

Modelos Unifactoriales de Tipos de Interés: Aplicación al Mercado Colombiano.

Por:

Diego Alexander Restrepo Tobón*
Juan Carlos Botero Ramírez[†]

Noviembre de 2007

Resumen: Este trabajo presenta una primera aproximación a la implementación de los modelos unifactoriales de tipos de interés de Hull y White (1990) y Black y Karasinski (1991) para el mercado colombiano. Se encuentra que ambos modelos replican exactamente la estructura a plazos de tasas de interés del mercado. No obstante, debido a la insistencia de instrumentos derivados de tasas de interés lo suficientemente líquidos no es posible realizar la calibración implícita de estos modelos. Este proceso se reemplazó por la estimación del parámetro de volatilidad utilizando un modelo EGARCH sobre la Tasa de Interés Interbancaria. La metodología utilizada servirá para valorar derivados de tasas de interés en el mercado colombiano, principalmente, en sus primeras fases de desarrollo.

Palabras claves: *Estructura a Plazos de Tasas de Interés, Modelos de Tipos de Interés, Calibración, Hull y White, Black y Karasinski.*
Clasificación JEL: *E43, G12, G13.*

Abstract: This work presents a first approximation for implementing the Hull and White (1990) and the Black and Karasinski (1991) One-Factor Interest Rate Models in the Colombian market. Both models fit exactly the Colombian term structure of interest rates. Nevertheless, due to the unavailability of interest rate derivatives in our market, implicit calibration was not possible. This process was replaced by the estimation of the volatility using an EGARCH model for the Interbank Interest Rate. This approach will hand out with the pricing of interest rate derivatives in the Colombian Market, mainly, in its early steps of development.

Key Words: *Interest Rate Term Structures, Interest Rate Models, Calibration, Hull y White, Black y Karasinski.*
Clasificación JEL: *E43, G12, G13.*

* Candidato a Magíster en Finanzas Universidad EAFIT. Especialista en Finanzas Universidad EAFIT. Administrador de Empresas Universidad de Antioquia. Profesor Tiempo Completo del Departamento de Finanzas Universidad EAFIT. e-mail: drestr16@eafit.edu.co

[†] Magíster en Finanzas Massachusetts Institute of Technology –MIT-, Magíster en Economía Universidad de los Andes, Ingeniero Civil Escuela de Ingeniería de Antioquia. Actualmente se desempeña como Director de Estructuración de Bancolombia.

Agradecemos los valiosos comentarios recibidos de Zvi Wiener, Damiano Brigo y Cecilia Maya. Sin embargo, los errores u omisiones son responsabilidad exclusiva de los autores.

Introducción

A pesar del avance del mercado de capitales colombiano en la década de los noventa y principios de la actual¹, éste se encuentra aún concentrado en instrumentos de deuda pública, el mercado de renta variable es insignificante en términos comparativos y el mercado de derivados es prácticamente inexistente.² Debido a esta realidad, los participantes del mercado deben incentivar la oferta y la demanda de nuevos instrumentos para cubrir su riesgo de tasas de interés. Aunque son múltiples las dificultades que se deben enfrentar para lograrlo, una de las más importantes será la valoración de instrumentos derivados de tasas de interés, tales como: opciones, bonos con opciones incorporadas, *swaps*, *swaptions*, *caps* y *floors*.³

Por lo anterior, es necesario avanzar en la implementación de modelos para la valoración de instrumentos derivados de tasas de interés. No obstante, los modelos unifactoriales de tasas de interés parecen ser los más adecuados para mercados con bajos niveles de desarrollo como el colombiano.⁴ Para este trabajo se seleccionaron los modelos de Hull y White (1990) y Black y Karasinski (1991).⁵ Estos son ampliamente utilizados en otros mercados y, además, son apropiados cuando se pretende valorar instrumentos derivados de tasas de interés de primera generación, es decir, aquellos cuyos flujos de caja al vencimiento dependen principalmente del nivel de las tasas de interés.⁶ Este tipo de instrumentos aparecen de forma natural en las primeras fases de desarrollo de un mercado de derivados de tasas de interés.

En Colombia algunos agentes utilizan modelos unifactoriales de tipos de interés como los de Black et al. (1990) y Ho y Lee (1986).⁷ Sin embargo, no se ha documentado cómo se debe realizar la implementación de dichos modelos atendiendo las especificidades del mercado colombiano. En consecuencia, debido a la imposibilidad de aplicar las metodologías estándar de calibración de dichos modelos de la manera como se realiza en mercados más desarrollados, es necesario abordar formas alternativas para lograrlo. Este es precisamente el problema abordado por este trabajo.

¹ Para una ampliación de este aspecto ver: Arbeláez, M. A. et al. (2002). El Mercado de Capitales Colombiano en los Noventa y las Firmas Comisionistas de Bolsa. Editorial AlfaOmega. 157 p.

² Según el informe del mes de abril de 2007 de la Bolsa de Valores de Colombia y datos del Banco de la República, las transacciones en instrumentos de deuda pública representaron el 79% del total del mercado colombiano para ese mes, mientras que en acciones y derivados sólo se transaron el 1.8% y 0.6%, respectivamente..

³ Este trabajo sólo aborda el problema de la implementación de modelos unifactoriales para la valoración de derivados de tasas de interés. No obstante, un problema conexo a este es el de la cobertura del riesgo asociado a estos instrumentos. Éste, por su extensión no puede ser abordado en esta investigación. Sin embargo, El Apéndice 2 hace un breve resumen que sirve de introducción a la práctica de la cobertura con los modelos de tasas de interés que podría ser aplicado para los modelos tratados en esta investigación.

⁴ Entre los modelos de tasas de interés más importantes se encuentran: Vasicek (1977), Cox, Ingersoll y Ross (1985), Dothan (1978), Brennan y Schwartz (1979), Longstaff y Schwartz (1992), Langetieg (1980), Ball y Torous (1983), Ho y Lee (1986), Black, Derman y Toy (1990), Hull y White (1990), Black y Karasinski (1991), Heath, Jarrow y Morton (1992), Brace, Gatarek y Musiela (1995), Jamshidian (1997) y Miltersen, Sandman y Sondermann (1997). Una revisión teórica sobre estos modelos escapa a los propósitos de este artículo, pero puede ser consultada en Svoboda (2004), Rebonato (2004) y Brigo y Mercurio (2006).

⁵ Ambos modelos asumen que los cambios de la tasa de interés de corto plazo sigue un proceso de difusión con reversión a la media y que a partir de esta, se puede determinar completamente toda la estructura a plazos de tasas de interés. Ver Brigo y Mercurio (2006).

⁶ De Rebonato (1996) se puede extraer la siguiente clasificación los instrumentos derivados de tasas de interés (1) Primera generación: dependen principalmente del nivel de las tasas de interés. ej: *caps*, *floors*, *callable bonds*. (2) Segunda generación: dependen tanto del nivel de tasas de interés, como de las correlaciones imperfectas entre tasas de interés a diferentes plazos o de la trayectoria de la tasa de interés. ej: Opciones sobre la pendiente de la curva de tasas de interés, *caps*, *floors* y *swaptions* con barreras, entre otros.

⁷ Algunos agentes transan derivados de tipos de interés en el mercado *Over-The-Counter* pero no cuentan con modelos adecuados de valoración. Además, actualmente existen instrumentos de este tipo en el mercado que no están siendo apropiadamente valorados. Este es el caso de los bonos con opciones incorporadas emitidos por algunas empresas del sector privado.

En una primera etapa se aborda el problema de hacer que los modelos repliquen la estructura a plazos de tasas de interés estimada por la Bolsa de Valores de Colombia. En la segunda, se afronta la estimación de los parámetros de volatilidad⁸ y velocidad de reversión de los modelos objeto de estudio.

Respecto a la primera etapa de la investigación los resultados permiten concluir que la implementación de ambos modelos mediante árboles trinomiales, permite replicar con exactitud la estructura a plazos de tasas de interés del mercado colombiano. Además, se encuentra que el modelo de Black y Karasinski (1991) resulta ser el más adecuado para la valoración de instrumentos de tasas de interés de largo plazo debido, principalmente, a que no permite la existencia de tasas de interés negativas y a que la volatilidad de las tasas de interés depende del nivel de las mimas.

En relación con la segunda etapa del estudio, se encontró que la calibración implícita⁹ de los parámetros de volatilidad y velocidad de reversión a la media de ambos modelos no se puede realizar debido a la inexistencia de instrumentos derivados de tasas de interés en el mercado colombiano. Por esto, se recurre a otros métodos de estimación a partir de información histórica utilizando como tasa de interés de corto plazo la Tasa Interbancaria –TIB-. La estimación de la volatilidad se realizó a partir modelos GARCH (Engle, 1982, Bollerslev, 1986 y Nelson, 1991). El modelo de mejor ajuste fue un modelo EGARCH.¹⁰ En cuanto a la velocidad de reversión a la media, no se encontraron resultados satisfactorios. Debido a lo anterior, se optó por fijar el valor de este parámetro en un nivel de 24% con el propósito de avanzar en otros frentes de la investigación.¹¹

El artículo está estructurado de la siguiente forma: Primero se presenta la teoría asociada a los modelos de tipos de interés utilizando la estructura Heath-Jarrow-Morton de la cual se desprenden los modelos de Hull y White (1990) y Black y Karasinski (1991). Luego se presentan las metodologías de calibración de estos modelos y se muestra la metodología utilizada en este estudio. Posteriormente, se presenta una revisión de la literatura sobre la aplicación de estos modelos en mercados emergentes y, especialmente, en Latinoamérica. A continuación se describen los datos utilizados y se presentan los resultados del trabajo. Finalmente, se exponen las principales conclusiones.

1. Modelos de Tipos de Interés

En la literatura se pueden distinguir principalmente entre modelos de tipos de interés de *Equilibrio* y de *No Arbitraje*. Los primeros realizan una serie de supuestos respecto a la economía en la cual operan y derivan un proceso para la tasa de interés de corto plazo. En estos modelos las estructuras a plazos de tasas de interés y de volatilidades se

⁸ La volatilidad a la que se refiere la calibración es la volatilidad condicional. Cuando se requiere se hará explícito si se habla de la volatilidad condicional o incondicional. Cuando no se especifica se deberá entender como la volatilidad condicional.

⁹ La calibración implícita consiste en tomar los precios de mercado de instrumentos suficientemente líquidos y dado un modelo de valoración, hacer que los precios del modelo se acerquen lo más exactamente posible a los precios del mercado. Esto se logra haciendo que los parámetros como la volatilidad y la velocidad de reversión a la media cambien de tal modo que el error cuadrático medio entre los precios de mercado y los del modelo se reduzca al mínimo.

¹⁰ La utilización de modelos GARCH en la estimación de la volatilidad de la tasa de interés de corto plazo está ampliamente difundida. Al respecto pueden consultarse los trabajos de Bali y Wu (2005), Brenner, Harjes y Kroner (1996) y Zúñiga (1999).

¹¹ Puede demostrarse que en los modelos de reversión a la media la distancia entre el valor actual de la variable y su nivel de reversión decae exponencialmente a la tasa de velocidad de reversión, Tuckman (2002, Pág. 239). Un nivel de reversión de 24% implica que la tasa de interés de corto plazo demora alrededor de 35 meses para recorrer la mitad de la distancia entre su valor actual y su valor de reversión de largo plazo.

determinan endógenamente. En cambio, los modelos de no arbitraje toman dichas estructuras como exógenas para hacer que los precios de los títulos dados por el modelo coincidan con los observados en el mercado.

Ambas clases de modelos suponen que la tasa de interés sigue un proceso unifactorial o multifactorial. Los modelos unifactoriales asumen que la estructura a plazos de tasas de interés se desprende por completo de la tasa de interés de corto plazo. En cambio, los modelos multifactoriales modelan la estructura a plazos de tasas de interés asumiendo que más de un factor, por ejemplo la tasa de corto y su tendencia, siguen cierto proceso estocástico y, a partir de estos, se determina la estructura a plazos por completo.¹²

Los modelos de equilibrio unifactoriales más relevantes en la literatura son Vasicek (1977), Rendleman y Bartter (1980) y Cox et al. (1985), (Hull, 2003). Mientras que los modelos unifactoriales de no arbitraje más importantes han sido los propuestos por Ho y Lee (1986), Black et al. (1990), Hull y White (1990) (HW) y Black y Karasinski (1991) (BK). Estos últimos modelos lograron una gran aceptación entre los profesionales de las finanzas a principios de la década de los noventa debido a su capacidad de permitir valorar productos exóticos de tipos de interés y de reproducir la estructura de tasas de interés (Rebonato, 2004). De igual manera, Brigo y Mercurio (2006, p. 72) señalan que el modelo de Hull y White es uno de los modelos de tasas de interés más importantes, siendo usado aún en nuestros días para la gestión de riesgos en los mercados más desarrollados.

Entre los modelos multifactoriales más importantes se encuentran: Brennan y Schwartz (1979), Longstaff y Schwartz (1992), Langetieg (1980), Jegadeesh y Pennachi (1996) y Gong y Remolona (1997), (Svoboda, 2004). Sin embargo, para algunos autores, la teoría más completa sobre los modelos de tipos de interés es la propuesta por Heath, Jarrow y Morton (1992), en adelante HJM, (Rebonato, 1996). En su trabajo, HJM proponen toda una estructura para la formulación de modelos de tipos de interés, la cual, contempla como casos especiales la mayoría de los modelos existentes en la literatura, incluidos modelos más modernos como el de Brace et al. (1997), Miltersen et al. (1997) y Jamshidian (1997), estos últimos son conocidos como modelos de mercado, siendo los más populares y promisorios en la actualidad (Brigo y Mercurio, 2006, p.195).

2. Modelos de Hull y White (1990) y Black y Karasinski (1991)

El modelo de Hull y White (1990), en adelante HW, tiene la siguiente especificación:¹³

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t) \quad (1)$$

La dinámica de la tasa de interés dada en (1) implica que los cambios de la tasa de interés de corto plazo se componen de una tendencia $[\theta(t) - ar(t)]dt$ y de un componente estocástico $\sigma dW(t)$. El parámetro a mide la velocidad de reversión a la media, es decir, la rapidez con que la tasa de interés de corto plazo tiende a regresar a su valor de largo plazo, $\theta(t)/a$, una vez que se ha desviado de este. El parámetro σ es la volatilidad de los cambios de la tasa de interés de corto plazo, la cual puede asumirse constante o como una función determinística del tiempo, dt es un intervalo de tiempo

¹² Una discusión exhaustiva sobre estos modelos está por fuera del alcance de este artículo. Para el lector interesado se recomienda consultar a Rebonato (1998) y Brigo y Mercurio (2006).

¹³ El Apéndice 1 muestra la relación entre el modelo de HJM y los modelos de HW y BK.

que tiende a cero y $dW(t)$ es un proceso Browniano con media cero y varianza dt . El hecho de que $\theta(t)$ sea una función del tiempo es lo que permite ajustar el modelo a cualquier estructura a plazos de tasas de interés (Hull, 2003).

Al resolver la ecuación (1) para r , se llega a:

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 - f(0, s) e^{-a(t-s)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-as})^2 e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u \quad (2)$$

Así, la media y la varianza del proceso vienen dados por:

$$E[r_t | F_s] = r_s e^{-a(t-s)} + f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 - f(0, s) e^{-a(t-s)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-as})^2 e^{-a(t-s)} \quad (3)$$

$$Var[r_t | F_s] = \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2a(t-s)}) \quad (4)$$

Donde los valores esperados se toman respecto al conjunto de información F_s , disponible en el tiempo $s < t$.

Como puede observarse en la ecuación (4), en el modelo de HW la varianza de la tasa de interés de corto plazo no depende del nivel de la misma. Es decir, la volatilidad tomará valores en función del tiempo, pero no en función de que tan altas o bajas sean las tasas de interés.¹⁴ Además, la tasa de interés en cualquier momento del tiempo sigue una distribución Normal. Esto implica que existe la probabilidad de que éstas se tornen negativas.¹⁵ Estas dos características son las mayores debilidades del modelo. No obstante, el modelo permite la construcción de fórmulas analíticas para el precio de instrumentos derivados básicos de tipos de interés como *Caps*, *Floors*, *Swaption*, opciones Europeas sobre bonos cero cupón y sobre bonos con cupones.

De forma análoga, se especifica el modelo de Black y Karasinski, en lo sucesivo BK, de la siguiente forma:

$$d \ln r = (\ln \gamma(t) - a \ln r) dt + \sigma(t) dW(t) \quad (5)$$

La interpretación es análoga a la del modelo de HW, la diferencia radica en que BK modelan los cambios logarítmicos de la tasa de interés de corto plazo y no los cambios simples. En este modelo a representa la velocidad de reversión a la media del logaritmo de la tasa de interés de corto plazo, $\ln \gamma(t)/a$ es el nivel de reversión a la media y $\sigma(t)$ es la volatilidad de los cambios en $\ln r$, es decir la volatilidad de los cambios proporcionales de r .

Aplicando el lema de Ito se llega a:

¹⁴ Es un hecho empírico que las tasas de interés cuando son bajas (altas) presentan una baja (alta) volatilidad, ver por ejemplo Chan et al. (1992).

