Dualidad en optimización multi-objetivo bajo incertidumbre

Carlos A. Gaviria Peña

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

Diciembre 2009

Dualidad en optimización multi-objetivo bajo incertidumbre

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Carlos A. Gaviria Peña

Directores

María Eugenia Puerta Yepes
Doctor en Ciencias Matemáticas

Juan Pablo Fernández G.
Magister en Matemáticas Aplicadas

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

Diciembre 2009

Nota de aceptación

Coordinador de la Maestría

Director del proyecto

Medellín, 17 de diciembre del 2009:

Agradecimientos

Quiero expresar los mas sinceros agradecimientos, primero a Dios por que me ha guiado en cada uno de mis pasos; a mis asesores Maria Eugenia Puerta Yepes y Juan Pablo Fernández por su tiempo, su dedicación y sus enseñanzas; a mis padres Edilma peña y Walter Gaviria y a mi abuela Ana Muñoz por que con su esfuerzo, su amor, sus palabras, sus enseñanzas y su guía me han llevado al estado actual; a mis hermanos por estar siempre de forma incondicional a mi lado; a Ariel Cuadros y Eddy Montoya por que con su Amor, su tolerancia y su comprensión me han apoyado de forma personal; a mi novia Natalia Alzate por estar presente bajo cualquier circunstancia; a mis amigos y todas aquellas personas que de alguna u otra forma participaron en la realización de este trabajo.

Resumen

Existen varias teorías de optimización en relación con la palabra incertidumbre: Optimización difusa, optimización estocástica u optimización intervalo-valuada, entre otras. Cada una de éstas teorías de la optimización se diferencian en las características que asumen los parámetros utilizados tanto en la función objetivo como en las restricciones que determinan el conjunto factible.

La optimización difusa utiliza los conceptos de conjunto, número y orden difuso, ([7],[8],[16]). La optimización estocástica considera variables aleatorias, valores esperados y ordenes estocásticos; de acuerdo a como se combinen estos conceptos se generan distintos modelos en optimización estocástica ([13], [16]). La optimización intervalo-valuada utiliza los conceptos de intervalos cerrados, acotados y convexos, y ordenes parciales adecuados dentro del conjunto que definen este tipo de intervalos ([5], [3], [6],[12]). A través de ésta última teoría se han logrado aproximar las soluciones de algunos de los problemas de la optimización difusa y de la optimización estocástica, de acuerdo a esto, el estudio de la optimización intervalo-valuada se hace importante por su carácter aparentemente unificador, pero su mejor cualidad es la de considerar en el modelo el rango de variación posible de los parámetros, y por tanto, las soluciones que arroja son más robustas.

Un paso natural después de estudiar un problema de optimización cualesquiera es el estudio de los problemas duales en relación, en [3] y [4] se proponen los problemas duales ligados al problema de optimización con función mono-objetivo intervalo valuada y restricciones real valuadas e intervalo valuadas respectivamente, estos resultados están soportados en la teoría de dualidad desarrollada en [2].

En nuestro trabajo realizamos una extensión de la propuesta hecha por Wolfe ([2]) para dualidad en el caso de un problema de optimización con función objetivo y funciones restricción real valuadas, convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$, al caso de funciones multi-objetivo, con funciones criterio convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$ soportados en la teoría de dualidad de Wolfe desarrollada en [1]. Otra parte del trabajo, la cual está soportada en [1] y la extensión anterior, es extender los conceptos de dualidad de Wolfe, elaborados en [3] para el caso mono-objetivo intervalo-valuado con restricciones real valuadas a optimización multi-objetivo con funciones criterio intervalo valua das y restricciones real va lua das y además extender los conceptos de dualidad de Wolfe, elaborados en [4] para el caso mono-objetivo intervalo valuado con restricciones intervalo valuadas a optimización multi-objetivo con funciones criterio intervalo valuadas y restricciones intervalo valuadas (Problema de optimización multi-intervalo valuado).

Implementamos numéricamente un ejemplo mono-objetivo bajo incertidumbre y dos problemas multi-objetivo bajo incertidumbre para mostrar que el problema dual de Wolfe asociado a un

problema primal dado, arroja exactamente las mismas soluciones del problema primal.

Índice general

Introducción

En la teoría de la optimización multi-objetivo con funciones criterio intervalo-valuadas y funciones restricción real valuadas, el problema se describe matemáticamente como:

$$\min_{x \in \mathcal{C}} \quad F(x) \tag{1}$$

donde $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{I}^m$, $\mathcal{I}^m = \{[I_1, \cdots, I_m] \subseteq \mathbb{R}^m : I_i \in \mathcal{I},\ i = 1, \cdots, m\}$ y $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ lo llamamos conjunto factible y lo describimos por $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0;\ x \geq 0\}$ con $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \cdots, k$, donde suponemos cada g_i convexa y diferenciable en $\mathbb{R}^n_+$.

Dentro de la optimización multi-objetivo con funciones criterio intervalo valuadas, ([6] y [12]) se han logrado resultados tales como un teorema análogo al de Karush-Kuhn-Tucker, para el caso de funciones criterio real valuadas, así como algoritmos para el cálculo de su solución. Un paso natural después de estudiar un problema de optimización cualesquiera es el estudio de los problemas duales en relación, dado que el problema dual se convierte en otro camino para encontrar la solución o soluciones del problema primal, si estas existen.

En [3], el problema primal en el caso mono-objetivo intervalo-valuado, es como sigue:

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x) = \left[f^L(x), f^U(x)\right] \\ &\text{s. a.} \begin{cases} g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \cdots, k \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

y el problema dual

$$\begin{aligned} &\max \quad f(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x) = l(x, u) \\ &\text{s. a.} \begin{cases} \nabla f^L(x) + \nabla f^U(x) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(x) = 0 \\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_k) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

que es el dual de Wolfe Intervalo-valuado análogo a la forma de dualidad de Wolfe real valuado. En [4] se propone el siguiente problema primal de optimización intervalo valuado:

$$\begin{aligned} &\text{mín} \;\; \mathrm{F}\,(x) = \left[\mathrm{F}^L(x); \mathrm{F}^U(x)\right] \\ &\text{s. a.} \begin{cases} G_i(x) \preceq_{LU} [0;0]\,, & i = 1, \cdots, k \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

donde F^L: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y F^U: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones real valuadas y las funciones restricción G_i: $\mathbb{R}^n \to \mathcal{I}$ son funciones intervalo valuadas para $i = 1, 2, \cdots, k$. Se supone que F, G_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ son H-diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. El problema dual Wolfe del problema primal (4) se propone de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \;\; L(x,u) \\ &\text{s. a.} \begin{cases} H(x,u) = [0;0]_n \\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_k) \geqslant 0 \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

donde:

$$L(x,u) = F(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i G_i(x) \;\; \text{para } u \geq 0 \;\; \text{y} \;\; H(x,u) = \nabla F(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla G_i(x).$$

A partir de las anteriores construcciones, nosotros extendemos estos conceptos. Para dicho propósito, describimos el siguiente problema multi-objetivo:

$$\text{(P1)} \qquad \begin{aligned} &\text{mín} \;\; F\,(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)) \\ &\text{s. a.} \begin{cases} g_i\,(x) \leq 0, & i = 1, \cdots, k \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

donde F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y g_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, ..., k$ funciones convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$ y demostramos, soportados en [1] que el siguiente problema de optimización es el dual de Wolfe del problema (6)

$$\text{(D1)} \qquad \begin{aligned} &\text{máx} \;\; \sum_{i=1}^{m} s_i f_i\,(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x) = \psi(x,s,u) \\ &\text{s. a.} \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i\,(x) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(x) = 0 \\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_k) \geqslant 0 \\ s = (s_1, s_2, \cdots, s_m) > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

Describimos nuestro problema primal ($MIVP$) multi-objetivo con incertidumbre con restricciones real valuadas no lineales (capitulo 1), como sigue:

$$\text{(MIVP)} \qquad \begin{aligned} &\text{mín} \;\; \mathrm{F}\,(x) = \left[\mathrm{F}^L(x); \mathrm{F}^U(x)\right] \\ &\text{s. a.} \begin{cases} g_i\,(x) \leq 0, & i = 1, \cdots, k \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

donde $F^L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $F^U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son funciones vector valuadas y las funciones restricción $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones real valuadas para $i = 1, 2, \cdots, k$. Asumimos que F, g_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ son convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. Soportados en [1] y la dualidad entre los problemas (6) y (7) proponemos para el problema (8) el problema dual de Wolfe como sigue:

$$\text{(DMIVP')} \qquad \begin{array}{ll} \text{máx} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} s_i \mathrm{F}_i(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x) = \Psi(x, s, u) \\ \text{s. a.} & \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{m} s_i (\nabla \mathrm{F}_i^L(x) + \nabla \mathrm{F}_i^U(x)) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(x) = 0 \\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_k) \geqslant 0 \\ s = (s_1, s_2, \cdots, s_m) > 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \qquad (9)$$

donde Ψ es una función intervalo valuada.

Por ultimo, consideremos el siguiente problema de optimización multi-intervalo valuado:

$$\text{(MIVP'')} \qquad \begin{array}{ll} \text{mín} & \mathrm{F}(x) = \left[\mathrm{F}^L(x); \mathrm{F}^U(x)\right] \\ \text{s. a.} & \left\{ \begin{array}{ll} G_i(x) \preceq_{LU} [0; 0], & i = 1, \cdots, k \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \qquad (10)$$

donde $F^L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $F^U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son funciones vectoriales y las funciones restricción $G_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{I}$ son funciones intervalo valuadas para $i = 1, 2, \cdots, k$. Asumimos que F, G_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ son H-diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. Probamos que el problema dual Wolfe del problema primal (10) se describe de la siguiente manera:

$$\text{(DMIVP'')} \qquad \begin{array}{ll} \text{máx} & L(x, s, u) \\ \text{s. a.} & \left\{ \begin{array}{l} H(x, s, u) = [0; 0]_n \\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_k) \geqslant 0 \\ s = (s_1, s_2, \cdots, s_m) > 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \qquad (11)$$

donde:

$$L(x, s, u) = \sum_{i=1}^{m} s_i F_i(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i G_i(x) \quad \text{para } u \geq 0 \text{ y } s > 0$$

y

$$H(x, s, u) = \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla F_i(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla G_i(x).$$

En el capítulo 3, implementamos numéricamente 3 problemas bajo incertidumbre, mostrando así que el problema dual de Wolfe asociado a un problema primal dado verifica los teoremas débil y fuerte de dualidad.

0.1. Propuesta incial

0.1.1. Objetivos

Objetivo General

Estudiar conceptos de dualidad en problemas de optimización multi-objetivo real valuado e intervalo-valuado, para desarrollar teoremas de dualidad de Wolfe para problemas de optimización multi-intervalo valuados.

Objectivos Específicos

- Desarrollar teoremas de dualidad de Wolfe para problemas de optimización multi-intervalo valuados.
- Aplicar los teoremas de dualidad de Wolfe obtenidos para el caso multi-intervalo valuado a través de un ejemplo numérico.

0.1.2. Metodología

Iniciamos esta investigación con una búsqueda de información sobre todos los temas relacionados al que se propone en este escrito, además de las definiciones básicas que son necesarias para la comprensión y contextualización de todo el contenido del trabajo; estos preliminares se exponen de una forma muy concisa y resumida en el capítulo 2.

En el capítulo 2, basados en la teoría desarrollada por Wolfe sobre dualidad, se da la estructura del problema dual relacionado con un problema de optimización multi-intervalo valuado. En la sección 2.1 se hace una extensión a la propuesta hecha por Wolfe para dualidad en el caso de una función f real valuada con restricciones real valuadas convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$ considerando una función F vector-valuada y restricciones real valuadas convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$; describimos el problema dual de Wolfe para este problema en forma mono objetivo teniendo en cuenta los desarrollos en [1]. En la sección 2.2 proponemos el problema dual de Wolfe para un problema primal de optimización con función objetivo multi-intervalo valuada y con restricciones real valuadas convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$; la descripción del dual de Wolfe para este problema es en forma intervalo valuada, teniendo en cuenta los desarrollos en [1]. Al final del capítulo, en la sección 2.3 se propone el problema dual de Wolfe para un problema primal de optimización con función objetivo multi-intervalo valuada y con restricciones intervalo valuadas, teniendo en cuenta los desarrollos en [1] y en [4].

Por último, en capitulo 3 resolvemos 3 ejemplos numéricos con la intension de verificar los teoremas de dualidad mostrando que el problema dual en el sentido de Wolfe asociado a un problema primal dado arroja cotas y soluciones de este.

Al final, se presenta una sección con los problemas abiertos que subyacen en las ideas introducidas en esta tesis y que son motivo para futuros proyectos de investigación.

Capítulo 1

Conceptos y resultados preliminares

1.1. Notación

Con el ánimo de adoptar una notación habitual, en este trabajo denotamos $\mathbb{R}$ al campo de los números reales, $\mathbb{R}^n$ al espacio vectorial euclidiano de dimension n. A los conjuntos con estructuras matemáticas usuales los denotaremos con letras mayúsculas y haremos claridad sobre la estructura particular en el lugar necesario. A los elementos de tales conjuntos los denotaremos en general con letras minúsculas. Se usarán las letras minúsculas f, g y l para denotar funciones real valuadas, F y L para denotar funciones vector valuadas, ψ para denotar funciones intervalo valuadas y F y Ψ para denotar funciones multi intervalo valuadas; las letras mayúsculas A, B y C subíndizadas o no, para hacer referencia a los elementos de los conjuntos $\mathcal{I}$ ó $\mathcal{I}^m$ los cuales se definen en la siguiente sección.

El símbolo $\leq$ denotará el orden usual en $\mathbb{R}^n$. El símbolo $\preceq$ denotará ordenes parciales en general. Usaremos el orden parcial denotado por $\preceq_{LU}$ ([12]).

En lo que sigue presentaremos los elementos básicos de la propuesta hecha en [5] sobre el problema de optimización con función mono-objetivo bajo incertidumbre y restricciones real valuadas e intervalo valuadas, así como también dualidad en optimización con función mono-objetivo bajo incertidumbre y restricciones real valuadas; además presentaremos algunos elementos de optimización multi-objetivo bajo incertidumbre. Todo esto es necesario para hacer una extensión de la teoría desarrollada para el problema de optimización mono-objetivo bajo incertidumbre al problema de optimización multi-objetivo bajo incertidumbre.

1.2. Elementos Preliminares

En esta sección presentamos los elementos algebraicos fundamentales para que este trabajo sea autocontenido.

1.2.1. El conjunto $\mathcal{I}$

El conjunto $\mathcal{I}$ y su estructura algebraica y analítica es presentada en [5] para el estudio del problema de optimización mono-objetivo bajo incertidumbre.

El conjunto $\mathcal{I}$ se define como:

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ intervalo cerrado, acotado y convexo}\}$$

Si $A \in \mathcal{I}$ entonces $A = \left[a^L; a^U\right]$, donde $a^L \leq a^U$ y los superíndices L y U provienen de sus correspondientes palabras en inglés Lower y Upper, para simbolizar el extremo inferior y el extremo superior del intervalo, ambos extremos deben ser finitos.

Si $A, B \in \mathcal{I}$, con $A = \left[a^L; a^U\right]$ y $B = \left[b^L; b^U\right]$, entonces se define la igualdad entre estos objetos de la siguiente manera:

$$A = B \text{ si y sólo si } a^L = b^L \text{ y } a^U = b^U$$

En $\mathcal{I}$ se pueden definir las siguientes operaciones algebraicas:

Sean $A, B \in \mathcal{I}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, con $A = \left[a^L; a^U\right]$ y $B = \left[b^L; b^U\right]$,

1. $A + B = \left[a^L + b^L; a^U + b^U\right]$
2. $$\alpha A = \begin{cases} \left[\alpha a^L; \alpha a^U\right] & \text{Si } \alpha \geq 0 \\ \left[\alpha a^U; \alpha a^L\right] & \text{Si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Con estas operaciones en $\mathcal{I}$ es importante notar que:

- Respecto de la operación $+$, el conjunto $\mathcal{I}$ satisface las propiedades: clausurativa, conmutativa, asociativa y modulativa, además se cumple la ley cancelativa, pero no es un espacio vectorial ya que con la operación algebraica $+$ los elementos no siempre tienen inverso aditivo.

1.2.2. El Conjunto $\mathcal{I}^m$.

En la sección anterior se definió el conjunto $\mathcal{I}$, a partir de él se define el conjunto $\mathcal{I}^m$ en el cual se centra nuestro estudio sobre de dualidad de Wolfe para los problemas de optimización multi-objetivo intervalo valuados.

Tal conjunto se define como $\mathcal{I}^m = \{I_1 \times \cdots \times I_m : I_j \in \mathcal{I}\}$ para todo $j = 1, \cdots, m$ y por abuso de lenguaje, se representa como un arreglo $m \times 1$ de intervalos, esto es,

$$\mathcal{I}^m = \left\{ \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^m : I_j \in \mathcal{I}, \text{ para todo } j = 1, \cdots, m \right\}$$

sobre este conjunto, cada elemento se llama un multi-intervalo como en [12].

Se dice también que si $A, B \in \mathcal{I}^m$ con $A = \begin{bmatrix} [a_1^L; a_1^U] \\ \vdots \\ [a_m^L; a_m^U] \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} [b_1^L; b_1^U] \\ \vdots \\ [b_m^L; b_m^U] \end{bmatrix}$

$$A = B \text{ si y sólo si } a_j^L = b_j^L \text{ y } a_j^U = b_j^U \text{ para todo } j = 1, \cdots, m.$$

En $\mathcal{I}^m$ se definen las operaciones suma y producto por escalar como sigue:

Sean A, $B \in \mathcal{I}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $A + B = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 \\ \vdots \\ A_m + B_m \end{bmatrix}$ donde $A_j = \left[a_j^L; a_j^U\right]$ y $B_j = \left[b_j^L; b_j^U\right]$,
   dado que cada $A_j + B_j \in \mathcal{I}$, para todo j, $j = 1, \cdots, m$ entonces $A + B \in \mathcal{I}^m$.
2. $\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_m \end{bmatrix}$ nuevamente, $\alpha A_j \in \mathcal{I}$, para todo j, $j = 1, \cdots, m$ luego, $\alpha A \in \mathcal{I}^m$.

Con lo anterior, las operaciones suma y producto por escalar son clausurativas sobre $\mathcal{I}^m$. Adicionalmente se tiene que para A, B y $C \in \mathcal{I}^m$ y $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ no negativos.
La operación + satisface las propiedades:

P.-1 Asociatividad. $(A + B) + C = A + (B + C)$

P.-2 Conmutatividad. $A + B = B + A$

P.-3 Elemento neutro. $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} [0; 0] \\ \vdots \\ [0; 0] \end{bmatrix}$ tal que $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$

La operación producto por escalar satisface las propiedades:

P-4. Asociatividad. $\alpha(\lambda A) = (\alpha\lambda) A$

P-5. Elemento neutro. $1 \in \mathbb{R}$, $1A = A$

y por último, las leyes distributivas de la suma y el producto por escalar.

P-6. Distributividad con la suma. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

P-7. Distributividad con la suma escalar. $(\alpha + \lambda) A = \alpha A + \lambda A$

Al igual que $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^m$ no es espacio vectorial, pues no todo multi-intervalo A posee inverso aditivo.

Aunque las propiedades $\boldsymbol{P.-4}$ y $\boldsymbol{P.-6}$ también se cumplen para escalares negativos, no es interesante desde el punto de vista teórico. Por otro lado la propiedad $\boldsymbol{P.-7}$ no se cumple en general si tomamos $\lambda = -\alpha$, con α positivo, ya que el lado izquierdo es igual a $\mathbf{0}$ pero el lado derecho puede ser distinto de $\mathbf{0}$

$$0 = (\alpha + (-\alpha))A \neq \alpha A + (-\alpha) A = \begin{bmatrix} \left[\alpha a_1^L, \alpha a_1^U\right] + \left[-\alpha a_1^U, -\alpha a_1^L\right] \\ \vdots \\ \left[\alpha a_m^L, \alpha a_m^U\right] + \left[-\alpha a_m^U, -\alpha a_m^L\right] \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, se ha probado que $\mathcal{I}^m$ es un semigrupo conmutativo que satisface la ley cancelativa, ya que cada elemento A, B y $C \in \mathcal{I}^m$ son conjuntos cerrados, acotados y convexos de $\mathbb{R}^m$, con lo cual estamos frente a un conjunto con una estructura muy cercana a la de los espacios vectoriales.

1.3. Órdenes Parciales y Convexidad

Los problemas de optimización matemática mono-objetivo, están definidos sobre el campo de los reales, $\mathbb{R}$, el cual es totalmente ordenado, por esta razón en las presentaciones sobre problemas de este tipo de optimización, se obvia el estudio sobre órdenes parciales. En contraste, en los problemas de optimización matemática multi-objetivo, este tema toma gran relevancia, puesto que al espacio vectorial $\mathbb{R}^m$ no se le ha dotado de un orden total, lo que obliga a reflexionar sobre el significado de la expresión "minimizar o maximizar" una función $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Esto es fundamental porque el concepto de minimizar o maximizar está ligado a ordenar y poder decidir si un elemento a de un conjunto M antecede o no a otro elemento b del conjunto M. Dado que nuestro objetivo en este trabajo es estudiar problemas de optimización multi-objetivo, se hace necesario introducir algunos conceptos sobre los órdenes parciales que usaremos.

Definición 1.3.1. *Sean* $x, y \in \mathbb{R}^m$

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x_i \leq y_i \text{ para todo } i = 1, 2, ..., m.$$

Cuando $x \leq y$ se dice que x antecede a y o y sucede a x. Si no se cumple que $x \leq y$ o $y \leq x$, entonces x e y se llaman no comparables.

En [3], [4], [5] y [12] se presentan los órdenes parciales $\preceq_{LU}$, $\preceq_{UC}$ y $\preceq_{CW}$ para $\mathcal{I}$ y $\mathcal{I}^m$; además se presentan relaciones de implicación de gran importancia entre estos. Para esta tesis usaremos el orden $\preceq_{LU}$ en $\mathcal{I}^m$. Dicho orden parcial se define como sigue:

Definición 1.3.2. *Sean* $A = \left[a^L; a^U\right]$ *y* $B = \left[b^L; b^U\right] \in \mathcal{I}$*:*

$$A \preceq_{LU} B \text{ si y sólo si } a^L \leq b^L \text{ y } a^U \leq b^U$$

El orden parcial $\preceq_{LU}$ en $\mathcal{I}$, definido antes, genera el siguiente orden parcial en $\mathcal{I}^m$.

Teorema 1.3.1. *Sean* $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \in \mathcal{I}^m$*. La relacion binaria definida como:*

$$A \preceq_{LU} B \quad \text{si y sólo si} \quad A_j \preceq_{LU} B_j \quad \text{para todo} \quad j, \quad j = 1, \cdots, m \tag{1.1}$$

Definen en $\mathcal{I}^m$ *una relación de orden parcial.*

La prueba de este teorema se hace en [12].

Teorema 1.3.2. *Sean* A*,* B *y* $C \in \mathcal{I}^m$*.*

El orden parcial $\preceq_{LU}$ *definido en* $\mathcal{I}^m$ *es compatible con respecto a la adición y a la multiplicación por un escalar positivo, esto es:*

1. $A \preceq_{LU} B$ *si y solo si* $A + C \preceq_{LU} B + C$*.*
2. $A \preceq_{LU} B$ *si y solo si* $\lambda A \preceq_{LU} \lambda B$*.*

Demostración. Sean A, B y $C \in \mathcal{I}^m$

1. $A + C \preceq_{LU} B + C$ es equivalente a $A_j + C_j \preceq_{LU} B_j + C_j$ para todo $j = 1, \cdots, m$, lo cual es equivalente a $a_j^L + c_j^L \leq b_j^L + c_j^L$ y $a_j^U + c_j^U \leq b_j^U + c_j^U$ para $j = 1, \cdots, m$, y como son reales y el orden en $\mathbb{R}$ es compatible con la adición, entonces se obtiene el resultado.
2. Si $\lambda > 0$, entonces $\lambda A \preceq_{LU} \lambda B$, entonces $\lambda A_j \preceq_{LU} \lambda B_j$ para $j = 1, \cdots, m$, si y sólo si $\lambda a_j^L \leq \lambda b_j^L$ y $\lambda a_j^U \leq \lambda b_j^U$ para $j = 1, \cdots, m$ y como el orden en $\mathbb{R}$ también es compatible con la multiplicación por escalar positivo, se concluye que $A \preceq_{LU} B$.

