylor-Petrov-Galerkin permite aproximar soluciones de problemas en los cuales la ecuación KdV sea el modelo matemático adecuado, manteniendo las leyes de conservación y errores pequeños.

Como recomendaciones para trabajos futuros se pueden mencionar las siguientes:

- Implementar el método a problemas con otras condiciones iniciales, como N-solitones o con interacción entre solitones, esto es $u(x, 0) = \sum_{i=1}^l u_i$, l ondas.
- Realizar el análisis de estabilidad del método de elementos finitos Taylor-Petrov-Galerkin.
- Debido a que los polinomios de Legendre son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$, el análisis se limitó a la discretización en el espacio para dicho intervalo, un trabajo interesante sería determinar el comportamiento del método para intervalos más grandes.

Bibliografía

- [1] Aksan, E. N. and Özdes, A. Numerical solution of Korteweg-de Vries equation by Galerkin B-spline finite element method. *Applied Mathematics and Computation*. vol 175. pag. 1256-1265. 2006.
- [2] Aktosun, T. and Van der Mee, C. Explicit Solutions to the Korteweg - de Vries Equation on the Half Line. Institute of Physics Publishing. *Inverse Problems*, vol 22. pág. 2165-2174. 2006.
- [3] Ambrosi, D. and Quartapelle, L. A Taylor-Galerkin Method for Simulating Nonlinear Dispersive Water Waves. *Journal of Computational Physics*. vol 146. pág. 546-569. 1998.
- [4] Brauer, K. The Korteweg-de Vries Equation: History, exact Solutions, and graphical Representation. University of Osnabrück. Alemania. 2014.
- [5] Canivar, A. and Sari, M. and Dag, Idris. A Taylor-Galerkin finite element method for the KdV equation using cubic B-splines. *ScienceDirect*. vol 405. pag. 3376-3383. 2010.
- [6] Calderon, G. and Gallo, R. Introducción al método de los elementos finitos: Un enfoque matemático. XXIV Escuela Venezolana de Matemáticas. 4 al 9 de septiembre de 2011. Venezuela.
- [7] Carey, G. F. and Shene, Y. Aproximations of the KdV equation by least squares finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. vol. 93. pág. 1-11. 1991. North-Holland.
- [8] Curry, J.M. Soliton Solutions of Integrable Systems and Hirota's Method. *The Harvard College Mathematics Review* 2.1. 2008.
- [9] Donea, J. & Huerta, A. Finite Elements Methods for Flow Problems. John Wiley & sons Ltd. 2003.

-
- [10] Drazin, P. G. and Johnson, R. S. Solitons: An Introduction. Cambridge University Press. 1989.
- [11] Duarte, J. and Fierro, E. and Villegas, J. and Castaño, J. Wavelet-Petrov-Galerkin Method for the Numerical Solution of the KdV Equation. Applied Mathematical Sciences. vol 6. Num 69. pág.
- [12] Evans, D. J. and Raslan, K. R. Solitary waves for the generalized equal width (GEW) equation. International Journal of Computer Mathematics. Vol 82, Num 4, pág. 445 - 455. 2005.
- [13] Fuentes Calles Laura. El método de los elementos finitos aplicados al cálculo de pequeñas estructuras. Pre y post procesado.
- [14] Gardner, G.A. Gardner, L.R.T. Ali, A.H.A. A finite element solution for the Korteweg-de Vries with cubic B.Splines.
- [15] Gardner, C. S. Greene, J. M. Kruskal, M. D. Miura, R. M. Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation. Physical Review Letters. Vol 19. Number 19. 1967.
- [16] Gardner, C. S. Greene, J. M. Kruskal, M. D. Miura, R. M. Korteweg-de Vries Equation and Generalizations VI. Methods for Exact Solution. Communications on pure and applied mathematics. Vol. XXVII. pag. 97-133. 1974.
- [17] Hao, Shu-Yan, Xie, Shu-Sen, Yi, Su-Cheol. The Galerkin method for KdV equation using a new basis of smooth piecewise cubic polynomial. Applied Mathematics and Computation. vol 218. pág. 8659-8671. 2012.
- [18] Höllig, K. Finite element methods with B-Splines. Society for Industrial and Applied Mathematics. Frontiers in Applied Mathematics. 2003. Philadelphia.
- [19] Isaza Jaramillo, P. Mejía Laverde, J. E. and Stallbohm, V. Problema periódico asociado a la ecuación KDV: funciones con valores en espacios de Banach, regulación parabólica y métodos de compacidad. Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín, Medellín. 1989
- [20] Khattak, A. J. and Siraj-ul-Islam. A comparative study of numerical solutions of a class of KdV equation. Applied Mathematics and Computation. Number 199. pag. 425-434. 2008.
- [21] Höllig, K. Finite Element Methods with B-Splines. Frontiers in Applied Mathematics. 2003.
- [22] Rathish Kumar, B.V. and Mehra, M. A Wavelet-Taylor Galerkin Method for Parabolic and Hiperbolic Partial Differential Equations. International Journal of Computational Methods. vol 2, Num 1. pág. 75-97. 2005.

