



MÉTODOS MULTIPASO VARIABLE
APLICADOS A ECUACIONES
DIFERENCIALES DE ORDEN DOS CON
RETARDO.

Carlos Mario Velez Arboleda
Cesar Augusto Guerra Villa

Asesor
Orlando García jaimes

UNIVERSIDAD EAFIT
Departamento de Ciencias Básicas
Medellín

Diciembre 2010

Contenido

1. Introducción.	5
1.1. Justificación	5
1.2. Ejemplo de la aurora boreal	8
2. Ecuaciones de orden superior	13
2.1. Introducción.	13
2.2. Métodos multipaso variable.	15
2.3. Sobre las soluciones de una ecuación en diferencias.	19
2.4. Error global de truncación.	29
3. Interpolación Polinómica	43
3.1. Interpolación Polinómica General o De Hermite	46
3.2. Funciones Ranura ó Splines de interpolación	48
Bibliografía	55

4 Métodos multipaso variable

Capítulo 1

Introducción.

1.1 Justificación

El origen de las Ecuaciones Diferenciales lo encontramos en la formulación Newtoniana de algunos problemas físicos, en particular en la solución del problema gravitacional, aún cuando no podemos olvidar que la paternidad del Cálculo y las ecuaciones diferenciales siempre ha estado ligada a los nombres de Newton y Leibnitz. Con respecto a sus orígenes ya en el año 1671 Newton escribe en su libro de cálculo diferencial un método para resolver un problema de valor inicial mediante series construidas mediante un proceso iterativo, sin embargo, los trabajos más significativos respecto a la solución de ecuaciones diferenciales se encuentran en los *Principia mathematica*, obra en la cual Newton presenta su ley de gravitación universal como una ecuación diferencial.

En lo que respecta a Leibnitz, su primer contacto con las ecuaciones diferenciales corresponden a unos pocos años después y se generan a partir de sus vínculos con las obras de Fermat, Cavalieri y Pascal y su correspondencia con Cristian Huygens sobre las ecuaciones diferenciales que se generan al tratar de resolver problemas geométricos sobre tangentes inversas.

Hasta nuestros días, el avance de las ecuaciones diferenciales es inmenso, en ellas podemos encontrar una gran cantidad de problemas que han dado origen a una gran variedad de investigaciones en Matemáticas puras, mientras que por otro lado, se han constituido en una poderosa herramienta para modelizar fenómenos de muy diversas índoles; así, mediante las ecuaciones diferenciales podemos describir desde procesos meteorológicos hasta problemas relacionados con la aparición o desaparición de especies en competencia.

Como es bien sabido, para el estudio de las ecuaciones diferenciales, se

suelen clasificar estas en dos grandes grupos: las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales parciales, en estas últimas, las derivadas involucradas en la ecuación diferencial se hacen con respecto a varias variables independientes. Entre las ecuaciones en derivadas parciales encontramos la ecuación del calor, la ecuación de onda y las muy famosas ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo y las ecuaciones de la hidrodinámica de Navier y Stokes. En lo que respecta a los métodos de solución de cada uno de estas familias, encontramos algunos aspectos en común, pero en general son procesos muy diferentes.

Infortunadamente, una gran mayoría de ecuaciones diferenciales no posee solución en términos de funciones elementales, a pesar de que los llamados teoremas de existencia y unicidad nos garantizan que bajo ciertas hipótesis existe solución para dicha ecuación. A raíz de esta situación el análisis numérico ha entrado a convertirse en una importante herramienta para hallar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales, en este sentido y con el advenimiento de los computadores a mediados del siglo pasado, las técnicas numéricas para la solución de ecuaciones diferenciales han tenido un gran impulso; hoy aún después de ciento diez años de la aparición de las técnicas de Runge-Kuta para la solución de problemas de valor inicial, mantenemos vivo el interés por mejorar y descubrir mejores técnicas para la solución numérica de ecuaciones diferenciales.

En la actualidad, los métodos para la solución aproximada de ecuaciones diferenciales parten de la escritura del problema en la forma de un problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$$

recordando que si se trata de ecuaciones diferenciales de orden superior, estas pueden transformarse en un sistema lineal que puede escribirse en la forma anterior. La solución numérica se basa en un procedimiento paso a paso, es decir, tomamos la solución aproximada en un punto y_n y luego procedemos a calcularla en el punto siguiente y_{n+1} . Desde este punto de vista, los métodos de solución se clasifican en dos grandes grupos, los métodos de un paso y los métodos multipaso, en estos últimos se requiere la información de las aproximaciones en varios puntos y luego se calcula para un nuevo punto. Es claro que los métodos de un paso tienen una ventaja computacional sobre los métodos multipaso y de cierta forma reflejan de una manera un poco más clara el carácter evolutivo de un sistema dinámico a partir de las condiciones iniciales. A pesar de estas ventajas de los métodos de un paso, en la actualidad se ha impuesto el uso de los métodos multipaso, fundamentalmente por la precisión con que podemos calcular las soluciones y por los enormes adelantes en cuanto a velocidad y capacidad de memoria

en los dispositivos de computación modernos. Entre los métodos usuales nos encontramos con una gran variedad, todos ellos modificaciones de los tradicionales de Adams Bashforth (1883) y Moulton (1926), todos estos métodos han sido ampliamente difundidos y es posible encontrar sus códigos en diversos lenguajes de programación. En los libros de Henrici y de Grigorieff podemos encontrar una completa y rigurosa exposición de una amplia gama de métodos multipaso. De los métodos de un paso el de Euler resulta ser el más conocido, este tiene su origen en la idea de una aproximación de la función utilizando la recta tangente y obviamente es una aproximación lineal con un error del orden cuadrático. Esta idea a dado origen a otros métodos que siguen considerándose de un paso pero que mejoran la aproximación al aprovechar más términos de la serie de Taylor de la solución.