¹⁵ La existencia de tasas de interés negativas en este modelo hace que los instrumentos derivados de tasas de interés con pagos asimétricos como las opciones sean subvalorados o sobrevalorados, pues le da una probabilidad positiva a valores de la tasa de interés negativas lo que hace que el valor esperado de los precios de los bonos en un mundo neutral al riesgo sean más altos. Una tasa de interés negativa implica que es mejor tener dinero en efectivo que invertido. Un inversionista podría aceptar esta situación si el costo de mantener efectivo es alto y si existen ventajas en la realización de transacciones al tener su dinero invertido.

$$dr_t = r_t \left[\theta_t + \frac{\sigma^2}{2} - a \ln r_t \right] dt + \sigma r_t dW_t \quad (6)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se desprende que:

$$r_t = \exp \left\{ \ln r_s e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)} \theta_u du + \sigma \int_s^t e^{-a(t-s)} dW_u \right\} \quad (7)$$

Así, la media y la varianza del modelo vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$E[r_t | \mathcal{F}_s] = \exp \left\{ \ln r_s e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)} \theta_u du + \frac{\sigma^2}{4a} [1 - e^{-2a(t-s)}] \right\} \quad (8)$$

$$Var[r_t | \mathcal{F}_s] = \exp \left\{ 2 \ln r_s e^{-a(t-s)} + 2 \int_s^t e^{-a(t-u)} \theta_u du + \frac{\sigma^2}{a} [1 - e^{-2a(t-s)}] \right\} \quad (9)$$

En las ecuaciones (8) y (9) puede verse que el modelo de BK supera las dos características no deseadas del modelo de HW. Como se observa, la distribución de la tasa de interés en cualquier momento del tiempo es LogNormal lo cual implica que éstas no se tornan negativas. Además, la varianza de la tasa de interés de corto plazo depende del nivel de las mismas. No obstante, contrario al modelo de HW, el de BK no dispone de fórmulas analíticas para la determinación de los precios de derivados de tipos de interés básicos.

Ambos modelos comparten las características de que las tasas de interés presentan reversión a la media y pueden ser implementados utilizando árboles trinomiales.¹⁶ Lo anterior permite la valoración de opciones de tipos de interés de estilo Americana y otros derivados más exóticos.

3. Calibración de los Modelos

La calibración de los modelos de HW y BK se hace en dos etapas. En la primera se replica la estructura a plazos de tasas de interés de tal forma que los precios de los bonos cero cupón a todos los plazos dados por el modelo, sean los mismos observados en el mercado o los estimados por alguna metodología disponible.¹⁷ La segunda implica encontrar los valores de los parámetros σ y a que hacen que las tasas de interés arrojadas por los modelos permitan replicar los precios de *caps*, *floors* o *swaptions* suficientemente líquidos en el mercado.¹⁸

¹⁶ Para este trabajo se utiliza la metodología de implementación mediante árboles trinomiales propuesta por Hull y White (1994).

¹⁷ En el caso colombiano, los estimados por la BVC con la metodología de Nelson y Siegel (1987).

¹⁸ En este trabajo se ha decidido hacer la calibración tanto del modelo de HW como del de BK. La razón fundamental es que aunque BK supera algunas desventajas del modelo de HW, en algunas situaciones las diferencias entre los precios encontrados con uno u otro modelo resultan pequeñas. Por ejemplo, en la valoración de opciones de corto plazo sobre bonos de largo plazo, en cuyo caso resulta más fácil y práctico calibrar el modelo utilizando las fórmulas analíticas disponibles para *caps*, *floor* y *swaptions* en el modelo de HW. Además, la implementación del modelo de HW es computacionalmente más sencilla, lo cual puede llegar a ser importante a la hora de elegir uno u otro modelo para llevar a cabo alguna valoración. En ambos modelos se asume que la volatilidad de la tasa de interés de corto plazo es constante y también lo es la velocidad de reversión a la media. Esta elección se soporta en el hecho de que hacer una especificación diferente puede llevar a una sobreparametrización del modelo, tal como lo indican Hull y White (1994).

En el mercado colombiano se transan bonos cero cupón a diferentes plazos, pero los volúmenes negociados son bajos y no gozan de liquidez suficiente para ser considerados como instrumentos que reflejen las condiciones generales del mercado. Por esta razón, se deben utilizar como instrumentos de calibración los precios de bonos cero cupón estimados por alguna metodología econométrica como la de Nelson y Siegel (1987) o interpolación cúbica. Björk y Christesen (1997) y Filipovic (1999, 2006) encuentran que la metodología de Nelson y Siegel es inconsistente con los modelos de procesos de difusión más reconocidos en la literatura, entre estos el modelo de HW.¹⁹ Aunque las implicaciones teóricas de la consistencia han sido estudiadas recientemente, las consecuencias prácticas aún no se han investigado suficientemente. El presente trabajo utilizará como curva inicial de tipos de interés la calculada por la Bolsa de Valores de Colombia –BVC– con la metodología de Nelson y Siegel (1987).²⁰ No obstante, en posteriores investigaciones se debería abordar dicho problema e investigar las consecuencias prácticas que esta aproximación pueda tener.

En cuanto a los instrumentos derivados mencionados antes y que se utilizan frecuentemente para la calibración de σ y a , ninguno de ellos se transa activamente en el mercado colombiano.²¹ Por esta razón, la estimación de dichos parámetros se debe realizar también por alguna metodología econométrica.²² Para este trabajo se ha elegido calibrar la volatilidad por medio de modelos GARCH, pues como indican Nelson y Foster (1995), este tipo de modelos son óptimos para estimar y pronosticar la volatilidad, incluso ante la presencia de una mala especificación del modelo.²³ Además, recientemente Ramírez y Botero (2007) hicieron una aplicación de este tipo de modelos bajo varias especificaciones sobre la TIB y encontraron que el modelo EGARCH presentaba los mejores ajustes.²⁴

4. Modelos de Tipos de Interés en Países Emergentes

En su forma básica estos modelos tienen supuestos restrictivos en cuanto a la existencia de un mercado de deuda lo suficientemente líquido, profundo, sin riesgo de crédito y completo. Particularmente, Avellaneda y Newman (1998) argumentan que este último supuesto, necesario en el modelo de Heath et al. (1992), es muy restrictivo en mercados emergentes, pues no existen suficientes instrumentos que permitan crear sintéticamente otros para derivar precios futuros de títulos y poder tener una estructura de bonos cero cupón casi continua. Por tanto, el supuesto de completitud del mercado no puede ser aplicado apropiadamente a cualquier tipo de mercado.

¹⁹ La consistencia se refiere a que dado un modelo de tipos de interés de difusión M y otra de procesos paramétricos H las curvas de tasas de interés construidas a partir dichos modelos pertenecen a la misma familia M .

²⁰ Esta selección se justifica en la medida que dicha curva es la curva de referencia para la valoración de los instrumentos de renta fija en el mercado colombiano, los cuales representan cerca del 80% del total del volumen transado diariamente.

²¹ Aunque es ventajoso contar con instrumentos a partir de los cuales se pueda llevar a cabo una calibración implícita, esto no es del todo deseable. Como indican Campbell, Lo y MacKinlay (1997) la calibración implícita está íntimamente condicionada con la especificación paramétrica del modelo de valoración seleccionado y con la dinámica del activo subyacente. Si este modelo no es consistente con las regularidades empíricas, entonces la calibración implícita es inconsistente. La aproximación correcta sería usar un estimador de los parámetros desconocidos a partir de información histórica, tal como se realiza en este trabajo.

²² Brigo y Mercurio (2006) anotan que la estimación de la volatilidad de esta manera es adecuada debido a que por el teorema de Girsanov, el parámetro de difusión es el mismo bajo la medida real y neutral al riesgo. Sin embargo, los parámetros asociados a la tendencia no son los mismos bajo las dos medidas y por esto la estimación econométrica no sería adecuada. Se realizó la calibración implícita de dichos parámetros utilizando las fórmulas analíticas de HW para los bonos cero cupón. Sin embargo, no se encontraron valores satisfactorios. Estos resultados se presentan en el Anexo 4.

²³ Estos dos autores encuentran que en particular un modelo AR(1) EGARCH consistentemente estima la volatilidad instantánea y genera pronósticos apropiados de los precios de acciones y del proceso de la volatilidad cuando los datos empleados son de alta frecuencia.

²⁴ Algunos autores han investigado la posibilidad de estimar la volatilidad de las tasas de interés a partir de secciones cruzadas de series de tiempo del rendimiento al vencimiento de bonos. Sin embargo, Dufresne et al. (2004), encuentran que la volatilidad de las tasas de interés no puede estimarse de esta manera.

Varma (1996) encuentra que los modelos de tipos de interés unifactoriales son los más convenientes para la valoración de derivados de tipos de interés en India, no sólo por su simplicidad, sino porque la aplicación de modelos multifactoriales requiere el estudio de la dinámica de las tasas de interés de largo plazo que en ese momento no se encontraban disponibles en ese país. Así mismo, determina que el modelo de Black et al. (1990) se ajusta a las regularidades empíricas de las tasas de interés de corto plazo para el mercado de renta fija de su país.

Svoboda (2004) sugiere que la calibración de modelos de tasas de interés sofisticados en mercados como el de Sudáfrica resulta inapropiada, incluso, los modelos más simples presentan problemas de estabilidad de los parámetros. En general, los mercados emergentes no tienen un mercado suficientemente líquido de bonos cero cupón. Por tanto, se hace necesario la utilización de bonos con cupones o estimaciones de precios de bonos cero cupón para efectos de calibrar los modelos. Esto hace que los modelos pierdan eficiencia dado que se puede estar capturando información distinta a la contenida en la tasa de interés de corto plazo. Dicha información se refiere a la liquidez de estos títulos o al tamaño del cupón. Lo anterior puede incorporar mucho ruido al proceso de calibración. De igual manera, el hecho de que los bonos cero cupón sean casi inexistentes en estos mercados, hace que cualquier generalización hecha a partir de la calibración de los modelos con estos instrumentos no represente el consenso sobre la evolución de las tasas de interés del mercado en su conjunto.

Svoboda realiza la implementación en el mercado de Sudáfrica el modelo de Hull y White con parámetros de reversión y de volatilidad constantes. Según Hull y White (1996b) esta metodología se justifica debido a que calibrar todos los parámetros en función del tiempo puede resultar en un problema de sobreparametrización. No obstante, hacerlo permite ajustarse a la estructura de volatilidades observada en el momento de la calibración. De igual forma, Svoboda (2004) calibra el modelo de Black et al. (1990) asumiendo que la volatilidad es constante. Esto simplifica el proceso de calibración dado que sólo es necesario calibrar la estructura a plazos de tasas de interés y no la de volatilidades.

Vojtek (2004) realiza una implementación del mismo modelo para el caso de Polonia, Eslovaquia, Hungría y República Checa. Vojtek argumenta que en estos países no existe un mercado de derivados de tipos de interés lo suficientemente líquido que permita la calibración de los parámetros de los modelos a partir de este tipo de instrumentos. Por lo anterior utiliza la metodología de componentes principales y modelos GARCH para calcular las volatilidades de las tasas del mercado de dinero (equivalentes en estos países a la tasa LIBOR) para plazos de una semana a un año y determinar así los parámetros del modelo.

Para el caso latinoamericano, la literatura sobre la aplicación de modelos de tipos de interés es escasa. Los principales estudios, a fines con los objetivos de este trabajo, se han realizado para el mercado brasileño. Bessada, Nunes y Neves (2003) realizan una aplicación del modelo de Black et al. (1990) para la valoración de opciones sobre títulos de renta fija del Tesoro Nacional de Brasil. Dado que en ese momento no existían dichas opciones en ese país, no presentan resultados concluyentes sobre el desempeño del modelo. No obstante, dadas las ventajas del modelo, referidas a su simplicidad y la posibilidad de replicar la estructura a plazos de tasas de interés y de volatilidades,

recomiendan la aplicación del mismo una vez sean introducidas estas opciones por el Banco Central de Brasil y así, evaluar empíricamente su desempeño.

La metodología utilizada por Bessada et al. (2003) consistió en construir una curva de rendimientos a partir de instrumentos del mercado de futuros (depósitos interbancarios a un día) y *swaps* negociados en la Bolsa de Mercaderías y Futuros de Brasil. Utilizan *splines cúbicos* para interpolar tasas entre períodos observables. Las volatilidades de las tasas de interés se suponen constantes y son calculadas por el método EWMA (*Exponentially Weighted Moving Averages*) tomando como base la tasa de interés de 126 días de las letras del tesoro. Soportan esta metodología de cálculo de volatilidades en las prácticas de los agentes del mercado. A continuación, siguiendo prácticas internacionales, suponen la existencia de una opción sobre títulos del tesoro brasileño a seis meses suscritas al momento de la emisión del subyacente a la cual le calculan el precio utilizando el modelo de Black et al. (1990).

Ferreira (2006) aplica los modelos de Vasicek (1977) y Black et al. (1990) a la valoración de una opción sobre contratos de futuros en el mercado brasileño. No obstante, no se reportan resultados concluyentes sobre el desempeño de ambos modelos.

Dario y Barossi-Filho (2002) replican el estudio de Chan, Karolyi, Longstaff y Sanders (1992) (CKLS) para el mercado brasileño. El período de análisis fue del 04/01/2001 al 28/12/2001 y se eligió como tasa de corto plazo la correspondiente a los CDI (Certificados de Depósitos Interbancarios). A diferencia de Chan et al. (1992), los métodos de estimación cubren no sólo el Método Generalizado de Momentos –GMM–, sino, el de *Quasi Máxima Verosimilitud*. Encuentran que los parámetros de los modelos de reversión a la media de Vasicek (1977) y Cox et al. (1985) son estadísticamente significativos generando tasas de reversión de 15.95% a una velocidad de 0.1142. Además, comparan el desempeño de ambos modelos en la valoración de bonos cero cupón del Tesoro Nacional de Brasil y encuentran que en el período de análisis el mejor desempeño lo tiene el modelo de Vasicek (1977).

Vieira y Valls (2000) realizan una aplicación de modelos de no arbitraje en tiempo continuo para el mercado brasileño. No obstante, no utilizan un modelo en especial, sino que especifican una ecuación polinomial de no arbitraje y a continuación derivan la evolución dinámica de las tasas de interés asumiendo que cada parámetro del modelo tiene asociado una perturbación aleatoria descrita por un proceso generalizado de Wiener. Utilizan como tasa de interés de corto plazo la de los CDI del mercado brasileño. Sin embargo, no presentan evidencia empírica que soporte su modelo.

Gluckstern (2002) presenta una revisión de la literatura sobre modelos de tipos de interés y selecciona el modelo de HW para ser utilizado en el mercado Brasileño. Dicha elección se fundamenta en la generalidad del mismo frente a los modelos de Vasicek (1977), Black et al. (1990) y BK. Utiliza opciones sobre el Índice de Tasa Media de Depósitos Interfinancieros de un Día (IDI) de 1997 a 2000. La metodología utilizada consistió en calibrar el modelo a partir de una estructura a plazos de tasas de interés construida con los títulos del mercado de futuros. Luego calcula las volatilidades de dichas tasas utilizando EWMA. Utiliza varios estadísticos para analizar el desempeño de dichos modelos comparando los precios dados por estos y los precios históricos de las opciones sobre los IDI en el mercado. Los modelos comparados fueron los de HW,

BK y Black (1976). Concluye que el modelo de HW tiene un desempeño superior al modelo de Black (1976).

Almeida, Yoshino y Schirmer (2003) aplican el modelo de HW al mercado brasilero. Por la rigurosidad expuesta, este parece ser uno de los trabajos más relevantes en cuanto al objeto tratado para ese país. Utilizan como instrumentos de calibración los mismos que Gluckstern (2002) para el período comprendido entre el 03/01/2000 a 31/12/2001. La implementación del modelo asume parámetros constantes para la velocidad de reversion a la media y para la volatilidad de la tasa de corto plazo. No obstante, el trabajo no indica cuál es la estructura a plazos de tasas de interés utilizada para la calibración. Sus resultados no son concluyentes debido a la inexistencia de instrumentos en el mercado con qué compararlos.

Silva (2003) realiza una aplicación para el caso brasileño estimando los parámetros de los principales modelos unifactoriales utilizando el GMM. La tasa de corto plazo analizada es la tasa de referencia de la Bolsa de Mercaderías y Futuros de Brasil de 01/07/1999 a 30/12/2002, las cuales tienen vencimientos de 21, 42, 63 y 126 días. Se aplicaron pruebas que permitieron rechazar los modelos de Vasicek (1977), Cox et al. (1985), Brennan y Schwartz (1979) y Chan et al. (1992).

Ochoa (2006) aplica un modelo de dos factores para explicar la dinámica de las tasas de interés en Chile. Encuentra que este tipo de modelos captura adecuadamente los cambios en el nivel y la curvatura de la estructura a plazos de tasas de interés. Además, son útiles en la formulación y prueba de modelos de equilibrio donde factores macroeconómicos pueden tener explicaciones para la dinámica de las tasas de interés.

Venegas (2005) aplica el modelo de Vasicek (1977) y el modelo de Cox et al. (1985) a la tasa corta del mercado de CETES mexicano del 03/01/2000 al 29/12/2000. El procedimiento consistió en discretizar la ecuación diferencial estocástica convirtiéndola en una ecuación estocástica en diferencias cuyo resultado es un modelo autorregresivo de primer orden. Utiliza simulación Monte Carlo para estimar la estructura a plazos de tasas de interés en la estructura discreta del modelo de Heath et al. (1992). Con este último modelo propone una metodología para la inmunización de portafolios utilizando contratos de futuros del mercado mexicano.

Como puede apreciarse, los trabajos más relevantes realizados en Latinoamérica no son del todo concluyentes y evidencian las dificultades para aplicar algunos modelos debido a la inexistencia de un mercado de derivados desarrollado. Sin embargo, estos trabajos hacen evidente la preocupación por desarrollar herramientas que permitan el desarrollo de un mercado de derivados de tipos de interés en esos países.

5. Datos

Para la implementación de los modelos de HW y BK se utilizó la curva TES en PESOS (CECPESOS) estimada y publicada diariamente por la Bolsa de Valores de Colombia - BVC-, entre el 02/01/2006 y el 28/12/2006. Para la estimación del parámetro de volatilidad se utilizó la tasa interbancaria, en adelante TIB, desde el 01/01/2001 hasta el 29/12/2006. Las series históricas se obtuvieron del Banco de la República de Colombia.