□

Sea f una función real valuada diferenciable en un subconjunto no vacío, abierto y convexo X de $\mathbb{R}^n$ entonces f es convexa en x^* si y sólo si:

$$f(x) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)^T (x - x^*) \text{ Para } \ x \in X.$$

Sabemos que si $\mathbb{X}$ es un subconjunto no vacío convexo de $\mathbb{R}^n$ y $F = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ es una función vector-valuada definida en $\mathbb{X}$ entonces la función F es convexa en x^* si y sólo si las funciones real valuadas f_i para $i = 1, 2, \cdots, m$ son convexas en x^*.

Nuestra intensión es generalizar los conceptos de función convexa para una función real valuada y vector-valuada a una función multi-intervalo valuada; dicho propósito lo llevamos a cabo por medio de la siguiente definición y de la posterior proposición.

Definición 1.3.3. *Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto no vacío convexo de $\mathbb{R}^n$ y F un función multi-intervalo valuada definida en $\mathcal{X}$. F es convexa en x^* si y sólo si:*

$$\mathrm{F}(\lambda x^* + (1-\lambda)x) \preceq_{LU} \lambda\mathrm{F}(x^*) + (1-\lambda)\mathrm{F}(x)$$

para todo $\lambda \in (0,1)$ y todo $x \in \mathcal{X}$

Proposición 1.3.1. *Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto no vacío convexo de $\mathbb{R}^n$ y F un función multi-intervalo valuada definida en $\mathcal{X}$. La función F es convexa en x^* si y sólo si las funciones vector-valuadas F^L y F^U son convexas en x^*.*

1.4. Optimización Multi-objetivo

1.4.1. Definiciones generales.

Un problema de decisión que involucra multiples criterios, consiste en determinar el mejor compromiso de solución, y podría establecerse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \{f_1(x), \cdots, f_m(x)\} \\ \text{s. a.} & \quad x \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n \end{array} \tag{1.2}$$

donde:

- $\mathcal{C}$ denota el conjunto de alternativas potenciales o soluciones factibles.
- $\{f_1(x), \cdots, f_m(x)\}$ representa un conjunto de m $(m \geq 2)$ funciones de valor real, llamadas criterios.

La expresión (1.2) no es realista, normalmente, no existe una alternativa x que optimice todos los criterios simultáneamente. La notación mín indica entonces que estamos buscando el mejor compromiso de solución, de acuerdo a una estructura de preferencia del decisor tomando en cuenta cada uno de los m criterios. La optimización multi-objetivo (MOP, siglas en inglés) se relaciona con los problemas de decisión con multiples criterios en los siguientes aspectos:

- Cada alternativa se caracteriza por un vector $(x_1, \cdots, x_n)^\top = x$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ de variables decisión $x_1, \cdots, x_n$.
- El conjunto $\mathcal{C}$ se define en términos de las variables de decisión:

  $$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0,\, i = 1, \cdots, k \text{ y } \ x \in S\}$$

  donde $g_i(x)$, $i = 1, \cdots, k$ son funciones restricción real valuadas y $S \subset \mathbb{R}^n$, es usado para representar restricciones adicionales, las cuales no pueden ser expresadas a tráves de funciones, por ejemplo, $S = \mathbb{Z}^n$ ó $S = \{0,1\}^n$.
- Cada criterio f_i puede ser expresado como una función de las variables de decisión, y se le llama la i-ésima función objetivo.

En general, la expresión de un problema MOP es:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & F(x) \\ \text{s. a.} & \begin{array}{l} g_i\left(x\right) \leq 0,\ i = 1, \cdots, k \\ x \in S \end{array} \end{array} \tag{1.3}$$

donde $F\colon \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función con $f(x) = \left(f_1\left(x\right), \cdots, f_m\left(x\right)\right)^\top$.

Este campo de la optimización ha recibido una atención considerable, como una extensión natural de la optimización matemática clásica (mono-objetivo).

La anterior formulación esta presentada en **el espacio de variables de decisión**, esta es la representación clásica en optimización matemática. Por otra parte, los conceptos básicos y definiciones pueden ser introducidos independientemente usando **el espacio criterio** $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}} = f(\mathcal{C}) = \{z \in \mathcal{Z} : z = f\left(x\right) \text{ para algún } x \in \mathcal{C}\}$. En este espacio la imagen de cada punto factible x o alternativa es representada por un arreglo $m \times 1$ de los valores de las funciones criterio, f_j, así, $f\left(x\right) = \left(f_1\left(x\right), \cdots, f_m\left(x\right)\right)^\top$. Debemos notar que el espacio criterio es más significativo que el espacio de decisión, en el contexto de optimización multi-objetivo, ya que el interés de cada alternativa debe ser apreciada solamente respecto a sus valores sobre los criterios.

Sean $Z \subset \mathbb{R}^m$ el espacio de criterios y $Z_{\mathcal{C}}$ la imagen de $\mathcal{C}$, es decir, la imagen del conjunto factible. Entonces tenemos:

$$Z_{\mathcal{C}} = \{z \in Z / z_j = f_j\left(x\right) \quad \text{donde} \quad x \in \mathcal{C}\}. \tag{1.4}$$

Al generar un concepto de orden parcial en el espacio criterio para decidir cual es el mejor compromiso de vector de criterio solución $\boldsymbol{z}$ de $Z_{\mathcal{C}}$, podemos plantear el problema en la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \left(z_1, \cdots, z_m\right)^\top = \boldsymbol{z} \\ \text{s. a.} & \qquad \boldsymbol{z} \in Z_{\mathcal{C}} \end{array} \tag{1.5}$$

Sin más información acerca de la estructura de preferencias del decisor, la comparación entre vectores criterios, z, puede ser basada sobre el orden parcial natural[1] definido sobre Z:

Definición 1.4.1. *Para todo* $\boldsymbol{z}$ *y* $\boldsymbol{z\prime} \in Z$ *tenemos:*

- $\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{z'}$ *si y sólo si* $\boldsymbol{z_j} \leq \boldsymbol{z'_j}$ *para todo* $j = 1, \cdots, m$.
- $\boldsymbol{z} < \boldsymbol{z'}$ *si y sólo si* $\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{z'}$ *y* $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{z'}$.
- $\boldsymbol{z} \ll \boldsymbol{z'}$ *si y sólo si* $\boldsymbol{z_j} < \boldsymbol{z'_j}$ *para todo* $j = 1, \cdots, m$.

Definición 1.4.2. *Sea* $\boldsymbol{z} \in Z_{\mathcal{C}}$ *se llama* no dominado *si y sólo si no existe* $\boldsymbol{z'} \in Z_{\mathcal{C}}$ *tal que* $\boldsymbol{z'} < \boldsymbol{z}$.

Definición 1.4.3. *Sea* $\boldsymbol{z} \in Z_{\mathcal{C}}$ *se llama* débilmente no dominado *si y sólo si no existe* $\boldsymbol{z'} \in Z_{\mathcal{C}}$ *tal que* $\boldsymbol{z'} \ll \boldsymbol{z}$.

Las soluciones correspondientes a puntos (débilmente) no dominados son llamadas soluciones (débilmente) eficientes. Las soluciones eficientes $\boldsymbol{z}$ también se conocen como óptimos de Pareto

[1] Si $z, z' \in \mathbb{R}^m$, con $z = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$ y $z' = (z'_1, z'_2, \cdots, z'_m)$, $z \leq z'$ si y sólo si $z_j \leq z'_j$, para todo $j = 1, \cdots, m$

y a los puntos $x \in \mathcal{C}$ tales que $\boldsymbol{z} = f(x)$ puntos no dominados. Estos conjuntos generalmente no tienen una caracterización, sin embargo, algunos conceptos son útiles para guiar la construcción de los mismos.

1.5. Optimización bajo incertidumbre

Cuando nos enmarcamos dentro de la optimización bajo incertidumbre existen varias teorías dentro de esta: Optimización fuzzy, optimización estocástica y optimización intervalo valuada, entre otras. Cada una de estas teorías de la optimización se diferencia en la característica que asume los parámetros utilizados tanto en la función objetivo como en las restricciones que determinan el conjunto factible.

1.5.1. Optimización fuzzy

La optimización fuzzy utiliza los conceptos de conjunto, número y órdenes fuzzy. Tomemos el campo $\mathbb{R}$ de los números reales y tomemos un subconjunto S de $\mathbb{R}$. Llamamos a S un conjunto clásico si es una colección de elementos u objetos bien definidos y poseen una condición común. Clásicamente, un elemento x de $\mathbb{R}$ puede pertenecer o no al conjunto S. Si x pertenece al conjunto S entonces le asociamos V o 1 y si x no pertenece al conjunto S entonces le asociamos F o 0. Zadeh en 1965 ([10]) introduce el concepto de conjunto fuzzy, teniendo en cuenta que el grado de pertenencia de un elemento en el conjunto S no está dado por valor binario $0-1$, sino que dicho grado depende de un valor en el intervalo $[0,1]$. Un conjunto fuzzy $\widetilde{A}$ en $\mathbb{R}$ es un conjunto de pares ordenados cuya segunda componente está dada por una función de pertenencia $\mu_{\widetilde{A}}$ que especifica el grado de pertenencia de x en $\widetilde{A}$; $\mu_{\widetilde{A}}$ toma valores en el intervalo $[0,1]$. Así el conjunto fuzzy $\widetilde{A}$ está bien definido por el conjunto $\widetilde{A} = \{(x, \mu_{\widetilde{A}}) : x \in \mathbb{R}\}$. El soporte de un conjunto fuzzy viene dado por $supp(\widetilde{A}) = \{x \in \mathbb{R} \ : \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\}$ y el α-nivel viene dado por $\widetilde{A}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ para todo $\alpha \in (0,1]$.

Un conjunto fuzzy $\widetilde{A}$ se llama número fuzzy si cumple las condiciones:

1. $\widetilde{A}$ es normal, esto es, $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$ para algún $x \in \mathbb{R}$
2. $\mu_{\widetilde{A}}$ es qausi-cóncava, esto es, $\mu_{\widetilde{A}}[tx + (1-t)y] \geq min\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{A}}(y)\}$ para todo $t \in [0,1]$
3. $\mu_{\widetilde{A}}$ es semicontinua por encima, esto es, $\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ para todo $\alpha \in (0,1]$
4. El conjunto 0-nivel $\widetilde{A}_0$ es un conjunto cerrado y acotado.

Sea f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sean $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \cdots, \widetilde{A}_n$, n conjuntos fuzzy. Definimos el conjunto $\mathcal{D}^n(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Por el principio de extensión de Zadeh, podemos definir una función fuzzy valuada $\widetilde{f}$: $\mathcal{D}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ via función f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. De esta manera, definimos el problema primal general en optimización difusa:

$$\begin{aligned} &\min \widetilde{f} \\ &\text{s.a} \quad x \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{C}$ es el conjunto factible y viene dado por las restricciones y por un orden parcial definido adecuadamente.

A continuación, mostraremos un ejemplo de optimización fuzzy ([9])

Ejemplo 1.5.1. *Estimación de Parámetros en Regresión Lineal.*

El modelo de regresión lineal es formulado como sigue:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{i2} +, \cdots, +\beta_{p-1} X_{i,p-1} + \epsilon_i$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, n$*; donde* ϵ_i *son los errores. Sean:*

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{1,p-1} \\ 1 & X_{21} & \dots & X_{2,p-2} \\ 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \dots & X_{n,p-1} \end{bmatrix} \quad y \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Se sabe que las estimaciones de los mínimos cuadrados son:

$$\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y, \tag{1.6}$$

donde $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_{p-1})$*, para el siguiente modelo lineal:*

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{i2} +, \cdots, +\beta_{p-1} X_{i,p-1}$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, n$*. Ahora consideremos los dos siguientes modelos* α*-nivel lineales:*

$$(\widetilde{Y}_i)^L_\alpha = \beta^L_{0\alpha} + \beta^L_{1\alpha}(\widetilde{X}_{i1})^L_\alpha + \beta^L_{2\alpha}(\widetilde{X}_{i2})^L_\alpha +, \cdots, +\beta^L_{p-1,\alpha}(\widetilde{X}_{i,p-1})^L_\alpha \tag{1.7}$$

y

$$(\widetilde{Y}_i)^U_\alpha = \beta^U_{0\alpha} + \beta^U_{1\alpha}(\widetilde{X}_{i1})^U_\alpha + \beta^U_{2\alpha}(\widetilde{X}_{i2})^U_\alpha +, \cdots, +\beta^U_{p-1,\alpha}(\widetilde{X}_{i,p-1})^U_\alpha \tag{1.8}$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$*. Sean* $\widetilde{Y}_i$ *y* $\widetilde{X}_{ij}$ *datos fuzzy dados. Los datos fuzzy son considerados números fuzzy. Por tanto, tenemos los correspondientes datos real valuados* $(\widetilde{Y}_i)^L_\alpha$ *y* $(\widetilde{X}_{ij})^L_\alpha$ *para un* $\alpha \in [0; 1]$ *dado. Usando el modelo* (1.7) *y la ecuación* (1.6) *las estimaciones de los mínimos cuadrados pueden obtenerse usando los datos real valuados* $(\widetilde{Y}_i)^L_\alpha$ *y* $(\widetilde{X}_{ij})^L_\alpha$*. Las estimaciones de los mínimos cuadrados son denotadas por* $\hat{\beta}^L_{j\alpha}$ *para* $j = 0, 1, 2, \cdots, p-1$*. Similarmente podemos obtener las correspondientes estimaciones de los mínimos cuadrados* $\hat{\beta}^U_{j\alpha}$ *para* $j = 0, 1, 2, \cdots, p-1$ *usando los datos real valuados* $(\widetilde{Y}_i)^U_\alpha$ *y* $(\widetilde{X}_{ij})^U_\alpha$ *basados en el modelo* (1.8).
Ahora, denotamos el intervalo cerrado $A_{j\alpha}$ *para* $j = 0, 1, 2, \cdots, p-1$ *por*

$$A_{j\alpha} = \left[\text{mín}\left\{\hat{\beta}^L_{j\alpha}, \hat{\beta}^U_{j\alpha}\right\}, \text{máx}\left\{\hat{\beta}^L_{j\alpha}, \hat{\beta}^U_{j\alpha}\right\}\right] \tag{1.9}$$

La estimación fuzzy del parámetro de regresión $\widetilde{\beta}_j$*, denotado por* $\widetilde{\hat{\beta}}_j$ *puede inducirse por la familia de intervalos cerrados* $\{A_{j\alpha} : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ *y su función de pertenencia es definida por:*

$$\xi_{\tilde{\hat{\beta}}_j}(r) = \sup_{0\leq\alpha\leq 1} \alpha 1_{A_{j\alpha}}(r) \tag{1.10}$$

La estimación fuzzy dada en (1.10) *no es una extensión del estimador de mínimos cuadrados, esto es un estimador obtenido de* (1.6) *usando el principio de extensión. Definimos* $A_{j\alpha}$ *por* $A_{j\alpha} \equiv [l_j(\alpha); u_j(\alpha)]$ *donde* $l_j(\alpha) = \text{mín}\left\{\hat{\beta}^L_{j\alpha}, \hat{\beta}^U_{j\alpha}\right\}$ *y* $u_{j\alpha} = \text{máx}\left\{\hat{\beta}^L_{j\alpha}, \hat{\beta}^U_{j\alpha}\right\}$. *Si* $l_j(\alpha)$ *y* $u_j(\alpha)$ *son funciones continuas de* α, *entonces el conjunto* α*-nivel* $(\tilde{\hat{\beta}}_j)_\alpha$ *de la estimación fuzzy* $\tilde{\hat{\beta}}_j$ *es:*

$$\left[(\tilde{\hat{\beta}}_j)^L_\alpha; (\tilde{\hat{\beta}}_j)^U_\alpha\right] = (\tilde{\hat{\beta}}_j)_\alpha = \left\{r : \xi_{\tilde{\hat{\beta}}_j}(r) \geq \alpha\right\} = \left[\min_{\alpha\leq\gamma\leq 1} l_j(\gamma); \max_{\alpha\leq\gamma\leq 1} u_j(\gamma)\right] \tag{1.11}$$

esto dice que la estimación fuzzy $\tilde{\hat{\beta}}_j$ *es también un número fuzzy, por tanto el intervalo cerrado* A_{j1} *no es un conjunto vacío y la función de pertenencia de* $\tilde{\hat{\beta}}_j$ *es semicontinua superiormente (el conjunto* α*-nivel* $(\tilde{\hat{\beta}}_j)_\alpha$ *en* (1.11) *es un conjunto cerrado).*

Tenemos otro punto de vista para el intervalo α*-nivel de* $\tilde{\hat{\beta}}_j$. *Para cualquier* r *dado en el intervalo* α*-nivel* $(\tilde{\hat{\beta}}_j)_\alpha$ *de* $\tilde{\hat{\beta}}_j$, *podemos decir que* r *es la estimación de* β_j *con el grado de confianza* α. *Ahora, si* r *es la estimación de* β_j *con grado de confianza* α, *entonces* r *es también una estimación de* β_j *con grado de confianza* γ *con* $\gamma < \alpha$, *luego* $(\tilde{\hat{\beta}}_j)_\alpha \subset (\tilde{\hat{\beta}}_j)_\gamma$ *para* $\gamma < \alpha$. *Suponiendo que el decisor tolera un grado de confianza* α, *se puede tomar cualquier valor de* r *del intervalo* α*-nivel* $(\tilde{\hat{\beta}}_j)_\alpha$ *de* $\tilde{\hat{\beta}}_j$ *como la estimación de* β_j *para usarlo luego en la inferencia.*

Dada una estimación r *de la estimación fuzzy* $\tilde{\hat{\beta}}_j$ *planeamos saber su grado de pertenencia* α. *Si el decisor se conforma con este grado de pertenencia* α, *entonces será razonable tomar* r *como la estimación de* β_j. *En este caso el decisor puede aceptar el valor* r *como la estimación de* β_j *con grado de pertenencia* α.
Ahora, por (1.10) *el valor de pertenencia de cualquier cualquier valor* r *dado de* $\tilde{\hat{\beta}}_j$ *puede obtenerse resolviendo el siguiente problema de optimización:*

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \alpha \\ s.\ a. & \left\{\begin{array}{l} \text{mín}\left\{\tilde{\hat{\beta}}^L_{j\alpha}, \tilde{\hat{\beta}}^U_{j\alpha}\right\} \leq r \leq \text{máx}\left\{\tilde{\hat{\beta}}^L_{j\alpha}, \tilde{\hat{\beta}}^U_{j\alpha}\right\} \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array}\right. \end{array} \tag{1.12}$$

ahora, las estimaciones de los mínimos cuadrados $\tilde{\hat{\beta}}^L_{j\alpha}$ *y* $\tilde{\hat{\beta}}^U_{j\alpha}$ *se obtienen con* (1.6). *Por tanto,* $\tilde{\hat{\beta}}^L_{j\alpha}$ *y* $\tilde{\hat{\beta}}^U_{j\alpha}$ *son continuas con respecto a* α, *luego* $(\widetilde{X}_{ij})^L_\alpha$, $(\widetilde{X}_{ij})^U_\alpha$, $(\widetilde{Y}_i)^L_\alpha$, $(\widetilde{Y}_i)^U_\alpha$ *son continuas con respecto a* α. *Esto dice que* $l_j(\alpha)$ *y* $u_j(\alpha)$ *son funciones continuas con respecto a* α. *Entonces por* (1.11) *tenemos que:*

$$(\tilde{\hat{\beta}}_j)^L_\alpha = \min_{\alpha\leq\gamma\leq 1} l_j(\gamma) = \min_{\alpha\leq\gamma\leq 1} \text{mín}\left\{\hat{\beta}^L_{j\gamma}, \hat{\beta}^U_{j\gamma}\right\} \tag{1.13}$$

y

$$(\tilde{\hat{\beta}}_j)^U_\alpha = \max_{\alpha\leq\gamma\leq 1} u_j(\gamma) = \max_{\alpha\leq\gamma\leq 1} \text{máx}\left\{\hat{\beta}^L_{j\gamma}, \hat{\beta}^U_{j\gamma}\right\} \tag{1.14}$$

la función de pertenencia de $\widetilde{\hat{\beta}}_j$ *está dada por* $\xi_{\widetilde{\hat{\beta}}_j}(r) = \sup_{\alpha \leq \gamma\ 1} \alpha 1_{(\widetilde{\hat{\beta}}_j)_\alpha}(r)$*; por tanto, dado algún valor* r *de* $\widetilde{\hat{\beta}}_j$*, su grado de pertenencia puede ser obtenido por el siguiente problema de optimización:*

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \alpha \\ &s.\ a. \begin{cases} (\widetilde{\hat{\beta}}_j)^L_\alpha \leq r \leq (\widetilde{\hat{\beta}}_j)^U_\alpha \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.15}$$

donde $(\widetilde{\hat{\beta}}_j)^L_\alpha$ *y* $(\widetilde{\hat{\beta}}_j)^U_\alpha$ *vienen dados por las ecuaciones* (1.13) *y* (1.14)

1.5.2. Optimización estocástica

La optimización estocástica considera variables aleatorias, valores esperados y órdenes estocásticos, de acuerdo a como se combinen estos conceptos se generan distintos modelos en optimización estocástica. En este tipo de optimización se propone en términos generales el siguiente problema primal:

$$\begin{gathered} \text{máx}(f_1(x,\omega), f_2(x,\omega), \cdots, f_k(x,\omega)) \\ \text{s.a} \quad x \in \mathcal{Z} \end{gathered}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, ω que pertenece a un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ representa el efecto estocástico en los objetivos, $f_k(x,\omega)$ es la función objetivo evaluada en el k-ésimo criterio y $\mathcal{Z} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad x \geq 0\}$ es el conjunto factible que se supone no vacío y acotado.

En optimización estocástica se utilizan órdenes parciales adecuados, a modo de ilustración definiremos el órden más usual, llamado órden estocástico de Pareto.

Definición 1.5.1. *Sean* x, $y \in \Omega$ *un par de puntos factibles. Se dice que* y *domina estocásticamente a* x *y se escribe* $y \preceq x$ *si y sólo si las siguientes dos condiciones se satisfacen:*

1. $E[f_k(y,\omega)] \geq E[f_k(x,\omega)]$ *y* $P\{f_k(y,\omega) \geq T_k\} \geq P\{f_k(x,\omega) \geq T_k\}$*, para todo* k
2. *Existe un* k *tal que* $E[f_k(y,\omega)] > E[f_k(x,\omega)]$ *y/o* $P\{f_k(y,\omega) \geq T_k\} > P\{f_k(x,\omega) \geq T_k\}$

donde $E[f_k(x,\omega)]$ es el valor esperado del k-ésimo objetivo y $P\{f_k(x,\omega) \geq T_k\}$ es la probabilidad de que $f_k(x,\omega)$ exceda o al menos alcance el valor T_k especificado por el decisor. Una solución factible que no es dominada por ninguna otra solución es llamada solución Pareto o simplemente no-dominada.