Conservando la filosofía de los métodos de un paso encontramos las famosas formulas de Runge-Kutta, en estas, como en el caso de las variantes usando la formula de Taylor, se obtienen métodos de orden dos, mediante ecuaciones de la forma

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{f}\left(t_n + h, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2} \mathbf{g}_1\right)$$

y la ecuación recurrente

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{g}_2.$$

Después de la introducción de las formulas de Runge-Kutta y los métodos de Heun a comienzos del siglo pasado se presenta un período de poco avance en la solución numérica de ecuaciones diferenciales, luego, con la aparición de los computadores de alta velocidad y gran capacidad de memoria se pudo ver que en muchos problemas los métodos tradicionales podían presentar problemas de convergencia aun utilizando tamaños de paso muy pequeños, un ejemplo de ello se presenta en el problema de resolver el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x'' &= x + 2y' - \beta \frac{x + \alpha}{r_1^3} - \alpha \frac{x - \beta}{r_2^3} \\ y'' &= y - 2x' - \beta \frac{y}{r_1^3} - \alpha \frac{y}{r_2^3} \end{aligned}$$

donde $r_1 = \sqrt{(x + \alpha)^2 + y^2}$ y $r_2 = \sqrt{(x - \beta)^2 + y^2}$. Estas ecuaciones describen la trayectoria de un satélite que se mueve bajo los efectos de la atracción gravitacional de la tierra y la luna, tomando un sistema de coordenadas con origen en el centro de masa del sistema tierra luna, de tal modo que la tierra aparezca en un punto de coordenadas $(-\alpha, 0)$ y la luna

Método	Paso variable	RK4	Euler
Pasos	75	6000	24000

Tabla 1.1. Número de pasos en la solución del problema de los tres cuerpos

en el punto $(1 - \alpha = \beta, 0)$, de esta forma los valores $r_1 = \sqrt{(x + \alpha)^2 + y^2}$ y $r_2 = \sqrt{(x - \beta)^2 + y^2}$ representan las distancias del satélite a la tierra y la luna respectivamente.

Este conjunto de ecuaciones es conocido como el problema restringido de los tres cuerpos y fue Poincaré el primero en establecer que este sistema de ecuaciones posee diferentes familias de orbitas periódicas, pero solo en algunos casos especiales estas se pueden expresar en términos de funciones elementales, en particular para el conjunto de condiciones iniciales

$$x(0) = 0.094, \quad x'(0) = 0 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2,001$$

se tiene una orbita de las llamada familia de Arenstorf, con un período $T = 17.06$. Al resolver este problema puede verse que con el método de Euler, tomando como punto de inicio proximo a una singularidad del sistema, el método es divergente. En la siguiente tabla se muestran los valores de los numeros de pasos aplicados para obtener una buena solución del problema cuando se aplican los métodos de Euler, Runge-Kutta y un método de paso variable.

En este ejemplo podemos notar algunas de las dificultades que se presentan en la solución aproximada de una ecuación diferencial, si en un intervalo los valores de la derivada de la función son grandes, es decir, la función cambia muy rápido, para obtener una buena aproximación el tamaño del paso debe ser muy pequeño; mientras que en el caso de que la función cambie muy lentamente, es decir su derivada sea pequeña, el tamaño de paso puede aumentarse.

En la proxima sección plantaremos otro problema de interés histórico que ha servido para desarrollar las técnicas de solución de ecuaciones diferenciales por métodos multipaso.

1.2 Ejemplo de la aurora boreal

Escogemos el problema histórico tratado por Stömer en 1907: el objetivo de Stömer fue confirmar numéricamente la conjetura de Birkelan, quien explicó en 1896, que la aurora boreal es producida por partículas eléctricas emanadas por el sol y orbitando en el campo magnético de la tierra.

Supongamos que un magneto elemental esta situado en el origen y a lo largo del eje Z. La trayectoria $(x(s), y(s), z(s))$ de una partícula eléctrica en su campo magnético entonces satisface:

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{1}{r^5} (3yzz' - (3x^2 - r^2)y') \\y'' &= \frac{1}{r^5} ((3z^2 - r^2)x' - 3xzz') \\z'' &= \frac{1}{r^5} (3xzy' - 3yzz')\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

Donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, introduciendo las coordenadas polares $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$.

El sistema 1.2.1 llega a ser equivalente a

$$\begin{aligned}R'' &= \left(\frac{2\gamma}{R} + \frac{R}{r^3} \right) \left(\frac{2\gamma}{R^2} + \frac{3R^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \\z'' &= \left(\frac{2\gamma}{R} + \frac{R}{r^3} \right) \frac{3Rz}{r^5} \\\varphi' &= \left(\frac{2\gamma}{R} + \frac{R}{r^3} \right) \frac{1}{R}\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

Donde ahora $r^2 = R^2 + z^2$ y γ es una constante que aparece luego de la integración de φ'' .

Las dos ecuaciones 1.2.2 constituyen una ecuación diferencial de segundo orden del tipo $y'' = f(x, y)$ que puede resolverse numéricamente por el método que pretendemos exponer.

La variable φ se obtiene mediante una simple integración de 1.2.2. Stömer encontró después de muchos cálculos, que los valores iniciales dados por

$$\begin{aligned}R_0 &= 0.257453 \\R'_0 &= \sqrt{Q_0} \cos u \\r_0 &= \sqrt{R_0^2 + z_0^2} \\z_0 &= 0.314617 \\z'_0 &= \sqrt{Q_0} \sin u \\Q_0 &= 1 - (2\gamma/R_0 + R_0/r_0^3)^2 \\\gamma &= -0.5 \\u &= 5\pi/4\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

producen una curva solución especialmente interesante en puntos muy de cerca del polo norte.

La Figura 1.2 muestra 125 curvas solución en el espacio (x, y, z) , con estas ecuaciones y los valores iniciales en una vecindad del polo norte se obtiene una buena impresión de cómo la aurora boreal llegaría a ser.