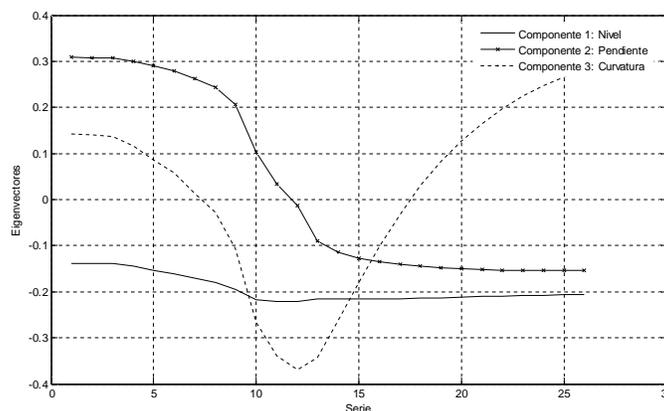
Para contrastar la eficiencia con la cual los modelos replican los precios de mercado de algunos instrumentos de referencia se eligió el TES TFIT15240720²⁵ por ser el título más líquido y de mayor volumen en el mercado. Los precios se obtuvieron de la Bolsa de Valores de Colombia, los cuales son calculados como precios promedio de las operaciones de contado transadas en el Mercado Electrónico Colombiano MEC para cada día de negociación entre el 02/01/2006 y el 29/12/2007.

6. Resultados Empíricos

6.1. Análisis de Componentes Principales

Para investigar qué tan eficientes pueden ser los modelos unifactoriales para representar la dinámica de la estructura a plazos de tasas de interés en el mercado colombiano, se realizó un análisis de componentes principales a la curva de rendimientos CECPESES desde el 02/01/2003 hasta el 28/12/2006.²⁶ Este análisis se realizó en dos etapas. La primera incluye el cálculo para el periodo completo desde el 02/01/2003 hasta el 28/12/2006 para un total de 977 observaciones y la segunda etapa consistió en estimar los componentes principales por subperiodos de un año. La Gráfica 1 ilustra el comportamiento de los tres componentes principales más importantes.²⁷

Gráfica 1. Componentes principales (2003-2006)



Fuente: Cálculo de los autores

De acuerdo a los resultados obtenidos, el primer componente principal corresponde a movimientos casi paralelos de la curva de rendimientos. Esto se aprecia en la línea horizontal de la Gráfica 1. Para el período completo este componente explica cerca del 72% de la variabilidad de dicha curva. Los otros dos componentes, asociados a la pendiente y curvatura de la estructura a plazos de tasas de interés explican el 26% y el

²⁵ Este título es emitido por el Gobierno Nacional, tiene vencimiento el 24 de julio de 2020 y paga un cupón fijo anual de 11%.

²⁶ El análisis de componentes principales tiene como objetivo encontrar para un conjunto de n variables (como la estructura a plazos de tasas de interés con n vencimientos) un conjunto con de más baja dimensión, es decir, con un número de variables $m < n$, llamadas componentes principales CP, que por medio de combinaciones lineales (eigenvectores) capturen casi la misma variabilidad y dinámica de las n variables originales. Para el caso de la curva de tasas de interés los m CP generalmente son tres. El CP_1 se asocia al nivel de las tasas de interés, el CP_2 se asocia a la pendiente de la curva de tasas de interés y el CP_3 se asocia a la curvatura de la misma. Una explicación detallada del uso del análisis de componentes principales y su relación con los modelos de tasas de interés puede ser consultada en Rebonato (1996).

²⁷ La metodología de componentes principales exige que las variables estén altamente correlacionadas. El análisis de correlación arroja que, en efecto, este es el caso para las tasas de interés a diferentes plazos en el mercado de deuda pública colombiana, lo cual se corrobora en los resultados presentados en la Tabla A1.

2%, respectivamente.²⁸ Cuando se realiza el mismo análisis por subperíodos de un año se evidencia que para los años 2005 y 2006, el primer componente explica cerca del 87% de la variabilidad de las tasas de interés a lo largo de toda la estructura a plazos. Los resultados detallados del análisis de componentes principales se pueden apreciar en las Tabla A2 y A3 al final del artículo.

En un modelo unifactorial sin reversión a la media los choques a la tasa de interés de corto plazo producen movimientos paralelos y de igual magnitud para todas las tasas en la estructura a plazos de tasas de interés. Esto es cercano a lo que ocurre con los choques al primer componente principal de la curva de rendimientos en Colombia. Si el modelo unifactorial incluye reversión a la media, un choque a la tasa de interés de corto plazo impactará en mayor magnitud a las tasas de corto plazo que a las de largo plazo. La magnitud de dicho movimiento depende del valor del parámetro de velocidad de reversión. Así, para valores altos de este parámetro los choques tienen un impacto casi igual en las tasas de interés a todos los vencimientos. Cuando el valor de este parámetro es pequeño, las tasas de interés de más corto plazo sufren un impacto mayor que las tasas de largo plazo.²⁹

El comportamiento descrito en el párrafo anterior es parecido al que muestra el primer componente principal en la Gráfica 1. Esto sugiere que la utilización de un modelo unifactorial aunque no alcance a capturar el cien por ciento de la variabilidad de los movimientos de la estructura a plazos de tasas de interés, podría capturar un gran porcentaje cuyo valor estará cercano al explicado por el primer componente principal. Además, si dicho modelo incluye reversión a la media, puede capturar el hecho de que las tasas de más corto plazo, comparadas con las tasas de más largo plazo, responden en mayor magnitud a los choques en la tasa de interés de corto plazo.

Dado que el primer componente principal captura más del 80% de la dinámica de la curva cero cupón y que éste se relaciona directamente con el nivel de la misma, el análisis anterior apoya la elección de los modelos unifactoriales como primera aproximación para la valoración de instrumentos derivados de tasas de interés en Colombia. Rebonato (1996) enfatiza que un derivado financiero cuyo flujo de caja dependa exclusivamente del nivel de la curva de tasas de interés puede ser valorado adecuadamente utilizando un modelo unifactorial. Es más, cuando en un modelo se elige la tasa de interés de corto plazo como el factor que determina por completo la estructura a plazos de tasas de interés, implícitamente se está eligiendo dicha tasa como *proxy* para modelar la variable que el análisis de componentes principales señala como la que mejor describe los movimientos de toda la curva de rendimientos.

6.2. Primera etapa de la calibración de los modelos: Ajuste de los modelos a la estructura a plazos de tasas de interés inicial

El primer paso en la implementación de estos modelos es hacer que repliquen la estructura a plazos de tasas de interés inicial. Para este trabajo se parte de la curva de rendimientos estimada por la BVC entre el 2 de enero y el 28 de diciembre de 2006. El procedimiento consiste en construir árboles trinomiales de tal manera que los precios de los bonos cero cupón dados por el modelo sean iguales a los estimados según la curva

²⁸ Este tipo de relaciones se hacen por ejemplo en Jhonson (2004), quien hace una buena revisión teórica del análisis de componentes principales para la estructura a plazos de tasas de interés y en Loretan (1997).

²⁹ Una ampliación de este análisis puede consultarse en Tuckman (2002).

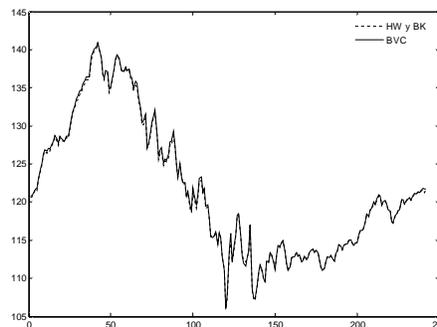
inicial de tasas de interés (Hull y White, 1993, 1994a, 1994b). El ejercicio permite concluir que los modelos de HW y BK son capaces de replicar con exactitud los precios de los bonos cero cupón estimados con la metodología de Nelson y Siegel (1987).

Para ilustrar lo anteriormente expuesto se procedió a estimar el precio del título TES TIFT15240720 para todos los días durante el año 2006. En primera instancia se calcula el precio teórico del mismo mediante la metodología de Nelson y Siegel, seguidamente se hace con el modelo de HW y BK. El modelo de HW es capaz de replicar los precios de Nelson y Siegel con una exactitud de seis decimales. El modelo de BK los replica con una precisión de tres decimales. Las diferencias en exactitud entre los modelos de HW y BK radican en que este último implica la estimación del árbol de tasas de interés por métodos numéricos.³⁰ Estos resultados se aprecian en el Gráfico 2.

Posteriormente se procedió a comparar estos precios con los precios promedios publicados por la Bolsa de Valores de Colombia, los cuales son utilizados en la estimación de la curva de rendimientos con la metodología de Nelson y Siegel –NS–.

Los errores entre los precios estimados por HW, BK y NS y los publicados por la Bolsa de Valores de Colombia se presentan en las Tablas 1 y 2.

Gráfico 2. Precios modelo de HW y BK vs Precios Promedio de la BVC (02/01/2006-28/12/2006)



Fuente: Cálculo de los autores

Tabla 1. Estadísticos para medir el error de precios en puntos básicos de los modelos de HW y BK vs BVC

Estadístico	HW	BK
ME	-15,530	-15,393
MAD	18,070	18,143
RMSE	24,898	24,935
MAPE	0,1454%	0,1460%
MPE	-0,1231%	-0,1219%

Fuente: Cálculo de los autores

Tabla 2. Estadísticos para medir el error de precios en pesos de los modelos de HW y BK vs BVC Promedios

Estadístico	HW	BK
ME	\$ -155.304.958	\$ -153.928.612
MAD	\$ 180.701.608	\$ 181.428.908
RMSE	\$ 248.981.067	\$ 249.346.071
MAPE	\$ 145.352.764	\$ 145.978.924
MPE	\$ -123.079.557	\$ -121.882.695

Fuente: Cálculo de los autores

³⁰ Se utiliza el algoritmo de Newton Raphson.

De acuerdo a la Tabla 1, al valorar con el modelo de HW el error promedio (ME) en que se incurre es de -15,53 puntos básicos. Así, en un portafolio de \$100 mil millones de pesos el modelo estimaría en promedio un precio que estaría \$ 155.30 millones de pesos por debajo del precio publicado por la BVC, con un error estándar de \$248,9 millones de pesos. El error medio absoluto (MAD) sería de \$180.7 millones de pesos. Al medir los errores en términos porcentuales (MPE) se obtiene que por cada \$100 mil millones de pesos el error sería en promedio de -\$123 millones de pesos y en términos absolutos (MAPE) sería de \$145.3 millones de pesos. El MPE nos dice que en promedio el modelo de HW tiende a subestimar el precio promedio del mercado en \$123 millones de pesos por cada \$100 mil millones.

Los resultados anteriores parecen no ser satisfactorios desde el punto de vista del error que se comete al valorar con estos modelos los precios de los bonos en el mercado.³¹ No obstante, es importante recordar que los modelos están replicando la estructura a plazos de tasas de interés inicial, no los precios a partir de los cuales esta se construyó. Así que para evaluar qué tan eficientemente los modelos de HW y BK replican la estructura a plazos, es necesario comparar los precios de los bonos obtenidos con estos modelos con aquellos dados por la metodología de NS utilizada por la BVC. Los resultados de esta comparación se muestran en las Tablas 3 y 4.

Tabla 3. Estadísticos para medir el error de precios en puntos básicos de los modelos de HW y BK vs NS

Estadístico	HW	BK
ME	-0,011	0,126
MAD	0,011	0,128
RMSE	0,176	1,962
MAPE	0,0001%	0,0011%
MPE	-0,0001%	0,0011%

Fuente: Cálculo de los autores

Tabla 4. Estadísticos para medir el error de precios en pesos de los modelos de HW y BK vs NS

Estadístico	HW	BK
ME	\$ -113.196	\$ 1.263.149
MAD	\$ 113.207	\$ 1.275.754
RMSE	\$ 1.761.006	\$ 19.619.734
MAPE	\$ 102.387	\$ 1.105.619
MPE	\$ -102.378	\$ 1.095.146

Fuente: Cálculo de los autores

Como puede observarse, los estadísticos para medir los errores por el modelo de HW son inferiores a los del modelo de BK. Esto se debe a que para la implementación del modelo de BK se requiere utilizar optimización numérica, pues no existen soluciones analíticas para la construcción del árbol de tasas de interés. El modelo de HW tiende a subestimar el precio, mientras que el de BK tiene a sobreestimarlos. No obstante, como se muestra en la Tabla 4, los errores en pesos para un portafolio de \$100 mil millones de pesos son bajos y no ameritan una gran preocupación. Los resultados anteriores

³¹ Arango, Melo y Vásquez (2002) argumentan que el RMSE al estimar los precios con el modelo de NS respecto a los precios de mercado es bajo. No obstante, en dicho artículo no se hace explícito en qué unidades está medido el error cuadrático medio. Así, es muy difícil decidir si la aproximación es buena o es mala. En el presente trabajo el RMSE y las demás medidas de bondad del ajuste están medidas con base en precios para los títulos con valor facial de 100. Con esto se calcula el error en la valoración de un instrumento con un valor facial de \$100 mil millones de pesos y se concluye que dicho error es considerable en términos monetarios. Además, es necesario recordar que los estadísticos de bondad del ajuste presentados se refieren a una serie de un único título, no de todos los títulos a partir de los cuales se construyó la estructura a plazos de tasas de interés. No obstante, como lo que se pretende es que los modelos de HW y BK repliquen la curva cero cupón inicial calculada con la metodología de NS, la metodología de calibración es bastante exacta a juzgar por los estadísticos de prueba.

implican que los modelos de HW y BK son capaces de replicar la estructura a plazos inicial de NS que era el objetivo de esta etapa de calibración.³²

6.3. Segunda etapa de la calibración de los modelos: Calibración de los parámetros de los modelos HW y BK

Los modelos unifactoriales de HW y BK en sus formas más simples requieren como valores iniciales la velocidad de reversión a la media y la volatilidad de la tasa de interés de corto plazo. Usualmente estos parámetros se calibran a partir de instrumentos como *caps*, *floors* y *swaptions* suficientemente líquidos; sin embargo, estos instrumentos no existen en el mercado colombiano. Por esta razón, la calibración se debe realizar por otros métodos.

Una primera alternativa podría ser inferir la estructura de volatilidades de las tasas de interés *forwards* a partir de la estructura a plazos de tasas de interés calculada por la BVC. Sin embargo, esta manera de estimar dichas tasas presenta problemas. Por un lado, al calcular la volatilidad de dichas tasas para diferentes vencimientos, se obtienen estructuras de volatilidades decrecientes en el corto plazo y crecientes en el mediano y largo plazo (Ver Anexo 2). Lo anterior es contrario a las características de las curvas de volatilidades de los mercados más desarrollados, las cuales se caracterizan por ser crecientes en el corto y mediano plazo, y decrecientes en el largo plazo (Brigo y Mercurio, 2006, p. 134). Por otro lado, la metodología de Nelson y Siegel (1987) no captura adecuadamente la dinámica de las tasas de interés de más corto plazo, Svensson (1994). En consecuencia, se estarían infiriendo volatilidades a partir de tasas de interés que no representan la realidad del mercado.

La segunda alternativa consiste en seleccionar una variable *proxy* de la tasa de interés de corto plazo y realizar la estimación de los parámetros por métodos econométricos utilizando datos históricos (Brigo y Mercurio, 2006, p. 61-62). Esta es la alternativa utilizada por Hull y White (1990) en su investigación original y la que se empleará en este trabajo por las razones anteriormente expuestas. A continuación se presenta la estimación utilizando herramientas econométricas y en la siguiente sección se presenta una calibración implícita a partir de los bonos cero cupón estimados con la metodología de NS.³³

6.3.1. Estimación econométrica

Para la estimación econométrica se eligió como variable *proxy* de la tasa de corto plazo la Tasa Interbancaria³⁴ –TIB-. Lo anterior se soporta en su frecuencia de publicación y a

³² Si se desea una mejor aproximación a los precios de mercado sería importante revisar el tipo de metodología utilizada para la construcción de la estructura a plazos de tasas de interés. Arango et al. (2002) comparan la metodología de McCulloch (1971), la metodología polinomial (CETES) utilizada por la BVC hasta 2002 y la metodología de Nelson y Siegel (1987) para estimar la estructura a plazos de tasas de interés en Colombia y concluyen que el mejor ajuste lo se logra con esta última metodología. Melo y Vasquez (2002) realizan una comparación entre la metodología de Nelson y Siegel (1987) y la de Funciones *B-Spline Cubicas* y concluyen que ambas metodologías tienen un desempeño similar, pero se prefiere la de Nelson y Siegel debido a sus ventajas respecto a la interpretación económica de algunos de sus parámetros.

³³ Al no ser posible la calibración de los parámetros de volatilidad y velocidad de reversión con instrumentos transados en el mercado, dado que no existen, es necesario pasar de la calibración a la estimación de dichos parámetros por otros métodos en cuyo caso se optó por los modelos GARCH.

³⁴ Es necesario tomar la tasa de interés de más corto plazo de la economía. Por el teorema de Girsavov el coeficiente de difusión es el mismo bajo la medida real y neutral al riesgo. Además, en estudios anteriores como el de Arango, Melo y Vásquez (2002) sobre la estimación de la estructura a plazos de tasas de interés, la TIB también fue utilizada como *proxy* de la tasa de interés de corto plazo.

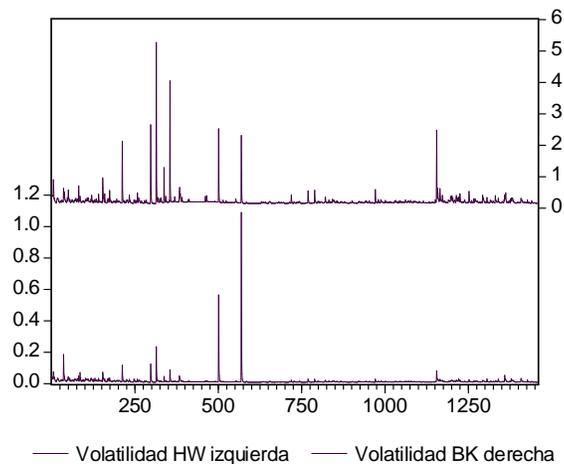
que el riesgo de contraparte de la misma puede corresponderse más exactamente con el riesgo del Gobierno Nacional que otras tasas del mercado.³⁵

Para el modelo de HW es necesario modelar los cambios diarios de la TIB, mientras que para el modelo de BK se utilizan los cambios porcentuales. La modelación consiste en discretizar los procesos de ambos modelos y estimar las series de volatilidades para cada uno. Las pruebas de estacionariedad para ambas variables se presentan en las Tablas A4 del Anexo 3. Los modelos que mejor se ajustaron fueron los modelos EGARCH (Nelson, 1991). Para los cambios de la TIB no se evidenciaron efectos de asimetría para la ecuación de la varianza; sin embargo, para los cambios proporcionales de dicha variable el modelo estimado presenta efectos asimétricos significativos.