-
- [23] Mehra, M. and Kumar, V. Fast wavelet-Taylor Galerkin method for linear and non-linear wave problems. *Applied Mathematics and Computation*. vol 189. pág. 1292-1299.
- [24] Mitchell, A. R. and Schoombie, S. W. *Finite Element Studies of Solitons. Numerical Methods in Coupled Systems*. Capítulo 16. John Wiley and Sons Ltd. 1984.
- [25] Myint-U T. and Debanath, L. *Linear Partial Differential Equations*. Birkhäuser. Cuarta Edición. Boston. 2007.
- [26] O'Neal, Peter V. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Editorial Thomson. Quinta Edición. 2004. Mejico.
- [27] Prender, P. M. *Splines and variational Methods*. John Wiley and sons. 1989. New York.
- [28] Reddy, B. D. *Introductory Functional Analysis, with applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*. Springer. Text in Applied Mathematics. 1998. New York.
- [29] Reddy, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw Hill. Third Edition. 2006.
- [30] Romero, S. Moreno, F. Rodriguez, I. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales*. Universidad de Huelva, Escuela Politécnica Superior. 2001.
- [31] Saka, B. and Dağ, İdris. Quartic B-Spline Galerkin Approach to the Numerical Solution of the KdVB Equation. *Applied Mathematics and Computation*. vol 225. pág. 746-758. 2009.
- [32] Sanz-Serna, J. M. and Christie, I. Petrov-Galerkin Methods for Nonlinear Dispersive Waves. *Journal of Computational Physics*. vol 39. pag. 94-102. 1981.
- [33] Schoombie, S. W. Spline Petrov-Galerkin Methods for the Numerical Solution of the Korteweg-deVries Equation. *IMA, Journal of Numerical Analysis*. vol 2. pag. 95-109. 1982.
- [34] Sheu, W.H. and Lee, P. H. A theoretical Taylor-Galerkin model for first-order hyperbolic equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. vol 42. pag. 439-463. 2003.
- [35] Talaat, S. Aly El-Danaf. Septic B-spline of the Korteweg-de Vries-Burger's equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. vol 13. pág. 554-566. 2008