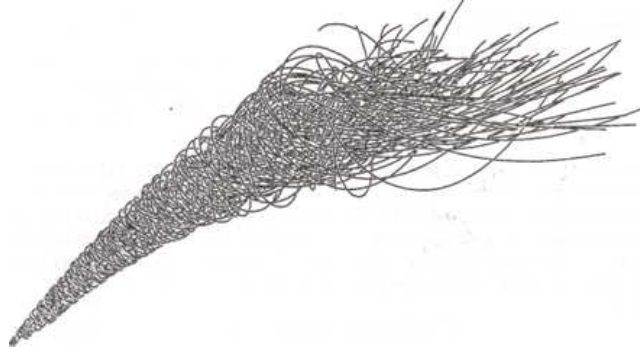


Figura 1.1. Gráfico de la aurora boreal

La Figura 1.2 compara el desempeño de los métodos de Stömer al reemplazar la función $f(t, y(t))$ por la interpolación polinómica $p(t)$, mediante la fórmula

$$P(t) = p(x_n + sh) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n,$$

con el método Adams mediante la integración del subsistema (1.2.2) con los valores iniciales (1.2.3) para $0 \leq s \leq 0.3$, esto produce un método explícito y sus coeficientes están dados en la Tabla 1.3. Dichos diagramas comparan el error mediante la norma Euclidiana en \mathbb{R}^2 en un punto (R, z) de la solución final en función del número de evaluaciones fe .

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
σ_j^*	1	-1	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{221}{60480}$	$-\frac{19}{6048}$	$-\frac{9829}{3628800}$	$-\frac{407}{172800}$

Tabla 1.2. Coeficientes del método implícito

El número de pasos utilizados en este método está dado por la expresión $\{n = 50 \cdot 2^{0.3 \cdot i}\}_{i=0,1,2,\dots,30} = \{50, 61, 75, 93, 114, \dots, 25600\}$ los valores iniciales se calculan con precisión con el método explícito de Runge-kutta y tamaño de paso $h_{RK} = h/10$ y puede observarse que el método Stömer es sustancialmente más preciso debido al pequeño error constante (compare

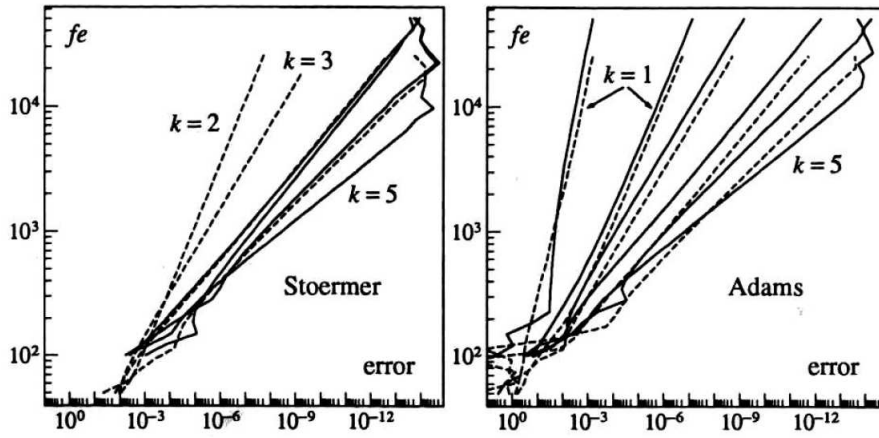


Figura 1.2. Comparación de errores de los métodos implícitos y explícitos

la Tabla 1.3 con la Tabla 1.2 y el comparativo de errores de los métodos de Störmer y Adams que se muestra en la Figura 1.2 además, estos métodos tienen menos gastos computacionales, es decir, desde el punto de vista operacional, son más económicos.

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j \nabla^j f_n \tag{1.2.4}$$

con coeficientes σ_j dados por

$$\sigma_j = (-1)^j \int_0^1 (1-s) \left(\binom{-s}{j} + \binom{s}{j} \right) ds \tag{1.2.5}$$

Además debemos observar el método implícito para obtener fórmulas mas

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
σ_j	1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{19}{240}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{863}{12096}$	$\frac{275}{4032}$	$\frac{33953}{518400}$	$\frac{8183}{129600}$

Tabla 1.3. Coeficientes del método 1.2.5

exactas, como el polinomio interpolador (análogo al método implícito de Adams)

$$p^*(t) = p^*(x_n + sh) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-s+1}{j} \nabla^j f_{n+1} \tag{1.2.6}$$

12 Métodos multipaso variable

el cual pasa a través de puntos adicionales x_{n+1} , f_{n+1} , lo cual nos produce un método explícito de la forma

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^k \sigma_j^* \nabla^j f_{n+1}$$

donde los coeficientes σ_j^* son definidos por

$$\sigma_j^* = (-1)^j \int_0^1 (1-s) \left(\binom{-s+1}{j} + \binom{s+1}{j} \right) ds \quad (1.2.7)$$

Sin embargo ellos pueden ser implementados cuidadosamente con el fin de evitar errores de redondeo.

Capítulo 2

Métodos multipaso variable aplicados a ecuaciones diferenciales de orden dos con retardo.

2.1 Introducción.

En este capítulo estamos interesados en conseguir cotas explícitas para el error global de discretización de un método multipaso variable aplicado a la solución aproximada de una ecuación diferencial de orden superior en la cual aparece una función con retardo. El problema diferencial de orden superior con argumento retardado que vamos a tratar tiene la forma

$$\left. \begin{aligned} y^{(2)}(t) &= f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad a \leq t \leq b, \\ y'(a) &= \Omega_0 \\ y(t) &= \phi(t), \quad \alpha \leq t \leq a, \quad 0 \leq \tau \leq |a - \alpha| \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

donde $\tau > 0$ y $f : [a, b] \times C \times C \rightarrow C$ es una función continua y acotada que cumple con las condiciones de Lipschitz

$$\left. \begin{aligned} \|f(t, p, q) - f(t, p^*, q)\| &\leq L_1 \|p - p^*\|, \\ \|f(t, p, q) - f(t, p, q^*)\| &\leq L_2 \|q - q^*\|, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

para números p, q, p^* y q^* en C y todo $t \in [a, b]$ y donde $\phi(t)$ es una función continua, con valores en C y dominio sobre el intervalo $[a - \tau, a]$. Con estas condiciones el problema planteado tiene solución única en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 2.1.1. Consideremos la ecuación diferencial con retardo

$$\begin{aligned}y'' + 4y &= y(t-1) & t \in [0, 1] \\y(t) &= e^{-t} + 1 & t \in [-1, 0] \\y'(0) &= -1\end{aligned}$$