Contrario a la evidencia presentada por Ramírez y Botero (2007), el efecto asimétrico provocado por choques positivos a la TIB, conlleva a una disminución de la varianza condicional aproximadamente de un 36,5% respecto a choques negativos. Es decir, cuando la TIB sube la volatilidad disminuye. Lo anterior, es contrario a lo esperado intuitivamente, no obstante, un análisis más detallado sobre sus causas está por fuera del alcance de este trabajo. El procedimiento de discretización y estimación de la volatilidad mediante modelos GARCH se presentan en el Anexo 3.

El Gráfico 2 muestra las series de la volatilidad estimadas para el modelo de HW y BK con los modelos EGARCH. Las series de volatilidades de estos modelos durante 2006 se utilizaron como estimadores de la volatilidad de la TIB. De esta manera se incorporan en la implementación de los modelos mediante árboles trinomiales siguiendo la aproximación de Hull y White (1994).

Gráfico 2. Series de las volatilidades de la TIB para los modelos de HW y BK durante 2006



Fuente: Elaboración de los Autores

La volatilidad promedio de los cambios en la TIB estimada por medio de los modelos EGARCH es de 1.40% para el modelo de HW y 20,61% para el modelo de BK. El nivel de reversión estimado de la TIB en la discretización del modelo de HW es de 7,01% con

³⁵ Otras tasas de interés de corto plazo consideradas fueron la CDT a 90 días, la tasa de rendimiento de los bonos cero cupón a 90 días y tasas de interés extraídas de la curva cero cupón. No obstante, la primera no representa el riesgo emisor del Gobierno Nacional, la segunda tiene pocos datos y no se publica diariamente y la tercera tendría problemas de modelo, debido a que la metodología de NS no es apropiada para capturar la dinámica de las tasas de interés en el corto plazo.

una velocidad de reversión de 1,84%. El nivel de reversión estimado para el modelo de BK es de 6,99% con una velocidad de reversión de 1,38%.

Aunque los niveles de reversión son aceptables para esta variable, la velocidad con la cual revierten a su media es muy baja. Por ejemplo, implicarían que una vez la variable se aleja de su nivel de largo plazo, tardarían aproximadamente entre 37 y 50 años para recorrer la mitad de la brecha que las separa de su nivel de reversión.³⁶ Así, la calibración del nivel de reversión con esta metodología no es satisfactoria y por lo tanto no se considerarán dichos resultados para la implementación de los modelos. En vez de esto se decidió trabajar con una velocidad de reversión constante de 24%, lo cual implica que la tasa de interés una vez se aleja de su nivel de equilibrio de largo plazo, tarda aproximadamente 3 años para recorrer la mitad de la brecha que la separa de su nivel de largo plazo.

6.3.2. Calibración Implícita

Una forma de determinar el valor de los parámetros del modelo de HW es seleccionarlos de tal manera que la curva de tipos de interés del modelo esté lo más cerca posible a la curva observada en el mercado. Para determinar los niveles de reversión a la media, la velocidad de reversión y la volatilidad implícita en la estructura a plazos de tasas de interés se realizó la calibración implícita de dichos parámetros a partir de las curvas spot cero cupón estimadas por la BVC.

El precio de un bono cero cupón en el modelo de HW con parámetros de nivel, velocidad de reversión a la media y de volatilidad constantes viene dado por la siguiente expresión (Hull, 2003):

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (6.1)$$

Donde:

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (9)$$

y

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - B(t, T) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{1}{4a^3} \sigma^2 (e^{-aT} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1) \quad (10)$$

Es más útil expresar estas ecuaciones en términos de $R(t)$ para un período δt ,

así:³⁷

$$P(t, T) = \hat{A}(t, T)e^{-\hat{B}(t, T)R(t)} \quad (11)$$

Donde:

³⁶ Como apunta Tuckman (2002) es posible mostrar que la distancia entre el valor actual de una variable y su nivel de reversión de largo plazo, decae exponencialmente a una tasa igual a la velocidad de reversión. Un factor útil para calcular cuánto tarda una variable para recorrer la mitad de la distancia que la separa de su nivel de largo plazo es llamado *half-life*, $HL = \ln(2)/a$, donde "a" es la velocidad de reversión.

³⁷ $R(t)$ corresponde a la tasa de corto plazo discreta, que es la que se observa en el mercado.

$$\ln \hat{A}(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - \frac{B(t, T)}{B(t, t + \delta t)} \ln \frac{P(0, t + \delta t)}{P(0, t)} - \frac{1}{4a} \sigma^2 (1 - e^{-2at}) B(t, T) [B(t, T) - B(t, t + \delta t)] \quad (12)$$

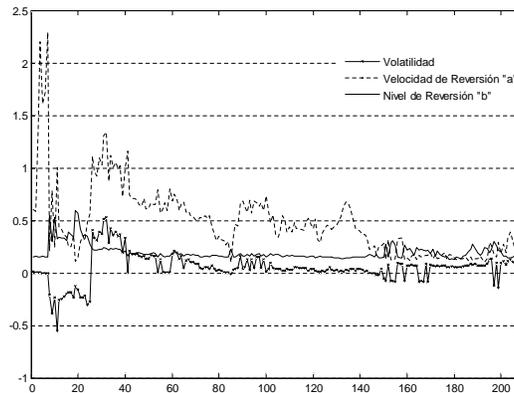
y

$$\hat{B}(t, T) = \frac{B(t, T)}{B(t, t + \delta t)} \delta t \quad (13)$$

El objetivo de la calibración es calcular un serie de precios de bonos cero cupón para $t = 1, 2, 3 \dots n$, a partir de las curvas estimadas con la metodología de Nelson y Siegel y, posteriormente, elegir los parámetros a, b y σ de tal manera que se minimice la suma de los errores al cuadrado entre los precios calculados con la fórmula de HW y el estimado con Nelson y Siegel (1987). El algoritmo de optimización utilizado fue el de Newton-Raphson.

Esta calibración se realizó con una frecuencia semanal desde el 1/08/2002 hasta el 28/12/2006. El día de la semana elegido fue el jueves. En total se tienen 221 estimaciones. El Gráfico 3 muestra los resultados obtenidos al estimar los parámetros y la Tabla A7, en el Anexo 4, presenta el resumen estadístico de las estimaciones.

Gráfico 3. Parámetros del modelo de HW con calibración implícita



Fuente: Cálculo de los autores

La volatilidad anual media para la muestra completa es de 7,60%, la velocidad de reversión es del 43,49% y el nivel de reversión es de 17,99%. El valor del parámetro de nivel de reversión parece ser alto en comparación con estudios empíricos en otros países donde dicho valor se ubica entre 6% y 8%. La volatilidad reportada por otros estudios es inferior al 2% (Chan et al., 1992). Si se analiza año a año, el nivel de reversión permanece cercano al 18%, mientras que los demás parámetros cambian en mayor medida. La velocidad de reversión sí parece estar en línea con los reportados en los estudios antes citados, en los cuales dicho valor se encuentra alrededor de 17%. El año 2005 arroja resultados que están más en línea con los estudios empíricos internacionales en cuanto a volatilidad se refiere. Sin embargo, en el año 2006 la velocidad de reversión fue la que tuvo un valor menor.

La anterior metodología no arroja resultados concluyentes puesto que la inestabilidad de los parámetros de velocidad de reversión es difícil de explicar en sentido económico y se presentan volatilidades negativas.³⁸ Esto era de esperarse debido a que sólo tres parámetros no son suficientes para reproducir satisfactoriamente una estructura a plazos de tasas de interés. Es más, algunas formas de dichas curvas no son posibles de reproducirse si estos parámetros se consideran constantes a través del tiempo. No obstante, este ejercicio permite una primera aproximación al problema de calibración que puede ser puesta a prueba en estudios posteriores. Además, permite formarse una idea de los parámetros que según los precios estimados con la metodología de Nelson y Siegel son consistentes con la dinámica impuesta al modelo.

6.4. Valoración de opciones con los modelos de HW y BK en el mercado colombiano

Dado que los modelos de HW y BK son capaces de replicar la estructura a plazos inicial, se procederá a utilizar los árboles trinomiales para la valoración de algunos instrumentos hipotéticos en el mercado colombiano. Debido a que no existen instrumentos en el mercado para comparar los resultados de este ejercicio, el objetivo del mismo es tener una primera aproximación comparativa de los precios que arrojan los dos modelos en el mercado colombiano.

La valoración de todos los instrumentos derivados de tipos de interés se realizó tomando una velocidad de reversión igual al 24%. Debe recordarse que este parámetro no pudo ser establecido mediante los métodos de calibración empleados, así que este valor es arbitrario. En el Anexo 5 se presenta un análisis de la sensibilidad del valor de una opción sobre un bono ante cambios en el parámetro de velocidad de reversión y de volatilidad. Como puede observarse, el valor de la opción es sensible a movimientos de este parámetro, lo cual deberá tenerse en cuenta a la hora de utilizar este tipo de modelos.

6.4.1. Valoración de Bonos con Opciones del Tipo Bermuda

En el mercado colombiano existen bonos con opciones de este tipo,³⁹ no obstante, la metodología de valoración de la BVC no contempla la opcionalidad implícita en los mismos. En este sentido, resulta interesante ver cuál es el valor de la prima de este tipo de opciones en el mercado colombiano. Para el efecto, se supone la existencia de un TES con Opciones Bermuda del tipo Call (Bermudean Callable Bond), en adelante TFIBCALL15240720, emitido por el Gobierno Nacional de Colombia, cupón fijo de 11%, emisión 24/07/2005, vencimiento 24/07/2020, las opciones se pueden ejercer cada año empezando el 24/07/2016 a un precio de 105 y reduciendo 100 puntos básicos por año hasta llegar a su valor facial de 100 al vencimiento del título. Este título es similar en sus características faciales al TES TFIT15240720 del Gobierno Nacional, el cuál fue el más transado durante el periodo de análisis.

El Gráfico 4 presenta los precios de las opciones bermudas dadas por el modelo de HW y BK.⁴⁰ La Tabla 5 presenta las estadísticas descriptivas de los valores del TES

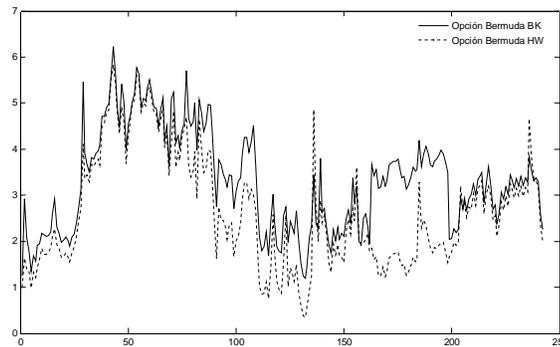
³⁸ Esto ocurre debido a que dichas volatilidades cumplen con ser raíces de la ecuación a resolver. No obstante, esto no tiene sentido en este modelo.

³⁹ Por ejemplo los bonos con vencimiento en 2019 y 2026 emitidos por la empresa de Interconexión Eléctrica ISA. S.A.

⁴⁰ La Gráfica A6 muestra como los bonos con opciones tienen una convexidad negativa.

TFIBCALL15240720 y de las opciones Bermudas sobre el mismo, calculados diariamente desde el 2/01/2006 hasta el 28/12/2006.

Gráfico 4. Valor de las opciones Bermuda



Fuente: Elaboración de los autores.

Tabla 5. Estadísticas descriptivas valor de las opciones bermuda

Modelo	NS	HW	BK	HW	BK
Instrumento	TIFT15240720	TFIBCALL15240720	TFIBCALL15240720	Opción Bermuda	Opción Bermuda
Media	121,606	118,955	118,289	2,649	3,317
Error típico	0,564	0,507	0,523	0,079	0,070
Mediana	120,200	117,030	116,811	2,423	3,322
Desviación estándar	8,774	7,885	8,144	1,236	1,086
Varianza de la muestra	76,985	62,172	66,317	1,529	1,179
Curtosis	-0,813	-0,914	-0,945	-0,516	-0,619
Coefficiente de asimetría	0,539	0,448	0,458	0,586	0,315
Rango	34,892	31,855	31,062	5,482	5,045
Mínimo	105,916	103,442	104,133	0,355	1,189
Máximo	140,808	135,297	135,195	5,837	6,234
No. Datos	242	242	242	242	242

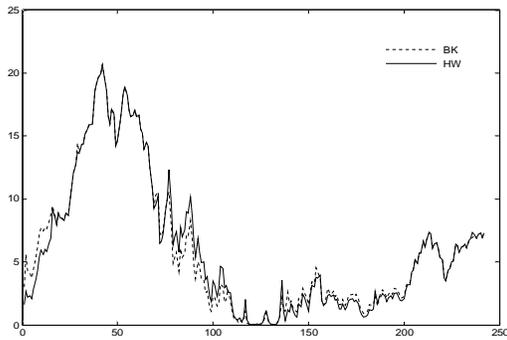
Fuente: Cálculo de los Autores

El precio promedio de las opciones bermuda incorporadas en el TES TFIBCALL15240720 es de 2,649 con el modelo de HW y de 3,317 con el modelo de BK por cada 100 de valor nominal. Esto corresponde aproximadamente a 2,2% con HW y 2,8% con BK del precio sucio promedio del título. Sin embargo, es importante anotar que durante la estimación el parámetro de velocidad de reversión a la media permaneció constante en 24%, pues el valor de dicho parámetro no pudo ser establecido por los métodos convencionales utilizados.

6.4.2. Valoración de opciones Call sobre el TES TIFT15240720

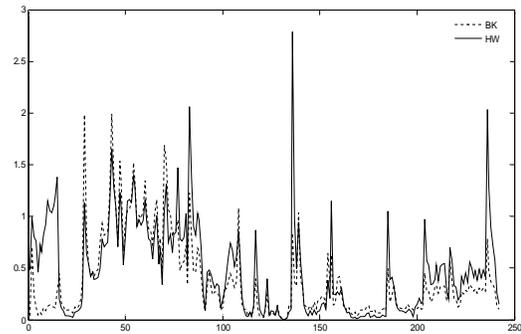
Se estimaron diariamente los precios de una opción Call Europea de corto plazo y otra de largo plazo sobre el TES TIFT15240720. El vencimiento de estas opciones se fijó para el 24/01/2007 y para el 24/07/2015, respectivamente. Ambas opciones tienen un precio de ejercicio de 115. Los precios de estas opciones se muestran en los Gráficos 5 y 6. La Tabla 6 presenta las principales estadísticas descriptivas sobre los mismos.

Gráfico 5. Valor de las opciones Call Europeas de Corto Plazo



Fuente: Elaboración de los autores.

Gráfico 6. Valor de las opciones Call Europeas de Corto Plazo



Fuente: Elaboración de los autores

Es importante notar que el valor de las opciones de corto plazo con ambos modelos es bastante similar durante periodos prolongados de tiempo, mientras que el valor de las opciones de largo plazo difieren durante todo el periodo de análisis. En la Tabla 6 se aprecia que en promedio el valor de la opción de largo plazo con el modelo de HW es de 0,481 y con el modelo de BK es de 0,390. Es decir, es más alto para el modelo de HW. Lo anterior se puede explicar debido a que en el modelo de HW se presentan tasas de interés negativas, sobre todo en el largo plazo, lo cual hace que el valor esperado de los bonos en esos plazos sean, en promedio, más altos que en el modelo de BK, donde no se presentan tasas de interés negativas. Esto no ocurre para opciones de muy corto plazo, donde el modelo de HW no presenta tasas de interés negativas y, por tanto, el valor de las opciones, en ese caso, tiende a ser muy similar.

Tabla 6. Estadísticas descriptivas del valor de las opciones Call Europeas

Modelo	HW	BK	HW	BK
Instrumento	Opción Corto Plazo	Opción Corto Plazo	Opción Largo Plazo	Opción Largo Plazo
Media	6,058	6,075	0,481	0,390
Error típico	0,347	0,345	0,028	0,025
Mediana	4,590	4,470	0,387	0,256
Desviación estándar	5,406	5,364	0,441	0,391
Varianza de la muestra	29,222	28,771	0,195	0,153
Curtosis	0,046	0,120	2,983	2,454
Coefficiente de asimetría	1,034	1,068	1,350	1,627
Rango	20,640	20,641	2,780	1,989
Mínimo	0,000	0,000	0,004	0,005
Máximo	20,641	20,641	2,784	1,994
No. Datos	242	242	242	242

Fuente: Cálculo de los Autores

De los ejercicios de valoración y calibración de ambos modelos se desprende que no existe información suficiente en el mercado colombiano para realizar una calibración estándar, tal como se lleva a cabo en otros mercados. La alternativa propuesta implica que con los modelos de BK y HW los precios de derivados de tipos de interés difieren de acuerdo al plazo de vencimiento de los mismos. El modelo de BK presenta ventajas respecto al de HW debido a que no permite la existencia de tasas de interés negativas. Por esta razón, ante la inexistencia de otros modelos en el mercado, podría ser útil en la valoración de instrumentos derivados de tipos de interés en una etapa inicial de desarrollo del mercado.