A continuación haremos una breve descripción de los ejemplos mas conocidos de optimización estocástica ([14])

Ejemplo 1.5.2. *Inventarios. El problema del vendedor de periódicos.*

Supongamos que una compañía tiene que decidir sobre la cantidad de pedidos x de cierto producto que satisface demanda d. El costo de pedido es $c > 0$ por unidad. Si la demanda d es mayor que x, entonces la compañía tiene un pedido adicional por el precio de unidad $b \geqslant 0$. El costo de éste es igual a $b(d-x)$ si $d > x$ y es cero en otro caso. Por otro lado, si $d < x$ entonces el costo sostenido de $h(x-d) \geqslant 0$ se dá. El costo total es igual a:

$$F(x,d) = cx + b[d-x]_+ + h[x-d]_+ \tag{1.16}$$

Asumimos que $b > 0$, esto es, la multa por el costo de pedido retrasado es mayor que el costo de pedido. El objetivo es minimizar el costo total $F(x,d)$, donde x es la variable de decisión y la demanda d es un parámetro. Así, si la demanda es conocida, el correspondiente problema de optimización puede ser formulado como:

$$\begin{aligned} &\min F(x,d) \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

la función objetivo $F(x,d)$ puede reescribirse como:

$$F(x,d) = max\{(c-b)x + bd, (c+h)x - hd\} \tag{1.18}$$

que es una función lineal con un mínimo alcanzado en $\overline{x} = d$; esto es, si la demanda d es conocida, entonces la mejor decisión es pedir exactamente la cantidad de demanda d.

Consideramos ahora el caso donde el pedido debe tomarse antes que la realización de la demanda se conozca. Una posible manera de proceder en tal situación es ver la demanda D como una variable aleatoria. Por capital D denotamos la demanda D para distinguirla de su forma de realización particular d. asumimos primero, que la distribución de probabilidad de D es conocida, esto tiene sentido en situaciones donde el procedimiento de pedido se repite y la distribución de D puede estimarse por datos históricos. Entonces tiene sentido hablar sobre el valor esperado del costo total, denotado por $\mathrm{E}[F(x,d)]$, visto como una función de la cantidad de pedido x. Así, podemos escribir el problema de optimización correspondiente:

$$\begin{aligned} &\min F(x) := \mathbb{E}[F(x,D)] \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

La anterior formulación aproxima el problema optimizando (minimizando) el costo total en promedio. ¿Cual puede ser la posible justificación para tal aproximación?. Si el proceso se repite, entonces por la ley de grandes números, para un x dado, el promedio del costo total después de muchas repeticiones puede converger (Con probabilidad 1) a la esperanza $\mathbb{E}[F(x,D)]$ y de hecho, en tal caso la solución del problema (1.17) *será óptima en promedio.*

El anterior problema es un ejemplo muy simple de un problema de doble fase o un problema con acción de recurso. En la primera fase, después de una realización de demanda D conocida, *se tiene que tomar una decisión sobre la cantidad de pedido x. En la segunda fase, antes de la realización d de demanda D que se conoce, puede pasar que $d > x$ en el caso que la compañía toma la acción de recurso de pedir la cantidad requerida $d < x$ al costo mas alto de $b > c$.*

La siguiente pregunta es como resolver el problema de valor esperado (1.19). En el presente caso podemos solucionar de una forma exacta. Consideremos la función de distribución acumulada $H(x) = P(D \leq x)$ de la variable aleatoria D. Note que $H(x) = 0$ para todo $x < 0$ por que la demanda no puede ser negativa. La esperanza $\mathbb{E}[F(x, D)]$ puede escribirse como:

$$\mathbb{E}[F(x, D)] = b\mathbb{E}[D] + (c - b)x + (b + h)\int_0^x H(z)dz \tag{1.20}$$

de hecho, la función esperanza $f(x) = \mathbb{E}[F(x, D)]$ es convexa, mas aún, desde que supongamos que $f(x)$ está bien definida y de valores finitos, es continua. Así para $x \geq 0$ tenemos

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(z)dz$$

donde en los puntos no diferenciables la derivada $f'(z)$ es entendida como la derivada lateral derecha. Como $D \geq 0$ tenemos que $f(0) = b\mathbb{E}[D]$, así $f'(z) = c - b + (b + h)H(z)$. Tenemos que $\frac{d}{dx}\int_0^x H(z)dz = H(x)$ con tal que $H(\cdot)$ sea continua en x. En este caso, podemos tomar la derivada del lado derecho de (1.20) con respecto a x y lo igualamos a 0. Concluimos que las soluciones óptimas de (1.19) están definidas por la ecuación $(b + h)H(x) + c - b = 0$ y que una solución optima de (1.19) es igual al cuantil

$$\overline{x} = H^{-1}(\kappa) \quad con \quad \kappa = \frac{b - c}{b + h} \tag{1.21}$$

Supongamos por un momento que la variable aleatoria D tiene un soporte de distribución finita, esto es, hay valores $d_1, d_2, \cdots, d_K$ (llamados escenarios) con respectivas probabilidades $p_1, p_2, \cdots, p_K$, en este caso $H(.)$ es una función escalón con saltos de medida p_K cada d_k, para $k = 1, 2, \cdots, K$. La formula (1.21) para una solución óptima, todavía está de acuerdo con el correspondiente lado izquierdo (lado derecho) k-cuantil, coincidiendo con uno de los puntos d_k, $k = 1, 2, \cdots, K$. Por ejemplo, los escenarios pueden representar datos históricos coleccionados durante un periodo de tiempo, en tal caso la correspondiente función de distribución acumulada es vista como la función de distribución acumulada empírica que da una aproximación (estimación) de la verdadera función de distribución acumulada, y el asociado k-cuantil es visto como la estimación de la muestra de k-cuantil asociada con la verdadera distribución.

En aplicaciones, la forma exacta de solución para problemas de programación como (1.19) son raramente disponibles. En el caso de muchos escenarios finitos es posible modelar el programa estocástico con un problema de optimización deterministico, escribiendo el valor esperado $\mathbb{E}[F(X, D)]$ como la siguiente suma pesada:

$$\mathbb{E}[F(x, D)] = \sum_{k=1}^{K} p_k F(x, d_k)$$

la formulación deterministica (1.17) *corresponde a un escenario d tomado con probabilidad* 1. *Usando la representación* (1.18) *podemos escribir el problema* (1.17) *como un problema de programación lineal:*

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad v \\ &s.\ a. \begin{cases} v \geq (c-b)x + bd, \\ v \geq (c+h)x - hd, \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.22}$$

de hecho, para x fijo, el valor óptimo de (1.22) *es igual a* $max\{(c-b)x+bd, (c+h)x-hd\}$ *que es igual a* $F(x,d)$. *Similarmente, el valor esperado del problema* (1.19) *con escenarios* $d_1, d_2, \cdots, d_K$, *puede escribirse como el problema de programación lineal:*

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad \sum_{k=1}^{K} p_k v_k \\ &s.\ a. \begin{cases} v_k \geq (c-b)x + bd_k, & k = 1, 2, \cdots, K \\ v_k \geq (c+h)x - hd_k, & k = 1, 2, \cdots, K \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.23}$$

Ejemplo 1.5.3. *Selección de Portafolio.*

Supongamos que queremos invertir un capital W_0 *en* n *recursos, invirtiendo una cantidad* x_i *en el recurso* i *para* $i = 1, 2, \cdots, n$. *Supongamos que cada recurso tiene una respectiva rata de retorno* R_i *(Por un periodo de tiempo) que es desconocido en el momento que necesitamos tomar nuestra decisión. Nos preguntamos ahora como distribuir nuestro capital* W_0 *de manera optima. El capital total resultante de nuestra inversión después de un periodo de tiempo igual es:*

$$W_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i,$$

donde $\xi_i = 1 + R_i$. *Tenemos la restricción de balance* $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq W_0$. *Supongamos que una de las posibles inversiones es dinero en efectivo, para que podamos escribir la restricción de balance como* $\sum_{i=1}^{n} x_i = W_0$. *Tomando los retornos* R_i *como variables aleatorias, podemos maximizar el retorno esperado en una inversión, esto nos lleva al problema de optimización:*

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad \mathbb{E}[W_1] \\ &s.\ a. \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = W_0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.24}$$

donde $\mu_i := \mathbb{E}[W_1] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_i] x_i = \sum i = 1^n \mu_i x_i$ *y* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Por lo tanto el problema* (1.24) *tiene una simple solución óptima de invertir en un recurso con rata de retorno* *esperado alta y tiene el valor óptimo* $\mu^* W_0$*, donde* $\mu^* = max_{1 \leq i \leq n} \mu_i$*. Claro, desde un punto de vista practico tal solución no es recomendada. Poner todo en un recurso puede ser muy peligroso, por que si ésta rata de retorno se realiza, se puede perder mucho dinero.*

Una alternativa aproximada es maximizar la utilidad esperada del capital, representada por una función cóncava $U(W_1)$*; esto lleva al siguiente problema de optimización:*

$$\begin{aligned} &\min \;\; \mathbb{E}[U(W_1)] \\ &s.\;\, a. \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = W_0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.25}$$

ésta aproximación requiere una especificación de la función utilidad; por ejemplo, sea $U(W)$ *definida por:*

$$U(W) = \begin{cases} (1+q)(w-a), & w \geq a \\ (1+r)(w-a), & w \leq a \end{cases} \tag{1.26}$$

con $r > q > 0$ *y* $a > 0$*. Podemos ver los parámetros que intervienen como sigue:* a *es la cantidad que tenemos que pagar después del retorno en la inversión,* q *es la rata de interés a la cual podemos invertir la riqueza adicional* $W - a$*, con tal que* $W > a$*, y* r *es la rata de interés a la cual tendremos que pedir prestado si* W *es menor que* a*. Para la función de utilidad anterior, el problema (1.25) puede formularse como problema de optimización estocástica de dos fases*

$$\begin{aligned} &\max \;\; \mathbb{E}[Q(x,\xi)] \\ &s.\;\, a. \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = W_0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.27}$$

donde $Q(x,\xi)$ *es el valor óptimo del problema*

$$\begin{aligned} &\max_{y,z \in \mathbb{R}^+} \;\; (1+q)y - (1+r)z \\ &s.\;\, a. \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i = a + y - z \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.28}$$

Podemos ver el problema (1.28) como la segunda fase del problema. Dada una realización $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ *de datos aleatorios, tomamos una decisión óptima resolviendo el correspondiente problema de optimización. Claro, en el presente caso el valor óptimo* $Q(x,\xi)$ *es una función de* $W_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$ *y puede escribirse explícitamente como* $U(W_1)$*. Otra posible aproximación es maximizar el retorno esperado mientras se controla el riesgo envuelto en la inversión. Hay varias maneras como el concepto de riesgo puede formalizarse, por ejemplo, podemos evaluar el riesgo* *por variabilidad de* W *medido por su varianza* $\mathbb{V}ar[W] = \mathbb{E}[W^2] - (\mathbb{E}[W])^2$. *Como* W *es una función lineal en las variables aleatorias* ξ_i, *tenemos que:*

$$\mathbb{V}ar[W_1] = x^T \Sigma x = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \tag{1.29}$$

donde $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ *es la matriz de covarianzas del vector aleatorio* ξ *(las matrices de covarianzas de los vectores aleatorios* ξ *y* R *son iguales). Esto lleva al problema de optimización de maximizar el retorno esperado sujeto a la restricción adicional* $\mathbb{V}ar(W_1) \leq v$ *donde* $v > 0$ *es una constante específica. Este problema puede escribirse como:*

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \\ &s.\ a. \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i x_i = W_0 \\ x^T \Sigma x \leq v \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Como la matriz de covarianzas Σ *es semidefinida positiva, entonces la restricción* $x^T\Sigma x \leq v$ *es cuadrática convexa y el problema* (1.30) *es un problema convexo. Notemos que el problema* (1.30) *tiene por lo menos una solución factible de invertir todo el dinero en efectivo, en el caso* $\mathbb{V}ar[W_1] = 0$ *y como éste conjunto factible es compacto entonces el problema tiene una solución optmia. Mas aún, como el problema* (1.30) *es convexo satisface la condición Slater; éste no tiene brecha de dualidad con su problema dual:*

$$\min_{\lambda \geq 0} \max_{\substack{\sum_{i=1}^{n} x_i = W_0 \\ x \geq 0}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i - \lambda(x^T \Sigma x - v) \right\} \tag{1.31}$$

Consecuentemente, existen multiplicadores de lagrange $\overline{\lambda} \geq 0$ *tales que el problema* (1.30) *es equivalente al problema:*

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i - \overline{\lambda} x^T \Sigma x \\ &s.\ a. \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = W_0 \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.32}$$

El siguiente es un ejemplo de un problema de optimización, que combina la optimización fuzzy y la optimización estocástica ([15])

Ejemplo 1.5.4. *Selección de Portafolio.*

En muchas corporaciones e industrias los desisores tienen importantes problemas, tales como problemas fijos, logísticos, minería de datos y problemas de asignación de recursos. En estos tipos de problemas es importante que predigan el retorno total futuro y decidan una asignación de recursos óptima aumentándolos al máximo bajo ciertas restricciones, particularmente una restricción presupuesto. El papel de la teoría de inversiones llamada teoría de portafolio se ha vuelto muy importante, pues no solo grandes compañías e inversores institucionales, sino también inversores individuales invierten en acciones, tierra y propiedad. Claro, ellos deciden fácilmente la asignación mas conveniente con tal que sepan los retornos futuros a priori. Sin embargo, desde que el retorno futuro cambie, existe el caso en que la incertidumbre de las condiciones sociales tiene una gran influencia sobre los retornos futuros. Además, en el mundo real, pueden haber factores probabilísticos y posibilisticos derivados de la falta de información eficiente y la predicción ambigua del desisor. Bajo estas situaciones, los desisores deben considerar reducir el riesgo y se hace importante como ganar mas.

Los retornos futuros se han tratado solo como variables aleatorias y los retornos esperados y varianzas se han asumido como arreglos de valores. Sin embargo, como los inversionistas reciben eficiente o ineficiente información del mundo real, normalmente existen factores ambiguos. Además, hay inversionistas que creen absolutamente en la actividad predictiva de los datos históricos; consecuentemente, necesitamos considerar además de condiciones aleatorias, condiciones ambiguas y subjetivas para los problemas de selección de portafolio. Por otro lado, en acercamientos de programación matemática, estos problemas con probabilidades y posibilidades son generalmente llamados problemas de programación estocástica y problemas de programación fuzzy, respectivamente.
Yazenin considera algunos modelos de problemas de selección de portafolio en el ambiente probabilístico-posibilistico, donde rentabilidades de recursos financieros son variables aleatorias fuzzy. Por otro lado, en modelos previos de selección de portafolio, los retornos futuros son básicamente asumidos como variables aleatorias derivadas de análisis estadísticos basados en datos históricos. Entonces cuando un desisor considera el caso bajo aleatoriedad y fuzzydad, ella o él asumen que el retorno futuro tiene factores ambiguos debido a la cantidad de información recibida y su subjetividad basada en la larga experiencia de inversión. Así, el retorno futuro puede tratarse como una variable aleatoria cuyos parámetros se asumen números fuzzy según la subjetividad del desisor. Por tanto, propondremos problemas de selección de portafolio con cada retorno futuro tratado como una variable aleatoria fuzzy, que Liu definió.

Definición 1.5.2. *Una variable aleatoria fuzzy es una función ξ de un espacio de posibilidad $(\Theta, P(\Theta), Pos)$ a una colección de variables aleatorias R. Un vector aleatorio fuzzy n-dimensional $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ es una n-tupla de variables aleatorias fuzzy $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$.*

Esto es, una variable aleatoria fuzzy es un conjunto fuzzy definido en conjunto universal de variables aleatorias. Además, introducimos la siguiente definición.

Definición 1.5.3. *Sean $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ variables aleatorias fuzzy, f: $R^n \to R$ una función continua. Entonces $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ es una variable aleatoria fuzzy en el espacio posibilidad de producto $(\Theta, P(\Theta), Pos)$, definido como:*

$$\xi(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) = f(\xi_1(\theta_1), \xi_2(\theta_2), \cdots, \xi_n(\theta_n))$$

para toda $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ $in\Theta$.

Introducimos el siguiente problema de selección de portafolio que involucra la variable aleatoria fuzzy basado en el problema de asignación de recurso estándar de maximizar el retorno total futuro:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \sum_{j=1}^{n} \overline{\widetilde{r}}_j x_j \\ &s.\ a. \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \quad 0 \leq x_j \leq \widehat{b}_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n \right. \end{aligned} \tag{1.33}$$

donde:

x_i : *Asignación del presupuesto del j-ésimo recurso financiero.*
$\overline{\widetilde{r}}_j$: *Retorno futuro del j-ésimo recurso financiero asumido como una variable aleatoria fuzzy.*
a_j : *Costo de inversion del j-ésimo recurso financiero.*
b : *Valor límite superior con respecto al fondo de asignación.*
$\widehat{b}_j$: *Valor límite superior de cada asignación del j-ésimo recurso financiero.*
n : *número total de recursos.*

En los problemas de selección de portafolio, cada retorno futuro es generalmente considerado como una variable aleatoria distribuida acorde a la distribución normal $N(m_j, \sigma_j^2)$*. Sin embargo, por la falta de información eficiente del mercado real, asumimos el caso donde el retorno esperado incluye una ambigüedad y la función de probabilidad de cada retorno futuro es representada con la siguiente forma basada en la introducción obtenida por Hasuike y Katagiri:*

$$f_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} exp\left(-\frac{(z - \widetilde{M}_j)^2}{2\sigma_j^2} \right)$$

$$\mu_{\widetilde{M}_j}(t) = \left\{ \begin{array}{lll} L(\frac{m_j - t}{\alpha_j}) & (m_j - \alpha_j \leq t \leq m_j) & \\ R(\frac{t - m_j}{\beta_j}) & (m_j < t \leq m_j + \beta_j) & j = 1, 2, \cdots, n \\ 0 & (t < m_j - \alpha_j, m_j + \beta_j < t) & \end{array} \right. \tag{1.34}$$

donde $L(x)$ *y* $R(x)$ *son funciones estrictamente decrecientes y continuas que satisfacen* $L(0) = R(0) = 1$, $L(1) = R(1) = 0$ *y los parámetros* α_j *y* βj *representan las correspondientes cotas de los lados izquierdo y derecho respectivamente, y ambos parámetros son valores positivos. Cuando el retorno futuro* $\overline{\widetilde{r}}$ *es una variable aleatoria fuzzy caracterizada por* (1.34)*, la función de pertenencia de* r_j *es expresada como:*

$$\mu_{\overline{\widetilde{r}}}(\overline{\gamma}) = \sup_{s_j} \{\mu_{M_j}(s_j)/\overline{\gamma} \sim N(s_j, \sigma^2)\}, \ \textit{para todo} \ \ \overline{\gamma} \in \Gamma \tag{1.35}$$

donde Γ *es un conjunto universal de variable aleatoria normal. Cada función de pertenencia* $\mu_{r_j}(\overline{\gamma_j})$ *es interpretado como el grado de posibilidad o comparabilidad que* $\overline{\widetilde{r}_j}$ *sea igual a* $\overline{\gamma_j}$*. Entonces la función objetivo* $\overline{\widetilde{Z}} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\widetilde{r}}_j x_j$ *es definida como una variable aleatoria fuzzy caracterizada por la siguiente función de pertenencia en los parámetros fijos* x_j:

$$\mu_{\widetilde{\overline{Z}}}(\overline{u}) = \sup_{\overline{\gamma}} \left\{ \min_{1\leq j\leq n} \mu_{\widetilde{\overline{r}}} / \overline{u} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\gamma_j} x_j \right\}, \quad \textit{para todo} \quad \overline{u} \in Y \tag{1.36}$$

donde $\bar{(}\gamma) = (\gamma 1, \gamma_2, \cdots, \gamma n)$ *y* Y *se define como:*

$$Y = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \overline{\gamma_j} x_j / \quad \overline{\gamma_j} \in \Gamma, \quad j = 1, 2, \cdots, n \right\}. \tag{1.37}$$

Por (1.36) *y* (1.37) *tenemos que* $\mu_{\widetilde{\overline{Z}}}(\overline{u}) = \sup_{s} \left\{ \min_{1\leq j\leq n} \mu_{\overline{\widetilde{M_j}}}(s_j) / \quad \overline{u} \sim N\left(\sum_{j=1}^{n} s_j x_j, \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i xj \right) \right\}$ *donde* $s = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$.

Además, discutimos la probabilidad $Pr \left\{ \omega / \quad \sum_{j=1}^{n} \overline{\widetilde{r}_j} x_j \geq f \right\}$ *que es la probabilidad de que el valor de la función objetivo sea mayor o igual que un nivel de aspiración* f*. Desde que* $\sum_{j=1}^{n} \overline{\widetilde{r}_j} x_j$ *esté representada con una variable aleatoria fuzzy, expresamos la probabilidad* $Pr \left\{ \omega / \quad \sum_{j=1}^{n} \overline{\widetilde{r}_j} x_j \geq f \right\}$ *como un conjunto fuzzy* $\widetilde{P}$ *y definimos la función de pertenencia de* $\widetilde{P}$ *como sigue:*

$$\mu_{\widetilde{P}}(p) = \sup_{\overline{u}} \left\{ \mu_Z(\overline{u}) / \quad p = Pr\left\{ \omega / \quad \overline{u}(\omega) \geq f \right\} \right\} \tag{1.38}$$

$$= \sup_{s} \min_{1\leq j\leq n} \left\{ \mu_{\widetilde{M}_j}(s_j) / \quad p = Pr\left\{ \omega / \quad \overline{u}(\omega) \geq f \right\}, \quad \overline{u} \sim N(\sum_{j=1}^{n} s_j x_j, \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j) \right\} \tag{1.39}$$

Como el problema (1.33) *no es un problema bien definido debido a que incluye retornos variables aleatorias fuzzy, necesitamos el conjunto criterio con respecto a la probabilidad y posibilidad de retornos futuros por la optimización deterministica. En general, en casos de decisión con respecto a la inversión, un inversionista usualmente se enfoca en maximizar la meta de ganancia total o que logre la probabilidad.*

En muchas investigaciones, son introducidos los modelos de media-varianza para problemas de selección de portafolio basados en el modelo de Markowitz. Introducimos formalmente el modelo de maximización de retorno esperado para el modelo de selección de portafolio fuzzy aleatorio como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \widetilde{\mathbb{E}}[Z] \\ &s.\ a. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b}_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.40}$$

En este problema $\widetilde{\mathbb{E}}[Z]$ *representa el valor esperado. El problema* (1.40) *es un problema de optimización fuzzy para problemas de selección de portafolio y se resuelve usando resultados de estudios en modelos de selección de portafolio fuzzy. Además, introducimos formalmente el siguiente modelo media -varianza:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbb{V}[Z] \\ s.\ a. \quad & \begin{cases} \widetilde{\mathbb{E}}[Z] \succeq r_G \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b}_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.41}$$

donde r_G *es un valor mínimo de la ganancia total futura y* $\widetilde{\mathbb{E}}[Z] \succeq r_G$ *dice que el retorno total esperado es aproximadamente mayor que* r_G. *Entonces* $\mathbb{V}[Z]$ *es la varianza y* $\mathbb{V}[Z] = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$ *debido a que no incluye variables aleatorias fuzzy en cada varianza. Por tanto el problema* (1.41) *es equivalente al problema:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \\ s.\ a. \quad & \begin{cases} \widetilde{\mathbb{E}}[Z] \succeq r_G \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b}_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.42}$$

Este problema también es un problema de selección de portafolio fuzzy debido a que $\widetilde{\mathbb{E}}$ *involucra números fuzzy. Consideramos un modelo de optimización de posibilidad fractile con respecto a retornos futuros. Este modelo es formulado de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \max \quad & f \\ s.\ a. \quad & \begin{cases} \mu_{\widetilde{P}}(p), \quad p \geq \beta \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b}_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.43}$$