Para esta ecuación la solución teórica está dada, en el intervalo $[0, 1]$, por

$$\frac{e^{1-t}}{5} + \frac{(35 - 4e) \cos(2t)}{20} + \frac{(e - 5) \operatorname{sen}(2t)}{10} + \frac{1}{4}$$

Las Ecuaciones diferenciales de orden superior con argumento retardado del tipo 2.1.1 son frecuentes en problemas de biociencias y dinámica de poblaciones Marchuk [31], Aiello [1], Anderson [2], Okamoto y otros [36]. Cuningham [6] y Ross [40] presentan aplicaciones a la teoría de control. Pueden encontrarse ecuaciones diferenciales de este tipo en el planteamiento de problemas sobre pérdidas de energía en líneas de transmisión [34].

En la solución del problema 2.1.1 hemos optado por usar directamente las formulas de paso variable [24], [25], [41], que como se ha dicho, proporcionan mejores resultados.

El problema de la estabilidad para los métodos multipaso variable ha sido tratado en [5], [13], [14] y [15], o en la sección III.5 de [16]. En [18] se han establecido cotas para el error global de discretización de métodos multipaso variables para la solución de ecuaciones diferenciales. Recientemente Martín et al [33] han tratado problemas del tipo 2.1.1 con $r = 1$

La organización de este capítulo es la siguiente: en primer lugar se introducen los conceptos de método multipaso variable fuertemente estable perturbado para problemas del tipo 2.1.1, así como el concepto de convergencia. En otra sección se estudia el comportamiento de una cierta ecuación en diferencias y se establecen acotaciones para sus soluciones. En la sección siguiente se muestra que el error global de discretización que se presenta al aplicar un método multipaso variable verifica una ecuación similar a la tratada en la sección previa. Después de introducir el concepto de consistencia, se obtienen cotas del error global de truncación y se prueba la convergencia del método planteado. Al final del capítulo se presenta un ejemplo donde se aplica un método multipaso variable para la solución de un problema diferencial de segundo orden con retardo.

2.2 Métodos multipaso variable.

Consideremos el problema de valor inicial representado por la ecuación 2.1.1 bajo las hipótesis 2.1.2 y sea $k \geq 2$. Un método multipaso variable para el problema 2.1.1 es una relación de la forma

$$\begin{aligned} & y_{n+k} + \alpha_{k-1,n}y_{n+k-1} + \alpha_{k-2,n}y_{n+k-2} + \cdots + \alpha_{0,n}y_n \\ &= h_{n+k-1}^2 (\beta_{k,n}f_{n+k} + \beta_{k-1,n}f_{n+k-1} + \cdots + \beta_{0,n}f_n), \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

donde los coeficientes $\alpha_{j,n}$ y $\beta_{j,n}$ dependen de los cocientes $w_i = \frac{h_i}{h_{i-1}}$ para $i = n+1, \dots, n+k-1$, $h_{n+k-1} > 0$, $f_j = f(t_j, y_j, y_j - \tau)$, $j \geq 0$, con $t_{n+k} \leq a + \tau$ y que existe $l > 0$ tal que $h_0 + h_1 + \cdots + h_l = \tau$ donde definimos la partición

$$\Delta h = \{t_n / t_n = a + h_0 + h_1 + \cdots + h_n, n \leq N\}.$$

y $h_0 + \cdots + h_N = b - a$, $l \leq N$. Véase [15] y [16].

Ahora vamos a introducir el concepto de convergencia para el caso de un método multipaso variable

Definición 2.2.1. *Decimos que el método multipaso variable 2.2.1 es convergente si para todo problema de valor inicial 2.1.1 bajo las hipótesis 2.1.2 se verifica que*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \text{máx}\{h_j, j \geq 0\} \\ a + \sum_{j=0}^n h_j = t_n}} y_n = y(t_n) .$$

para todo $t \in [a, b]$ y para toda solución $\{y_n\}$ de 2.1.1 que satisface las condiciones iniciales $y_s = \mu_s(h)$ con $\lim_{h \rightarrow 0} \mu_s(h) = \Phi(a)$, $s = 0, \dots, k-1$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu_s^{(i-1)}(h) - \mu_0^{(i-1)}(h)}{sh} = \Omega_i$$

para $1 \leq i \leq r-1$, $r \geq 2$ y $s = 1, \dots, k-1$

Para el estudio de la estabilidad del método multipaso variable, vamos a considerar el siguiente teorema que es una generalización del teorema 1 de [18], y que nos proporciona una condición suficiente para la estabilidad del método 2.2.1.

Teorema 2.2.1. *Sea el método 2.2.1 que satisface las siguientes propiedades:*

$$i. \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{j,n} + 1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \alpha_{1,n} + 2\alpha_{2,n} + \cdots + k\alpha_{k,n} &= 0 \\ \vdots \\ \alpha_{1,n} + 2^{r-1}\alpha_{2,n} + \cdots + k^{r-1}\alpha_{k,n} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r!} [\alpha_{1,n} + 2^r \alpha_{2,n} + \cdots + k^r \alpha_{k,n}] = \beta_{0,n} + \beta_{1,n} + \cdots + \beta_{k,n}$$

ii. Los coeficientes $\alpha_{j,n} = \alpha_j(w_{n+1}, \dots, w_{n+k-1})$ son continuos en un entorno de $(1, \dots, 1)$.

iii. Las fórmulas de paso fijo implícitas en el método de paso variable son fuertemente estables, es decir, las raíces del polinomio

$$z^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(1, \dots, 1) z^j = 0,$$

están dentro del disco unitario $\|z\| < 1$, y aquellas cuyo módulo es igual a la unidad, tienen multiplicidad que no excede a r