7. Conclusiones

Este trabajo tenía como objetivo implementar los modelos unifactoriales de Hull y White (1990) y Black y Karasinski (1991) en el mercado colombiano. Respecto a la calibración de la estructura a plazos de tasas de interés se encuentra que ambos modelos replican con exactitud la estructura a plazos inicial calculada por la BVC. Lo anterior implica que con dichos modelos es posible valorar derivados de tipos de interés sobre bonos del gobierno, incluso, sobre títulos que no se transan activamente en el mercado y para los cuales se dispone de márgenes de valoración calculados por la BVC. Esto también permite implementar fácilmente esquemas de coberturas tales como las descritas en el Apéndice B.

El análisis de componentes principales permite soportar la elección de los modelos unifactoriales para ser utilizados en la valoración de instrumentos derivados de tasas de interés cuyos flujos dependan principalmente del nivel de las mismas. Mediante este análisis se logró establecer que el primer componente principal, asociado al nivel de la estructura a plazos de tasas de interés, captura más del 80% de la variabilidad de la curva cero cupón. Esto es especialmente significativo para el año 2006, en el cual la variabilidad explicada por el primer componente principal asciende al 87,35%.

En línea con lo anterior, el segundo componente principal asociado a los movimientos en la pendiente de la curva cero cupón captura cerca del 11% de la variabilidad de la estructura a plazos de tasas de interés para el año 2006. Mientras que el tercer componente principal, el cual se asocia a los movimientos de la curvatura de la estructura a plazos de tasas de interés, explica menos del 1% de la variabilidad su variabilidad.

Respecto al tipo de modelos que se pueden implementar en el mercado colombiano, se encuentra que incluso los modelos de especificaciones más simples, es decir, con parámetros constantes para la velocidad de reversión a la media y para la volatilidad de las tasas de interés no pueden calibrarse de manera inequívoca.⁴¹ Lo anterior se debe a que la calibración de los mismos con especificaciones más complejas, requiere de información sobre estructuras de volatilidades y comportamiento de las tasas de interés no disponibles en el mercado colombiano.

La calibración implícita a partir de precios de mercado de instrumentos derivados básicos no es posible, pues no existen en el mercado colombiano. Como alternativa se debe recurrir a la estimación histórica de los parámetros utilizando una variable *proxy* para la tasa de interés de corto plazo. En el mercado colombiano la tasa que cumple de manera más cercana esta condición es la Tasa de Interés Interbancaria –TIB–, con la cual es posible calibrar el parámetro de volatilidad de las tasas de interés. Sin embargo, el parámetro de velocidad de reversión a la media no es posible inferirse bajo esta metodología, pues da como resultado valores inferiores al 2%, lo cual implica una reversión demasiado lenta como para tener sentido económico.

Los modelos GARCH sirven como primera aproximación a la estimación de dichos parámetros debido a que son robustos ante la presencia de mala especificación y a su

⁴¹ Hull y White (2000) presentan una metodología para calibrar su modelo con supuestos más complejos, tales como, volatilidades no constantes y velocidad de reversión no constantes. No obstante, este tipo de procedimientos tienen problemas de sobreparametrización e inestabilidad de los parámetros (Hull y White, 1994a).

fácil implementación. Los modelos que mejor se ajustan con miras a estimar la volatilidad de los cambios simples y porcentuales de la TIB son los modelos EGARCH.

El parámetro de reversión a la media estimado para el modelo de HW es de 1,84% y para el modelo de BK es de 1,38%. Estos valores son muy pequeños respecto a los valores encontrados en estudios empíricos en otros países. El valor de las opciones depende negativamente del valor de la velocidad de reversión a la media.

Los resultados del trabajo sirven como primera aproximación a la solución del problema de valoración de instrumentos derivados de tipos de interés en Colombia. Sin embargo, dado que la calibración de los parámetros de volatilidad y velocidad de reversión a la media es difícil de realizar, pues no se dispone de los instrumentos necesarios para lograrlo, la elección de dichos valores queda a merced del juicio de los usuarios, lo cual es apenas lógico en la etapa inicial de desarrollo del mercado de derivados de tipos de interés en Colombia y siempre se presenta en la utilización de cualquier modelo.

Referencias

- Ait-Sahalia, Y. 1996. "Testing Continuous Time Models of the Spot Interest Rate". *The Review of Financial Studies*, Vol. 9, No. 2, 385-426.
- Almeida, L.A., Yoshino, J.A. y Schirmer, P.P. 2003. "Derivativos de Renda Fixa no Brazil: Modelo Hull-White." *Pesquisa e planejamento econômico* 31 (2).
- Arango, L.E., Melo, L.F. y Vasquez, D.M. 2002. "Estimación de la Estructura a Plazos de Tasas de Interés en Colombia". Borradores de Economía No. 196. Banco de la República de Colombia.
- Avellaneda, M. J. Newman. 1998. "Positive Interest Rates and Non Linear Term Structure Models". *Working Paper, Courant Institute of Mathematical Sciences New York University*.
- Bali, T.G. y Wu, L. 2005. "A comprehensive Analysis of the Short-Term Interest Rate Dynamics". *Working Paper, Zicklin School of Business, Baruch College. March, 2005*.
- Bali, T.G. 2000. "Testing the Empirical Performance of Stochastic Volatility Models of the Short Term Interest Rate". *The Journal of Financial and Quatitative Analysis* 35 (2), 191-215.
- Ball, C.A. and W.N. Torous. 1983. "Bond Price Dynamics and Options". *Journal of Finance and Quantitatives Analysis* 18, 517-31.
- Bessada L.,O.M., C.A. Nunes C., e Cesar das Neves. 2003. "Aplicação do Modelo de Black, Derman & Toy à Precificação de Opções sobre Títulos de Renda Fixa." *Trabalhos para Discussao* 74, Banco Central do Brazil.
- Björk, Thomas; B.J. Christensen, and A. Gombani. Sin fecha. "Some Control Theoretic Aspects of Interest Rate Theory." *Working Paper. Department of Finance*

Stockholm School of Economics; Institute of Mathematics, University of Aarhus and LADSEB-CNR, Italy.

- Björk, Thomas. 2003 “On the Geometry of Interest Rate Models.” Lecture Notes in Mathematics, Springer.
- Black, F., E. Derman, and W. Toy. 1990. “A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options”, *Financial Analyst Journal*, Jan.-Feb., 33-39
- Black, F., and P. Karasinski. 1991. “Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal.” *Financial Analyst Journal*, July-Aug., 52-59.
- Bolder, DJ. Johnson, G. y Metzler, A. 2004. “An Empirical Analysis of Canadian Term Structure of Zero Coupon Interest Rates”. *Bank of Canada Working Paper* 2004-48.
- Bollerslev, T. 1986. “Generalizad Autorregressive Conditional Heteroscedasticity.” *Journal of Econometrics* 31, 307-327.
- Bollerslev, T. and J. Wooldridge. 1992. “Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamics Model with Time Varying Covariances.” *Econometric Reviews* 11, 143 – 172.
- Brace, A., Gatarek, D., and Musiela, M. 1997. “The Market Model of Interest Rate Dynamics.” *Mathematical Finance* 7, 127-155.
- Brenan, M.J. and E. S. Schwartz. 1979. “A Continuous Time Approach to Pricing Bonds”. *Journal of Banking and Finance* 3, 133-155.
- Brenner, R.J., Harjes, R.H. and Kroner, K.F. 1996. “Another Look at Models of the Short Interest Rate”. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 3, No1, 85-107.
- Brigo, D. y F. Mercurio. 2006. *Interest Rate Models- Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit*. Springer, 981 p.
- Campbell, J.Y., Lo A.W. y MacKinlay, A.C. *The econometric of financial markets*. Princeton University Press. 1997. 611 p.
- Carverhill, Andrew. 1994. *When is the Short Rate markovian?*. Mathematical Finance. Blackwell Publishers.
- Chan K.C., A. Karolyi, F.A. Longstaff y A.B. Sanders. 1992. “The Volatility of Short Term Interest Rates: An Empirical Comparison of Alternative Models of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, 47 (3), 1209-27.
- Chiarella, Carl y Oh Kang Kwon. 2007. “Classes of Interest Rate Models Under The HJM Framework.” Working Paper, *School of Finance and Economics and University of Technology Sydney*.

- Cox, J.C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross. 1985. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Journal of Finance* 35, 389-403.
- Darío, A.de G. e Barossi-Filho, M. 2002. "Estimação de Modelos em Tempo Contínuo: Taxa de Juros de Curto Prazo e Simulações de Monte Carlo". *Working Paper, Universidad de São Paulo, Brazil*.
- Dothan, U.L. 1978. "On the Term Structure of Interest Rate". *Journal of Financial Economics* 6, 59-69.
- Dufresne, P.C., Goldstein R.S. y Jones C.S. 2004. Can Interest Rate Volatility be Extracted from the Cross Section of Bond Yields? An investigation of Unspanned Stochastic Volatility. *NBER Working Paper No. W10756*.
- Engel, R. 1982. "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance U.K. inflation." *Econometrica* 50 (4), 987 – 1008.
- Gluckstern, M.C. (2001). "Aplicação do Modelo Hull-White a Precificação de Opções sobre IDI". *Working Paper, FGV/EAESP, Brazil*.
- Ferreira, B. (2006). "Valoração de uma opção sobre um contrato futuro." Dissertação de Mestrado em Engenharia Industrial, *Pontifícia Universidad Católica do Rio de Janeiro, Brazil*.
- Filipovic, D. (1999). "A Note on the Nelson-Siegel Family". *Working Paper, Departement Mathematik, ETH, Rämistrasse 101, CH-8092 Zürich, Switzerland*.
- Filipovic, D. 2006. "The Geometry of Interest Rate Model". Lectures Notes from the Dimitsana Summer School 2005, *Department of Mathematics, University of Munich*.
- Gong, F. and E.M. Remolona. 1997."Two Factors along the Yield Curve" *The Manchester School Supplement* 65, 1-31.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton. 1988. "Bond Pricing and Term Structure of the Interest Rates: A New Methodology", *Working Paper, Cornell University*.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton. 1992. "Bond Pricing and Term Structure of the Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation". *Econométrica* 60 (1), 77-105.
- Ho, T.S.Y., and S.-B. Lee. 1986. "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims." *Journal of Finance* 41, 1011-1129.
- Hughston, L. 2000. *The New Interest Rate Models*. Risk Books. 346 p.
- Hull, J. and A. White. 1990. "Pricing Interest Rate Derivative Securities". *Review of Financial Studies* 3, 573-592.

- Hull, J. and A. White. 1993. "One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28, 235-254.
- Hull, J. and A. White. 1994a. "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models". *Journal of Derivatives* 2 (Fall), 7-16.
- Hull, J. and A. White. 1994b. "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Two-Factor Models". *Journal of Derivatives* 2 (Winter), 37-48.
- Hull, J. and A. White. 1996a. "Using Hull-White Interest Rate Trees". *Journal of Derivatives* 3 (Spring), 26-36.
- Hull, J. and A. White. 1996b. *Hull-White on Derivatives: A Compilation of Articles*, Risk Books Publications, 378 p.
- Hull, J. and A. White. 2000. "The General Hull-White Model and Super Calibration". *Working Paper, Joseph L. Rotman School of Management, University of Toronto*.
- Hull, John. 2003. *Options, Futures and Others Derivatives*. Prentice Hall, 5th Edition, 744 p.
- Jamshidian, F. 1997. "Libor and Swap Market Models and Measures". *Finance and Stochastics* 1, 293-330.
- Jegadeesh, N. and G. G. Pennacchi. 1996. "The Behavior of Interest Rates Implied by the Term Structure of Eurodollar Futures." *Journal of Money, Credit and Banking* 28 (3), 426-451.
- Johnson, Grahame. 2004. "Government of Canada Yield Curve Dynamics, 1986-2003". *Bank of Canada Review*, Winter, 2004-2005.
- Langtieg, T.C. (1980). "A Multivariate Model of The Term Structure". *The Journal of Finance* 35 (1), 71-97.
- Loretan, M. 1997. "Generating Markets Risk Scenarios Using Principal Components Analysis: methodological and practical consideration". *Federeral Reserve Board, USA. BIS Working Paper*.
- Melo, L.F. y Vasquez, D.M. 2002. "Estimación de la Estructura a Plazos de Tasas de Interés en Colombia por medio del método de funciones *B-spline* cúbicas". Borradores de Economía No. 210. Banco de la República de Colombia.
- Moraleda, J.M., y T.C.F., Vorst. 1996. "The Valuation of Interest Rate Derivatives: Empirical Evidence from the Spanish Market". *Working Paper, Universidad Autónoma de Madrid y Tinbergen Institute, Erasmus University Róterdam*.
- Miltersen, K.r., Sandmann K., y Sondermann D. 1997. "Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates. *The Journal of Finance* 52, 409-430.

- Nelson, C. y A. Siegel. 1987. "Parsimonious Modelling of Yield Curves". *Journal of Business* 60 (4), 473-89.
- Nelson, D. B. y D. Foster. 1995. "Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH Models II: making the right forecast with the wrong model". *Journal of Econometrics* 67, 341 – 372.
- Nelson, D. B. 1991. "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach." *Econometrica* 59, 347 – 370.
- Ochoa, M. 2006. "Interpreting an Affine Term Structure Model for Chile". *Working Paper 380, Banco Central de Chile*.
- Ramírez, Andrés y Juan Carlos Botero. 2007. "Modelos de Tasas de Interés a Corto Plazo: Un ejercicio para la economía colombiana, 2001-2006". Tesis de Grado (Maestría en Finanzas), *Universidad EAFIT, Medellín*.
- Rebonato, R. (1996). "Interest Rate Option Models" John Wiley & Sons. 372 p.
- Rebonato, R. (2004). "Interest rate term structure pricing models: a review". *Royal Society of London Proceedings Series A*, vol. 460, Issue 2043, p.667-728.
- Rendleman R. and B. Bartter. 1980. "The pricing of Options on Debt Securities". *Journal of Financial and Quatitative Analysis* 15, 11-24.
- Silva de O., Alberto. 2003. "Modelos de Estrutura a Termo de Tazas de Juros: Um Teste Empírico." Dissertação de Mestrado, Fundação Getúlio Vargas, Escola de Pós-graduação em Economia.
- Smith, D.L. 2002. "Markov-Switching and Sthocastic Volatility Diffusion Models of Short-Term Interest Rates." *Journal of Business and Economic Statistics* 20 (2), 183-197.
- Zuñiga, S. 1999. "Modelos de tasas de interés en Chile: una revisión." *Cuadernos de economía*, Año 36, No 108, Agosto, 875 – 893.
- Svensson, L.E.O. 1994. "Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992–1994," *IMF Working Paper* No. 114.
- Svoboda, Simona. 2004. *Interest Rate Models*. Palgrave, 275 p.
- Tuckman, Bruce. (2002). *Fixed Income Securities: Tools for Today's Markets*. Wiley. 512 p.
- Varma, J. 1996. "Bond Valuation and the Pricing of Interest Rate Options in India". *Journal of Applied Finance* 2(2), 161-176.
- Vasicek, O.A., 1977. "An Equilibrium Characterization of the Term Structure." *Journal of Financial Economics* 5, 177-188

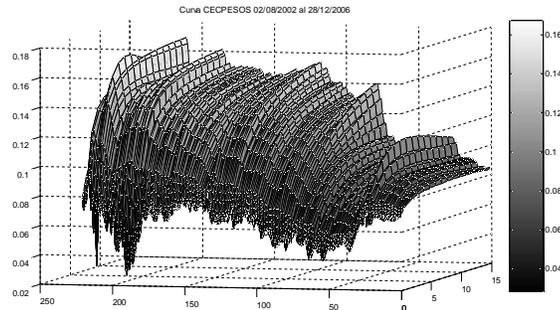
- Venegas, M. Francisco. 2005. *Riesgos Financieros y Económicos: Productos Derivados y Decisiones Económicas Bajo Incertidumbre*. Thomson, p. 1139.
- Vieira, C.A, e Valls, P.L. 2000. “Modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juros: Dinâmica, Avaliação de Contratos Derivativos, Gerenciamento de Risco e Formulação de estratégias”. *Financelab Working Paper, Universidad de São Paulo, Brazil*.
- Vojtek, M. 2004.”Calibration of Interest Rate Models: Transition Market Case”. *Working Paper, CERGE-EI, Prague*.

Anexos

Anexo 1. Análisis de Componentes Principales para la estructura a plazos de tasas de interés colombiana de agosto de 2002 a diciembre de 2006.

El Gráfico A1 presenta la estructura a plazos de tasas de interés estimada por la Bolsa de Valores de Colombia con la metodología de Nelson y Siegel. Los datos corresponden a estimaciones hechas cada semana durante los días jueves desde el 01/08/2002 hasta el 28/12/2006.

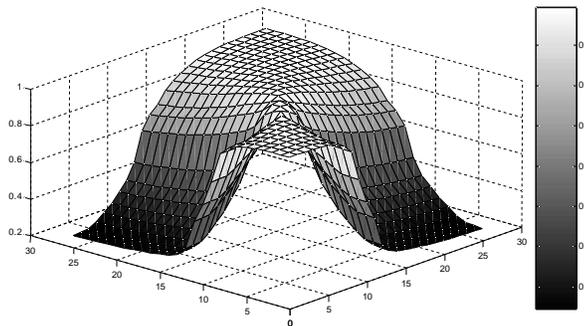
Gráfico A1. Estructura a Plazos de Tasas de Interés para el periodo entre 2003 y 2006



Fuente: Datos BVC. Elaboración de los Autores.

El análisis de componentes principales requiere que las variables estén altamente correlacionadas. El Gráfico A2 presenta la estructura de correlaciones entre las tasas de interés calculadas con la metodología de Nelson y Siegel a diferentes plazos (En años).

Gráfico A2. Correlaciones de las tasas de interés a diferentes plazos para el periodo entre 2003 y 2006



Fuente: Datos BVC. Elaboración de los Autores.