En este problema la restricción $\mu_{\widetilde{P}}(p)$, $p \geq \beta$ *es transformada en la siguiente forma basada en los resultados obtenidos por Hasuike y Katagiri:*

$$\mu_{\widetilde{P}}(p), p \geq \beta \Leftrightarrow \exists \overline{u} : Pr\left\{\omega / \overline{u}(\omega) \geq f\right\} \geq \beta, \overline{u} \sim N\left(\sum_{j=1}^{n}(m_j + R^*(h)\alpha_j)x_j, \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j\right) \tag{1.44}$$

donde $R^*(x)$ *es una función pseudo-inversa de* $R(x)$ *en la función de pertenencia* (1.34). *Entonces transformamos el problema* (1.43) *en el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad f \\ &s.\ a. \begin{cases} Pr\left\{\omega / \overline{u}(\omega) \geq f\right\} \geq \beta \\ \overline{u} \sim N\left(\sum_{j=1}^{n}(m_j + R^*(h)\alpha_j)x_j, \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j\right) \\ \sum_{j=1}^{n} a_jx_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.45}$$

Ahora, consideremos la transformación del cambio de la restricción probabilidad $Pr\left\{\omega/\overline{u}(\omega) \geq f\right\} \geq \beta$*. Entonces tenemos que* $\frac{\overline{u} - \sum_{j=1}^{n}(m_j + R^*(h)\alpha_j)x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j}}$ *es una variable aleatoria con distribución normal estándar. Por tanto tenemos la siguiente transformación del cambio de la restricción probabilidad:*

$$Pr\left\{\omega/\overline{u}(\omega) \geq f\right\} \geq \beta \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n}(m_j + R^*(h)\alpha_j)x_j - K_\beta\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j}\right) \geq f$$

donde $F(y)$ *es la función de distribución de la distribución normal estándar y* $K_\beta = F^{-1}(\beta)$*. Consideramos* $\beta \geq \frac{1}{2}$ *a los siguientes supuestos: En la practica, casi todos los decisores no seleccionan un portafolio cuya probabilidad de la meta del retorno total sea menos de la mitad y en programación matemática* $\sum_{j=1}^{n}(m_j + R^*(h)\alpha_j)x_j - K_\beta\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j}$ *es una función cóncava en el caso* $\beta \geq \frac{1}{2}$*.*
De acuerdo con esto, el problema (1.45) *es transformado de forma equivalente en el siguiente problema deterministico:*

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad f \\ &s.\ a. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}(m_j + R^*(h)\alpha_j)x_j - K_\beta\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j} \geq f \\ \sum_{j=1}^{n} a_jx_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.46}$$

en este problema, tenemos que la variable de decisión f *está involucrada solo en la primera restricción y maximizar* f *es equivalente a minimizar* $\sum_{j=1}^{n}(m_j + R^*(h)\alpha_j)x_j - K_\beta\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j}$*.*
Luego, el problema (1.46) *es transformado en el problema:*

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \sum_{j=1}^{n}(m_j + R^*(h)\alpha_j)x_j - K_\beta\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j} \\ &s.\ a. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_jx_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.47}$$

que es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
&\text{mín} \quad -\sum_{j=1}^{n}(m_j + R^*(h)\alpha_j)x_j + K_\beta\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j} \\
&s.\ a. \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

Como el problema (1.48) *es equivalente a un problema de optimización convexo, su solución optima existe. Sin embargo, el problema* (1.48) *es difícil de resolver por la raíz cuadrada; por lo tanto, consideramos la transformación equivalente de este problema. Hacemos las siguientes transformaciones de variables, debido a que la matriz simétrica de varianza-covarianza es una matriz definida positiva:*

$K_\beta \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j = K_\beta x^T V x = y^T y$. *Ahora,* $x^T V x = (Qx)^T \Lambda (Qx)$ *donde* Q *es un vector propio de* V*,* Λ *es matriz diagonal de vectores propios* λ_i *de* V*. Luego,* $y = \sqrt{K_\beta}\sqrt{\Lambda}Qx$*,* $m' = \frac{1}{\sqrt{K_\beta}}(m + R^*(h)\alpha)(\sqrt{\Lambda})^{-1}Q$*,* $a' = \frac{1}{\sqrt{K_\beta}}a\sqrt{\Lambda}Q$*,* $b' = \frac{1}{\sqrt{K_\beta}}\sqrt{\Lambda}Qb$*,* $\widehat{b}' = \frac{1}{\sqrt{K_\beta}}\sqrt{\Lambda}Q\widehat{b}$*. Además, establecemos* $y \to x$*,* $m'_j \to m_j$*,* $a'_j \to a_j$*,* $b'_j \to b_j$ *y* $\widehat{b_j}' \to \widehat{b_j}$*. Por estas transformaciones de variables, el problema* (1.48) *es transformado en el problema:*

$$
\begin{aligned}
&\text{mín} \quad -\sum_{j=1}^{n} m_j x_j + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \\
&s.\ a. \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

Este problema todavía incluye un termino con raíz cuadrada. Luego, introducimos el siguiente problema auxiliar usando un parámetro R *que no incluye el termino de raíz cuadrada:*

$$
\begin{aligned}
&\text{mín} \quad -R\sum_{j=1}^{n} m_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \\
&s.\ a. \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

Como éste es un problema de programación cuadrático convexo, es mas fácil resolverlo que el problema (1.49)*. Este problema es equivalente al modelo derivado del estudio de Ishii; por tanto, de forma similar se puede obtener el portafolio óptimo estricto del problema* (1.49)*. Además, en estudios anteriores cada varianza se considera independiente; sin embargo, estamos considerando la matriz de varianza-covarianza con respecto a cada varianza, por tanto este modelo es una versión extendida de modelos previos y la solución del método derivado por Ishii es extendido al caso* *general de selección de portafolio.*

Consideremos ahora el modelo de maximización de la posibilidad con respecto a la probabilidad. Primero que todo, introducimos un modelo básico de maximización de probabilidad como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \widetilde{P} = Pr\left\{\sum_{j=1}^{n} \overline{\widetilde{r}_j} x_j \geq f\right\} \\ &s.\ a. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.51}$$

sin embargo, como la función objetivo incluye variables aleatorias fuzzy entonces este problema no está bien definido; luego, introducimos la restricción de oportunidad de posibilidad de la función objetivo, ponemos el nivel designado de posibilidad h e introducimos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \beta \\ &s.\ a. \begin{cases} \mu_{\widetilde{P}}(p) \geq h, \quad p \geq \beta \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.52}$$

de manera similar a la transformación (1.38), *el problema* (1.52) *queda transformado en la forma:*

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \beta \\ &s.\ a. \begin{cases} Pr\{\omega / \ \ \overline{u}(\omega) \geq f\} \geq \beta \\ \overline{u} \sim N\left(\sum_{j=1}^{n} (m_j + R^*(h)\alpha_j) x_j, \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j\right) \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.53}$$

como $\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j} > 0$ *y* K_β *es un valor estrictamente decreciente con respecto a* β, *este problema es equivalentemente transformado en el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \frac{\sum_{j=1}^{n} (m_j + R^*(h)\alpha_j) x_j - f}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j}} \\ &s.\ a. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.54}$$

que es equivalente a

$$
\begin{aligned}
&\text{mín} \quad \frac{f - \sum\limits_{j=1}^{n}(m_j + R^*(h)\alpha_j)x_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j}} \\
&s.\ a. \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.55}
$$

además, de forma similar a desarrollos anteriores, reestablecemos las variables, y el problema (1.55) *es transformado en el siguiente problema:*

$$
\begin{aligned}
&\text{mín} \quad \frac{f - \sum\limits_{j=1}^{n} m_j x_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2}} \\
&s.\ a. \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.56}
$$

como este problema es equivalente a la forma del modelo derivado por Ishii, aplicamos la solución del método en el estudio de este problema y obtenemos una solución optima estricta.

1.5.3. Optimización intervalo valuada

La optimización intervalo valuada utiliza los conceptos de intervalos cerrados, acotados y convexos y órdenes parciales adecuados ([5], [3], [6],[12]).

Dentro de la optimización intervalo valuada, así mismo como en la optimización deterministica existen problemas mono-objetivo y problemas multi-objetivo. En [12] los problemas de optimización multi-objetivo intervalo-valuado se propuso denominarlos problemas de optimización multi-intervalo valuado, denominación que utilizaremos. Wu ha desarrollado teoremas de Karush-Kuhn-Tucker y dualidad de Wolfe para el problema de optimización mono-objetivo intervalo-valuado y el teorema de Karush-Kuhn-Tucker para el problema de optimización multi-intervalo valuado.

Ejemplo 1.5.5. *Optimización fuzzy.*
Un granjero tiene tres productos p_1, p_2 *y* p_3 *que mezcla para alimentar sus cerdos. El sabe que los cerdos requieren cierta cantidad de comida* f_1 *y* f_2 *por día. La tabla* 1 *muestra las unidades estimadas de* f_1 *y* f_2 *por gramo en* p_1, p_2,p_3. *También, cada cerdo debe alimentarse aproximadamente con menos de* 54 *unidades de* f_1 *y* 60 *unidades de* f_2 *por día. El costo promedio de* p_1, p_2 *y* p_3 *varia por día, pero el costo promedio es:* 8 *centavos por gramo de* p_1, 9 *centavos por gramo de* p_2 *y* 10 *centavos por gramo de* p_3. *El granjero desea saber cuantos gramos de* p_1, p_2 *y* p_3 *debe*

mezclar por día para satisfacer las necesidades alimenticias de los cerdos y minimizar los costos.

Tabla A

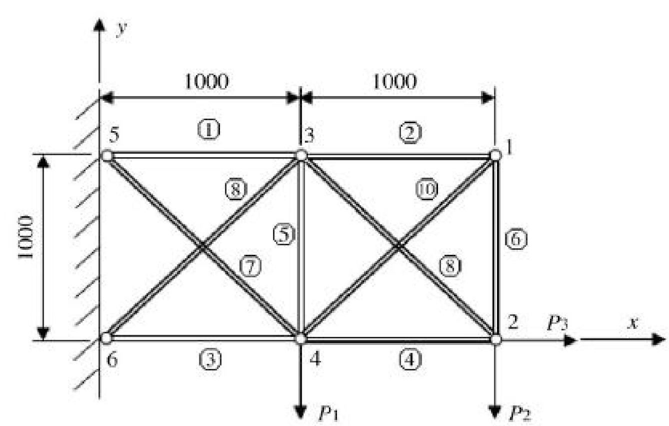
Alimento	p_1	p_2	p_3
f_1	*Al rededor de* $2,5g$	*Al rededor de* $4,5g$	*Al rededor de* $5g$
f_2	*Al rededor de* $5g$	*Al rededor de* $3g$	*Al rededor de* $10g$

Este en un problema de optimización , que puede escribirse como un problema intervalo-valuado a intervalos de 2 unidades de costo y una unidad para cantidades de comida. Entonces el problema puede formularse así:

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad f(x) = [7;9]\,x_1 + [8;10]\,x_2 + [9;11]\,x_3 \\ &s.\ a. \begin{cases} [2;3]\,x_1 + [4;5]\,x_2 + [4,5;5,5] \succeq [50;58] \\ [4,5;5,5]\,x_1 + [2,5;3,5]\,x_2 + [9;11] \succeq [56;64] \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.57}$$

Ejemplo 1.5.6. *Optimización estructural.*

Considere el problema de cercha presentado en la figura. El objetivo es optimizar el area de las barras para obtener el mínimo desplazamiento en la union 2 *en la dirección* y*. las barras* $1, 2, 3$ *y* 4 *tienen la misma area, denotada por* A_1*. Las barras* $7, 8, 9$ *y* $10, 5$ *y* 6 *tienen la misma area, denotadas por* A_2*,* A_3 *y* A_4 *respectivamente. Los pesos* p_1*,* p_3 *y la densidad* ρ *son* $1000N$*,* $1000N$ *y* $7,8 \times 10^{-3} \frac{Kg}{mm^3}$*, respectivamente. El peso* p_2 *y el modulo de Young* E *son desconocidos, tienen un valor promedio de* $1000N$ *y* $2.01065Mp$ *y con un nivel de incertidumbre de* $10\,\%$ *de valor promedio por ambos. El valor máximo de peso que puede soportar la cercha es* $1365Kg$*.*



Este problema puede formularse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\text{mín } u_{2y}(A, E, p_2) \\ &s.\ a. \begin{cases} w = (4000A_1 + 2000\sqrt{2}A_2 + 2000\sqrt{2}A_3 + 2000A_4) \\ A_i \in [5;25]\,, \quad i = 1,2,3,4 \\ p_2 \in [900;1100] \\ E \in \left[1.8 \times 10^5; 2.2 \times 10^5\right] \end{cases} \end{aligned} \tag{1.58}$$

En esta subsección presentaremos algunos teoremas de optimización de funciones mono-objetivo intervalo valuadas, que provienen de [3], [5] y [6], además como teoremas relacionados con el problema dual en optimización mono-objetivo bajo incertidumbre y en los cuales nos hemos apoyado para obtener resultados similares para dualidad en optimización multi-objetivo bajo incertidumbre.

Los problemas de optimización difusa y optimización estocástica pueden ser expresados en términos de optimización intervalo valuada, por esta razón nos dedicamos al estudio de la optimización intervalo valuada (en particular al estudio de dualidad) por su carácter en apariencia unificador.

1.6. Optimización con Funciones Objetivo intervalo valuada

1.6.1. Formulación del Problema de Optimización y Conceptos de Solución

Consideremos el siguiente problema de optimización con función objetivo intervalo valuada.

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) = \left[f^L(x), f^U(x)\right] \\ \text{s.a} & x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n \end{array} \tag{1.59}$$

donde el conjunto factible $\mathbb{X}$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.
Dado que el valor objetivo $f(x)$ es un intervalo cerrado, acotado y convexo, es necesario interpretar lo que significa minimizar en el problema (1.59).

Con el orden parcial "$\preceq_{LU}$" en $\mathcal{I}$, definidos en (1.3.2) se puede usar un concepto de solución similar a la solución óptima de Pareto, usada en los problemas de optimización multi-objetivo para interpretar el significado de la minimizar en el problema (1.59).

Definición 1.6.1. *Sea x^* una solución factible, es decir, $x^* \in \mathbb{X}$. Se dice que x^* es una* solución *del problema (1.59) si no existe $\overline{x} \in \mathbb{X}$ tal que $f(\overline{x}) \preceq_{LU} f(x^*)$.*

1.6.2. Condiciones KKT para la Diferenciabilidad Débil y Fuerte

Antes de pasar a la discusión sobre las condiciones KKT para el problema (1.59), se define el concepto de convexidad para funciones intervalo valuada.

Definición 1.6.2. *Sea $f(x) = \left[f^L(x); f^U(x)\right]$ una función intervalo valuada definida sobre un conjunto convexo $D \in \mathbb{R}^n$. Se dice que f es* LU-convexa en x^* *si:*

$$f(\lambda x^* + (1-\lambda)x) \preceq_{LU} \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(x) \tag{1.60}$$

para cada $\lambda \in (0,1)$ y cada $x \in D$.

Proposición 1.6.1. *Sea D un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y f una función intervalo valuada definida sobre D. Entonces para $x^* \in D$ tenemos la siguiente propiedad:*

f es LU-convexa en x^* si y sólo si f^L y f^U son convexas en x^*.

Sea $\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \cdots, k\}$ la región factible del problema (1.59) y un punto x^* en $\mathbb{X}$. Decimos que las funciones restricciones reales $g_i(x) \leq 0, i = 1, \cdots, k$ satisfacen las hipótesis KKT en x^*, si las g_i son convexas sobre $\mathbb{R}^n$ y continuamente diferenciables en x^* para todo $i = 1, \cdots, k$, con esto se sigue:

Teorema 1.6.1. *Suponga que las funciones restricciones reales $g_i(x) \leq 0, i = 1, \cdots, k$ del problema* (1.59) *satisfacen la hipótesis KKT en x^* y la función objetivo intervalo valuada $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{I}$ es LU-convexo y débilmente continuamente diferenciable en x^*,entonces, si existen multiplicadores $0 < \lambda^L,\ \lambda^U \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, k$ tales que:*

(I) $\lambda^L \nabla f^L(x^*) + \lambda^U \nabla f^U(x^*) + \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i \nabla g_i(x^*) = \mathbf{0}$;

(II) $\mu_i g_i(x^*) = 0$ *para todo* $i = 1, \cdots, k$,

entonces x^* es una solución óptima del problema (1.59)

y para la H-diferenciabilidad se tiene:

Teorema 1.6.2. *Suponga que las funciones restricciones reales $g_i(x) \leq 0, i = 1, \cdots, k$ del problema* (1.59) *satisfacen la hipótesis KKT en x^* y la función objetivo intervalo valuada $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{I}$ es LU-convexo y continuamente H-diferenciable en x^*, si existen multiplicadores $0 \leq \mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, k$ tales que:*

(I) $\nabla f(x^*) + \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i \nabla g_i(x^*) = \mathbf{0}$;

(II) $\mu_i g_i(x^*) = 0$ *para todo* $i = 1, \cdots, k$,

entonces x^* es una solución óptima del problema (1.59)

1.6.3. Otros resultados sobre las restricciones en el problema (1.59)

Hasta el momento se han tratado algunos de los temas de la optimización con función mono-objetivo intervalo valuada descritos en [5], en donde las funciones restricciones son funciones real valuadas. En otros artículos posteriores se han hecho avances en este tema y se han considerado a las funciones restricciones también como funciones intervalo valuadas [3], lo que implica que se debe tener en cuenta no sólo un órden parcial apropiado, $\prec$, en la función mono-objetivo sino también, otro órden parcial apropiado, $\widehat{\preceq}$, en las funciones restricciones, de tal forma que el problema de optimización intervalo valuado se describe como sigue:

$$\begin{array}{ll} \text{mín}_{\prec} & f(x) = \left[f^L(x); f^U(x)\right] \\ \text{s. a.} & \begin{array}{l} G_i(x) \,\widehat{\preceq}\, \left[b_i^L; b_i^U\right], \, i = 1, \cdots, k \\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \end{array} \tag{1.61}$$

donde $G_i(x) = \left[g_i^L(x); g_i^U(x)\right]$ son funciones restricciones intervalo valuadas para $i = 1, \cdots, k$, y "mín", según el órden parcial estricto $\prec$.

De los problemas de optimización dados por (1.61), nos interesan los que se plantean a partir del órden parcial $\preceq_{LU}$ y el órden parcial estricto asociado, y en este caso el problema se reescribe como:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) = \left[f^L(x); f^U(x)\right] \\ \text{s. a.} & \begin{array}{l} G_i(x) \preceq_{LU} \left[b_i^L; b_i^U\right], \, i = 1, \cdots, k \\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \end{array} \tag{1.62}$$

De otro lado, si se define el siguiente problema auxiliar de optimización con función mono-objetivo intervalo valuada:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) = \left[f^L(x); f^U(x)\right] \\ & g_i^L(x) \leq b_i^L,\ i = 1, \cdots, k \\ \text{s. a.} & g_i^U(x) \leq b_i^U,\ i = 1, \cdots, k \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{1.63}$$

entonces, tenemos que:

Proposición 1.6.2. *Suponga que los problemas* (1.62) *y* (1.63) *usan el mismo concepto de solución, entonces* (1.62) *y* (1.63) *tienen las mismas soluciones óptimas.*

Demostración. Llamemos $\mathbb{X}_1$ y $\mathbb{X}_2$ los conjuntos factibles de los problemas (1.62) y (1.63) respectivamente, entonces por la definición del orden $\preceq_{LU}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1 &= \left\{x \in \mathbb{R}^n / \left[g_i^L(x); g_i^U(x)\right] \preceq_{LU} \left[b_i^L; b_i^U\right],\ i = 1, \cdots, k\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n / g_i^L(x) \leq b_i^L,\ g_i^U(x) \leq b_i^U,\ i = 1, \cdots, k\right\} \\ &= \mathbb{X}_2 \end{aligned}$$

por lo tanto $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2$. Además, estos problemas tienen la misma función objetivo, por lo tanto tienen las mismas soluciones óptimas. □

De la anterior proposición, se concluye que los problemas de optimización con función objetivo intervalo valuada y funciones restricciones intervalo valuadas, pueden resolverse a través del problema auxiliar (1.63), donde las funciones restricciones son funciones real valuadas, y por tanto se puede estudiar a partir de las condiciones dadas en el teorema 1.6.2 para la solución.

1.6.4. Planteamiento del problema de optimización Multi-objetivo bajo incertidumbre

A continuación describimos nuestro problema primal $(MIVP)$ multi-objetivo con incertidumbre con restricciones real valuadas no lineales.

$$(\text{MIVP}) \qquad \begin{array}{l} \text{mín}\ \ \mathrm{F}(x) = \left[\mathrm{F}^L(x); \mathrm{F}^U(x)\right] \\ \text{s. a.} \begin{cases} g_i(x) \leq 0, & i = 1, \cdots, k \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \tag{1.64}$$

donde F^L: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y F^U: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son funciones vectoriales y además g_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \cdots, k$ son funciones real valuadas no lineales.

Introducimos la siguiente notación para lograr dicho propósito. Denotamos por:
$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0;\ g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \cdots, k\}$ el conjunto factible del problema primal (1.64).

$Obj_{MIVP}(\mathrm{F}, \mathcal{X}) = \{\mathrm{F}(x) : x \in \mathcal{X}\}$ el conjunto de todos los valores objetivo del problema primal (1.64)

Definimos a continuación el concepto de solución no dominada para el problema (1.64).

Definición 1.6.3. *Sea x^* una solución factible del problema primal* (1.64)*. Decimos que x^* es una solución no dominada del problema* (1.64) *si no existe $\overline{x} \in \mathcal{X}$ tal que* $\mathrm{F}(\overline{x}) \leq_{LU} \mathrm{F}(x^*)$*. En este caso,* $\mathrm{F}(x^*)$ *es denominado valor objetivo no dominado de* (1.64)*.*

Así, definimos el siguiente conjunto:

$Min(\mathrm{F}, \mathcal{X}) = \{\mathrm{F}(x^*) : x^* \text{ es una solución no dominada de } (1.64)\}$

1.7. Dualidad.

En optimización es fundamental estudiar el problema dual de un problema primal porque examinar la dualidad tiene como finalidad encontrar información y soluciones al problema primal por medio de una via alterna para su hallazgo, si existe; además se encuentran relaciones importantes entre las soluciones de ambos problemas pues este arroja información adicional del problema primal.

A continuación estudiaremos las propuestas de problema dual hechas por Wolfe para el caso de una función objetivo real valuada, con restricciones real valuadas ([2]); por Wu para el caso de una función mono-objetivo bajo incertidumbre con restricciones real valuadas no lineales ([3]), para el caso de una función mono-objetivo bajo incertidumbre con restricciones intervalo valuadas ([4]), por Sheng y Liu para el caso de una función objetivo invexa conjunto valuada en un problema de optimización vectorial ([1]). Dicho estudio es necesario para posteriormente hacer una extensión de dichos conceptos, al caso de una función multi-objetivo bajo incertidumbre.

1.7.1. Dualidad Wolfe Real

Se presenta los problemas primal y dual de Wolfe para un problema convencional de programación no lineal, basados en [2]. Sean f, g_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ funciones real valuadas definidas en $\mathbb{R}^n$; además f, g_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ convexas y diferenciables. Entonces, se considera el siguiente problema de minimización:

$$\begin{aligned} &\text{mín} \;\; f(x) \\ &\text{s. a.} \begin{cases} g_i(x) \leq 0, & i = 1, \cdots, k \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.65}$$

El conjunto factible del problema (1.65) es denotado por:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, g_i(x) \leq 0 \text{ para } \; i = 1, 2, \cdots, k\}$$

Ahora, el problema dual del problema (1.65) propuesto por Wolfe es:

$$
\begin{aligned}
&\text{máx} \;\; f\left(x\right)+\sum_{i=1}^{k}u_i g_i(x)\\
&\text{s. a.}\begin{cases}\nabla f(x)+\sum\limits_{i=1}^{k}u_i\nabla g_i\left(x\right)=0, \quad i=1,\cdots,k\\ u\geq 0\\ x\geq 0.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.66}
$$

A veces, la función objetivo del problema dual (1.66) se denota por:

$$
L(x,u)=f\left(x\right)+\sum_{i=1}^{k}u_i g_i(x)
$$

donde $u=(u_1,u_2,\cdots,k)$, la cual es llamada función Lagrangiana. Así, el problema dual puede ser formulado como

$$
\begin{aligned}
&\text{máx} \;\; L\left(x,u\right)\\
&\text{s. a.}\begin{cases}\nabla L(x,u)=0, \quad i=1,\cdots,k\\ u\geq 0\\ x\geq 0.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.67}
$$

El conjunto factible del problema dual (1.67) es denotado por

$$
Y=\{(x,u)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k: u\geq 0,\; \nabla L(x,u)=\nabla f(x)+\sum_{i=1}^{k}u_i\nabla g_i\left(x\right)=0\}
$$

1.7.2. Dualidad Wolfe Intervalo Valuada

Dado que se han propuesto diferentes clases de diferenciación para funciones intervalo valuadas, organizamos la dualidad de Wolfe intervalo valuada de acuerdo al desarrollo en base a estos tipos de diferenciabilidad.