Sea

$$\varphi(s) = 1 + \alpha_{k-1,s}z + \alpha_{k-2,s}z^2 + \cdots + \alpha_{0,s}z^k. \quad (2.2.2)$$

y sea $\{\gamma_{n,s}\}_{n,s \geq 0}$ definido por

$$(\varphi(s))^{-1} = \sum_{n \geq 0} \gamma_{n,s} z^n, \quad \|z\| < 1. \quad (2.2.3)$$

Entonces existen números reales w, Ω ($w < 1 < \Omega$) tales que si $w \leq \frac{h_i}{h_{i-1}} = w_i \leq \Omega$, $i \geq 1$, entonces podemos encontrar números $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{r-1}$ tales que

$$\|\gamma_{n,s}\| \leq \Gamma_0 + n\Gamma_1 + n^2\Gamma_2 + \cdots + n^{r-1}\Gamma_{r-1}. \quad (2.2.4)$$

Demostración. Para probar el teorema usaremos inducción sobre r . Para el caso en el cual $r = 1$ estamos considerando el teorema 1 de [18].

Supongamos que el resultado es válido hasta $r-1$. Sean z_1, z_2, \dots, z_i todas las raíces diferentes con multiplicidad r de $p_n(z) = \alpha_{k,n}z^k + \alpha_{k-1,n}z^{k-1} + \cdots + \alpha_{0,n}$ con $\|z_j\| = 1$, $1 \leq j \leq i$. En esta forma, nosotros tenemos que

$$p_n(z) = p_{n_1}(z)p_{n_2}(z) = p_{n_1}(z) \prod_{j=1}^i (z - z_j) \quad (2.2.5)$$

donde $p_{n_2}(z)$ solamente tiene raices simples con módulo $\|z_j\| = 1$.

Si consideramos

$$\begin{aligned}
 \hat{p}_n(z) &= \alpha_{k,n} + \alpha_{k-1,n}z + \cdots + \alpha_{1,n}z^{k-1} + \alpha_{0,n}z^k \\
 &= z^k p_n\left(\frac{1}{z}\right) \\
 &= z^{k-i} p_{n_1}\left(\frac{1}{z}\right) z^i p_{n_2}\left(\frac{1}{z}\right) \\
 &= \hat{p}_{n_1}(z) \hat{p}_{n_2}(z)
 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

aplicando el teorema 1 de [18] al polinomio $p_{n_2}(z)$

$$\frac{1}{\hat{p}_{n_2}(z)} = \frac{1}{z^i p_{n_2}\left(\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n \geq 0} \gamma_{n,n_2} z^n \tag{2.2.7}$$

si $w \leq \frac{h_i}{h_{i-1}} = w_i \leq \Omega$ entonces $\|\gamma_{n,n_2}\| \leq \psi$.

Las raíces del polinomio $p_{n_1}(z)$ están todas dentro del disco unitario $\|z\| < 1$, con la excepción de aquellas que tienen multiplicidad que no excede a $r - 1$, por la hipótesis de inducción, si $w \leq \frac{h_i}{h_{i-1}} = w_i \leq \Omega$ entonces existen constantes $\psi_0, \dots, \psi_{r-2}$ tales que si

$$\frac{1}{\hat{p}_{n_1}(z)} = \frac{1}{z^i p_{n_1}\left(\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n \geq 0} \gamma_{n,n_1} z^n$$

entonces

$$\|\gamma_{n,n_1}\| \leq \psi_0 + \psi_1 n + \cdots + \psi_{r-2} n^{r-2} \tag{2.2.8}$$

por 2.2.5-2.2.8 podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\hat{p}(z)} &= \frac{1}{\hat{p}_{n_1}(z)} \frac{1}{\hat{p}_{n_2}(z)} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \gamma_{n,n_1} z^n \sum_{n \geq 0} \gamma_{n,n_2} z^n \\
 &= \sum_{n \geq 0} \gamma_{n,l} z^n
 \end{aligned}$$

con

$$\gamma_{n,l} = \sum_{k=0}^n \gamma_{k,n_1} \gamma_{n-k,n_2}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\gamma_{n,l}\| &\leq \sum_{k=0}^n \|\gamma_{k,n_1}\| \|\gamma_{n-k,n_2}\| \\
&\leq \psi \sum_{k=0}^n \|\gamma_{k,n_1}\| \\
&\leq \psi \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^{r-2} \psi_h k^h \\
&= \psi \sum_{h=0}^{r-2} \psi_h \sum_{k=0}^n k^h
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

si consideramos que

$$\sum_{k=0}^n k^h = \sum_{m=0}^{h+1} C(m,n) n^m, \quad 0 \leq h \leq r-2 \tag{2.2.10}$$

donde $C(m,n)$ es una cierta combinación de los números de Bernoulli, por 2.2.9 y 2.2.10

$$\begin{aligned}
\|\gamma_{n,l}\| &\leq \psi \sum_{h=0}^{r-2} \psi_h \sum_{m=0}^{h+1} C(m,n) n^m, \quad 0 \leq h \leq r-2 \\
&\leq \Gamma_0 + n\Gamma_1 + n^2\Gamma_2 + \cdots + n^{r-1}\Gamma_{r-1}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \psi \sum_{m=0}^{r-2} C(0,m) \psi_m \\
\Gamma_1 &= \psi \sum_{m=0}^{r-2} C(1,m) \psi_m \\
&\vdots \\
\Gamma_{r-1} &= \psi C(r-1, r-2).
\end{aligned}$$

tal como queríamos demostrar.

Definición 2.2.2. *Decimos que un método multipaso variable, del tipo 2.2.1 que satisface las hipótesis del teorema 3.1 es un método multipaso variable, de k pasos, fuertemente estable perturbado.[18]*

2.3 Sobre las soluciones de una ecuación en diferencias.

En esta sección estudiaremos una ecuación en diferencias con coeficientes variables que, como veremos posteriormente, es similar a la ecuación que cumple el error global de discretización del método multipaso variable 2.2.1. Aquí nos proponemos determinar acotaciones para las soluciones de dicha ecuación y que luego usaremos para acotar el error global de discretización.