Como puede observarse en la Tabla A1 la correlación entre las tasas de interés a diferentes plazos para el periodo de análisis es alta, lo cual permite seguir adelante con el análisis de componentes principales.

Tabla A1. Correlación de las tasas de interés a diferentes plazos (En días) para el periodo entre 01/08/2002-28/12/2006

Días	1	2	3	10	20	30	45	60	91	182	270	365	730	1095	1460	1825	2190	2555	2920	3285	3650	4015	4380	4745	5110	5475	
1	1,000																										
2	1,000	1,000																									
3	1,000	1,000	1,000																								
10	0,999	0,999	0,999	1,000																							
20	0,995	0,995	0,996	0,999	1,000																						
30	0,988	0,989	0,990	0,994	0,999	1,000																					
45	0,973	0,974	0,976	0,983	0,992	0,997	1,000																				
60	0,953	0,955	0,957	0,967	0,979	0,989	0,997	1,000																			
91	0,902	0,904	0,907	0,922	0,941	0,958	0,977	0,990	1,000																		
182	0,732	0,735	0,739	0,764	0,797	0,828	0,869	0,903	0,954	1,000																	
270	0,603	0,607	0,611	0,640	0,680	0,718	0,769	0,814	0,887	0,985	1,000																
365	0,509	0,514	0,518	0,550	0,593	0,635	0,692	0,743	0,829	0,958	0,993	1,000															
730	0,364	0,369	0,374	0,407	0,454	0,499	0,562	0,620	0,720	0,890	0,954	0,982	1,000														
1095	0,326	0,331	0,335	0,369	0,415	0,460	0,523	0,581	0,683	0,860	0,930	0,963	0,996	1,000													
1460	0,312	0,317	0,321	0,354	0,400	0,443	0,506	0,563	0,663	0,839	0,911	0,946	0,986	0,997	1,000												
1825	0,305	0,309	0,314	0,346	0,390	0,433	0,494	0,550	0,648	0,822	0,893	0,929	0,974	0,990	0,998	1,000											
2190	0,299	0,304	0,308	0,339	0,383	0,425	0,484	0,539	0,635	0,805	0,876	0,912	0,960	0,980	0,992	0,998	1,000										
2555	0,294	0,298	0,303	0,333	0,376	0,417	0,475	0,528	0,622	0,789	0,859	0,895	0,945	0,968	0,983	0,993	0,998	1,000									
2920	0,289	0,293	0,298	0,327	0,369	0,409	0,466	0,518	0,610	0,773	0,842	0,877	0,929	0,955	0,973	0,986	0,994	0,999	1,000								
3285	0,284	0,288	0,292	0,321	0,362	0,401	0,457	0,508	0,598	0,758	0,825	0,860	0,913	0,941	0,962	0,977	0,988	0,995	0,999	1,000							
3650	0,279	0,283	0,288	0,316	0,356	0,394	0,449	0,499	0,587	0,743	0,810	0,844	0,898	0,927	0,949	0,967	0,980	0,990	0,996	0,999	1,000						
4015	0,275	0,279	0,283	0,311	0,350	0,387	0,441	0,490	0,576	0,730	0,795	0,829	0,882	0,913	0,937	0,956	0,972	0,983	0,991	0,996	0,999	1,000					
4380	0,271	0,275	0,279	0,306	0,344	0,381	0,434	0,482	0,567	0,717	0,781	0,815	0,868	0,899	0,925	0,946	0,963	0,976	0,986	0,993	0,997	0,999	1,000				
4745	0,267	0,271	0,275	0,302	0,339	0,376	0,427	0,474	0,558	0,706	0,768	0,801	0,854	0,886	0,913	0,935	0,954	0,968	0,980	0,988	0,994	0,998	0,999	1,000			
5110	0,264	0,268	0,271	0,298	0,335	0,371	0,421	0,468	0,550	0,695	0,756	0,789	0,842	0,874	0,901	0,925	0,945	0,961	0,973	0,983	0,990	0,995	0,998	1,000	1,000		
5475	0,261	0,265	0,268	0,294	0,331	0,366	0,416	0,462	0,542	0,685	0,746	0,778	0,830	0,863	0,891	0,915	0,936	0,953	0,967	0,978	0,986	0,992	0,996	0,998	1,000	1,000	

Fuente: Datos BVC. Cálculo y Elaboración de los Autores

La Tabla A2 ilustra los resultados del análisis para los primeros diez componentes principales para el periodo de análisis. Como puede observarse los primeros tres componentes explican casi el 100% de la variabilidad de la estructura a plazos de tasas de interés. El componente principal uno explica el 71,8%, el dos el 25,5% y el tres el 2,5%. Estos componentes se asocian en la literatura al Nivel, Pendiente y Curvatura de la estructura a plazos de tasas de interés.

Tabla A2. Componentes principales para el periodo entre 2003 y 2006

	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 4	Comp 5	Comp 6	Comp 7	Comp 8	Comp 9	Comp 10
Eigenvalue	1.867.999	6.630.539	0,660332	0,02761	0,001469	5,58E-05	1,82E-06	3,87E-08	7,09E-10	1,08E-11
Varianza Explicada	0,718461	0,255021	0,025397	0,001062	0,000057	0,000002	0	0	0	0
Proporción Acumulada	0,718461	0,973482	0,998879	0,999941	0,999998	1,000.000	1,000.000	1,000.000	1,000.000	1,000.000
Fuente: Cálculo de los autores										
Eigenvectors:										
Variable	Vector 1	Vector 2	Vector 3	Vector 4	Vector 5	Vector 6	Vector 7	Vector 8	Vector 9	Vector 10
1	-0,137806	0,308559	0,142625	-0,136555	0,127684	-0,148473	0,153589	-0,133081	0,110989	-0,104663
2	-0,138632	0,307658	0,139686	-0,132421	0,122429	-0,140594	0,143756	-0,122981	0,100732	-0,09277
3	-0,139455	0,306748	0,136744	-0,128297	0,117205	-0,132792	0,134055	-0,113061	0,09072	-0,081175
10	-0,145132	0,300152	0,116096	-0,099712	0,081537	-0,080342	0,069831	-0,048616	0,027299	-0,010003
20	-0,152954	0,29008	0,086558	-0,059912	0,033485	-0,012122	-0,010797	0,028752	-0,044176	0,064354
30	-0,160383	0,279323	0,057186	-0,021599	-0,0109	0,04806	-0,078578	0,089753	-0,095171	0,110554
45	-0,170689	0,26213	0,013943	0,0325	-0,070135	0,123195	-0,157137	0,153196	-0,138447	0,136642
60	-0,179892	0,244008	-0,027694	0,081911	-0,120191	0,180552	-0,209901	0,187075	-0,149122	0,123454
91	-0,19527	0,205288	-0,106311	0,167289	-0,194618	0,247478	-0,249625	0,184913	-0,101575	0,02493
182	-0,217157	0,102735	-0,265826	0,293342	-0,232956	0,173338	-0,065269	-0,054462	0,154497	-0,243823
270	-0,221204	0,033963	-0,338847	0,299241	-0,138586	-0,034452	0,180721	-0,225577	0,194586	-0,136485
1 año	-0,220325	-0,013618	-0,369669	0,251397	-0,003369	-0,234548	0,331052	-0,225623	0,02823	0,17096
2 año	-0,215719	-0,089453	-0,34257	-0,010764	0,345177	-0,394113	0,058677	0,306621	-0,406459	0,250839
3 año	-0,215313	-0,114522	-0,263215	-0,198482	0,371605	-0,07666	-0,309836	0,244881	0,119317	-0,360896
4 año	-0,215709	-0,12708	-0,179489	-0,293837	0,230213	0,21153	-0,269132	-0,149153	0,338156	-0,068012
5 año	-0,215756	-0,135007	-0,101168	-0,319326	0,0439	0,315008	-0,012473	-0,316665	0,043476	0,308448
6 año	-0,215288	-0,140607	-0,031176	-0,297559	-0,119097	0,255555	0,211634	-0,175826	-0,262872	0,179254
7 año	-0,214412	-0,144733	0,02986	-0,246255	-0,229168	0,108274	0,286623	0,081833	-0,270127	-0,168668
8 año	-0,213278	-0,147792	0,082308	-0,178123	-0,279448	-0,055424	0,213968	0,258951	-0,037033	-0,296661
9 año	-0,212019	-0,15003	0,126989	-0,101807	-0,274645	-0,185932	0,054635	0,266413	0,210114	-0,106967
10 año	-0,210729	-0,151627	0,164879	-0,022293	-0,224231	-0,256005	-0,117259	0,123443	0,288106	0,183066
11 año	-0,209468	-0,15272	0,196959	0,055007	-0,138707	-0,255439	-0,23909	-0,085344	0,15221	0,297127

12 año	-0,208272	-0,153422	0,224132	0,129936	-0,027798	-0,185084	-0,268286	-0,253812	-0,105829	0,119445
13 año	-0,207158	-0,15382	0,247197	0,200737	0,100257	-0,052014	-0,182074	-0,284135	-0,306073	-0,214925
14 año	-0,206131	-0,153986	0,266832	0,266892	0,238845	0,13383	0,026427	-0,101837	-0,236037	-0,341027
15 año	-0,205191	-0,153976	0,283612	0,328261	0,382858	0,361754	0,352918	0,339891	0,305379	0,253039
Fuente: Cálculo de los autores										

La Tabla A3 presenta los resultados del análisis de componentes principales para cada año entre 2003 y 2006. Estos resultados permiten apreciar que para los años más recientes, 2005 y 2006, el componente principal uno, Nivel, explica la mayor proporción de la varianza de la estructura a plazos de tasas de interés en el mercado colombiano. Esto soporta la elección de modelos unifactoriales de tasas de interés para ser aplicados en el mercado colombiano.

Tabla A3. Componentes principales para cada año de 2003 a 2006

Componentes	2003			2004			2005			2006		
	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 1	Comp 2	Comp 3
Eigenvalue	2.127.290	3.033.410	1.444.301	1.393.203	1.042.141	1.591.214	2.248.056	3.102.920	0.406138	2.271.242	3.059.886	0.176872
Varianza Explicada.	0.818188	0.116670	0.055550	0.535847	0.400823	0.061201	0.864637	0.119343	0.015621	0.873555	0.117688	0.006803
Proporción Acumulada	0.818188	0.934858	0.990408	0.535847	0.936671	0.997871	0.864637	0.983980	0.999601	0.873555	0.991242	0.998045

Fuente: Cálculo de los autores

Variable/Eigen vectors:	Vector 1	Vector 2	Vector 3	Vector 1	Vector 2	Vector 3	Vector 1	Vector 2	Vector 3	Vector 1	Vector 2	Vector 3
1 día	-0.205636	0.153193	0.125415	-0.129041	0.268579	0.097428	-0.182817	0.281115	0.089866	-0.190328	0.238892	0.082116
2 días	-0.205604	0.153732	0.125047	-0.128476	0.269002	0.096417	-0.183043	0.280121	0.088139	-0.190421	0.238380	0.081619
3 días	-0.205572	0.154275	0.124676	-0.127909	0.269423	0.095403	-0.183268	0.279128	0.086415	-0.190514	0.237868	0.081122
10 días	-0.205327	0.158194	0.121995	-0.123858	0.272347	0.088205	-0.184805	0.272178	0.074439	-0.191151	0.234302	0.077652
20 días	-0.204918	0.164167	0.117897	-0.117828	0.276428	0.077631	-0.186885	0.262270	0.057621	-0.192026	0.229256	0.072728
30 días	-0.204428	0.170622	0.113450	-0.111512	0.280373	0.066725	-0.188833	0.252402	0.041162	-0.192861	0.224268	0.067843
45 días	-0.203511	0.181320	0.106032	-0.101506	0.285978	0.049775	-0.191514	0.237718	0.017187	-0.194044	0.216897	0.060592
60 días	-0.202319	0.193417	0.097565	-0.090878	0.291121	0.032178	-0.193918	0.223227	-0.005888	-0.195146	0.209662	0.053436
91 días	-0.198605	0.223926	0.075769	-0.067104	0.299878	-0.005823	-0.198074	0.194101	-0.050587	-0.197190	0.195149	0.038959
182 días	-0.160537	0.381721	-0.052566	0.010911	0.305662	-0.119333	-0.205210	0.117282	-0.158120	-0.201695	0.155999	-0.000976
270 días	0.004081	0.526681	-0.294734	0.081148	0.283042	-0.207700	-0.207430	0.056946	-0.231722	-0.204493	0.122822	-0.035954
1 año	0.146632	0.348327	-0.330496	0.136348	0.244414	-0.265620	-0.207273	0.005890	-0.285165	-0.206380	0.091597	-0.069931
2 años	0.200008	0.142250	-0.243406	0.217092	0.135733	-0.305381	-0.201783	-0.104092	-0.352525	-0.208396	0.003861	-0.170439
3 años	0.204212	0.118850	-0.198779	0.238371	0.090934	-0.276691	-0.198604	-0.149860	-0.327450	-0.207364	-0.053126	-0.234614
4 años	0.206042	0.115644	-0.151562	0.248660	0.069587	-0.234895	-0.197822	-0.170892	-0.269698	-0.205424	-0.094052	-0.270334
5 años	0.207760	0.116581	-0.097159	0.255303	0.058242	-0.185794	-0.198137	-0.180390	-0.198667	-0.203179	-0.125602	-0.281165
6 años	0.209284	0.117826	-0.037148	0.259917	0.052171	-0.130614	-0.198771	-0.183811	-0.123297	-0.200916	-0.151090	-0.269286
7 años	0.210123	0.118200	0.025192	0.262831	0.049305	-0.070191	-0.199335	-0.183845	-0.048653	-0.198797	-0.172298	-0.236515
8 años	0.209917	0.117432	0.086393	0.263981	0.048549	-0.005635	-0.199667	-0.181993	0.022239	-0.196892	-0.190226	-0.184657
9 años	0.208590	0.115643	0.143676	0.263197	0.049213	0.061540	-0.199726	-0.179148	0.087672	-0.195190	-0.205429	-0.115651
10 años	0.206297	0.113109	0.195352	0.260347	0.050797	0.129483	-0.199535	-0.175856	0.146859	-0.193615	-0.218186	-0.031679
11 años	0.203308	0.110127	0.240769	0.255422	0.052912	0.196180	-0.199139	-0.172449	0.199632	-0.192044	-0.228612	0.064750
12 años	0.199902	0.106947	0.280028	0.248572	0.055250	0.259715	-0.198591	-0.169119	0.246217	-0.190336	-0.236730	0.170768
13 años	0.196308	0.103750	0.313662	0.240098	0.057581	0.318514	-0.197938	-0.165974	0.287064	-0.188357	-0.242542	0.283196
14 años	0.192694	0.100650	0.342380	0.230401	0.059748	0.371509	-0.197217	-0.163065	0.322728	-0.186003	-0.246079	0.398696
15 años	0.189171	0.097712	0.366916	0.219919	0.061659	0.418187	-0.196461	-0.160410	0.353797	-0.183215	-0.247435	0.513997

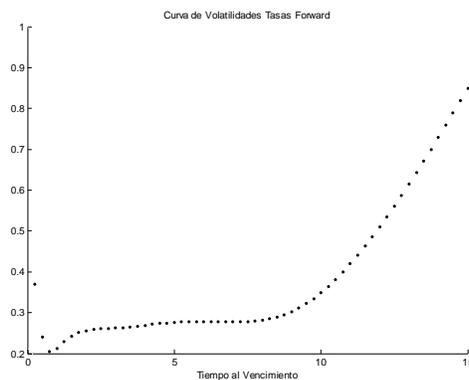
Fuente: Cálculo de los autores

Anexo 2. Curva de Volatilidades de la Estructura a Plazos de Tasas de Interés en Colombia

La curva de volatilidades de las tasas *forward* observada en los mercados más desarrollados tiende a caracterizarse por tener volatilidades crecientes en el corto y mediano plazo, para luego ir disminuyendo gradualmente para las tasas en periodos más distantes. Este fenómeno es uno de los objetos de investigación que más llama la atención de investigadores y profesionales en finanzas. Brigo y Mercurio (2006) muestran cómo los modelos de HW y BK capturan esta característica más o menos adecuadamente. Sin embargo, la estructura de volatilidades de las tasas *forwards* discretas implícitas en las estimaciones de la estructura a plazos de tasas de interés por la Bolsa de Valores de Colombia, presentan una característica totalmente contraria al hecho estilizado mencionado anteriormente para los mercados más desarrollados.⁴² Dicha estructura de volatilidades es decreciente en el corto plazo y luego crece para las tasas en el más largo plazo. Por esta razón dicha curva de volatilidades no es susceptible de ser utilizada para la implementación de los modelos de tipos de interés.⁴³

Rebonato (1996) indica que en el mercado en general las tasas de más corto plazo exhiben una mayor volatilidad que las de largo plazo. Si ocurre lo contrario, esto implicaría un parámetro de velocidad de reversión a la media con signo negativo, lo cual es contrario al fenómeno de reversión a la media de las tasas de interés. Además, esta situación implicaría una estructura de volatilidades explosiva. El Gráfico A3 presenta dicha curva de volatilidades para el mercado colombiano.⁴⁴

Gráfico A3. Curva de Volatilidades de las tasas forwards discretas Implícitas en la estructura a plazos de tasas de interés construida con la metodología de Nelson y Siegel (1987) para Colombia, año 2006.



Fuente: Cálculo de los Autores

⁴² Se trabaja con tasas forwards debido a que dichas tasas son la variable subyacente a los contratos Cap.

⁴³ Además, los modelos de reversión a la media implican que las tasas de largo plazo son menos volátiles que las de corto plazo. Por este motivo, el modelo de Black, Derman y Toy (1990) no se podría calibrar a partir de estas volatilidades, debido a que dicho modelo impone la reversión a la media a través de una estructura de volatilidades decrecientes.