Diferenciablilidad Débil

En [3] se considera el siguiente problema primal:

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) = \left[f^L(x); f^U(x)\right] \\ &\text{s. a.} \begin{cases} g_i(x) \le 0, & i = 1, \cdots, k \\ x \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.68}$$

donde f: $\mathbb{R}^n \to \mathcal{I}$ y g_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, ..., k$ son funciones convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$.

Además, se propone el siguiente, como el problema dual al problema primal mono-objetivo bajo incertidumbre:

$$\begin{aligned} &\max \ f(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x) \\ &\text{s. a.} \begin{cases} \nabla f^L(x) + \nabla f^U(x) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(x) = 0 \\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_k) \geqslant 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.69}$$

donde $l(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x)$ es una función intervalo valuada.

Usando los conceptos elaborados en [2], se demostró en [3], de forma indirecta que los problemas (1.68) y (1.69) son problemas duales en el sentido de Wolfe. Para dicha prueba, se consideran los siguientes dos problemas, teniendo presente de antemano que uno es el dual del otro, pues se garantiza dado que son problemas real-valuados y preservan la forma dual de Wolfe real valuada.

Consideremos el siguiente problema de optimización real valuado:

$$\begin{aligned} &\min \ f_{LU}(x) = f^L(x) + f^U(x) \\ &\text{s. a.} \begin{cases} g_i(x) \le 0, & i = 1, \cdots, k \\ x \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.70}$$

donde f_{LU}: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y g_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, ..., k$ son funciones convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$.

Consideremos el problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
&\text{máx} \;\; l_{LU}(x,u) = l^L(x,u) + l^U(x,u) \\
&\text{s. a.} \begin{cases} \nabla f^L(x) + \nabla f^U(x) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(x) = 0 \\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_k) \geqslant 0 \\ x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.71}
$$

Usando dualidad de Wolfe en $\mathbb{R}$, los problemas (1.70) y (1.71) son problemas duales. En [3] se prueba que toda solución del problema (1.70) es una solución no dominada del problema (1.68) y además que toda solución del problema (1.71) es una solución no dominada del problema (1.69) y bajo ciertas condiciones, se prueba que los extremos de los problemas (1.68) y (1.69) son iguales y por tanto tienen las mismas soluciones.

Diferenciablilidad Fuerte

Basado en la diferencia Hakuhara y la métrica Hausdorff el concepto de diferenciación para una función intervalo valuada, llamada H-diferenciación, es propuesta en [5]. Si F es diferenciable en x_0 entonces el H-gradiente de F en x_0 es definido por:

$$\nabla F(x_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0), \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0) \right)^T$$

donde

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) = \left[\frac{\partial F^L}{\partial x_i}(x_0), \frac{\partial F^U}{\partial x_i}(x_0) \right]$$

es un intervalo cerrado para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ y

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) \right)^L = \frac{\partial F^L}{\partial x_i}(x_0) \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) \right)^U = \frac{\partial F^U}{\partial x_i}(x_0)$$

que nos lleva a:

$$(\nabla F(x_0))^L = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0) \right)^L, \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0) \right)^L, \cdots, \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0) \right)^L \right)^T = \nabla F^L(x_0)$$

y

$$(\nabla F(x_0))^U = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0) \right)^U, \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0) \right)^U, \cdots, \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0) \right)^U \right)^T = \nabla F^U(x_0)$$

Ahora, En [4] se propone el siguiente problema primal de optimización intervalo valuado:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \mathrm{F}(x) = \left[\mathrm{F}^L(x); \mathrm{F}^U(x)\right] \\ \text{s. a.} & \left\{ \begin{array}{ll} G_i(x) \leq [0;0], & i = 1, \cdots, k \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{1.72}$$

donde F^L: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y F^U: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones real valuadas y las funciones restricción G_i: $\mathbb{R}^n \to \mathcal{I}$ son funciones intervalo valuadas para $i = 1, 2, \cdots, k$. Escribimos $G_i(x) = \left[G_i^L(x); G_i^U(x)\right]$ para $i = 1, 2, \cdots, k$. Denotamos por:

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \ , \ G_i(x) \leq [0;0] \ , \ i = 1, 2, \cdots, k\}$$

el conjunto factible del problema primal (1.72).

En [4] se define la función Lagrangiana para el problema primal (1.72) de la siguiente manera:

$$L(x, u) = F(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i G_i(x) \quad \text{para } u \geq 0$$

donde

$$(L(x, u))^L = F^L(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i G_i^L(x) \quad \text{para } u \geq 0$$

y

$$(L(x, u))^U = F^U(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i G_i^U(x) \quad \text{para } u \geq 0$$

Asumimos que F, G_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ son H-diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$, así tenemos

$$H(x, u) = \nabla F(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla G_i(x)$$

donde

$$(H(x, u))^L = \nabla F^L(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla G_i^L(x)$$

y

$$(H(x, u))^U = \nabla F^U(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla G_i^U(x).$$

En general $\nabla L(x, u) \neq H(x, u)$.

En [4], el problema dual Wolfe del problema primal (1.72) se propone de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad L(x,u) \\ &\text{s. a.} \begin{cases} H(x,u) = [0;0]_n \\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_k) \geqslant 0 \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.73}$$

Se denota por:

$$\overline{Y} = \{(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : x \geq 0 \ , \ u \geqslant 0 \ , \ H(x,u) = [0;0]_n \ \ , \ i = 1, 2, \cdots, k\}$$

el conjunto factible del problema primal (1.73).

En [4] se prueba de forma directa que los problemas (1.72) y (1.73) son problemas duales.

1.7.3. Dualidad de Wolfe Conjunto Valuada

Sean X, Y y Z espacios vectoriales topológicos reales Hausdorff localmente convexos, con espacios topológicos duales X^*, Y^* y Z^* respectivamente. Sean $S \subseteq Y$ y $K \subseteq Z$ conos convexos, cerrados y punteados. El cono dual S^* de S es definido como:

$$S^* = \{s^* \in Y^* : s^*(s) \geq 0, \ \forall s \in S\}$$

donde $s^*(s)$ es el valor del funcional s^* en s.

Sea D un subconjunto no vacío de X. Sean $F\colon D \to 2^Y$ y $G\colon D \to 2^Z$ funciones conjunto valuadas tales que $F(x) \neq \phi$ y $G(x) \neq \phi$ para todo $x \in D$. en [1] se considera el siguiente problema de optimización vectorial con función conjunto valuada:

$$\begin{aligned} S - \text{mín} \ \ &\mathrm{F}\,(x) \\ \text{s. a.} \ \ &x \in E \end{aligned} \tag{1.74}$$

donde $E = \{x \in D : G(x) \bigcap (-K) \neq \phi\}$, $F(E) = \bigcup\limits_{x \in E} F(X)$. En [1] se proponen las siguientes definiciones:

Definición 1.7.1. *Sea $A \subseteq Y$, $A \neq \phi$. Se define punto eficiente débil de A sobre S por*

$$Wmin(A,S) = \{y \in A : (-intS) \bigcap (A - y) = \phi\}$$

.

Si $x_0 \in E$ es tal que $F(x_0) \bigcap Wmin(F(E), S) \neq \phi$ entonces se dice que x_0 es una solución eficiente débil del problema (1.74). Para cualquier $y_0 \in (x_0) \bigcap Wmin(F(E), S)$ se llama a (x_0, y_0) elemento eficiente débil del problema (1.74).

Definición 1.7.2. *Un conjunto $M \subseteq X$ es llamado invexo si existe una función vectorial $\eta\colon X \times X \to X$ tal que*

$$x, y \in M, \quad \lambda \in [0,1] \Rightarrow y + \lambda \eta(x,y) \in M$$

.

Un conjunto convexo siempre es invexo porque $\eta(x,y) = x - y$.

En [1] se introduce la condición C para η como sigue:

Definición 1.7.3. *Sea* $\eta\colon X \times X \to X$ *una función vectorial. Se dice que* η *satisface la condición* C*, si para todo* $x, y \in X$

(C_1) $\eta(x,x) = 0$

(C_2) $\bigcup\limits_{x \in X} \eta(x,y) = X$*, para todo* $y \in X$

(C_3) $\eta(\lambda x, \lambda y) = \lambda \eta(x,y)$, $\eta(x - x_0, y - x_0) = \eta(x,y)$, $x, y, x_0 \in X$

Definición 1.7.4. *Sean* η *una función vectorial de* $X \times X$ *en* X*,* A *un conjunto invexo en* η*,* $\alpha > 0$ *un número real,* $F\colon A \to 2^Y$ *una función conjunto valuada. Si para todo* $x_1, x_2 \in A$ *y para todo* $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda^\alpha F(x_1) + (1 - \lambda^\alpha) F(x_2) \subset F(x_2 + \lambda \eta(x_1, x_2)) + S$$

se dice que $F\colon A \to 2^Y$ *es una* S*-preinvexa de orden* α *en* A *con* η.

Definición 1.7.5. *Sea* $A \subset X \times Y$ *un conjunto dado.* A *es llamado conjunto* $(1,\alpha)$*-convexo si para cada par* (x_1, y_1) *y* $(x2, y_2) \in A$ *se tiene*

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \lambda^\alpha y_1 + (1 - \lambda^\alpha) y_2) \in A$$

Definición 1.7.6. *Sea* $A \subset X \times Y$ *un conjunto dado.* A *es llamado conjunto* G*-invexo de orden* α *si existe* $\eta\colon X \times X \to X$ *tal que para cada par* (x_1, y_1) *y* $(x2, y_2) \in A$ *se tiene*

$$(x_2 + \lambda \eta(x_1, x_2), \lambda^\alpha y_1 + (1 - \lambda^\alpha) y_2) \in A, \ \forall \lambda \in [0,1]$$

Definición 1.7.7. *Sea* $F\colon E \to 2^Y$ *una función conjunto valuada. Se definen la gráfica y el epígrafe de* F *en* E *como sigue*

$$graph_E F = \{(x,y) \in E \times Y : x \in E, \ y \in F(x)\}$$

y

$$epi_E F = \{(x,y) \in E \times Y : x \in E, \ y \in F(x) + S\}$$

Definición 1.7.8. *Sean* $A \subset X \times Y$*,* $A \neq \phi$*,* $(x_0, y_0) \in A$*. El cono tangente* $(1,\alpha)$*-contingente* $T_A^{(1,\alpha)}(x_0, y_0)$ *de* A *en* (x_0, y_0) *es un subconjunto de* $X \times Y$*, que satisface* $(x,y) \in T_A^{(1,\alpha)}(x_0, y_0)$ *si y sólo si existe* $h_n \to 0^+$*,* $(x_n, y_n) \in A$*,* $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) (n \to +\infty)$ *tales que*

$$(x,y) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x_n - x_0}{h_n}, \frac{y_n - y_0}{h_n^\alpha} \right)$$

Definición 1.7.9. *Sean* $F\colon X \to 2^Y$*,* $(x_0, y_0) \in graph F$*. La derivada tangente contingente de orden* α*,* $D^\alpha F(x_0, y_0)$ *es una función conjunto valuada que satisface*

$$epi_X D^\alpha F(x_0, y_0) = T^{(1,\alpha)}_{epi_X F}(x_0, y_0)$$

Se Dice que $F\colon X \to 2^Y$ es diferenciable contingente de orden α en $(x_0, y_0) \in graphF$ si la función conjunto valuada $D^\alpha F(x_0, y_0)$ existe. Si F es diferenciable contingente en cualquier $(x, y) \in graphF$, se dice que F es diferenciable contingente de orden α en X.

A partir de estas definiciones, se proponen las condiciones Karush-Kuhn-Tucker y los teoremas de dualidad de Wolfe.

Teorema 1.7.1. *Sea D un conjunto invexo en η que satisface la condición C. $F\colon D \to 2^Y$ es una función conjunto valuada S-preinvexa con η, $G\colon D \to 2^Z$ es una función conjunto valuada $K-$ preinvexa de orden α con η. Sea (x_0, y_0) un elemento débil del problema primal* (1.74). *Si existe $\overline{x} \in X$ tal que $G(\overline{x})\bigcap(-intK) \neq \phi$ la derivada contingente de orden α $D^\alpha F(x_0, y_0)$ existe y para cada $z_0 \in G(x_0)\bigcap(-K)$; la derivada contingente de orden α $D^\alpha G(x_0, z_0)$ existe, entonces, existe $(s^*, k^*) \in S^* \times K^*$ con $s^* \neq \theta_{Y^*}$ tal que*

$$s^*(D^\alpha F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0))) + k^*(D^\alpha G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))) \geq 0, \quad \forall x \in D$$

$$k^*(G(x_0 \bigcap(-K))) = \{0\}$$

donde

$$s^*(D^\alpha F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0))) = \bigcup_{y \in D^\alpha F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0))} s^*(y)$$

$$k^*(D^\alpha G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))) = \bigcup_{z \in D^\alpha G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))} k^*(z)$$

Teorema 1.7.2. *Sea $D \subset X$ un conjunto invexo en η que satisface la condición C. $F\colon D \to 2^Y$ es una función conjunto valuada S-preinvexa con η, $G\colon D \to 2^Z$ es una función conjunto valuada $K-$preinvexa de orden α con η. Si $(x_0, y_0) \in graphF$ entonces existe $s^* \in S^* - \theta_{Y^*}$ y $k^* \in K^*$ con tal que para cada $z_0 \in G(x_0)\bigcap(-K)$*

$$s^*(D^\alpha F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0))) + k^*(D^\alpha G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))) \geq 0, \quad \forall x \in D$$

$$k^*(G(x_0 \bigcap(-K))) = \{0\}$$

entonces (x_0, y_0) es un elemento eficiente débil del problema primal (1.74).

Así, se propone el problema dual de Wolfe para el problema primal (1.74) como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \;\; \Psi(u, y, z, s^*, k^*) = s^*(y) + k^*(z) \\ &\text{s. a.} \begin{cases} s^*(D^\alpha F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0))) + k^*(D^\alpha G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))) \geq 0 \\ x \in E,\ u \in D,\ y \in F(u), \\ z \in G(u)\bigcap(-K),\ s^* \in S^* - \theta_{Y^*}, \\ k^* \in K^* \end{cases} \end{aligned} \tag{1.75}$$

donde W denota el conjunto factible del problema (1.75). Cuando $u \in E$, $y \in F(u)$, (u, y) es llamado elemento factible del problema (1.74). para $u \in D$, $z^{'} \in G(u)\bigcap(-K)$, $s^* \in S^* - \theta_{Y^*}$, $k^* \in K^*$, $y^{'} \in F(u)$, $(u, y^{'}, z^{'}, s^*, k^*)$ es llamado elemento factible del problema (1.75).

Capítulo 2

Dualidad

Cuando se habla de dualidad en optimización, se declara un cierto tipo de relación entre dos problemas de optimización; dicha relación tiene comúnmente los siguientes aspectos:

1. Un problema (primal) es un problema de minimización escogido y el otro (dual) es un problema de maximización en relación al problema primal, el cual no necesariamente es único.
2. La existencia de una solución a uno de estos problemas asegura la existencia de una solución del otro; en cuyo caso sus valores extremos respectivos deben ser iguales bajo ciertas condiciones sobre la función objetivo y las restricciones.
3. Si las restricciones de un problema son consistentes, mientras las del otro no lo son, entonces hay una sucesión de puntos que satisfacen las restricciones del primero en que sus funciones objetivo tienden a infinito.

En las siguientes secciones nos ocuparemos de establecer el problema dual en el caso multi-objetivo y el caso multi-objetivo con incertidumbre.

2.1. Dualidad en Optimización Multi-objetivo con Restricciones Real Valuadas

A continuación haremos una extension de la propuesta hecha por Wolfe [2] para dualidad en el caso de una función objetivo f real valuada, convexa y diferenciable en $\mathbb{R}^n_+$ con restricciones real valuadas, convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. La extension consiste en considerar una función objetivo F vector-valuada. Posteriormente, extender los conceptos de dualidad elaborados en [3] para el caso intervalo valuado a optimización multi-objetivo bajo incertidumbre.

Sean $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, ..., k$ funciones convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$; nuestro problema primal multi-objetivo, que lo denotaremos por $(P1)$ se escribe de la siguiente manera:

$$
\text{(P1)} \qquad \begin{array}{ll} \text{mín} & F(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)) \\ \text{s. a.} & \left\{ \begin{array}{ll} g_i(x) \leq 0, & i = 1, \cdots, k \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{2.1}
$$

De aquí en adelante denotamos por:

$\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0;\ g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \cdots, k\}$ el conjunto factible del problema primal (2.1).

$Obj_{P1}(F, \mathbb{X}) = \{F(x) : x \in \mathbb{X}\}$ el conjunto de todos los valores objetivo del problema primal (2.1).

Usaremos el concepto de solución no dominada para problema primal multi-objetivo definido en la definición 1.4.2. Así, definimos el siguiente conjunto:
$Min(F, \mathbb{X}) = \{F(\hat{x}) : \hat{x}$ es una solución no dominada de (2.1)$\}$.

A continuación haremos una extension de la propuesta hecha por Wolfe ([2]) para dualidad en el caso de una función objetivo f real valuada, convexa y diferenciable en $\mathbb{R}^n_+$ con restricciones real valuadas, no lineales convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. La extensión consiste en considerar una función objetivo F vector-valuada y los desarrollos de dualidad de Wolfe en [1]. Posteriormente, extender los conceptos de dualidad elaborados en [3] para el caso intervalo-valuado a optimización multi-objetivo bajo incertidumbre.

En analogía con el problema dual de Wolfe propuesto en [1]; proponemos el problema dual del problema (2.1) en el caso vectorial, de la siguiente manera:

$$\text{(D1)} \qquad \begin{array}{ll} \text{máx} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} s_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x) = \psi(x, s, u) \\ \text{s. a.} & \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(x) = 0 \\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_k) \geqslant 0 \\ s = (s_1, s_2, \cdots, s_m) > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \tag{2.2}$$

donde denotaremos por $s(F(x)) = \sum_{i=1}^{m} s_i f_i(x)$. Observe que este es un problema de optimización real-valuada.

Para el problema (2.2), definimos los siguientes conjuntos:
$\mathbb{Y} = \{(x, s, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k : x \geq 0;\ u \geq 0; s > 0;\ \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x) = 0\}$ el conjunto factible del problema (2.2). $Obj_{D1'}(\psi, \mathbb{Y}) = \{\psi(x, s, u) : (x, s, u) \in \mathbb{Y}\}$ el conjunto de todos los valores objetivo del problema (2.2).

Recordemos $Max(\psi, \mathbb{Y})$ es un único valor real. Los siguientes teoremas garantizan que los problemas (2.1) y (2.2) son problemas duales.

El siguiente Teorema, llamado Teorema débil, establece una relación de gran importancia entre los problemas primal (2.1) y su respectivo dual (2.2). Probaremos que todo valor objetivo del problema (2.2) es menor que todo valor de una transformación lineal de la función objetivo del problema primal (2.1).

Teorema 2.1.1. *(Teorema débil de Dualidad)*
Sean $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, ..., k$ funciones convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$.

Una solución factible x_0 de (2.1) y una solución factible (x, s, u) de (2.2) satisfacen la siguiente relación:

$$s(F(x_0)) \geq \psi(x, s, u).$$

Demostración. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que se satisface $g_i(x_0) \leqslant 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, k$ y $(x, s, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ tal que se cumplen las restricciones del problema (2.2). Sabemos que F es convexa si y sólo si f_i es convexa para $i = 1, 2, \cdots, m$; por lo tanto tenemos la siguiente cadena de relaciones:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} s_i(f_i(x_0) - f_i(x)) &\geq \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i(x)(x_0 - x) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(x)(x_0 - x) \\
&\geq -\sum_{i=1}^{k} u_i(g_i(x_0) - g_i(x)) \\
&\geq \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x)
\end{aligned}$$

la primera se da por ser f_i convexa para todo $i = 1, 2, \cdots, m$, la segunda se da, pues (x, s, u) satisface las restricciones del problema (2.2), la tercera se da pues g_i es convexa para $i = 1, 2, \cdots, k$ y la ultima por la no negatividad de u. Por lo tanto $\sum_{i=1}^{m} s_i f_i(x_0) \geq \sum_{i=1}^{m} s_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x)$; en consecuencia $s(F(x_0)) \geq \psi(x, s, u)$. □

Probaremos a continuación el Teorema fuerte de dualidad; para dicha prueba, utilizaremos el siguiente resultado:

Teorema 2.1.2. *Sean F, g_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. Supongamos que $\hat{x}$ es una solución factible del problema primal (2.1) y (x, s, u) es una solución factible del problema (2.2). Si $\psi(x, s, u) = s(F(\hat{x}))$ entonces $\{F(\hat{x})\} \subseteq Min(F, \mathbb{X})$ y $\psi(x, s, u) = Max(\psi, \mathbb{Y})$; esto es, $\hat{x}$ soluciona el problema (2.1) y (x, s, u) soluciona el problema (2.2).*

Demostración. Por Teorema 2.1.1 sabemos que para una solución factible $(\overline{x}, \overline{s}, \overline{u})$ del problema (2.2) y $x^* \in \mathbb{X}$ tenemos

$$\psi(\overline{x}, s, \overline{u}) \leq s(F(\hat{x})) = \psi(x, s, u) \leq s(F(x^*))$$

Por consiguiente, (x, s, u) es una solución óptima del problema (2.2) y utilizando Teorema 5 del tema 8 de [17] se concluye que $\hat{x}$ soluciona el problema (2.1).

□

El siguiente Teorema, llamado Teorema fuerte, garantiza bajo ciertas condiciones sobre la función objetivo y las restricciones, que un valor extremo del problema (2.1) es igual al respectivo valor extremo del problema (2.2).

Teorema 2.1.3. *(Teorema fuerte de Dualidad)*
Sean F, g_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. Supongamos que $\hat{x}$ es una solución factible del problema primal (2.1). *Si existen $s > 0$, $u \geq 0$ tales que:*

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \nabla F_i(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0 \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{k} u_i g_i(\hat{x}) = 0 \tag{2.4}$$

entonces $\hat{x}$ es solución óptima del problema (2.1) *y $(\hat{x}, s, u)$ es solución óptima del problema* (2.2).

Demostración. Por (2.3) se garantiza que $(\hat{x}, s, u)$ es solución factible del problema (2.2) y por (2.4) se sigue que $\psi(\hat{x}, s, u) = s(F(\hat{x}))$ y por Teorema (2.1.2) se sigue el resultado. □

Por medio de los anteriores teoremas, hemos demostrado que los problemas (2.1) y (2.2) son problemas duales en el sentido de Wolfe.