-
- [36] Timmermans, L. J. P. Van de Vosse, F. N. and Mineev, P. D. Taylor-Galerkin-Based Spectral Methods for Convection-Diffusion Problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. vol 18. pag. 853-870. 1994.
- [37] Van Niekerk, F. D. and Van Niekerk, A. A Hermite Rational Aproximation Method for the Korteweg-De Vries Equation. *Mathl Comput. Modelling*. vol 13. Num 5. pág. 63-70. 1990.
- [38] Winther, R. A conservative Finite Element Method for the Korteweg-de Vries Equation. *Mathematics of Computation*, vol 34. Number 149. pag. 23-43. 1980.
- [39] Whitham, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. Pure & Applied Mathematics. A Wiley-Interscience series of texts, Monographs & Tracts. 1974.
- [40] Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D. Interaction of "Solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*. Vol 15. Num. 6. 1965.
- [41] Zaki, S. I. Solitary wave interactions for the modified equal width equation. *Computer Physics Communications*. Num 126. pág 219-231. 2000.
- [42] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. *El método de los elementos finitos: Formulación básica y problemas lineales*. Vol 1. Cuarta Edición. McGraw Hill. CIMNE. Barcelona. 1994.

Anexos

Programa Principal

%Programa principal Implementación del método de elementos finitos Taylor- Petrov-Galerkin

clear;clc; %Limpiar pantalla y variables en workspace

format long % Establece el formato numérico para los resultados

%%%%%%%%%%%% Ingresar datos para la ecuación y la solución (parámetros)

E=input('Epsilon = ');dt=input('dt = ');

N=input('Número de elementos = ');

miu=input('miu = ');

c=input('velocidad de la onda = ');

D1=input('D = ');

h=2/N;xm=-1:h:1;

%%%%%%%%%%%%Cálculo de delta super cero %%%%%%%%%%

disp('1- f(x,0)=3*c*sech^2(Ax+D)')

disp('2- f(x,0)=e(-x^2)')

%%%%%%%%%%%%Selección de la condición inicial %%%%%%%%%%

f1=input('Elija la función de condición inicial = ');

if f1==1

A1=0.5*sqrt(c/miu);f=[0,3*c/E*(sech(A1*xm+D1)).^2,0];

else

f=[0,exp(-xm.^2),0];

end

%%%%%%%%%%%%Planteamiento del sistema para determinar el vector inicial de la discretización en el tiempo delta super cero

A2(N+3,N+3)=0;

A2(1,1:3)=[6,-12,6];

for i=2:N+2

A2(i,i-1:i+1)=[1,4,1];

end

```

A2(N+3,N+1:N+3)=[6,-12,6];
delta=zeros(N+3,N+3);
delta(:,1)=inv(A2)*f.%; %vector columna
%Programa para calcular A y B
integralA
%Programa para armar las matrices A y B
A=Armado(A,N);B=Armado(B,N);
%Programa para calcular C y D
matrizC1;
%Armado de la matriz C y D
armadoC
%%%%%%%%%%
%% %Armar el sistema Matricial de ecuaciones %%
%%%%%%%%%%
for k=2:N+3 % para obtener l Matriz de deltas.
    for i=1:N+3
        for j=1:N+3
            Cd(i,j)=sumaC{i,j}*delta(:,k-1);
            Dd(i,j)=sumaD{i,j}*delta(:,k-1);
        end
    end
end
%% %matriz de coeficientes del sistema matricial general
AA=A-miu*dt/2*B+E*dt/2*Cd+E*dt/2*Dd;
%% % % % % Aplicación de las condiciones de frontera
AA(1,:)=zeros(1,N+3);AA(2,:)=zeros(1,N+3);
AA(N+2,:)=zeros(1,N+3);AA(N+3,:)=zeros(1,N+3);
AA(:,1)=zeros(N+3,1);AA(:,2)=zeros(N+3,1);
AA(:,N+2)=zeros(N+3,1);AA(:,N+3)=zeros(N+3,1);
AA(1,1)=1;AA(2,2)=1;AA(N+2,N+2)=1;AA(N+3,N+3)=1;
AB=(A+miu*dt/2*B);
AB(1,:)=zeros(1,N+3);AB(2,:)=zeros(1,N+3);
AB(N+2,:)=zeros(1,N+3);AB(N+3,:)=zeros(1,N+3);
AB(:,1)=zeros(N+3,1);AB(:,2)=zeros(N+3,1);
AB(:,N+2)=zeros(N+3,1);AB(:,N+3)=zeros(N+3,1);
AB(1,1)=1;AB(2,2)=1;AB(N+2,N+2)=1;AB(N+3,N+3)=1;
BB=AB*delta(:,k-1); %Vector de términos independientes
BB(1,1)=0;BB(2,1)=0;BB(N+2,1)=0;BB(N+3,1)=0;
%% % % % Solución del sistema matricial con condiciones de frontera
delta(:,k)=inv(AA)*BB;
end
%% % % % % Gráfica solución exacta % % % % % % % % % %