⁴⁴ Estas volatilidades se calcularon como la desviación estándar del cambio proporcional de las tasas forwards discretas implícitas en la curva cero cupón en pesos de la BVC. Se calcularon 60 series de forwards a intervalos de tres meses para hacerlas comparables con las volatilidades negociadas en los Caps en los mercados internacionales, los cuales transan volatilidades de Caps con liquidaciones trimestrales a varios plazos.

Anexo 3. Estimación econométrica de la volatilidad

En este anexo se describe el proceso de estimación de la volatilidad que se utiliza para calibrar los modelos de HW y BK. Para el primero se modelan las diferencias diarias de la Tasa de Interés Interbancaria –TIB-, para el segundo se modelan los cambios logarítmicos de la misma.

Las pruebas de raíz unitaria para las variables según las especificaciones de los modelos se presentan en la Tabla A4. Estas pruebas permiten concluir que las variables son estacionarias y es posible pasar a la estimación de los modelos en series de tiempo bajo la metodología ARIMA-GARCH.

Tabla A4. Pruebas de Raíz Unitaria para la TIB

Pruebas de Raíz Unitaria	ADF t-statistic (p-value)	PP t-statistic (p-value)	KPSS* t-statistic (p-value)
TIB en diferencias (Modelo HW)	-36.09953 (0.0000)	-35.9994 (0.0000)	0.861331 (0.463000)
Log(TIB) en diferencias (Modelo BK)	-38.69070 (0.0000)	-39.02142 (0.0000)	0.134106 (0.146000)

*Hipótesis Nula: Serie de las diferencias de la TIB es estacionaria

Fuente: Banco de la República. Cálculo de los autores

Para estimar los modelos es necesario realizar la discretización de los mismos. El modelo de HW con nivel de reversión constante y volatilidad en función del tiempo viene dado por la siguiente expresión:

$$dr = a[b - r(t)]dt + \sigma(t)dz$$

La discretización de Euler de este modelo implica estimar:

$$\begin{aligned} \Delta r_t &= ab - ar_{t-1} + \varepsilon_t \\ r_t - r_{t-1} &= \alpha + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t \\ \alpha &= ab, \quad -\beta = a \wedge \sigma(t)dz = \varepsilon_t \\ E[\varepsilon_t / I_{t-1}] &= 0 \\ E[\varepsilon_t^2 / I_{t-1}] &= h_t^2 \end{aligned}$$

En esta discretización $E[\Delta r_t] = 0$ por tanto la media incondicional del proceso viene dado por $E[\Delta r_t] = 0 = \alpha + \beta r \Rightarrow r = -\alpha/\beta$ donde $-\beta = a$.

Para el modelo de BK se tiene:

$$d \ln r = a[\ln b - \ln r(t)]dt + \sigma(t)dz$$

La discretización de Euler de este modelo nos conduce a estimar:

$$\begin{aligned} \Delta \ln r_t &= a \ln b - a \ln r_{t-1} + \varepsilon_t \\ \ln r_t - \ln r_{t-1} &= \alpha + \beta \ln r_{t-1} + \varepsilon_t \\ \alpha &= a \ln b, \quad -\beta = a \wedge \sigma(t) dz = \varepsilon_t \\ E[\varepsilon_t / I_{t-1}] &= 0 \\ E[\varepsilon_t^2 / I_{t-1}] &= h_t^2 \end{aligned}$$

En esta discretización $E[\Delta \ln r_t] = 0$ por tanto la media incondicional del proceso viene dado por $E[\Delta \ln r_t] = 0 = \alpha + \beta \ln r \Rightarrow r = \exp(-\alpha/\beta)$ donde $-\beta = a$.

Ambas variables presentan agrupamiento de volatilidad y efectos ARCH. Los modelos que presentaron el mejor ajuste fueron los modelos EGARCH. Para el caso de la discretización del modelo de BK, fue necesario incluir rezagos de las diferencias porcentuales en la ecuación de la media. Este hallazgo es similar al de Ramírez y Botero (2007). Estos modelos se presentan en la Tabla A5.

Tabla A5. Modelos EGARCH para la diferencias y las diferencias logarítmicas de la TIB, respectivamente.

Modelo	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	\hat{c}_0	\hat{c}_1	\hat{c}_2	\hat{c}_3
EGARCH(1,1) $Log(h_t^2) = c_0 + c_1 \left \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} \right + c_2 Log(h_{t-1}^2)$	0.001294 (0.0009)	-0.018438 (0.0005)		-5.071597 (0.0001)	0.713819 (0.0000)	0.664796 (0.0000)	-
EGARCH(1,1) $Log(h_t^2) = c_0 + c_1 \left \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} \right + c_2 Log(h_{t-1}^2) + c_3 \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}}$	-0.036834 (0.0458)	-0.013851 (0.0491)	-0.109740 (0.0280)	-0.4918055 (0.0004)	0.618213 (0.0000)	0.471088 (0.0001)	-0.227414 (0.0210)

Los modelos se estimaron por Quasi Máxima Verosimilitud para hacer que las pruebas estadísticas fueran robustas ante la presencia de heterocedasticidad en los residuales (Bollerslev y Wooldridge, 1992). Los modelos de la Tabla A5, cumplen con los supuestos generales y las restricciones sobre los parámetros como puede comprobarse fácilmente. Es importante anotar que otros tipos de modelos como los PAGARCH y los TGARCH no cumplen con los supuestos sobre los residuales y las condiciones sobre los parámetros. Las tablas A6 y A7 presentan algunas especificaciones alternativas de estos modelos.

Tabla A6. Diferencias de la Tasa Interbancaria para el Modelo de HW*

Modelo	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_1$	\hat{c}_0	\hat{c}_1	\hat{c}_2	Akaike (Schwarz)
GARCH(1,1) $h_t^2 = c_0 + c_1 h_{t-1}^2 + c_2 \varepsilon_{t-1}^2$	0.000518 (0.0794)	-0.007577 (0.0868)	3.62E-07 (0.4151)	0.611911 (0.0417)	0.293331 (0.0145)	-11.18855 (-11.17049)
EGARCH(1,1) $Log(h_t^2) = c_0 + c_1 \left \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} \right + c_2 Log(h_{t-1}^2)$	0.001141 (0.0041)	-0.016167 (0.0042)	-5.446928 (0.0004)	0.670228 (0.0000)	0.635879 (0.0000)	-11.18774 (-11.16968)

*p-valores entre paréntesis

Los parámetros del modelo GARCH (1,1) de la Tabla A6 no son significativos al estimarse bajo la especificación de errores robustos de Bollerslev y Wooldridge (1992). El modelo EGARCH(1,1) está integrado y, por tanto, su varianza es explosiva.

Tabla A7. Diferencias Logarítmicas de la Tasa Interbancaria para el Modelo de BK*

Modelo	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\zeta}_0$	$\hat{\zeta}_1$	$\hat{\zeta}_2$	$\hat{\zeta}_3$	$\hat{\gamma}$	Akaike (Schwarz)
<i>GARCH</i> (1,1) $h_t^2 = c_0 + c_1 h_{t-1}^2 + c_2 \varepsilon_{t-1}^2$	-0.009355 (0.0150)	-0.003543 (0.0117)	-	0.000119 (0.0000)	0.365230 (0.0000)	0.136522 (0.0000)	-	-	-5.834297 (-5.816234)
<i>GARCH</i> (1,1) <i>GED</i> (0.503183) $h_t^2 = c_0 + c_1 \varepsilon_{t-1}^2 + c_2 h_{t-1}^2$	0.003731 (0.0062)	0.001347 (0.0069)	-0.032306 (0.0000)	1.32E-05 (0.0000)	0.621617 (0.0000)	0.532094 (0.0000)	-	-	-7.679241 (-7.653938)
<i>PGARCH</i> (1,1) <i>GEDFIX</i> (0.27) $h_t^y = c_0 + c_1 \varepsilon_{t-1} + c_2 \varepsilon_{t-1}^y + c_3 h_{t-1}^y$	-0.000634 (0.0000)	-0.000233 (0.0000)	-0.000296 (0.0016)	0.004719 (0.0003)	0.149973 (0.0000)	-0.337177 (0.0019)	0.900798 (0.0000)	0.281089 (0.0000)	-8.952668 (-8.923750)

*p-valores entre paréntesis. Por QML los parámetros del primer modelo no son significativos.

Los parámetros del modelo *GARCH* (1,1) de la Tabla A7 no son significativos al estimarse bajo la especificación de errores robustos de Bollerslev y Wooldridge (1992). Los modelos *GARCH* (1,1) con errores de una Distribución Generalizada y *PGARCH* (1,1) están integrados y, por tanto, su varianza es explosiva.

Para los modelos *EGARCH* seleccionados, las pruebas de Ljung-Box muestran que para la TIB en diferencias no existe autocorrelación en los residuales, ni en los residuales al cuadrado para órdenes menores a 10 rezagos. Para las diferencias porcentuales de la TIB, no se presenta autocorrelación de ningún orden para los residuales, ni para los residuales al cuadrado. La Tabla A6 muestra los resultados de las pruebas de Ljung-Box para ambos modelos.

Tabla A6. Pruebas de Ljung-Box para los residuales y los residuales al cuadrado de los modelos.

Prueba de Ljung-Box para los residuales modelo *EGARCH* para las diferencias de la TIB (Modelo HW)

Rezagos	Autocorrelación	Autocorrelación Parcial	Q-Stat	Prob
1	0.032	0.032	15.247	0.217
2	0.009	0.008	16.323	0.442
3	0.020	0.019	22.166	0.529
4	-0.006	-0.007	22.686	0.686
5	0.042	0.042	48.928	0.429
6	0.039	0.036	70.935	0.312
7	0.044	0.041	99.007	0.194
8	-0.007	-0.012	99.679	0.267
9	0.053	0.053	14.133	0.118
10	0.017	0.011	14.563	0.149

Prueba de Ljung-Box para los residuales al cuadrado del modelo *EGARCH* para las diferencias de la TIB (Modelo HW)

Rezagos	Autocorrelación	Autocorrelación Parcial	Q-Stat	Prob
1	-0.008	-0.008	0.0846	0.771
2	-0.008	-0.008	0.1740	0.917
3	-0.006	-0.006	0.2293	0.973
4	-0.003	-0.003	0.2434	0.993
5	-0.008	-0.008	0.3414	0.997
6	-0.005	-0.006	0.3830	0.999
7	-0.006	-0.007	0.4448	1.000
8	-0.006	-0.006	0.4954	1.000
9	-0.008	-0.008	0.0846	0.771
10	-0.008	-0.008	0.1740	0.917

Prueba de Ljung-Box para los residuales modelo *EGARCH* para las diferencias logarítmicas de la TIB (Modelo BK)

Rezagos	Autocorrelación	Autocorrelación Parcial	Q-Stat	Prob
1	0.048	0.048	34.326	0.064
2	-0.006	-0.009	34.940	0.174
3	0.004	0.005	35.186	0.318
4	-0.010	-0.010	36.546	0.455
5	0.028	0.029	47.994	0.441
6	0.019	0.016	53.269	0.503
7	0.044	0.043	81.632	0.318
8	-0.019	-0.024	87.126	0.367
9	0.032	0.036	10.248	0.331
10	0.015	0.010	10.570	0.392

Prueba de Ljung-Box para los residuales al cuadrado del modelo *EGARCH* para las diferencias logarítmicas de la TIB (Modelo BK)

Rezagos	Autocorrelación	Autocorrelación Parcial	Q-Stat	Prob
1	-0.007	-0.007	0.0761	0.783
2	-0.006	-0.006	0.1213	0.941
3	-0.004	-0.004	0.1452	0.986
4	-0.005	-0.005	0.1873	0.996
5	-0.007	-0.007	0.2513	0.998
6	-0.007	-0.007	0.3149	0.999
7	-0.005	-0.005	0.3452	1.000
8	-0.005	-0.005	0.3770	1.000
9	-0.007	-0.008	0.4555	1.000
10	-0.003	-0.003	0.4676	1.000

Fuente: Cálculo de los Autores

En la Tabla A5 se aprecia que el parámetro de asimetría del modelo *EGARCH* para las diferencias logarítmicas de la TIB es significativo al 95%. Ramírez y Botero (2007) encuentran que para las diferencias simples de la TIB dicho parámetro es significativo al 90%. Estos autores muestran que el signo de dicho parámetro es positivo, lo cual implica que choques positivos en la tasa de interés conllevan a una volatilidad mayor en la misma que los choques negativos. Lo anterior está en línea con lo esperado en esta variable, pues un choque positivo (negativo) implica un aumento (disminución) de la volatilidad de la tasa de interés, lo cual conlleva a una desvalorización (valorización) de los portafolios de renta fija. Sin embargo, según los cálculos de este trabajo, el signo asociado a la asimetría del modelo *EGARCH* para las diferencias simples de la tasa de

interés no es significativo. En cambio, para las diferencias logarítmicas si es significativo, pero con signo negativo.

Contrario a los hallazgos de Ramírez y Botero (2007) esto implicaría que un choque positivo (negativo) lleva una disminución (aumento) de la varianza de la tasa de interés, lo cual conlleva a una desvalorización (valorización) de los portafolios de renta fija. Es decir, que cuando la tasa de interés interbancaria baja, lleva consigo un aumento de la volatilidad. Este fenómeno no tiene una explicación intuitiva inmediata y su análisis se escapa de los propósitos de este trabajo, en consecuencia, sirve como punto de análisis de posteriores estudios. Luego de efectuar los cálculos, se establece que un choque negativo a la tasa de interés conlleva a una varianza que es menor en un 36,5% respecto al caso en el que el choque fuese positivo.

Anexo 4. Calibración implícita de la volatilidad a partir de bonos cero cupón estimados

Los resultados de esta calibración, descrita en el artículo se presentan en la Tabla A7.

Tabla A7. Estadísticas de la calibración implícita de los parámetros para el modelo de HW

2003-2006					
	sigma	a	b	ECM Precios	ECM Tasas
Media	7,60247%	43,49039%	17,99238%	0,03896%	0,02604%
Desviación Est.	11,24187%	26,58812%	3,89922%	0,05426%	0,03316%
Máximo	52,99460%	134,03500%	36,67653%	0,31598%	0,22637%
Mínimo	-30,91769%	10,40548%	10,90289%	0,00128%	0,00114%

2003					
	sigma	a	b	ECM Precios	ECM Tasas
Media	17,29826%	76,97037%	20,11053%	0,05987%	0,05109%
Desviación Est.	17,82548%	22,80568%	4,31758%	0,05221%	0,04000%
Máximo	52,99460%	134,03500%	36,67653%	0,31598%	0,22637%
Mínimo	-30,91769%	30,79825%	15,45327%	0,00363%	0,00834%

2004					
	sigma	a	b	ECM Precios	ECM Tasas
Media	4,87807%	48,03999%	16,38556%	0,03747%	0,02465%
Desviación Est.	3,87237%	12,98125%	1,30854%	0,03940%	0,02519%
Máximo	15,64836%	73,48891%	22,48310%	0,21301%	0,13350%
Mínimo	-1,46692%	10,40548%	14,52075%	0,00356%	0,00267%

2005					
	sigma	a	b	ECM Precios	ECM Tasas
Media	1,42311%	30,98918%	17,85230%	0,05537%	0,02677%
Desviación Est.	5,48846%	15,75315%	4,51763%	0,07579%	0,03295%
Máximo	9,51776%	67,60240%	30,52482%	0,28874%	0,12107%
Mínimo	-8,57932%	11,53272%	13,89348%	0,00248%	0,00209%

2006					
	sigma	a	b	ECM Precios	ECM Tasas
Media	7,25275%	19,21021%	17,73801%	0,00401%	0,00267%
Desviación Est.	4,64442%	7,54839%	3,77243%	0,00189%	0,00119%
Máximo	13,64913%	50,87138%	29,64908%	0,00986%	0,00631%

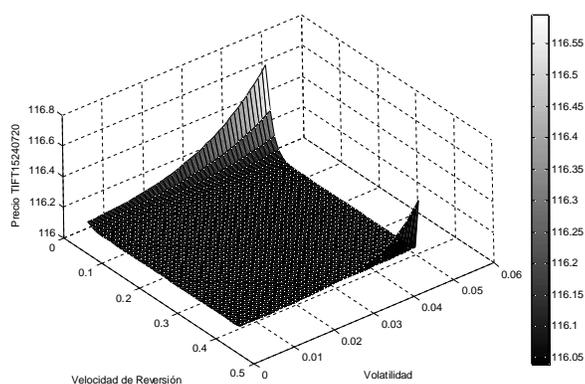
Mínimo	-14,12120%	10,60790%	10,90289%	0,00128%	0,00114%
--------	------------	-----------	-----------	----------	----------

Fuente: Cálculo de los Autores

Anexo 5. Sensibilidad del precio de los bonos y de las opciones sobre bonos ante cambio en la volatilidad y la velocidad de reversión utilizada en los modelos.

La Gráfica A4 ilustra la sensibilidad del precio de un bono con cupones (TIFT15240720) ante cambios en los parámetros de volatilidad y velocidad de reversión. La velocidad de reversión se cambia entre cero y 0.4. La volatilidad se cambia entre 0.005 y 0.05. Como puede observarse los precios de los bonos no son sensibles ante el cambio de estos valores. Esto explica que la calibración se pueda realizar en dos pasos. En el primero, se ajusta la estructura a plazos de tasas de interés, lo cual es independiente de los parámetros de volatilidad y velocidad de reversión. Y en el segundo, se ajustan estos dos últimos parámetros.

Gráfico A4. Sensibilidad del valor de un bono (TIFT15240720) ante cambios en la velocidad de reversión a la media y la volatilidad.



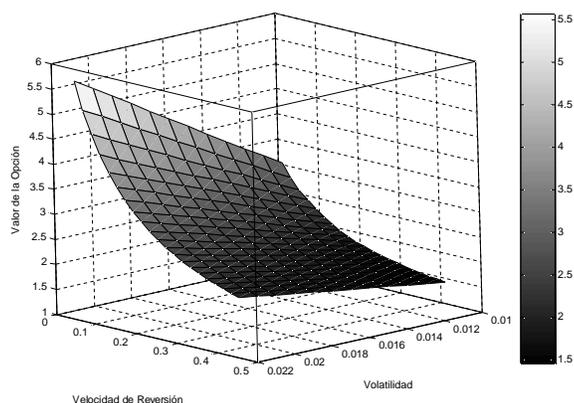
Fuente: Elaboración de los Autores.