2.2. Dualidad Multi-objetivo Bajo Incertidumbre con Restricciones Real Valuadas

Asumimos que la función multi-intervalo valuada F y las funciones real valuadas g_i para $i = 1, 2 \cdots, k$ son convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$ en el problema (1.64). El problema dual de Wolfe para el problema primal (1.64) es formulado por analogía, al trabajo propuesto en [1] de la siguiente manera:

$$\text{(DMIVP')} \quad \begin{array}{l} \text{máx} \quad \Psi(x, s, u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} s_i \mathrm{F}_i(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x) \\ \text{s. a.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} s_i (\nabla \mathrm{F}_i^L(x) + \nabla \mathrm{F}_i^U(x)) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(x) = 0 \\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_k) \geqslant 0 \\ s = (s_1, s_2, \cdots, s_m) > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \tag{2.5}$$

donde Ψ es una función intervalo valuada.

Probaremos que los problemas (1.64) y (2.5) son problemas duales. Denotamos para el problema (2.5) los siguientes conjuntos:

$\mathcal{Y} = \{(x, s, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k : x \geq 0; u \geq 0; s > 0; \sum_{i=1}^{m} s_i (\nabla \mathrm{F}_i^L(x) + \nabla \mathrm{F}_i^U(x)) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(x) = 0\}$ el conjunto factible del problema (2.5).

$Obj_{DMIVP'}(\Psi, \mathcal{Y}) = \{\Psi(x, s, u) : (x, s, u) \in \mathcal{Y}\}$ el conjunto de todos los valores objetivo del problema (2.5).

De la misma manera, definimos el concepto de solución no dominada para el problema (2.5)

Definición 2.2.1. *Sea* $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ *una solución factible del problema* (2.5). *Decimos que* $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ *es una solución no dominada del problema* (2.5) *si no existe* $(\overline{x}, \overline{s}, \overline{u}) \in \mathcal{Y}$ *tal que* $\Psi(\overline{x}, \overline{s}, \overline{u}) \preceq_{LU} \Psi(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$. *En este caso,* $\Psi(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ *se llama valor objetivo no dominado de* (2.5).

Por lo tanto, definimos el siguiente conjunto:

$Max(\Psi, \mathcal{Y}) = \{\Psi(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) : (\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ es una solución no dominada del problema (2.5)$\}$.

Utilizando la dualidad entre los problemas (2.1) y (2.2), probaremos de una manera indirecta que los problemas (1.64) y (2.5) son problemas duales.

Consideremos el siguiente problema multi-objetivo:

$$\text{(P2')} \qquad \begin{array}{l} \text{mín} \;\; F_{LU}\,(x) = \mathrm{F}^L(x) + \mathrm{F}^U(x) \\ \text{s. a.} \begin{cases} g_i\,(x) \leq \;0, \quad i = 1, \cdots, k \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \tag{2.6}$$

claramente F_{LU}: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función vectorial.

Teorema 2.2.1. *Si* $\hat{x}$ *es una solución no dominada del problema* (2.6) *entonces* $\hat{x}$ *es una solución no dominada del problema* (1.64).

Demostración. Los problemas (1.64) y (2.6) tienen el mismo conjunto factible. Razonando por reducción al absurdo supongamos que $\hat{x}$ es una solución no dominada del problema (2.6) y que $\hat{x}$ no es una solución no dominada del problema (1.64). Como $\hat{x}$ no es una solución no dominada del problema (1.64) entonces existe una solución factible x tal que $\mathrm{F}(x) \preceq_{LU} \mathrm{F}(\hat{x})$; así:

$$\begin{cases} \mathrm{F}^L(x) < \mathrm{F}^L(\hat{x}) \\ \mathrm{F}^U(x) \leq \mathrm{F}^U(\hat{x}) \end{cases} \text{ó} \begin{cases} \mathrm{F}^L(x) \leq \mathrm{F}^L(\hat{x}) \\ \mathrm{F}^U(x) < \mathrm{F}^U(\hat{x}) \end{cases} \text{ó} \begin{cases} \mathrm{F}^L(x) < \mathrm{F}^L(\hat{x}) \\ \mathrm{F}^U(x) < \mathrm{F}^U(\hat{x}) \end{cases}$$

por lo tanto, $\mathrm{F}^L(x) + \mathrm{F}^U(x) < \mathrm{F}^L(\hat{x}) + \mathrm{F}^U(\hat{x})$ en consecuencia $F_{LU}(x) < F_{LU}(\hat{x})$ y esto es absurdo, pues $\hat{x}$ es una solución no dominada del problema (2.6). Concluimos así que $\hat{x}$ es una solución no dominada del problema (1.64).

□

Ahora, consideremos el siguiente problema de optimización mono-objetivo:

$$\text{(D2')} \qquad \begin{array}{l} \text{máx} \;\; \psi\,(x, s, u) = \Psi^L(x, s, u) + \Psi^U(x, s, u) \\ \text{s. a.} \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} s_i(\nabla \mathrm{F}_i^L\,(x) + \nabla \mathrm{F}_i^U\,(x)) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(x) = 0 \\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_k) \geqslant 0 \\ s = (s_1, s_2, \cdots, s_m) > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \tag{2.7}$$

Teorema 2.2.2. *Si* $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ *es una solución óptima del problema* (2.7) *entonces* $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ *es una solución no dominada del problema* (2.5).

Demostración. Los problemas (2.5) y (2.7) tienen el mismo conjunto factible. Razonando por reducción al absurdo supongamos que $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ es una solución óptima del problema (2.7) y que $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ no es una solución no dominada del problema (2.5). Como $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ no es una solución no dominada del problema (2.5) entonces existe una solución factible (x, s, u) tal que $\Psi(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) \preceq_{LU} \Psi(x, s, u)$; así:

$$\begin{cases} \Psi^L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) < \Psi^L(x, s, u) \\ \Psi^U(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) \leq \Psi^U(x, s, u) \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} \Psi^L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) \leq \Psi^L(x, s, u) \\ \Psi^U(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) < \Psi^U(x, s, u) \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} \Psi^L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) < \Psi^L(x, s, u) \\ \Psi^U(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) < \Psi^U(x, s, u) \end{cases}$$

por lo tanto $\Psi^L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) + \Psi^U(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) < \Psi^L(x, s, u) + \Psi^U(x, s, u)$ en consecuencia $\psi(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) < \psi(x, s, u)$ y esto es absurdo, pues $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ es una solución óptima del problema (2.7). Concluimos así que $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ es una solución no dominada del problema (2.5). $\square$

Solubilidad

Para hablar de solubilidad, es necesario recordar los conceptos de funciones convexas para funciones real valuadas, vector-valuadas y multi-intervalo valuadas (sección 1.3). En el caso de un problema de optimización multi-intervalo valuado bajo incertidumbre con restricciones real valuadas, no logramos enunciar un teorema que nos lleve a un resultado análogo al del Teorema 2.1.1; esto es, $s(\mathrm{F}(x_0)) \succeq_{LU} \Psi(x, s, u)$, donde $x_0 \in \mathcal{X}$ y $x \in \mathcal{Y}$; pero si podemos llegar a un resultado análogo al del Teorema 2.1.2. Para lograr dicho resultado utilizaremos los siguientes resultados (Lemas 2.2.1, 2.2.2 y Proposición 2.2.1).

Lema 2.2.1. *Sean* F, g_i *para* $i = 1, 2, \cdots, k$ *diferenciables en* $\mathbb{R}^n_+$. *Sea* $\overline{x}$ *una solución factible del problema primal* (1.64) *y* (x, s, u) *una solución factible del problema* (2.5). *Si* F, g_i *para* $i = 1, 2, \cdots, k$ *son convexas en* x *entonces se verifica que:*

(i) *Si* $s(\mathrm{F}^U(x)) \geq s(\mathrm{F}^U(\overline{x}))$ *entonces* $s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) \geq \Psi^L(x, s, u)$.

(ii) *Si* $s(\mathrm{F}^U(x)) > s(\mathrm{F}^U(\overline{x}))$ *entonces* $s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) > \Psi^L(x, s, u)$.

(iii) *Si* $s(\mathrm{F}^L(x)) \geq s(\mathrm{F}^L(\overline{x}))$ *entonces* $s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) \geq \Psi^U(x, s, u)$.

(iv) *Si* $s(\mathrm{F}^L(x)) > s(\mathrm{F}^L(\overline{x}))$ *entonces* $s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) > \Psi^U(x, s, u)$.

Demostración. Supongamos que F, g_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ son convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$, supongamos además que $\overline{x}$ es una solución factible del problema primal (1.64) y que (x, s, u) es una solución factible del problema (2.5). Como F es convexa entonces F^L y F^U también lo son, por lo tanto f_j^L, f_j^U para $j = 1, 2, \cdots, m$ son convexas. Tenemos que $\overline{x}$ es una solución factible del problema primal (1.64), por lo tanto $g_i(\overline{x}) \leq 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, k$, luego tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} s_i(f_i^L(\overline{x}) - f_i^L(x)) &\geq \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i^L(\overline{x})(\overline{x} - x) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i^U(\overline{x})(\overline{x} - x) - \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(\overline{x})(\overline{x} - x) \\
&\geq \sum_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) - \sum_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{k} u_i(g_i(x) - g_i(\overline{x})) \\
&\geq \sum_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) - \sum_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{k} u_i g_i(x)
\end{aligned}$$

en consecuencia $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i(f_i^L(\overline{x}) - f_i^L(x)) \geq \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i g_i(x)$.

(i) Supongamos que $s(\mathrm{F}^U(x)) \geq s(\mathrm{F}^U(\overline{x}))$, por lo tanto $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) \geq 0$, de esta manera $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i(f_i^L(\overline{x}) - f_i^L(x)) \geq \sum\limits_{i=1}^{k} u_i g_i(x)$, esto es $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^L(\overline{x}) \geq \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^L(x) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i g_i(x)$; en consecuencia $s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) \geq \Psi^L(x, s, u)$.

(ii) Supongamos que $s(\mathrm{F}^U(x)) > s(\mathrm{F}^U(\overline{x}))$, por lo tanto $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) > 0$, de esta manera $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i(f_i^L(\overline{x}) - f_i^L(x)) > \sum\limits_{i=1}^{k} u_i g_i(x)$, esto es $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^L(\overline{x}) > \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^L(x) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i g_i(x)$; en consecuencia $s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) > \Psi^L(x, s, u)$.

(iii) Supongamos que $s(\mathrm{F}^L(x)) \geq s(\mathrm{F}^L(\overline{x}))$, por lo tanto $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^L(\overline{x}) - \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^L(x) \leq 0$, de esta manera $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i g_i(x) \leq 0$, esto es $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) \geq \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i g_i(x)$; en consecuencia $s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) \geq \Psi^U(x, s, u)$.

(iv) Supongamos que $s(\mathrm{F}^L(x)) > s(\mathrm{F}^L(\overline{x}))$, por lo tanto $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^L(\overline{x}) - \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^L(x) < 0$, de esta manera $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i g_i(x) < 0$, esto es $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) > \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) + \sum\limits_{i=1}^{k} u_i g_i(x)$; en consecuencia $s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) > \Psi^U(x, s, u)$.

$\square$

Lema 2.2.2. *Sean* F, g_i *para* $i = 1, 2, \cdots, k$ *diferenciables en* $\mathbb{R}^n_+$. *Sea* $\overline{x}$ *una solución factible del problema primal* (1.64) *y* (x, s, u) *una solución factible del problema* (2.5). *Si* F, g_i *para* $i = 1, 2, \cdots, k$ *son convexas en* x *entonces se verifica que:*

(i) *Si* $s(\mathrm{F}^L(x)) \leq s(\mathrm{F}^L(\overline{x}))$ *entonces* $s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) \geq \Psi^L(x, s, u)$.

(ii) *Si* $s(\mathrm{F}^L(x)) < s(\mathrm{F}^L(\overline{x}))$ *entonces* $s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) > \Psi^L(x,s,u)$.

(iii) *Si* $s(\mathrm{F}^U(x)) \leq s(\mathrm{F}^U(\overline{x}))$ *entonces* $s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) \geq \Psi^U(x,s,u)$.

(iv) *Si* $s(\mathrm{F}^U(x)) < s(\mathrm{F}^U(\overline{x}))$ *entonces* $s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) > \Psi^U(x,s,u)$.

Demostración. Supongamos que F, g_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ son convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$ y que además $\overline{x}$ es una solución factible del problema primal (1.64) y (x, s, u) es una solución factible del problema (2.5). Como F es convexa entonces F^L y F^U también lo son, por lo tanto f_i^L, f_i^U para $i = 1, 2, \cdots, m$ son convexas. Tenemos que $\overline{x}$ es una solución factible del problema primal (1.64), por lo tanto $g_i(\overline{x}) \leq 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, k$. De esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} s_i f_i^L(\overline{x}) - \Psi^L(x,s,u) &= \sum_{i=1}^{m} s_i f_i^L(\overline{x}) - \sum_{i=1}^{m} s_i f_i^L(x) - \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x) \\
&\geq \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i^L(\overline{x})(\overline{x} - x) - \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i^L(\overline{x})(\overline{x} - x) + \Big[- \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(\overline{x}) - \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x) \Big] \\
&\geq \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i^L(\overline{x})(\overline{x} - x) + \Big[- \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(\overline{x})(\overline{x} - x) \Big] \\
&= \Big[\sum_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i^L(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(\overline{x}) \Big] (\overline{x} - x) - \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(\overline{x}) \\
&= - \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i^U(\overline{x})(\overline{x} - x) - \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(\overline{x}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) - \sum_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) - \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(\overline{x}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) - \Psi^U(\overline{x}, s, u)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^L(\overline{x}) - \Psi^L(x,s,u) \geq \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) - \Psi^U(\overline{x},s,u)$. Haciendo un análisis similar al inmediatamente anterior también podemos mostrar que
$\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) - \Psi^U(x,s,u) \geq \sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^L(x) - \Psi^L(\overline{x},s,u)$.

(i) Supongamos que $s(\mathrm{F}^L(x)) \leq s(\mathrm{F}^L(\overline{x}))$, luego por Lema 2.2.1 parte (*iii*) tenemos que $s(\mathrm{F}^U(x)) \geq \Psi^U(\overline{x},s,u)$, esto es $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) - \Psi^U(\overline{x},s,u) \geq 0$, en consecuencia $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^L(\overline{x}) - \Psi^L(x,s,u) \geq 0$, esto es $s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) \geq \Psi^L(x,s,u)$.

(ii) Supongamos que $s(\mathrm{F}^L(x)) < s(\mathrm{F}^L(\overline{x}))$, luego por Lema 2.2.1 parte (*iv*) tenemos que $s(\mathrm{F}^U(x)) > \Psi^U((\overline{x},s,u))$, esto es $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i f_i^U(x) - \Psi^U(\overline{x},s,u) > 0$, en consecuencia

$\sum_{i=1}^{m} s_i f_i^L(\overline{x}) - \Psi^L(x,s,u) > 0$, esto es $s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) > \Psi^L(x,s,u)$.

(iii) Supongamos que $s(\mathrm{F}^U(x)) \leq s(\mathrm{F}^U(\overline{x}))$, luego por Lema 2.2.1 parte (i) tenemos que $s(\mathrm{F}^L(x)) \geq \Psi^L(\overline{x},s,u)$, esto es $\sum_{i=1}^{m} s_i f_i^L(x) - \Psi^L(\overline{x},s,u) \geq 0$, en consecuencia $\sum_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) - \Psi^L(x,s,u) \geq 0$, por lo tanto $s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) \geq \Psi^U(x,s,u)$.

(iv) Supongamos que $s(\mathrm{F}^U(x)) < s(\mathrm{F}^U(\overline{x}))$, luego por Lema 2.2.1 parte (ii) tenemos que $s(\mathrm{F}^L(x)) > \Psi^L(\overline{x},s,u)$, esto es $\sum_{i=1}^{m} s_i f_i^L(x) - \Psi^L(\overline{x},s,u) > 0$, en consecuencia $\sum_{i=1}^{m} s_i f_i^U(\overline{x}) - \Psi^L(x,s,u) > 0$, por lo tanto $s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) > \Psi^U(x,s,u)$.

□

Sean $\mathrm{F}_1 = \left[\mathrm{F}_1^L;\mathrm{F}_1^U\right]$ y $\mathrm{F}_2 = \left[\mathrm{F}_2^L;\mathrm{F}_2^U\right]$ dos multi-intervalos cerrados. Decimos que F_1 y F_2 son comparables si y sólo si: $\mathrm{F}_1 \preceq_{LU} \mathrm{F}_2$ o $\mathrm{F}_1 \succeq_{LU} \mathrm{F}_2$. Ahora, F_1 y F_2 no son comparables si:

$$\begin{cases} \mathrm{F}_1^L \leq \mathrm{F}_2^L \\ \mathrm{F}_1^U > \mathrm{F}_2^U \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathrm{F}_1^L < \mathrm{F}_2^L \\ \mathrm{F}_1^U \geq \mathrm{F}_2^U \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathrm{F}_1^L < \mathrm{F}_2^L \\ \mathrm{F}_1^U > \mathrm{F}_2^U \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{F}_1^L \geq \mathrm{F}_2^L \\ \mathrm{F}_2^U < \mathrm{F}_2^U \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathrm{F}_1^L > \mathrm{F}_2^L \\ \mathrm{F}_1^U \leq \mathrm{F}_2^U \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \mathrm{F}_1^L > \mathrm{F}_2^L \\ \mathrm{F}_1^U < \mathrm{F}_2^U \end{cases}$$

Proposición 2.2.1. *Sean* F, g_i *para* $i = 1,2,\cdots,k$ *diferenciables en* $\mathbb{R}_+^n$. *Sea* $\overline{x}$ *una solución factible del problema primal* (1.64) *y* (x,s,u) *una solución factible del problema* (2.5). *Si* F, g_i *para* $i = 1,2,\cdots,k$ *son covexas en* x *entonces se verifica que:*

(i) *Si* $\mathrm{F}(x)$ *y* $\mathrm{F}(\overline{x})$ *son comparables entonces* $s(\mathrm{F}(\overline{x})) \succeq_{LU} \Psi(x,s,u)$

(ii) *Si* $\mathrm{F}(x)$ *y* $\mathrm{F}(\overline{x})$ *no son comparables entonces* $s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) > \Psi^L(x,s,u)$ *ó* $s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) > \Psi^U(x,s,u)$

Demostración. Supongamos que F, g_i para $i = 1,2,\cdots,k$ son convexas y diferenciables en $\mathbb{R}_+^n$.

(i) Supongamos que $\mathrm{F}(x)$ y $\mathrm{F}(\overline{x})$ son comparables. Como $\mathrm{F}(x)$ y $\mathrm{F}(\overline{x})$ son comparables entonces $\mathrm{F}(x) \succeq_{LU} \mathrm{F}(\overline{x})$ o $\mathrm{F}(\overline{x}) \succeq_{LU} \mathrm{F}(x)$; luego, $s(\mathrm{F}^L(x)) \geq s(\mathrm{F}^L(\overline{x}))$ y $s(\mathrm{F}^U(x)) \geq s(\mathrm{F}^U(\overline{x}))$ ó $s(\mathrm{F}^L(x)) \leq s(\mathrm{F}^L(\overline{x}))$ y $s(\mathrm{F}^U(x)) \leq s(\mathrm{F}^U(\overline{x}))$. Usando Lema 2.2.1 partes $(i),(iii)$ y Lema 2.2.2 partes $(i),(iii)$ concluimos que $s(\mathrm{F}(\overline{x})) \succeq_{LU} \Psi(x,s,u)$.

(ii) Supongamos que $\mathrm{F}(x)$ y $\mathrm{F}(\overline{x})$ no son comparables. Como $\mathrm{F}(x)$ y $\mathrm{F}(\overline{x})$ no son comparables entonces $\mathrm{F}(x) \neq \mathrm{F}(\overline{x})$; luego, tenemos que:

$$\begin{cases} \mathrm{F}^L(x) \leq \mathrm{F}^L(\overline{x}) \\ \mathrm{F}^U(x) > \mathrm{F}^U(\overline{x}) \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathrm{F}^L(x) < \mathrm{F}^L(\overline{x}) \\ \mathrm{F}^U(x) \geq \mathrm{F}^U(\overline{x}) \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathrm{F}^L(x) < \mathrm{F}^L(\overline{x}) \\ \mathrm{F}^U(x) > \mathrm{F}^U(\overline{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{F}^L(x) \geq \mathrm{F}^L(\overline{x}) \\ \mathrm{F}^U(x) < \mathrm{F}^U(\overline{x}) \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathrm{F}^L(x) > \mathrm{F}^L(\overline{x}) \\ \mathrm{F}^U(x) \leq \mathrm{F}^U(\overline{x}) \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \mathrm{F}^L(x) > \mathrm{F}^L(\overline{x}) \\ \mathrm{F}^U(x) < \mathrm{F}^U(\overline{x}) \end{cases}$$

por tanto, tenemos que:

$$\begin{cases} s(\mathrm{F}^L(x)) \leq s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) \\ s(\mathrm{F}^U(x)) > s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) \end{cases}, \begin{cases} s(\mathrm{F}^L(x)) < s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) \\ s(\mathrm{F}^U(x)) \geq s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) \end{cases}, \begin{cases} s(\mathrm{F}^L(x)) < s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) \\ s(\mathrm{F}^U(x)) > s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s(\mathrm{F}^L(x)) \geq s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) \\ s(\mathrm{F}^U(x)) < s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) \end{cases}, \begin{cases} s(\mathrm{F}^L(x)) > s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) \\ s(\mathrm{F}^U(x)) \leq s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} s(\mathrm{F}^L(x)) > s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) \\ s(\mathrm{F}^U(x)) < s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) \end{cases}$$

Usando Lema 2.2.1 partes $(ii), (iv)$ y Lema 2.2.2 partes $(ii), (iv)$, concluimos que $s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) > \Psi^L(x,s,u)$ ó $s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) > \Psi^U(x,s,u)$.

□

Teorema 2.2.3. *Sean F, g_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. Supongamos que $\hat{x}$ es una solución factible del problema primal* (1.64) *y (x, s, u) es una solución factible del problema* (2.5)*. Si $\Psi(x, s, u) = s(F(\hat{x}))$ entonces $\{F(\hat{x})\} \subseteq Min(F, \mathcal{X})$ y $\Psi(x, s, u) \subseteq Max(\Psi, \mathcal{Y})$; esto es, $\hat{x}$ soluciona el problema* (1.64) *y (x, s, u) soluciona el problema* (2.5).

Demostración. Razonando por reducción al absurdo. Supongamos que $\hat{x}$ es una solución factible del problema (1.64) y que $\Psi(x, s, u) = s(F(\hat{x}))$; además supongamos que $\hat{x}$ no es una solución del problema (1.64). Como $\hat{x}$ no es una solución del problema (1.64) entonces existe $\overline{x} \in \mathcal{X}$ tal que $\mathrm{F}(\overline{x}) \prec_{LU} \mathrm{F}(\hat{x})$, luego $s(\mathrm{F}(\overline{x})) \prec_{LU} s(\mathrm{F}(\hat{x}))$ esto es

$$s(\mathrm{F}(\overline{x})) \prec_{LU} \Psi(x, s, u) \tag{2.8}$$

luego

$$\begin{cases} s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) < \Psi^L(x,s,u) \\ s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) \leq \Psi^U(x,s,u) \end{cases}, \begin{cases} s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) \leq \Psi^L(x,s,u) \\ s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) < \Psi^U(x,s,u) \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) < \Psi^L(x,s,u) \\ s(\mathrm{F}^U(\overline{x})) < \Psi^U(x,s,u) \end{cases} \tag{2.9}$$

Supongamos que $\mathrm{F}(x)$ y $\mathrm{F}(\overline{x})$ son comparables entonces, por Proposición 2.2.1 parte (i) tenemos que $s(\mathrm{F}(\overline{x})) \succeq_{LU} \Psi(x, s, u)$, que está en contradicción con la expresión (2.8). Supongamos ahora que $\mathrm{F}(x)$ y $\mathrm{F}(\overline{x})$ no son comparables entonces, por proposición (2.2.1) parte (ii) tenemos que $s(\mathrm{F}^L(\overline{x})) > \Psi^L(x, s, u)$ ó $s((F^U(\overline{x})) > \Psi^U(x, s, u)$, que está en contradicción con la expresión (2.9). Por tanto $\mathrm{F}(\hat{x}) \in Min(\mathrm{F}, \mathcal{X})$.