Asumamos de acuerdo con la definición 2.1.1 y con la notación de la sección precedente que el método 2.2.1 es un método fuertemente estable perturbado y consideremos la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned}
 & Z_{m+k} + \alpha_{k-1,m} Z_{m+k-1} + \dots + \alpha_{0,m} Z_m \\
 &= h_{m+k-1}^2 \left\{ \beta_{k,m}^{(1)} Z_{m+k} + \beta_{k-1,m}^{(1)} Z_{m+k-1} + \dots + \beta_{0,m}^{(1)} Z_m \right\} \\
 &+ h_{m+k-1}^2 \left\{ \beta_{k,m}^{(2)} Z_{m+k-l} + \beta_{k-1,m}^{(2)} Z_{m+k-1-l} + \dots + \beta_{0,m}^{(2)} Z_{m-l} \right\} + \lambda_m.
 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

donde $\beta_{s,m}^{(1)} \in C$, $0 \leq s \leq k$, $\beta_{l,m}^{(2)} \in C$, $\lambda_m \in C$, $0 \leq m \leq N$, $Z_i \in C$, $h_{m+k-1} > 0$. y l es un número natural tal que $h_0 + \dots + h_l = \tau$, y N es tal que $h_0 + \dots + h_N = b - a$.

En el caso en el cual Z_n sea una solución de la ecuación 2.3.1 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. *Sea el método 2.2.1 un método multipaso variable, de k pasos, fuertemente estable perturbado. Consideremos la ecuación 2.3.1 y sea*

$\{\gamma_{m,s} \mid m \geq 0, s \geq 0\}$ definido por la relación 2.2.3 si

$$\left. \begin{aligned} \|Z_j\| &\leq Z, \quad -l \leq j \leq k-1, \\ \|\beta_{k,p}^{(1)}\| + \|\beta_{k-1,p+1}^{(1)}\| + \cdots + \|\beta_{0,p+k}^{(1)}\| &\leq \|\beta_*^{(1)}\|, \quad 0 \leq p \leq N-k \\ \|\beta_{k,p}^{(2)}\| + \|\beta_{k-1,p+1}^{(2)}\| + \cdots + \|\beta_{0,p+k}^{(2)}\| &\leq \|\beta_*^{(2)}\|, \quad 0 \leq p \leq N-k \\ \|\alpha_{k-1,s}\| + \|\alpha_{k-2,s}\| + \cdots + \|\alpha_{0,s}\| + 1 &\leq A(k) = A, \quad s \leq N, \\ \|\lambda_m\| \leq \Lambda, \quad \|\beta_{k,m}^{(1)}\| &\leq \beta \end{aligned} \right\} \quad (2.3.2)$$

y L_* , K_* , L son tales que

$$\left. \begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=i}^{N-k} \|\alpha_{k-i,j} - \alpha_{k-i,N-k+i-1}\| \\ K_* &= \frac{1}{(1-h^2\beta)} \left(\Gamma_0 \left\{ ZkA + n\Lambda + h^2\tau\beta_*^{(2)} \right\} + N\Gamma_1 \left\{ ZkA + n\Lambda + h^2\tau\beta_*^{(2)} \right\} \right) \\ L_* &= \frac{1}{(1-h^2\beta)} \left(\Gamma_0 \left(\beta_*^{(2)} + \beta_*^{(1)} \right) + N\Gamma_1 \left(\beta_*^{(2)} + \beta_*^{(1)} \right) \right) \\ 1 - h^2\beta &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

Entonces si Z_n es una solución de 2.3.1, Z_n satisface

$$\|Z_n\| \leq K_* \exp \left(h^r L_* n + \frac{L}{(1-h^r\beta)} \{\Gamma_0 + N\Gamma_1\} \right). \quad (2.3.4)$$

Demostración. Vamos a considerar el lado izquierdo de la ecuación 2.3.1, para $m = n - k - p$, $p = 0, 1, \dots, n - k$ premultiplicado por $\gamma_{p,n-k}$, de esta forma obtenemos

$$\gamma_{p,n-k} (Z_{n-p} + \alpha_{k-1,n-k-p} Z_{n-p-1} + \cdots + \alpha_{0,n-k-p} Z_{n-k-p}), \quad 0 \leq p \leq n - k \quad (2.3.5)$$

Sumando todos estos términos y agrupando los coeficientes de Z_j ,

conseguimos

$$\begin{aligned}
 & Z_n \gamma_{0,n-k} + Z_{n-1} (\gamma_{1,n-k} + \gamma_{0,n-k} \alpha_{k-1,n-k}) \\
 & + Z_{n-2} (\gamma_{2,n-k} + \gamma_{1,n-k} \alpha_{k-1,n-k} + \gamma_{0,n-k} \alpha_{k-2,n-k}) \\
 & + Z_{n-3} (\gamma_{3,n-k} + \gamma_{2,n-k} \alpha_{k-1,n-k-2} + \gamma_{1,n-k} \alpha_{k-2,n-k-1} + \gamma_{0,n-k} \alpha_{k-3,n-k}) \\
 & + Z_{n-4} (\gamma_{4,n-k} + \gamma_{3,n-k} \alpha_{k-1,n-k-3} + \cdots + \gamma_{0,n-k} \alpha_{k-4,n-k}) + \cdots \\
 & \vdots \\
 & + Z_{n-k} (\gamma_{k,n-k} + \gamma_{k-1,n-k} \alpha_{k-1,n-2k-1} + \cdots + \gamma_{0,n-k} \alpha_{0,n-k}) + \cdots \\
 & \vdots \\
 & + Z_k (\gamma_{n-k,n-k} + \gamma_{n-k-1,n-k} \alpha_{k-1,1} + \cdots + \gamma_{n-2k,n-k} \alpha_{0,k}) \\
 & + (\gamma_{n-k,n-k} \alpha_{k-1,0} + \gamma_{n-k-1,n-k} \alpha_{k-2,1} + \cdots + \gamma_{n-2k-1,n-k} \alpha_{0,k-1}) Z_{k-1} \\
 & \vdots \\
 & + \cdots + \gamma_{n-k,n-k} \alpha_{0,0} Z_0.
 \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