```

```

t=0:dt:3;
figure(1);hold on
for i=1:1 %N+3
    x=linspace(-1,1.2,300);
    B1=c/2*sqrt(c/miu);
    if f1==1
        U=3*c/E*(sech(A1*x-B1*t(i)-6)).^2;
    else
        U=exp(-x.^2-c*t(i)^2);
    end
    plot(x,U)
end
%% %% %% Cálculo de la solución aproximada %% %% %%
figure(2);hold on
tt=zeros(1,300);
for z=1:7;
    for i=2:N+1
        x=linspace(xm(i-1),xm(i),300);
        xmj=xm(i-1);
%% %% Definición del B-Spline cúbico
        fhid=[-1 3*(xmj+h) -3*(xmj+h)^2 (xmj+h)^3]/h^3;
        fhic=[3 3*h-9*(xmj+h) 9*(xmj+h)^2-6*h*(xmj+h)-3*h^2
              -3*(xmj+h)^3+3*h*(xmj+h)^2+3*h^2*(xmj+h)+h^3]/h^3;
        fhib=[-3 3*h+9*xmj -9*xmj^2-6*h*xmj+3*h^2
              3*xmj^3+3*h*xmj^2-3*h^2*xmj+h^3]/h^3;
        fhia=[1 -3*xmj 3*xmj^2 -xmj^3]/h^3;fhia2=polyder(polyder(fhia));
        U1=fhid*delta(i-1,z)+fhic*delta(i,z)+fhib*delta(i+1,z)+fhia*delta(i+2,z);
        Un=polyval(U1,x);

%% %% %% Gráfica de la solución aproximada %% %% %% %% %%
        %plot(x,Un,'Color','red','LineWidth',1.5)
        %plot3(tt,x,U,'Color',[1-0.03*z,1-0.04*z,0.1+0.02*z]);%
        plot3(x,tt,Un,'Color',[1-0.05*z,1-0.08*z,0.1+0.01*z],'LineWidth',2);
        tt=tt+0.05;

%% %% %% Cálculo de leyes de conservación %% %% %%
        C1(z)=trapz(x,Un);
        C2(z)=trapz(x,Un.^2);
        dUn=diff(Un)./diff(x);dUn=[dUn,dUn(99)];
        C3(z)=trapz(x,Un.^3-3*miu/E*dUn.^2);

%% %% %% Cálculo de error L2 y Linf %% %% %% %% %%
        e(z)=sqrt(h*sum((U-Un).^2));%Errores
        e2(z)=max(abs(U-Un));

```

```

    end
end
disp('error= ');disp(e);disp('error inf = ');disp(e2);
disp('Conservación: ');disp(C1);disp(C2);disp(C3);

```

Programas y funciones auxiliares

Función para determinar los polinomios de Legendre

```

%polinomios de legendre
function Pn=legen(n)
%clc;
%n=input('Grado del polinomio n= ');
coef=zeros(1,n+1);
for k=0:fix(n/2);
    coef(k+1)=(-1)^k*factorial(2*n-2*k)/(factorial(k)*factorial(n-k)*factorial(n-2*k))/2^n;
end
for i=1:length(coef)
    if i/2~=fix(i/2)
        coef1(i)=coef(fix(i/2+1));
    end
end
rats(coef1);
if n/2~=fix(n/2);
    coef1=[coef1,0];
end
Pn=coef1;