Ahora, razonando por reducción al absurdo. Supongamos que (x, s, u) es una solución factible del problema (2.5) y $\Psi(x, s, u) = s(F(\hat{x}))$; además, supongamos que (x, s, u) no es una solución del problema (2.5). Como (x, s, u) no soluciona el problema (2.5) entonces existe $(\overline{x}, s, \overline{u}) \in \mathcal{Y}$ tal que $\Psi(x, s, u) <_{LU} \Psi(\overline{x}, s, \overline{u})$; esto es

$$s(\mathrm{F}(\hat{x})) \prec_{LU} \Psi(\overline{x}, s, \overline{u}) \tag{2.10}$$

luego

$$\begin{cases} s(\mathrm{F}^L(\hat{x})) < \Psi^L(\overline{x}, s, \overline{u}) \\ s(\mathrm{F}^U(\hat{x})) \leq \Psi^U(\overline{x}, s, \overline{u}) \end{cases}, \quad \begin{cases} s(\mathrm{F}^L(\hat{x})) \leq \Psi^L(\overline{x}, s, \overline{u}) \\ s(\mathrm{F}^U(\hat{x})) < \Psi^U(\overline{x}, s, \overline{u}) \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} s(\mathrm{F}^L(\hat{x})) < \Psi^L(\overline{x}, s, \overline{u}) \\ s(\mathrm{F}^U(\hat{x})) < \Psi^U(\overline{x}, s, \overline{u}) \end{cases} \tag{2.11}$$

Supongamos que $\mathrm{F}(\overline{x})$ y $\mathrm{F}(\hat{x})$ son comparables entonces por Proposición 2.2.1 parte (i) tenemos que $s(\mathrm{F}(\hat{x})) \succeq_{LU} \Psi(\overline{x}, s, \overline{u})$, que está en contradicción con la expresión (2.10). Supongamos ahora que $\mathrm{F}(\overline{x})$ y $\mathrm{F}(\hat{x})$ no son comparables entonces por Proposición 2.2.1 parte (ii) tenemos que $s(\mathrm{F}^L(\hat{x})) > \Psi^L(\overline{x}, s, \overline{u})$ o $s(\mathrm{F}^U(\hat{x})) > \Psi^U(\overline{x}, s, \overline{u})$, que esta en contradicción con la expresión (2.11). Por tanto $\Psi(x, s, u) \in Max(\Psi, \mathcal{Y})$.

□

Teorema 2.2.4. *Sean F, g_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. Supongamos que $\hat{x}$ es una solución factible del problema primal* (1.64)*. Si existen $s > 0$, $u \geq 0$ tales que:*

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \nabla F_i(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0 \tag{2.12}$$

$$\sum_{i=1}^{k} u_i g_i(\hat{x}) = 0 \tag{2.13}$$

entonces $\hat{x}$ es solución óptima del problema (1.64) *y $(\hat{x}, s, u)$ es solución óptima del problema* (2.5)

Demostración. Por (2.12) se garantiza que $(\hat{x}, s, u)$ es solución factible del problema (2.5) y por (2.13) se sigue que $\Psi(\hat{x}, s, u) = s(F(\hat{x}))$ y por Teorema 2.2.3 se sigue el resultado. □

Teoremas de Dualidad

En algún sentido, $Min(\mathrm{F}, \mathcal{X})$ y $Max(\Psi, \mathcal{Y})$ pueden ser considerados como las clases de valores objetivos óptimos de los problemas (1.64) y (2.5) respectivamente. Presentaremos el teorema de dualidad fuerte considerando:

$$s(Min(\mathrm{F}, \mathcal{X})) \bigcap Max(\Psi, \mathcal{Y}) \neq \phi \tag{2.14}$$

que también quiere decir que existen $\mathrm{F}(\hat{x}) \in Min(\mathrm{F}, \mathcal{X})$ y $\Psi(\overline{x}, \overline{s}, \overline{u}) \in Max(\Psi, \mathcal{Y})$ tales que:

$$s(\mathrm{F}(\hat{x})) = \Psi(\overline{x}, \overline{s}, \overline{u}) \tag{2.15}$$

Definición 2.2.2. *Dos clases de conceptos que se tienen en cuenta para no tener brecha de dualidad son:*

(i) *Los problemas* (1.64) *y* (2.5) *no tienen brecha de dualidad en el sentido débil si y sólo si* $s(Min(\mathrm{F}, \mathcal{X})) \bigcap Max(\Psi, \mathcal{Y}) \neq \phi$

(ii) *Los problemas* (1.64) *y* (2.5) *no tienen brecha de dualidad en el sentido fuerte si y sólo si existen* $\mathrm{F}(\hat{x}) \in Min(\mathrm{F}, \mathcal{X})$ *y* $\Psi(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) \in Max(\Psi, \mathcal{Y})$ *tales que* $\hat{s}(\mathrm{F}(\hat{x})) = \Psi(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$

Teorema 2.2.5. *(Teorema fuerte de dualidad en el sentido débil)*
Sean F, g_i *para* $i = 1, 2, \cdots, k$ *convexas y diferenciales en* $\mathbb{R}^n_+$. *Si alguna de las siguientes condiciones se satisface:*

(i) *Existe una solución factible* $\hat{x}$ *del problema primal* (1.64) *tal que existe* $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{u})$, *que verifica* $\bar{s}(\mathrm{F}(\hat{x})) = \Psi(\bar{x}, \bar{s}, \bar{u})$.

(ii) *Existe una solución factible* $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ *del problema* (2.5) *tal que* $\Psi(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) \in \hat{s}(Obj_{MIVP}(\mathrm{F}, \mathcal{X}))$.

Entonces los problemas (1.64) *y* (2.5) *no tienen brecha de dualidad en el sentido débil.*

Demostración. Supongamos que la condición (i) es satisfecha. Como existe $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{u})$ que verifica $\bar{s}(\mathrm{F}(\hat{x})) = \Psi(\bar{x}, \bar{s}, \bar{u})$ entonces, por Teorema 2.2.3 se tiene que $\{\mathrm{F}(\hat{x})\} \subseteq Min(F, \mathcal{X})$ y $\{\Psi(\bar{x}, \bar{s}, \bar{u})\} \subseteq Max(\Psi, \mathcal{Y})$; por tanto, los problemas (1.64) y (2.5) no tienen brecha de dualidad en el sentido débil.

Supongamos que la condición (ii) es satisfecha. Como existe $(\hat{x}, s, \hat{u})$ que verifica $\Psi(\hat{x}, s, \hat{u}) \in s(obj(\mathrm{F}, \mathcal{X}))$ entonces existe $\overline{x}$ tal que $s(\mathrm{F}(\overline{x})) = \Psi(\hat{x}, s, \hat{u})$; así, por Teorema 2.2.3 se tiene que $\{\mathrm{F}(\overline{x})\} \subseteq Min(\mathrm{F}, \mathcal{X})$ y $\{\Psi(\hat{x}, s, \hat{u})\} \subseteq Max(\Psi, \mathcal{Y})$; por tanto, los problemas (1.64) y (2.5) no tienen brecha de dualidad en el sentido débil.

□

Sea $J(x^*)$ el conjunto de indices definido por: $J(x^*) = \{i : g_i(x^*) = 0 \text{ para } i = 1, 2, \cdots, k\}$.

Decimos que las funciones restricción g_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ satisfacen la calificación restricción Kuhn-Tucker en x^* si y sólo si $\nabla g_i(x^*)\mathbf{d} \leq 0$ para todo $i \in J(x^*)$, donde $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ entonces, existe una función n-dimensional $\mathbf{a}$: $[0, 1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{a}$ es diferenciable a derecha de 0, $\mathbf{a}(0) = x^*$, $\mathbf{a}(t) \in X$ para todo $t \in [0, 1]$ y existe un número real $\alpha > 0$ con $\mathbf{a}'_+(0) = \alpha\mathbf{d}$.

Teorema 2.2.6. *(Condiciones KKT)*
Sean $\hat{x}$ *una solución no dominada del problema primal* (1.64) *y* F, g_i *para* $i = 1, 2, \cdots, k$ *son diferenciables en* $\hat{x}$. *Si las restricciones* g_i *para* $i = 1, 2, \cdots, k$ *satisfacen la cualificación restricción en* $\hat{x}$ *entonces existen multiplicadores* $0 < \lambda_i^L, \lambda_i^U \in \mathbb{R}$ *para* $i = 1, 2, \cdots, m$ *con* $\lambda \neq 0$ *y* $u \geq 0 \in \mathbb{R}^k$ *tal que:*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^L \nabla f_i^L(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^U \nabla f_i^U(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0$$

$u_i g_i(\hat{x}) = 0$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, k$

La prueba de este teorema está hecha en [5].

Teorema 2.2.7. *(Condiciones KKT)*
Sean $\hat{x}$ *una solución no dominada del problema* (2.6) *y* F, g_i *para* $i = 1, 2, \cdots, k$ *son diferenciables en* x^*. *Si las restricciones* g_i *para* $i = 1, 2, \cdots, k$ *satisfacen la cualificación restricción en* x^* *entonces existen multiplicadores* $0 < s_i \in \mathbb{R}$ *para* $i = 1, 2, \cdots, m$ *con* $s_i \neq 0$ *y* $u_i \geq 0 \in \mathbb{R}$ *para*

$i = 1, 2 \cdots, k$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i^L(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla f_i^U(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0$$

$u_i g_i(\hat{x}) = 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, k$

La prueba de este teorema está hecha en [5].

Teorema 2.2.8. *(Teorema fuerte de dualidad en el sentido fuerte)*
Sean F, g_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ convexas y diferenciales en $\mathbb{R}_+^n$. Sea $\hat{x}$ una solución óptima del problema (2.6) (Es decir, una solución no dominada del problema (1.64)). Si las funciones restricción g_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ satisfacen la cualificación restricción Kuhn-Tucker en $\hat{x}$ entonces existen $\hat{u} \in R^k$ y $\hat{s} \in R^m$ tal que $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ soluciona el problema (2.5) y $\Psi(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) = \hat{s}(\mathrm{F}(\hat{x}))$; esto es, los problemas (1.64) y (2.5) no tienen brecha de dualidad en el sentido fuerte.

Demostración. Usando el Teorema 2.2.7, existen multiplicadores $0 < \hat{s}_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \cdots, m$ con $\hat{s}_i \neq 0$ y $u_i \geq 0 \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2 \cdots, k$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{s}_i \nabla f_i^L(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{s}_i \nabla f_i^U(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0$$

$u_i g_i(\hat{x}) = 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, k$

Esto prueba que $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ es una solución factible del problema (2.5) y $\Psi(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) = \hat{s}(\mathrm{F}(\hat{x}))$. Por el Teorema 2.2.3 se completa la prueba. □

2.3. Dualidad Multi-Objetivo Bajo Incertidumbre con Restricciones Intervalo Valuadas

La diferencia de Hakuhara para dos intervalos cerrados cualquiera se propuso por Banks y Jacobs. Basado en la diferencia Hakuhara y la métrica Hausdorff el concepto de diferenciación para una función intervalo valuada, llamada H-diferenciación, es propuesta en [5]. Si F es diferenciable en x_0 entonces el H-gradiente de F en x_0 es definido por:

$$\nabla F(x_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0), \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0) \right)^T \tag{2.16}$$

donde

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) = \left[\frac{\partial F^L}{\partial x_i}(x_0), \frac{\partial F^U}{\partial x_i}(x_0) \right] \tag{2.17}$$

es un intervalo cerrado para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ y

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) \right)^L = \frac{\partial F^L}{\partial x_i}(x_0) \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) \right)^U = \frac{\partial F^U}{\partial x_i}(x_0) \tag{2.18}$$

que nos lleva a:

$$(\nabla F(x_0))^L = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0) \right)^L, \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0) \right)^L, \cdots, \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0) \right)^L \right)^T = \nabla F^L(x_0) \tag{2.19}$$

y

$$(\nabla F(x_0))^U = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0) \right)^U, \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0) \right)^U, \cdots, \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0) \right)^U \right)^T = \nabla F^U(x_0) \tag{2.20}$$

Ahora, consideremos el siguiente problema de optimización Multi-intervalo valuado:

$$\text{(MIVP")} \qquad \begin{array}{l} \text{mín} \;\; \mathrm{F}(x) = \left[\mathrm{F}^L(x); \mathrm{F}^U(x)\right] \\ \text{s. a.} \begin{cases} G_i(x) \preceq_{LU} [0;0], & i = 1, \cdots, k \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \tag{2.21}$$

donde F^L: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y F^U: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son funciones vectoriales y las funciones restricción G_i: $\mathbb{R}^n \to \mathcal{I}$ son funciones intervalo valuadas para $i = 1, 2, \cdots, k$. Escribimos $G_i(x) = \left[G_i^L(x); G_i^U(x)\right]$ para $i = 1, 2, \cdots, k$. Denotamos por:

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \ , \ G_i(x) \preceq_{LU} [0;0] \ , \ i = 1, 2, \cdots, k\}$$

el conjunto factible del problema primal (2.21). Denotamos por:

$$Obj_{MIVP''}(F, \mathcal{F}) = \{F(x) : x \in \mathcal{F}\}$$

el conjunto de todos los valores objetivo del problema primal (2.21).

Definiremos a continuación el concepto de solución no dominada del problema (2.21).

Definición 2.3.1. *Sea $\hat{x}$ una solución factible del problema* (2.21)*. Decimos que $\hat{x}$ es una solución no dominada del problema* (2.21) *si y sólo si no existe $x_0 \in \mathcal{F}$ tal que $F(x_0) \prec F(\hat{x})$. En este caso $F(\hat{x})$ es llamado valor objetivo no dominado de* (2.21)*. Denotamos por $Min(F, \mathcal{F})$ el conjunto de todos los valores objetivo no dominados de* (2.21)*.*

Definimos la función Lagrangiana para el problema primal (2.21) de la siguiente manera:

$$L(x, s, u) = \sum_{i=1}^{m} s_i F_i(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i G_i(x) \;\; \text{para } u \geq 0 \text{ y } s > 0 \tag{2.22}$$

donde

$$(L(x, s, u))^L = \sum_{i=1}^{m} s_i F_i^L(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i G_i^L(x) \;\; \text{para } u \geq 0 \text{ y } s > 0 \tag{2.23}$$

y

$$(L(x,s,u))^U = \sum_{i=1}^{m} s_i F_i^U(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i G_i^U(x) \quad \text{para } u \geq 0 \text{ y } s > 0. \tag{2.24}$$

Asumimos que F, G_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ son H-diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$, así tenemos

$$H(x,s,u) = \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla F_i(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla G_i(x) \tag{2.25}$$

donde

$$(H(x,s,u))^L = \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla F_i^L(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla G_i^L(x) \tag{2.26}$$

y

$$(H(x,s,u))^U = \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla F_i^U(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i \nabla G_i^U(x). \tag{2.27}$$

En general $\nabla L(x,s,u) \neq H(x,s,u)$.

El problema dual Wolfe del problema primal (2.21) se propone de la siguiente manera:

$$\text{(DMIVP”)} \qquad \begin{array}{ll} \text{máx} & L(x,s,u) \\ \text{s. a.} & \left\{ \begin{array}{l} H(x,s,u) = [0;0]_n \\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_k) \geqslant 0 \\ s = (s_1, s_2, \cdots, s_m) > 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{2.28}$$

Denotamos por:

$$\mathcal{W} = \{(x,s,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k : x \geq 0 \ , \ u \geqslant 0 \ , s > 0 \ , \ H(x,s,u) = [0;0]_n \ , \ i = 1, 2, \cdots, k\}$$

el conjunto factible del problema primal (2.21). Denotamos por:

$$Obj_{DMIVP''}(L, \mathcal{W}) = \{L(x,s,u) : (x,s,u) \in \mathcal{W}\}$$

el conjunto de todos los valores objetivo del problema primal (2.28).

Definiremos a continuación el concepto de solución no dominada del problema (2.28).

Definición 2.3.2. *Sea $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ una solución factible del problema* (2.28)*. Decimos que $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ es una solución no dominada del problema* (2.28) *si y sólo si no existe $(x_0, s_0, u_0) \in \mathcal{W}$ tal que $L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) \prec L(x_0, s_0, u_0)$. En este caso $L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ es llamado valor objetivo no dominado de* (2.28)*. Denotamos por $Max(L, \mathcal{W})$ el conjunto de todos los valores objetivo no dominados de* (2.28)*.*

A continuación presentamos el teorema débil de dualidad.

Teorema 2.3.1. *(Teorema Débil de Dualidad)*
Sean F, G_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ H-diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. Supongamos que x_1 es una solución factible del problema (2.21) y (x_2, s, u) es una solución factible del problema (2.28). Si F, G_i para $i, 2, \cdots, k$ son convexas en x_2 entonces $s(F(x_1)) \geq_{LU} L(x_2, s, u)$

Demostración. Como F, G_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ son convexas entonces F^L, F^U, G_i^L, G_i^U para $i = 1, 2, \cdots, k$ también lo son. Así:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} s_i(F_i^L(x_1) - F_i^L(x_2)) &\geq \sum_{i=1}^{m} s_i \nabla F_i^L(x_2)(x_1 - x_2) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} (u_0)_i \nabla G_i^L(x_2)(x_1 - x_2) \\
&\geq -\sum_{i=1}^{k} (u_0)_i (G_i^L(x_2) - G_i^L(x_1)) \\
&\geq \sum_{i=1}^{k} (u_0)_i G_i^L(x_2)
\end{aligned}$$

□

la primera se da por ser F_i^L convexa para todo $i = 1, 2, \cdots, m$, la segunda se da pues (x_2, s, u) satisface las restricciones del problema (2.28), la tercera se da pues G_i^L es convexa para $i = 1, 2, \cdots, k$ y la ultima por la no negatividad de u. Por lo tanto $\sum_{i=1}^{m} s_i F_i^L(x_1) \geq \sum_{i=1}^{m} siF_i^L(x_2) + \sum_{i=1}^{k} u_i G_i^L(x_2)$. De igual manera, podemos probar que $\sum_{i=1}^{m} s_i F_i^U(x_1) \geq \sum_{i=1}^{m} siF_i^U(x_2) + \sum_{i=1}^{k} u_i G_i^U(x_2)$; en consecuencia $s(F(x_1)) \geq L(x_2, s, u)$.

Teorema 2.3.2. *Sean F, G_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ convexas y H-diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. Supongamos que $\hat{x}$ es una solución factible del problema primal (2.21) y (x, s, u) es una solución factible del problema (2.28). Si $L(x, s, u) = s(F(\hat{x}))$ entonces $\{F(\hat{x})\} \subseteq Min(F, \mathcal{F})$ y $\{L(x, s, u)\} \subseteq Max(L, \mathcal{W})$; esto es, $\hat{x}$ soluciona el problema (2.21) y (x, s, u) soluciona el problema (2.28).*

Demostración. Por reducción al absurdo supongamos que $\hat{x}$ es una solución factible del problema (2.21), (x, s, u) es solución del problema (2.28) y que $L(x, s, u) = s(F(\hat{x}))$; además, supongamos que $F(\hat{x}) \notin Min(F, \mathcal{F})$; luego, existe $\bar{x} \in \mathcal{F}$ tal que $F(\hat{x}) >_{LU} F(\bar{x})$. Como $s > 0$ y $>_{LU}$ es homogéneo positivamente con respecto al producto por escalar y la suma entonces, $s(F(\hat{x})) >_{LU} s(F(\bar{x}))$; ahora, por hipótesis $L(x, s, u) = s(F(\hat{x}))$ y por teorema anterior $s(F(\bar{x})) \geq_{LU} L(x, s, u)$ por lo tanto $s(F(\bar{x})) \geq_{LU} s(F(\hat{x}))$, que es contradictorio.

Se prueba que $\{L(x, s, u)\} \subseteq Max(L, \mathcal{W})$ de forma análoga. □

2.3.1. Teoremas de Dualidad

En los problemas de optimización convencionales, el teorema de dualidad débil dice que el un valor objetivo del problema primal siempre es mayor o igual que un valor objetivo del problema dual. En algún sentido, $Min(F, \mathcal{F})$ y $Max(L, \mathcal{W})$ pueden considerarse como los tipos de valores objetivo óptimos del problema primal (2.21) y el problema dual (2.28), respectivamente. Por tanto, presentaremos el teorema de dualidad débil para los problemas (2.21) y (2.28).

Teorema 2.3.3. *Sean F, G_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ funciones convexas y H-diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$ entonces para cualquier $(\bar{x}, s, u)$ tal que $L(\bar{x}, s, u) \in Max(L, \mathcal{W})$ se tiene la relación $s(Min(F, \mathcal{F})) \succeq_{LU} L(\bar{x}, s, u)$.*

Demostración. Supongamos que F, G_i para $i = 1, 2, \cdots, k$ funciones convexas y H-diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. Sea $(\bar{x}, s, u)$ tal que $L(\bar{x}, s, u) \in Max(L, \mathcal{W})$, entonces por teorema (2.3.1), para $F(x) \in Min(F, \mathcal{F})$ se sigue que $s(F(x)) \succeq_{LU} L(\bar{x}, s, u)$ y como x es arbitrario entonces se sigue que $s(Min(F, \mathcal{F})) \succeq_{LU} L(\bar{x}, s, u)$. □

A continuación vamos a presentar el teorema de dualidad fuerte considerando la siguiente definición:

Definición 2.3.3. *Dos tipos de conceptos para que no se presente brecha de dualidad son los siguientes:*

(i) *Decimos que el problema primal (2.21) y el problema dual (2.28) no tienen brecha de dualidad en el sentido débil si y sólo si existe $F(\hat{x}) \in Min(F, \mathcal{F})$ y $L(x_0, s, u) \in Max(L, \mathcal{W})$ tales que $s(F(\hat{x})) = L(x_0, s, u)$.*

(ii) *Decimos que el problema primal (2.21) y el problema dual (2.28) no tienen brecha de dualidad en el sentido fuerte si y sólo si existe $F(\hat{x}) \in Min(F, \mathcal{F})$ y $L(\hat{x}, s, \hat{u}) \in Max(L, \mathcal{W})$ tales que $s(F(\hat{x})) = L(\hat{x}, s, \hat{u})$.*

Si el problema primal (2.21) y el problema dual (2.28) no tienen brecha de dualidad en el sentido fuerte, implica que el problema primal (2.21) y el problema dual (2.28) no tienen brecha de dualidad en el sentido débil. Si $\hat{x} = x_0$ en la definición (2.3.3) parte (i) entonces, si el problema primal (2.21) y el problema dual (2.28) no tienen brecha de dualidad en en el sentido débil, implica que el problema primal (2.21) y el problema dual (2.28) no tienen brecha de dualidad en el sentido fuerte.

Para el siguiente teorema haremos uso de la definición de complementariedad que se da a continuación.

Definición 2.3.4. *Sean $\hat{x} \in \mathcal{F}$ y $u \geq 0$ tales que:*

$$\sum_{i=1}^{m} u_i G_i(\hat{x}) = [0; 0]$$

entonces $\hat{x}$ y u se llaman un par $(\hat{x}, u)$ de suma complementaria del problema primal (2.21).

Teorema 2.3.4. *(Teorema de dualidad fuerte en el sentido débil)*
Sean F, G_i para $i = 1, 2 \cdots, k$ funciones convexas y H-diferenciables en $\mathbb{R}^n_+$. Supongamos que una de las siguientes condiciones se satisface:

(i) *Existe una solución factible $\hat{x}$ del problema primal (2.21) tal que existe $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{u})$, que verifica $\bar{s}(F(\hat{x})) = L(\bar{x}, \bar{s}, \bar{u})$.*

(ii) *Existe una solución* $(\hat{x}, s, \hat{u})$ *del problema dual* (2.28) *tal que* $L(\hat{x}, s, \hat{u}) \in s(obj(F, \mathcal{F}))$.

entonces los problemas (2.21) *y* (2.28) *no tienen brecha de dualidad en el sentido débil.*

Demostración. Supongamos que la condición (i) es satisfecha. Como existe $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{u})$ que verifica $\bar{s}(F(\hat{x})) = L(\bar{x}, \bar{s}, \bar{u})$ entonces, por Teorema 2.3.2 se tiene que $\{F(\hat{x})\} \subseteq Min(F, \mathcal{F})$ y $\{L(\bar{x}, \bar{s}, \bar{u})\} \subseteq Max(L, \mathcal{W})$; por tanto, los problemas (2.21) y (2.28) no tienen brecha de dualidad en el sentido débil.