De este análisis también se desprende que para valores muy pequeños del parámetro de velocidad de reversión a la media, el precio de los bonos se vuelve sensible al mismo. Lo cual, nos lleva a descartar los valores encontrados para este parámetro cuando se realizó la estimación econométrica. Además, se encontró que cuando este parámetro toma valores superiores a 0.4, algunas veces los modelos no son capaces de replicar la estructura a plazos de tasas de interés iniciales. Así, aunque no se sabe con exactitud el valor de este parámetro, el mismo debe encontrarse aproximadamente en un rango entre 0.05 y 0.4.

El Gráfico A5 presenta la sensibilidad del valor de las opciones sobre bonos con cupones ante cambios en estos parámetros.

Como se aprecia, a valores bajos (altos) de velocidad de reversión a la media y altos (bajos) de volatilidad corresponden valores altos (bajos) para las opciones sobre bonos.

Gráfico A5. Sensibilidad del valor de la opción ante cambios en la velocidad de reversión a la media y la volatilidad.

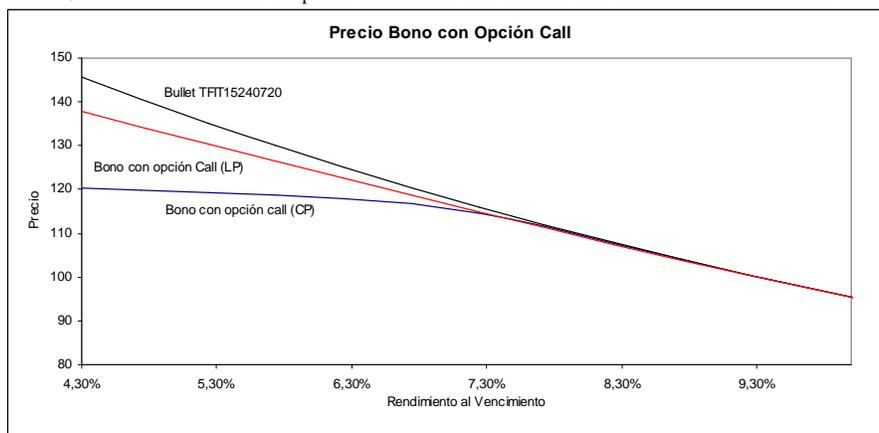


Fuente: Elaboración de los Autores

Lo anterior implica que la selección del valor del parámetro de velocidad de reversión resulta determinante en la valoración de opciones de tipos de interés. Por este motivo, deberá ponerse especial atención a esto a la hora de decidir utilizar los modelos presentados en este trabajo para la valoración de ese tipo de derivados.

Es interesante notar como los bonos con opciones tienen una convexidad negativa para algunos niveles de las tasas de interés. La Gráfica A6 presenta el valor del TES TIFT15240720, de un TES idéntico a éste, excepto que tiene la opción de ser llamado por el emisor el 24 de enero de 2008 (Bono con opción Call CP, Corto Plazo) y de otro TES con la opción de ser llamado por el emisor el 24 de abril de 2015 (Bono con opción Call LP, Largo Plazo). El precio de ejercicio de estas opciones es 115.

Gráfica A6. Sensibilidad del precio de los bonos ante cambios en el rendimiento al vencimiento.



Fuente: Cálculo de los autores.

Como se observa las opciones incorporadas de más corto plazo, tienen un impacto mayor en la convexidad del bono, haciéndolo menos convexo, que las de largo plazo.

Apéndices

Apéndice 1. Relación entre el modelo de HJM y los modelos de HW y BK.

El modelo de HJM provee toda una estructura para la derivación de los demás modelos de tipos de interés. A continuación se muestra como a partir de la estructura general del modelo de HJM es posible deducir los dos modelos objeto de estudio en este trabajo, el de HW y el de BK. La especificación del modelo de HJM es la siguiente:

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t) \\ f(0, T) &= f^M(0, T) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Donde $T \rightarrow f^M(0, T)$ es la curva *forward* instantánea determinada exógenamente en el mercado. $W(t)$ y $\sigma(t, T)$ son vectores N-dimensionales de movimientos Brownianos y de volatilidades, respectivamente. El producto $\sigma(t, T) W(t)$ se debe entender como un producto escalar.

La tasa *forward* instantánea y el precio de un bono cero cupón vienen dados por las ecuaciones (A.2) y (A.3) respectivamente:

$$f(t, T) = -\frac{\partial E_t[e^{-\int_t^T r_s ds}]}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

$$E_t[P(t, T)] = E_t[e^{-\int_t^T r_s ds}] \quad (\text{A.3})$$

Donde $f(t, T)$ es la tasa *forward* instantánea, E_t es el operador de expectativas con respecto al tiempo t , r es la tasa de interés spot instantánea y $P(t, T)$ es el precio de un bono cero cupón en el momento t cuyo valor facial al vencimiento es igual a uno.

Para que el modelo presentado en (A.1) sea libre de arbitraje, HJM prueban que es necesario que la tendencia del modelo, $\mu(t, T)$, tenga la siguiente forma:

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds = \sum_{i=1}^N \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, s) ds \quad (\text{A.4})$$

Así, la dinámica de $f(t, T)$ bajo la medida neutral al riesgo es:

$$\begin{aligned} f(t, T) &= f(0, T) + \int_0^t \sigma(u, T) \int_u^T \sigma(u, s) ds du + \int_0^t \sigma(s, T) dW(s) \\ &= f(0, T) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(u, T) \int_u^T \sigma_i(u, s) ds du + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(s, T) dW_i(s) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

El resultado más importante de HJM es que en la ecuación (A.4) sólo aparece el vector de funciones de volatilidades y por tanto el proceso de la tasa *forward* (Ecuación (A.5)) queda enteramente determinado por la volatilidad y la curva inicial de tasas de interés.

Aplicando el lema de Ito al precio de un bono cero cupón dado en (A.3), su dinámica estará dada por:⁴⁵

$$dP(t,T) = P(t,T) \left[r(t)dt - \left(\int_t^T \sigma(t,s)ds \right) dW(t) \right] \quad (A.6)$$

Donde $r(t)$ es la tasa de interés de corto plazo en el momento t , es decir:

$$\begin{aligned} r(t) &= f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \sigma(u,t) \int_u^t \sigma(u,s)ds du + \int_0^t \sigma(s,t)dW(s) \\ &= f(0,t) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(u,t) \int_u^t \sigma_i(u,s)ds du + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(s,t)dW_i(s) \end{aligned} \quad (A.7)$$

La dinámica de la tasa de interés propuesta en (A.5) no cumple la propiedad *markoviana*, es decir, su valor en un momento dado del tiempo, dependerá de los diferentes valores que haya tomado durante toda la trayectoria. Carverhill (1994) deduce la siguiente condición para que este proceso sea *markoviano*:

$$\sigma_i(t,T) = \gamma_i(t)\psi_i(t) \quad (A.8)$$

Donde $\gamma_i(t)$ y $\psi_i(t)$ son funciones determinísticas y estrictamente positivas del tiempo, las cuales se determinan de acuerdo al modelo que describirá la evolución de las tasa de interés de corto plazo. Por ejemplo, Brigo y Mercurio (2006) siguiendo a Caverhill (1994) muestran que tomando $\gamma_i(t) = \sigma e^{at}$ y $\psi_i(t) = e^{-at}$ la dinámica propuesta en (A.5) par los modelos unifactoriales es la siguiente:⁴⁶

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t) \quad (A.9)$$

Esta especificación para la evolución de la tasa de interés corresponde al modelo de Hull y White (1990), donde a es el parámetro de velocidad de reversión a la media, $\theta(t)/a$ es el nivel de reversión de la tasa de interés de corto plazo, σ es su volatilidad en puntos básicos y $dW(t)$ es un proceso Browniano con media cero y varianza T . El hecho de que $\theta(t)$ sea una función del tiempo es lo que permite ajustar el modelo a cualquier estructura a plazos de tasas de interés (Hull, 2003).

Aplicando el lema de Ito para resolver la ecuación diferencial estocástica dada en (A.9) se llega a:

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 - f(0,s) e^{-a(t-s)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-as})^2 e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u \quad (10)$$

Así, la media y la varianza del proceso vienen dados por:

⁴⁵ En esta sección se sigue de cerca a Brigo y Mercurio (2006).

⁴⁶ Si $\gamma_i(t) = \sigma e^{at}$ y $\psi_i(t) = e^{-at}$ entonces $\sigma(t,T) = \sigma e^{a(T-t)}$ lo cual implica que la volatilidad es una función estrictamente decreciente del tiempo cuando la velocidad de reversión a la media a es positiva. Así, las tasas de interés de largo plazo, serán menos volátiles que las tasas de interés de corto plazo. Esta especificación del proceso no permite capturar la curva de volatilidades creciente en el corto plazo y decreciente para el largo plazo (curva de volatilidades con joroba) que se observa en el mercado de *caps* y *swaptions* de tasas de interés en mercados como el de EE.UU.

$$E[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 - f(0, s) e^{-a(t-s)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-as})^2 e^{-a(t-s)} \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2a(t-s)}) \quad (\text{A.12})$$

Donde los valores esperados se toman respecto al conjunto de información \mathcal{F}_s , con $s < t$.

Como puede observarse en la ecuación (A.12), en el modelo de HW la varianza de la tasa de interés de corto plazo no depende del nivel de la misma. Es decir, la volatilidad tomará valores en función del tiempo, pero no en función de que tan altas o bajas sean las tasas de interés.⁴⁷ Además, la tasa de interés en cualquier momento del tiempo sigue una distribución Normal. Esto implica que existe la probabilidad de que éstas se tornen negativas.⁴⁸ Estas dos características son las mayores debilidades del modelo. No obstante, el modelo permite la construcción de fórmulas analíticas para el precio de instrumentos derivados básicos de tipos de interés como *Caps*, *Floors*, *Swaption*, opciones Europeas sobre bonos cero cupón y sobre bonos con cupones.

De forma análoga, es posible obtener el modelo de Black y Karasinski (1991) a partir de la estructura HJM. Chiarella y Kang (2007) muestran que tomando una función $G = \ln r$ para la estructura HJM, el proceso que sigue el logaritmo natural de la tasa de interés es el siguiente:

$$d \ln r = (\ln \gamma(t) - a \ln r) dt + \sigma(t) dW(t) \quad (\text{A.13})$$

Esta especificación del modelo corresponde a la versión unifactorial en tiempo continuo de Black y Karasinski (1991), donde a representa la velocidad de reversión a la media del logaritmo de la tasa de interés de corto plazo, $\ln \gamma(t)$ el nivel de reversión a la media y $\sigma(t)$ es la volatilidad de los cambios en $\ln r$, es decir la volatilidad de los cambios proporcionales de r .

Aplicando el lema de Ito se llega a:

$$dr_t = r_t \left[\theta_t + \frac{\sigma^2}{2} - a \ln r_t \right] dt + \sigma r_t dW_t \quad (\text{A.14})$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se desprende que:

$$r_t = \exp \left\{ \ln r_s e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)} \theta_u du + \sigma \int_s^t e^{-a(t-s)} dW_u \right\} \quad (\text{A.15})$$

⁴⁷ Es un hecho empírico ampliamente tratado en la literatura que las tasas de interés cuando son bajas (altas) presentan una baja (alta) volatilidad, ver por ejemplo Chan et al. (1992).

⁴⁸ La existencia de tasas de interés negativas en este modelo hace que los instrumentos derivados de tasas de interés con pagos asimétricos como las opciones sean subvalorados o sobrevalorados, pues le da una probabilidad positiva a valores de la tasa de interés negativas lo que hace que el valor esperado de los precios de los bonos en un mundo neutral al riesgo sean más altos. Una tasa de interés negativa implica que es mejor tener dinero en efectivo que invertido. Un inversionista podría aceptar esta situación si el costo de mantener efectivo es alto y si existen ventajas en la realización de transacciones al tener su dinero invertido.

Así, la media y la varianza del modelo vienen dadas por las siguientes expresiones

$$E[r_t | \mathcal{F}_s] = \exp \left\{ \ln r_s e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)} \theta_u du + \frac{\sigma^2}{4a} [1 - e^{-2a(t-s)}] \right\} \quad (\text{A.16})$$

$$\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_s] = \exp \left\{ 2 \ln r_s e^{-a(t-s)} + 2 \int_s^t e^{-a(t-u)} \theta_u du + \frac{\sigma^2}{a} [1 - e^{-2a(t-s)}] \right\} \quad (\text{A.17})$$

El modelo de BK supera las dos características no deseadas del modelo de HW. Como se observa, la distribución de la tasa de interés en cualquier momento del tiempo es LogNormal lo cual implica que éstas no se tornan negativas. Además, la varianza depende del nivel de las tasas de interés.

Ambos modelos comparten las características de que las tasas de interés presentan reversión a la media y pueden ser implementados utilizando árboles trinomiales. Lo anterior permite la valoración de opciones de tipos de interés de estilo Americana y otros derivados más exóticos. No obstante, contrario al modelo de HW, el de BK no dispone de fórmulas analíticas para la determinación de los precios de derivados de tipos de interés básicos.

Apéndice 2. Una introducción a la cobertura con modelos de tasas de interés.

Una vez calibrados estos modelos a la curva de tasas de interés y de volatilidades es posible adentrarse en la práctica de la cobertura de los instrumentos con ellos valorados. Al respecto existen dos tipos de cobertura ampliamente utilizadas en el mercado: cobertura dentro del modelo y cobertura fuera del modelo, Hull (2006, Pág. 630), Rebonato (1996, Pág. 207) y Tuckman (2002, Pág. 297). La cobertura dentro del modelo consiste en tratar de neutralizar el riesgo atribuible a los factores que se consideran en el modelo, por ejemplo, la volatilidad de la tasa de corto plazo. La cobertura fuera trata de hacer lo mismo, pero en vez de considerar sólo lo que es probable dentro del modelo, como un movimiento casi paralelo de todas las tasas de interés en el caso de los modelos unifactoriales, tiene en cuenta la exposición ante movimientos de algunos factores no considerados teóricamente dentro del modelo, por ejemplo, cambios en la curvatura de la curva de tasas de interés, o correlaciones imperfectas entre diferentes tasas *forward*.

En el caso de los modelos unifactoriales de tasas de interés, y en general para cualquier modelo, la cobertura por fuera del modelo es conceptualmente inconsistente con la dinámica impuesta a la evolución de las tasas de interés. Sin embargo, seguir la cobertura dentro del modelo para posición en un bono de largo plazo con depósitos a la tasa de interés de corto plazo, claramente es difícil de lograr en la práctica. Por lo anterior, la cobertura fuera del modelo es ampliamente aceptada en el mercado. A continuación se describen brevemente las principales ideas y técnicas detrás de la cobertura por fuera del modelo.

Cobertura Delta:

En el contexto de derivados de tasas de interés, la cobertura delta es equivalente a la cobertura frente a movimientos en las tasas de interés. En el caso de los modelos unifactoriales, es posible considerar no sólo choques exógenos de la tasa de interés de

corto plazo, choques heterogéneos en tiempo a toda la curva de tasas de interés. El cálculo de delta tendrá así varias formas de calcularse. Siguiendo a Hull (2006) y a Tuckman (2002) entre estas alternativas se encuentran:

1. Calcular el impacto de un cambio de un punto básico en todas las tasas de interés de la curva cero cupón. Esta técnica es conocida como el cálculo de DV01 (Dollar Value of One Basic Point)
2. Calcular el impacto de cambios pequeños en los precios de los títulos que se utilizaron para la construcción de la estructura a plazos de tasas de interés utilizada en la calibración del modelo.
3. Dividir la curva cero cupón de tasas *spot* o *forwards* en secciones (usualmente llamadas *buckets*), posteriormente, calcular el impacto de cambiar las tasas de interés en cada sección en un punto básico. Cada cambio se hace independientemente para cada sección, manteniendo las tasas de las secciones restantes inalteradas.
4. Llevar a cabo un análisis de componentes principales y posteriormente calcular el impacto ante cambios pequeños en los componentes principales más importantes. En general, si se calcula un delta respecto al primer componente principal, se tendrá un delta ante movimientos casi paralelos de la curva cero cupón. Si se calcula un delta ante movimientos en el segundo componente principal, se tendrá un delta ante cambios en la pendiente de la curva cero cupón. Finalmente, un delta calculado respecto a los cambios en el tercer componente principal mide el impacto de pequeños cambios en la curvatura de la estructura a plazos de tasas de interés.
5. Medir el impacto en el precio del derivado ante cambios en el *Option-Adjusted-Spread –OAS-* cuando este ha sido calculado. Este es espacialmente útil para los bonos con opciones y bonos sobre títulos hipotecarios.

Cobertura Gamma:

Gamma se define como el cambio en delta debido a cambios en las tasas de interés. Debido a que existen múltiples formas de calcular Delta, también existen muchas maneras de calcular Gamma. Según Hull (2006) el método preferido por el mercado para el cálculo de Delta es el de hacer pequeños cambios a los precios de los títulos utilizados para la construcción de la curva cero cupón. Adicionalmente también es posible calcular Gamma a partir de cambios en los componentes principales más importantes, usualmente los dos primeros.

Otras letras griegas:

Para el cálculo de las demás letras griegas se procedería en forma similar, por ejemplo, para el cálculo de Vega, se harían pequeños cambios a las volatilidades utilizadas en la valoración. Otra aproximación sería realizar un análisis de componentes principales a la estructura de volatilidades y calcular Vega respecto a pequeños cambios en los primeros dos componentes principales. Theta se calcularía reduciendo el tiempo al vencimiento del instrumento derivado.