y teniendo en cuenta el teorema 1 de [18]

$$\gamma_{m,s} + \gamma_{m-1,s} \alpha_{k-1,s} + \cdots + \gamma_{m-k,s} \alpha_{0,s} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m > 0 \end{cases}, \tag{2.3.7}$$

donde, por convenio, $\gamma_{m,s} = 0$ para $m < 0$. Por lo tanto, según la ecuación 2.3.7 $\gamma_{0,n-k} = 1$ y el coeficiente de Z_{n-1} es cero, además tenemos también que

$$\left. \begin{aligned}
 & \gamma_{2,n-k} + \gamma_{1,n-k} \alpha_{k-1,n-k} + \gamma_{0,n-k} \alpha_{k-2,n-k} = 0, \\
 & \gamma_{3,n-k} + \gamma_{2,n-k} \alpha_{k-1,n-k} + \gamma_{1,n-k} \alpha_{k-2,n-k} + \gamma_{0,n-k} \alpha_{k-3,n-k} = 0, \\
 & \vdots \\
 & \gamma_{n-k,n-k} + \gamma_{n-k-1,n-k} \alpha_{k-1,n-k} + \cdots + \gamma_{n-2k,n-k} \alpha_{0,n-k} = 0.
 \end{aligned} \right\} \tag{2.3.8}$$

Teniendo en cuenta 2.3.8 el coeficiente de Z_{n-2} en 2.3.6 es

$$\begin{aligned}
 & \gamma_{2,n-k} + \gamma_{1,n-k} \alpha_{k-1,n-k-1} + \gamma_{0,n-k} \alpha_{k-2,n-k} - \gamma_{2,n-k} - \gamma_{1,n-k} \alpha_{k-1,n-k} - \gamma_{0,n-k} \alpha_{k-2,n-k} \\
 & = \gamma_{1,n-k} (\alpha_{k-1,n-k-1} - \alpha_{k-1,n-k}).
 \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

y de manera análoga , por 2.3.8 el coeficiente de Z_{n-3} en 2.3.6 es

$$\begin{aligned}
& \gamma_{3,n-k} + \gamma_{2,n-k}\alpha_{k-1,n-k-2} + \gamma_{1,n-k}\alpha_{k-2,n-k-1} + \gamma_{0,n-k}\alpha_{k-3,n-k} \\
& - (\gamma_{3,n-k} + \gamma_{2,n-k}\alpha_{k-1,n-k} + \gamma_{1,n-k}\alpha_{k-2,n-k} + \gamma_{0,n-k}\alpha_{k-3,n-k}) \quad (2.3.10) \\
& = \gamma_{2,n-k}(\alpha_{k-1,n-k-2} - \alpha_{k-1,n-k}) + \gamma_{1,n-k}(\alpha_{k-2,n-k-1} - \alpha_{k-2,n-k}),
\end{aligned}$$

y la expresión para el coeficiente de Z_k es

$$\begin{aligned}
& \gamma_{n-k-1,n-k}(\alpha_{k-1,1} - \alpha_{k-1,n-k}) + \gamma_{n-k-2,n-k}(\alpha_{k-2,2} - \alpha_{k-2,n-k}) \\
& + \cdots + \gamma_{n-2,n-k}(\alpha_{0,k} - \alpha_{0,n-k}). \quad (2.3.11)
\end{aligned}$$

Sean $g_{n-2}, g_{n-3}, \dots, g_k$ los coeficientes de $Z_{n-2}, Z_{n-3}, \dots, Z_k$ dados por 2.2.4-2.2.6 respectivamente, y considerando que $g_{n-1} = 0$, entonces la suma de todos los términos que aparecen en 2.3.6 puede ser escrita en la forma

$$\begin{aligned}
& Z_n + g_{n-1}Z_{n-1} + g_{n-2}Z_{n-2} + \cdots + g_k Z_k \\
& + (\gamma_{n-k,n-k}\alpha_{k-1,0} + \gamma_{n-k-1,n-k}\alpha_{k-2,1} + \cdots + \gamma_{n-2k-1,n-k}\alpha_{0,k-1})Z_{k-1} \\
& + (\gamma_{n-k,n-k}\alpha_{k-2,0} + \gamma_{n-k-1,n-k}\alpha_{k-3,1} + \cdots + \gamma_{n-2k-2,n-k}\alpha_{0,k-2})Z_{k-2} \\
& + \cdots + \gamma_{n-k,n-k}\alpha_{0,0}Z_0. \quad (2.3.12)
\end{aligned}$$

Si ahora multiplicamos el lado derecho de 2.3.1, para $m = n - k - p$, por $\gamma_{p,n-k}$ con $p = 0, \dots, n - k$ y luego sumamos sobre los valores de p ,

obtenemos

$$\begin{aligned}
& \gamma_{0,n-k} h_{n-1}^2 [\beta_{k,n-k}^{(1)} Z_n + \beta_{k-1,n-k}^{(1)} Z_{n-1} + \dots + \beta_{0,n-k}^{(1)} Z_{n-k} \\
& + \beta_{k,n-k}^{(2)} Z_{n-l} + \beta_{k-1,n-k}^{(2)} Z_{n-1-l} + \dots + \beta_{0,n-k}^{(2)} Z_{n-k-l}] \\
& + \gamma_{1,n-k} h_{n-2}^2 [\beta_{k,n-k-1}^{(1)} Z_{n-1} + \beta_{k-1,n-k-1}^{(1)} Z_{n-2} + \dots + \beta_{0,n-k-1}^{(1)} Z_{n-k-1} \\
& + \beta_{k,n-k-1}^{(2)} Z_{n-1-l} + \beta_{k-1,n-k-1}^{(2)} Z_{n-2-l} + \dots + \beta_{0,n-k-1}^{(2)} Z_{n-k-1-l}] \\
& + \gamma_{2,n-k} h_{n-3}^2 [\beta_{k,n-k-2}^{(1)} Z_{n-2} + \beta_{k-1,n-k-2}^{(1)} Z_{n-3} + \dots + \beta_{0,n-k-2}^{(1)} Z_{n-k-2} \\
& + \beta_{k,n-k-2}^{(2)} Z_{n-2-l} + \beta_{k-1,n-k-2}^{(2)} Z_{n-3-l} + \dots + \beta_{0,n-k-2}^{(2)} Z_{n-k-2-l}] \\
& + \dots + \gamma_{n-k,n-k} h_{k-1}^2 [\beta_{k,0}^{(1)} Z_k + \beta_{k-1,0}^{(1)} Z_{k-1} + \dots + \beta_{0,0}^{(1)} Z_0 \\
& + \beta_{k,0}^{(2)} Z_{k-l} + \beta_{k-1,0}^{(2)} Z_{k-1-l} + \dots + \beta_{0,0}^{(2)} Z_{-l}] \\
& + \gamma_{0,n-k} \lambda_{n-k} + \gamma_{1,n-k} \lambda_{n-k-1} + \gamma_{2,n-k} \lambda_{n-k-2} + \dots + \gamma_{n-k,n-k} \lambda_0.
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