Supongamos que la condición (ii) es satisfecha. Como existe $(\hat{x}, s, \hat{u})$ que verifica $L(\hat{x}, s, \hat{u}) \in s(obj(F, \mathcal{F}))$ entonces existe $\overline{x}$ tal que $s(F(\overline{x})) = L(\hat{x}, s, \hat{u})$; así, por Teorema 2.3.2 se tiene que $\{F(\overline{x})\} \subseteq Min(F, \mathcal{F})$ y $\{L(\hat{x}, s, \hat{u})\} \subseteq Max(L, \mathcal{W})$; por tanto, los problemas (2.21) y (2.28) no tienen brecha de dualidad en el sentido débil. □

Teorema 2.3.5. *(Teorema fuerte de dualidad en el sentido fuerte)*
Sean F, G_i *para* $i = 1, 2 \cdots, k$ *funciones convexas y H-diferenciables en* $\mathbb{R}^n_+$. *Supongamos que* $\hat{x}$ *es una solución factible del problema* (2.21) *y que* $(\hat{x}, s, \hat{u})$ *es una solución factible del problema* (2.28) *que cumple la condición:*

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i G_i(\hat{x}) = [0; 0] \tag{2.29}$$

entonces $\hat{x}$ *soluciona el problema primal* (2.21) *y* $(\hat{x}, s, \hat{u})$ *soluciona el problema dual* (2.28) *y* $L(\hat{x}, s, \hat{u}) = s(F(\hat{x}))$.

Demostración. De la expresión (2.29) tenemos que

$$L(\hat{x}, s, \hat{u}) = \sum_{i=1}^{m} s_i F_i(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i G_i(\hat{x}) = s(F(\hat{x}))$$

el resultado se sigue inmediatamente del Teorema (2.3.1). □

En lo que continua, proporcionaremos las condiciones suficientes para garantizar que:

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i G_i(\hat{x}) = [0; 0]$$

Sea $L(\bar{x}, \bar{s}, \bar{u})$ función Lagrangiana intervalo valuada del problema primal (2.21). Cuando $\hat{x}$ y $\hat{s}$ son fijos adoptamos la siguiente notación:

$$arg - max\left(L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}), \mathbb{R}^k\right) = \{u \in \mathbb{R}^k : u \neq \hat{u}\ ,\ L(\hat{x}, \hat{s}, u) \leq_{LU} L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})\}. \tag{2.30}$$

Decimos que $arg - max\left(L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}), \mathbb{R}^k\right)$ contiene u infinitamente grande en magnitud si contiene $u = (\ u_1, u_2, \cdots, u_k)$ tal que u_i es infinitamente grande para algún $i = 1, 2, \cdots, k$; en otras palabras, si $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_k^2} \to +\infty$ con $u_i \to +\infty$ para algún $i = 1, 2, \cdots, k$ entonces $u \in arg - max\left(L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}), \mathbb{R}^k\right)$.

Teorema 2.3.6. *Sea* $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u})$ *una solución factible del problema* (2.28). *Supongamos que* $arg - max\left(L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}), \mathbb{R}^k\right)$ *contiene* $u = 0$ *y* u *infinitamente grande en magnitud, entonces* $\hat{x}$ *es una solución factible del problema primal* (2.21) *y*

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i G_i(\hat{x}) = [0; 0]$$

Demostración. Tenemos que $L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}) \geq_{LU} L(\hat{x}, \hat{s}, u)$ para todo $u \in arg - max\left(L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}), \mathbb{R}^k\right)$ por (2.30). Por definición $(L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}))^L \geq (L(\hat{x}, \hat{s}, u))^L$ para todo $u \in arg - max\left(L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}), \mathbb{R}^k\right)$; así, para $u, \hat{u} \geq 0$, $(L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}))^L \geq (L(\hat{x}, \hat{s}, u))^L$ implica

$$\sum_{i=1}^{m} s_i F_i^L(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i G_i^L(\hat{x}) \geq \sum_{i=1}^{m} s_i F_i^L(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{k} u_i G_i^L(\hat{x})$$

o equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i G_i^L(\hat{x}) \geq \sum_{i=1}^{k} u_i G_i^L(\hat{x}) \tag{2.31}$$

para todo $u \in arg - max\left(L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}), \mathbb{R}^k\right)$. Tenemos que (2.31) puede ser violada si $G_i^L(\hat{x}) > 0$ y $u_{i \to +\infty}$ para algún $i = 1, 2, \cdots, k$; luego

$$G_i^L(\hat{x}) \leq 0 \tag{2.32}$$

Para todo $i = 1, 2 \cdots, k$; así, $arg - max\left(L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}), \mathbb{R}^k\right)$ contiene u infinitamente grande en magnitud. Por otro lado, como $arg - max\left(L(\hat{x}, \hat{s}, \hat{u}), \mathbb{R}^k\right)$ contiene $u = 0$, por (2.31) tenemos

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i G_i^L(\hat{x}) \geq 0$$

ahora, como $\hat{u}_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \cdots, k$ y por (2.32) tenemos

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i G_i^L(\hat{x}) = 0 \tag{2.33}$$

similarmente podemos probar que

$$G_i^U(\hat{x}) \leq 0 \tag{2.34}$$

para todo $i = 1, 2 \cdots, k$ y

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i G_i^U(\hat{x}) = 0 \tag{2.35}$$

Por (2.32) y (2.34) se sigue que $G_i(\hat{x}) \leq_{LU} [0; 0]$, esto es, $\hat{x}$ es solución factible del problema (2.21) y usando (2.33) y (2.35) se sigue que $\sum\limits_{i=1}^{k} \hat{u}_i G_i(\hat{x}) = [0; 0]$ $\square$

Capítulo 3

Implementación Numérica

En este cápitulo implementaremos algunos ejemplos, 2 de ellos mono-objetivo bajo incertidumbre y 2 multi-objetivo bajo incertidumbre, con la intension de mostrar que el problema dual de Wolfe asociado a un problema primal dado, arroja soluciones del problema primal, verificando así los Teoremas fuerte y débil de dualidad. Dado que el problema dual es un problema de optimización no convexo en las variables de decisión (x, s, u) se tiene que la metodología de escalarización ([12]) no es eficiente en problemas con incertidumbre, por tanto, colocamos la condición KKT como restricción, para hallar soluciones del problema dual.

El siguiente ejemplo aparece en [3], [5] y [6].

Ejemplo 3.0.1. *Consideremos el siguiente problema primal de optimización multi objetivo bajo incertidumbre:*

$$\begin{array}{ll} \min_{LU} & \begin{bmatrix} \left[x_1^2+x_2^2+1; x_1^2+x_2^2+2\right] \\ \left[2x_1^2+2x_2^2+3; 2x_1^2+2x_2^2+4\right] \end{bmatrix} \\ s.\ a. & \begin{cases} x_1+x_2 \geq 1 \\ 6x_1+2x_2 \geq 12 \\ x, u \geq 0 \end{cases} \end{array} \tag{3.1}$$

donde $\mathrm{F}_1 = \left[x_1^2+x_2^2+1; x_1^2+x_2^2+2\right]$, $\mathrm{F}_2 = \left[2x_1^2+2x_2^2+3; 2x_1^2+2x_2^2+4\right]$, $g_1 = 1 - x_1 - x_2$, $g_2 = 12 - 6x_1 - 2x_2$. *según [3], [5] y [6], la solución del problema* (3.1) *es* $x_1 = \frac{9}{5}$ *y* $x_2 = \frac{3}{5}$, *de donde* $s(\mathrm{F}(x)) = [0,1480; 0,1680]$.

Ahora, el problema dual en el sentido Wolfe del problema (3.1) *es el siguiente:*

$$\begin{array}{ll} \max_{LU} & s_1\mathrm{F}_1+s_2\mathrm{F}_2+u_1g_1+u_2g_2 \\ s.\ a. & \begin{cases} s_1\begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix}+s_2\begin{bmatrix} 8x_1 \\ 8x_2 \end{bmatrix}+u_1\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}+u_2\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x, u \geq 0 \quad s > 0 \end{cases} \end{array} \tag{3.2}$$

Al resolver numéricamente (3.2) *a través de la metodología de escalarización (Ver [12]) obtenemos los siguientes resultados:*

Tabla 1: Resultados Problema (3.2)

x_1	x_2	s_1	s_2	u_1	u_2	$\Psi(x,s,u)$
1.80	0.60	0.01	0.01	9.61e-17	0.03	[0.1480; 0.1680]
1.80	0.60	0.01	0.01	9.61e-17	0.03	[0.1480; 0.1680]
1.80	0.60	0.01	0.01	9.61e-17	0.03	[0.1480; 0.1680]
1.80	0.60	0.01	0.01	-6.37e-19	0.03	[0.1480; 0.1680]
1.80	0.60	0.01	0.01	-8.99e-15	0.04	[0.1480; 0.1680]
1.80	0.60	0.01	0.01	-1.24e-14	0.04	[0.1480; 0.1680]
1.80	0.60	0.01	0.01	-1.24e-14	0.04	[0.1480; 0.1680]
1.80	0.60	0.01	0.01	-1.10e-14	0.04	[0.1480; 0.1680]
1.80	0.60	0.01	0.01	-9.15-15	0.04	[0.1480; 0.1680]
1.80	0.60	0.01	0.01	-7.31e-15	0.04	[0.1480; 0.1680]

De esta manera, concluimos que $(x_1, x_2) = (\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$ *es una solución optima de Pareto del problema* (3.1).

Ejemplo 3.0.2. *Consideremos el siguiente problema mono-objetivo:*

$$\begin{array}{ll} \min_{LU} & \left[x_1^2 + x_2^2 + 1; x_1^2 + 2x_2^2 + 2\right] \\ s.\ a. & \begin{cases} 1 - x_1 - x_2 \leq 0 \\ 12 - 6x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x \geq 0. \end{cases} \end{array} \tag{3.3}$$

donde $f^L = x_1^2 + x_2^2 + 1$, $f^U = x_1^2 + 2x_2^2 + 2$, $g_1 = 1 - x_1 - x_2$ *y* $g_2 = 12 - 6x_1 - 2x_2$. *Al resolver numéricamente el problema* (3.3) *a través de la metodología de escalarización (Ver [12]) obtenemos los siguientes resultados:*

Tabla 2: Resultados Problema (3.3)

x_1	x_2	$s(F(x))$
1.8920	0.3240	[0.0178; 0.0221]
1.8862	0.3414	[0.0178; 0.0220]
1.8830	0.3509	[0.0177; 0.0220]
1.8797	0.3608	[0.0177; 0.0220]
1.8762	0.3714	[0.0177; 0.0220]
1.8725	0.3826	[0.0176; 0.0220]
1.8685	0.3945	[0.0176; 0.0219]
1.8643	0.4071	[0.0175; 0.0219]
1.8598	0.4206	[0.0175; 0.0219]
1.8550	0.4351	[0.0175; 0.0219]
1.8498	0.4505	[0.0174; 0.0219]
1.8443	0.4671	[0.0174; 0.0220]
1.8383	0.4849	[0.0173; 0.0220]
1.8319	0.5042	[0.0173; 0.0220]
1.8250	0.5251	[0.0173; 0.0220]
1.8174	0.5477	[0.0046; 0.0059]
1.8092	0.5724	[0.0046; 0.0059]
1.8002	0.5995	[0.0046; 0.0060]

Ahora, el problema dual en el sentido de Wolfe del problema (3.3) *es el siguiente:*

$$\begin{aligned} &\text{máx}_{LU}\ s_1\mathrm{F}{+}u_1g_1{+}u_2g_2 \\ &s.\ a. \begin{cases} s_1\begin{bmatrix} 4x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}{+}u_1\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}{+}u_2\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x,u \geq 0 \quad s>0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Al resolver numéricamente el problema (3.4) *obtenemos los siguientes resultados:*

Tabla 3: Resultados Problema (3.4)

x_1	x_2	s_1	u_1	u_2	$\Psi(x,s,u)$
1.8621	*0.4138*	*0.0038*	*6.8750e-27*	*0.0047*	$[0.177; 0.221]$
1.8621	*0.4138*	*0.0038*	*2.9710e-26*	*0.0047*	$[0.0176; 0.0221]$
1.8621	*0.4138*	*0.0038*	*1.0297e-26*	*0.0047*	$[0.0176; 0.0221]$
1.8621	*0.4138*	*0.0037*	*6.5563e-26*	*0.0047*	$[0.0176; 0.0221]$
1.8621	*0.4138*	*0.0037*	*7.8098e-26*	*0.0047*	$[0.0176; 0.0220]$
1.8621	*0.4138*	*0.0037*	*5.4230e-26*	*0.0047*	$[0.0176; 0.0220]$
1.8621	*0.4138*	*0.0037*	*1.3676e-25*	*0.0047*	$[0.0175; 0.0220]$
1.8621	*0.4138*	*0.0037*	*1.6094e-25*	*0.0047*	$[0.0175; 0.0219]$
1.8621	*0.4138*	*0.0037*	*1.6094e-25*	*0.0047*	$[0.0175; 0.0219]$
1.8621	*0.4138*	*0.0037*	*1.6094e-25*	*0.0047*	$[0.0175; 0.0219]$
1.8621	*0.4138*	*0.0037*	*1.9847e-25*	*0.0047*	$[0.0175; 0.0219]$
1.8621	*0.4138*	*0.0037*	*1.6296e-25*	*0.0047*	$[0.0175; 0.0219]$
1.8621	*0.4138*	*0.0037*	*1.6094e-25*	*0.0047*	$[0.0174; 0.0218]$
1.8621	*0.4138*	*0.0037*	*2.2208e-26*	*0.0047*	$[0.0174; 0.0218]$
1.8621	*0.4138*	*9.9998e-4*	*9.4998e-20*	*0.0012*	$[0.0174; 0.0218]$
1.8621	*0.4138*	*9.9998e-4*	*9.4998e-20*	*0.0012*	$[0.0046; 0.0058]$
1.8621	*0.4138*	*9.9998e-4*	*9.4998e-20*	*0.0012*	$[0.0046; 0.0058]$
1.8621	*0.4138*	*9.9998e-4*	*9.4998e-20*	*0.0012*	$[0.0046; 0.0058]$

Ejemplo 3.0.3. *Consideremos el siguiente problema multi-objetivo:*

$$\begin{aligned} &\text{mín}_{LU}\ \begin{bmatrix} [x_1^2+x_2^2+1; x_1^2+2x_2^2+2] \\ [(x_1^2+1)(x_2-1)^2; (x_1+1)^2(x_2-1)^2] \end{bmatrix} \\ &s.\ a. \begin{cases} 1-x_1-x_2 \leq 0 \\ 12-6x_1-2x_2 \leq 0 \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde:

$\mathrm{F}_1^L = x_1^2+x_2^2+1$, $\mathrm{F}_1^U = x_1^2+2x_2^2+2$, $\mathrm{F}_2^L = (x_1^2+1)(x_2-1)^2$, $\mathrm{F}_2^U = (x_1+1)^2(x_2-1)^2$, $g_1 = 1-x_1-x_2$ *y* $g_2 = 12-6x_1-2x_2$. *Al resolver numéricamente el problema* (3.5) *obtenemos los siguientes resultados:*

Tabla 4: Resultados Problema (3.5)

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s(F(x))}$
1.8838	*1.0001*	$[0.0055; 0.0075]$
1.6699	*0.9904*	$[0.0048; 0.0068]$
1.6732	*0.9803*	$[0.0048; 0.0067]$
1.6769	*0.9694*	$[0.0048; 0.0067]$
1.6808	*0.9577*	$[0.0048; 0.0067]$
1.6850	*0.9449*	$[0.0047; 0.0067]$
1.6896	*0.9311*	$[0.0047; 0.0066]$
1.6946	*0.9160*	$[0.0047; 0.0066]$
1.7002	*0.8995*	$[0.0047; 0.0066]$
1.7063	*0.8812*	$[0.0048; 0.0066]$
1.7130	*0.8609*	$[0.0048; 0.0066]$
1.7206	*0.8381*	$[0.0048; 0.0066]$
1.7292	*0.8123*	$[0.0048; 0.0066]$
1.7390	*0.7829*	$[0.0049; 0.0067]$
1.7504	*0.7488*	$[0.0050; 0.0068]$
1.7638	*0.7087*	$[0.0051; 0.0070]$
1.7799	*0.6604*	$[0.0053; 0.0073]$
1.7998	*0.6005*	$[0.0056; 0.0077]$
1.8256	*0.5231*	$[0.0060; 0.0085]$
1.8612	*0.4163*	$[0.0069; 0.0099]$

El problema dual en el sentido de Wolfe del problema (3.5) *es el siguiente:*

$$
\begin{array}{ll}
\text{máx}_{LU} & \begin{array}{l} s_1\left[x(1)^2+x(2)^2+1; x(1)^2+2x(2)^2+2\right]+s_2\left[(x(1)^2+1)(x(2)-1)^2; (x(1)+1)^2(x(2)-1)^2\right] \\ +u_1\left(-x(1)-x(2)+1\right)+u_2\left(-6x(1)-2x(2)+12\right) \end{array} \\
s.\ a. & \left\{ \begin{array}{l} s_1\begin{bmatrix} 4x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}+s_2\begin{bmatrix} 4x_1x_2^2+2x_2^2-8x_1x_2+4x_1-4x_2+2 \\ 4x_1^2x_2-4x_1^2+4x_1x_2-4x_1+4x_2-4 \end{bmatrix} \\ +u_1\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}+u_2\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x,u\geq 0 \quad s>0 \end{array} \right.
\end{array}
\tag{3.6}
$$

Al resolver numéricamente el problema (3.6) obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 5: Resultados Problema (3.6)

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{s}_1$	$\mathbf{s}_2$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\Psi(x,s,u)$
1.7039	0.8883	0.0010	0.0012	7.6511e-17	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7044	0.8868	0.0010	0.0012	7.1252e-16	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7056	0.8833	0.0010	0.0011	0.0	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7059	0.8823	0.0010	0.0011	0.0	0.0011	[0.0047; 0.0066]
1.7060	0.8819	0.0010	0.0011	0.0	0.0012	[0.0047; 0.0066]
1.7050	0.8850	0.0010	0.0011	0.0	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7051	0.8846	0.0010	0.0011	0.0	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7045	0.8864	0.0010	0.0012	0.0	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7039	0.8882	0.0010	0.0012	0.0	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7033	0.8901	0.0010	0.0012	0.0	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7027	0.8920	0.0010	0.0012	0.0	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7029	0.8914	0.0010	0.0012	0.0	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7023	0.8931	0.0010	0.0013	0.0	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7017	0.8948	0.0010	0.0013	1.3410e-24	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7012	0.8965	0.0010	0.0013	2.7848e-24	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7006	0.8982	0.0010	0.0013	2.1477e-24	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.7001	0.8998	0.0010	0.0014	1.6866e-23	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.6995	0.9015	0.0010	0.0014	2.7285e-23	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.6989	0.9032	0.0010	0.0014	1.3965e-23	0.0011	[0.0048; 0.0066]
1.6984	0.9048	0.0010	0.0015	0.0	0.0011	[0.0048; 0.0066]

Conclusiones

En este trabajo se hace un estudio de los planteamientos de los problemas duales en el caso de funciones objetivo intervalo valuadas inspirados en los problemas duales en el caso de funciones objetivo vector valuadas. Este estudio fue iniciado para funciones intervalo valuadas mono-objetivo en [3], nosotros lo hacemos para funciones multi-objetivo.

La forma en que se plantean los problemas duales ligados a problemas primales con función objetivo intervalo valuada viene dada por la teoría de dualidad de Wolfe.

En el planteamiento de los problemas duales con las características de la función objetivo mencionadas antes, se han considerado restricciones real valuadas como intervalo valuadas.

A través de problemas implementados numéricamente se ha verificado que el planteamiento del problema dual, dado un problema primal como (3.1), (3.3),(**??**) y (3.5) es correcto en el siguiente sentido: se verifica que las soluciones obtenidas a través del problema dual son las mismas soluciones del problema primal.

Problemas abiertos

La teoría desarrollada hasta ahora en [3], [5],[6], [7],[8],[4], [12] como principales fuentes, no ha considerado funciones objetivo o restricciones no convexas, nosotros tampoco lo hemos hecho.

Ligado a lo anterior, no se tienen desarrollos de tipo numérico para el cálculo de las soluciones de los problemas planteados en [3], [5],[6], [7],[8],[4],[11]; frente a esta situación en [12] se han logrado implementar desarrollos computacionales para estos problemas. Finalmente podemos también afirmar la ausencia de desarrollos computacionales para el caso no convexo.

Bibliografía

[1] Bao-huai, Sheng, San-yang, Liu. Kuhn-Tucker condition and wolfe duality of preinvex set-valued optimization. Applied mathematics and mechanics, Vol 27, N° 12, pp 1655-1664. 2006.

[2] Wolfe, Philip. A duality theorem for nonlinear programming. Quarterly of Applied Mathematics. Vol 19, N°3, pp 239-244. 1961.

[3] Wu, Hsien-Chung. On interval-valued nonlinear programming problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol 5, N°23. 2007.

[4] Wu, Hsien-Chung, Wolfe Duality for Interval-Valued Optmization. J.Optim Theory Appl. Vol 138, pp 497-509. 2008.

[5] Wu, Hsien-Chung. The Karush-Kuhn-Tucker óptimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function. European Journal of Operational Research. Vol 176, pp 46-59. 2007.

[6] Wu, Hsein-Chung, The Karush-kuhn-Tucker conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective functions. European Journal of Operational Research. Vol 3, N°12, pp 49-60. 2009.

[7] Wu, Hsein-Chung. The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for the optimization problem with fuzzy-valued objective function. Math Meth Oper Res. Vol 66. pp 203-224. 2007.

[8] Wu, Hsein-Chung. Duality theory in fuzzy optimization problems formulated by the Wolfe´s primal and dual pair. Fuzzy Optimization and Decision Making. Vol 6, N° 3, pp 179–198. 2007.

[9] Wu, Hsein-Chung. Fuzzy estimates of regression parameters in linear regression models for imprecise input and output data. Computational Statistics & Data Analysis. Vol 42, pp 203–217. 2003.

[10] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965) 338-353.

[11] Ishibuchi, H., Tanaka, H., Multiobjective programming in optimization of the interval objective function, Eurepean Journal of Operational Research 48 (1990), pp 219-225.

[12] Fernandez, Juan Pablo, Optimización multi-objetivo intervalo valuada,Tesis Maestria, Universidad Eafit, 2008.

[13] Dentcheva, Darinka. Ruszczynski, Andrzej. Optimization with dominance constraints. Society for industrial and applied mathematics. Vol 14, N° 2, pp 548-566. 2003.

[14] Alenander, Shapiro., Dentcheva, Darinka., Ruszczynski, Andrzej. Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory. Society for industrial and applied mathematics. 2009.

[15] Takashi, Hasuikea., Hideki, Katagirib., Hiroaki,Ishiia. Portfolio selection problems with random fuzzy variable returns. Fuzzy Sets and Sistems. Vol 160, pp 2579-2596. 2009.

[16] Balasubramanian, J., Grossmann, I.E. Scheduling optimization under uncertainty an alternative approach, Department of chemical engineering, carnegie mellon university, Pittsburgh, 2002.

[17] Novo, S., Vicente, teoria de la Optimizacion. Universidad Nacional de Educacion Distancia, Madrid, 1999.