```

Programa para determinar las matrices $A^{(e)}$ y $B^{(e)}$ para cada elemento

```

%spline cúbico
for z=1:N;
%% %% %% %% %% %% %% Cálculos de la matriz A
for ii=1:4; %filas de A
    j=1;
    xmj=xm(z);fhid=[-1 3*(xmj+h) -3*(xmj+h)^2 (xmj+h)^3]/h^3;
    n=1;Pn=legen(ii+z-1);%disp('Leg=');disp(Pn)
    dx=conv(Pn,fhid);
    int=polyint(dx);
    %fprintf('Límites inf = %1.3f sup= %1.3f\n',xmj,xmj+h)
    A(ii,j,z)=polyval(int,xmj+h)-polyval(int,xmj);
    %para fhi(0)
    j=2;

```

```

    fhic=[3 3*h-9*(xmj+h) 9*(xmj+h)^2-6*h*(xmj+h)-3*h^2
          -3*(xmj+h)^3+3*h*(xmj+h)^2+3*h^2*(xmj+h)+h^3]/h^3;
    dx=conv(Pn,fhic);int=polyint(dx);
    A(ii,j,z)=polyval(int,xmj+h)-polyval(int,xmj);
%para fhi(1)
    j=3;
%xmj=-1;
    fhib=[-3 3*h+9*xmj -9*xmj^2-6*h*xmj+3*h^2
          3*xmj^3+3*h*xmj^2-3*h^2*xmj+h^3]/h^3;
    dx=conv(Pn,fhib);int=polyint(dx);
    A(ii,j,z)=polyval(int,xmj+h)-polyval(int,xmj);
%para fhi(2)
    j=4;
    fhia=[1 -3*xmj 3*xmj^2 -xmj^3]/h^3;
    dx=conv(Pn,fhia);int=polyint(dx);
    A(ii,j,z)=polyval(int,xmj+h)-polyval(int,xmj);
end
end
A;
%%%%%%Cálculos de la matriz B %%%
%fhi1=(xm-xm(1))^3;
%cálculo del primer elemento de B
for z=1:N
    for ii=1:4;%filas de A
        %el fhi(-1)
        j=1;
        xmj=xm(z);fhid=[-1 3*(xmj+h) -3*(xmj+h)^2 (xmj+h)^3]/h^3;
        fhid2=polyder(polyder(fhid));
        Pn=legen(ii+z-1);Pn=polyder(Pn);
        dx=conv(Pn,fhid2);int=polyint(dx);
        B(ii,j,z)=polyval(int,xmj+h)-polyval(int,xmj);
        %para fhi(0)
        j=2;
        fhic=[3 3*h-9*(xmj+h) 9*(xmj+h)^2-6*h*(xmj+h)-3*h^2
              -3*(xmj+h)^3+3*h*(xmj+h)^2+3*h^2*(xmj+h)+h^3]/h^3;
        fhic2=polyder(polyder(fhic));
        dx=conv(Pn,fhic2);int=polyint(dx);
        B(ii,j,z)=polyval(int,xmj+h)-polyval(int,xmj);
        %para fhi(1)
        j=3;
        fhib=[-3 3*h+9*xmj -9*xmj^2-6*h*xmj+3*h^2
              3*xmj^3+3*h*xmj^2-3*h^2*xmj+h^3]/h^3;
        fhib2=polyder(polyder(fhib));

```

```

dx=conv(Pn,fhib2);int=polyint(dx);
B(ii,j,z)=polyval(int,xmj+h)-polyval(int,xmj);
%para fhi(2)
j=4;
fhia=[1 -3*xmj 3*xmj^2 -xmj^3]/h^3;fhia2=polyder(polyder(fhia));
dx=conv(Pn,fhia2);int=polyint(dx);
B(ii,j,z)=polyval(int,xmj+h)-polyval(int,xmj);
end
end
B

```

Función para ensamblar las matrices A y B

```

%ordena las matrices A,B
function suma=Armado(A,N)
M(:,N+3,1)=0;M(N+3,:,1)=0;
for ii=1:N
    M(ii:ii+3,ii:ii+3,ii)=A(:,:,ii);
end
suma=M(:,:,1);
for ii=2:N
    suma=suma+M(:,:,ii);
end

```

Programa para hallar las matrices $C^{(e)}$ y $D^{(e)}$ para cada elemento

```

%%Cálculo de las matrices C y D
for z=1:N;
    xmj=xm(z);
    fhi{1}=[-1 3*(xmj+h) -3*(xmj+h)^2 (xmj+h)^3]/h^3;
    fhi{2}=[3 3*h-9*(xmj+h) 9*(xmj+h)^2-6*h*(xmj+h)-3*h^2
            -3*(xmj+h)^3+3*h*(xmj+h)^2+3*h^2*(xmj+h)+h^3]/h^3;
    fhi{3}=[-3 3*h+9*xmj -9*xmj^2-6*h*xmj+3*h^2
            3*xmj^3+3*h*xmj^2-3*h^2*xmj+h^3]/h^3;
    fhi{4}=[1 -3*xmj 3*xmj^2 -xmj^3]/h^3;
    fhi1{1}=polyder(fhi{1});
    fhi1{2}=polyder(fhi{2});
    fhi1{3}=polyder(fhi{3});
    fhi1{4}=polyder(fhi{4});
    for ii=1:N;
        for k=1:4
            for j=1:4
                Pn=legen(ii+z-1);
                dx=conv(Pn,fhi{j});dx=conv(dx,fhi1{k});int=polyint(dx);
            end
        end
    end
end

```

```

        %C(j,k,ii,z)=polyval(int,xmj+h)-polyval(int,xmj);
        C{z,ii}(j,k)=polyval(int,xmj+h)-polyval(int,xmj);
        dx=conv(Pn,fhi{k});dx=conv(dx,fhi1{j});int=polyint(dx);
        D{z,ii}(j,k)=polyval(int,xmj+h)-polyval(int,xmj);
    end
end
end
end
C;
D;

```

Programa para ensamblar las matrices C y D del sistema matricial principal

```

%ordena la matrices C y D
M{4,4}=[0];
MD{4,4}=[0];
for z=1:N
    for ii=1:4
        for k=1:4
            M{ii,k,z}=C{z,ii}(k,:);
            MD{ii,k,z}=D{z,ii}(k,:);
        end
    end
end
end

%Correr cada vector una posición en cada matriz.
for i=1:N+3 %filas
    for j=1:N+3 %columnas
        for k=1:N %# matrices
            MC1{i,j,k}=zeros(1,N+3);
            MD1{i,j,k}=zeros(1,N+3);
        end
    end
end

% Correr cada una de las matrices una fila y una columna
for k=1:N %matriz
    for i=k:N+3 %filas
        for j=k:N+3 %# columnas
            for l=k:N+3
                if i-k+1<=4 && j+1-k<=4 && l-k+1<=4
                    MC1{i,j,k}(l)=M{i-k+1,j+1-k,k}(l-k+1);
                    MD1{i,j,k}(l)=MD{i-k+1,j+1-k,k}(l-k+1);
                end
            end
        end
    end
end

```

```
                end
            end
        end
    end
    end
    %Suma
    for i=1:N+3 %filas
        for j=1:N+3 %columnas
            sumaC{i,j}=zeros(1,N+3);
            sumaD{i,j}=zeros(1,N+3);
        end
    end
    for i=1:N+3 %filas
        for j=1:N+3 %columnas
            for k=1:N %# matriz
                for l=1:N+3
                    sumaC{i,j}(l)=sumaC{i,j}(l)+MC1{i,j,k}(l);
                    sumaD{i,j}(l)=sumaD{i,j}(l)+MD1{i,j,k}(l);
                end
            end
        end
    end
end
```