igualando las expresiones 2.3.12 y 2.3.13 obtenemos

$$\begin{aligned}
& Z_n + g_{n-2} Z_{n-2} + g_{n-3} Z_{n-3} + \dots + g_k Z_k \\
& + (\gamma_{n-k,n-k} \alpha_{k-1,0} + \gamma_{n-k-1,n-k} \alpha_{k-2,1} + \dots + \gamma_{n-2k-1,n-k} \alpha_{0,k-1}) Z_{k-1} \\
& + (\gamma_{n-k,n-k} \alpha_{k-2,0} + \gamma_{n-k-1,n-k} \alpha_{k-3,1} + \dots + \gamma_{n-2k-2,n-k} \alpha_{0,k-2}) Z_{k-2} \\
& + \dots + (\gamma_{n-k,n-k} \alpha_{1,0} + \gamma_{n-k-1,n-k} \alpha_{0,1}) Z_1 + \gamma_{n-k,n-k} \alpha_{0,0} Z_0 \\
& = \gamma_{0,n-k} h_{n-1}^2 [\beta_{k,n-k}^{(1)} Z_n + \beta_{k-1,n-k}^{(1)} Z_{n-1} + \dots + \beta_{0,n-k}^{(1)} Z_{n-k} \\
& + \beta_{k,n-k}^{(2)} Z_{n-l} + \beta_{k-1,n-k}^{(2)} Z_{n-1-l} + \dots + \beta_{0,n-k}^{(2)} Z_{n-k-l}] + \gamma_{0,n-k} \lambda_{n-k} \\
& + \gamma_{1,n-k} h_{n-2}^2 [\beta_{k,n-k-1}^{(1)} Z_{n-1} + \beta_{k-1,n-k-1}^{(1)} Z_{n-2} + \dots + \beta_{0,n-k-1}^{(1)} Z_{n-k-1} \\
& + \beta_{k,n-k-1}^{(2)} Z_{n-1-l} + \beta_{k-1,n-k-1}^{(2)} Z_{n-2-l} + \dots + \beta_{0,n-k-1}^{(2)} Z_{n-k-1-l}] +
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_{2,n-k} h_{n-3}^2 [\beta_{k,n-k-2}^{(1)} Z_{n-2} + \beta_{k-1,n-k-2}^{(1)} Z_{n-3} + \dots + \beta_{0,n-k-2}^{(1)} Z_{n-k-2} \\
& + \beta_{k,n-k-2}^{(2)} Z_{n-2-l} + \beta_{k-1,n-k-2}^{(2)} Z_{n-3-l} + \dots + \beta_{0,n-k-2}^{(2)} Z_{n-k-2-l}] + \dots \\
& + \gamma_{n-k,n-k} h_{k-1}^2 [\beta_{k,0}^{(1)} Z_k + \beta_{k-1,0}^{(1)} Z_{k-1} + \dots + \beta_{0,0}^{(1)} Z_0 \\
& + \beta_{k,0}^{(2)} Z_{k-l} + \beta_{k-1,0}^{(2)} Z_{k-1-l} + \dots + \beta_{0,0}^{(2)} Z_{-l}] \\
& + \gamma_{1,n-k} \lambda_{n-k-1} + \gamma_{2,n-k} \lambda_{n-k-2} + \dots + \gamma_{n-k,n-k} \lambda_0.
\end{aligned}$$

Si introducimos las constantes $\Lambda = \Lambda(N)$, $\beta = \beta(N)$, Z , $\beta_*^{(1)}$, $\beta_*^{(2)}$, $A(k)$ tales que

$$\left. \begin{aligned}
& \|\lambda_m\| \leq \Lambda, \quad 0 \leq m \leq N, \quad \|Z_j\| \leq Z, \quad -l \leq j \leq k-1, \\
& \|\beta_{k,p}^{(1)}\| + \|\beta_{k-1,p+1}^{(1)}\| + \dots + \|\beta_{0,p+k}^{(1)}\| \leq \|\beta_*^{(1)}\|, \quad 0 \leq p \leq N-k \\
& \|\beta_{k,p}^{(2)}\| + \|\beta_{k-1,p+1}^{(2)}\| + \dots + \|\beta_{0,p+k}^{(2)}\| \leq \|\beta_*^{(2)}\|, \quad 0 \leq p \leq N-k \\
& \|\alpha_{k-1,s}\| + \|\alpha_{k-2,s}\| + \dots + \|\alpha_{0,s}\| + 1 \leq A(k) = A, \quad s \leq N, \\
& \|\beta_{k,m}^{(1)}\| \leq \beta,
\end{aligned} \right\} \quad (2.3.15)$$

el lado izquierdo de 2.3.14, S_n puede ser escrito en la forma $S_n = Z_n - I_n$ donde I_n tiene las siguientes acotaciones

$$\begin{aligned}
\|I_n\| & = \|S_n - Z_n\| \leq \sum_{j=1}^{n-k} \|g_{n-j}\| \|Z_{n-j}\| \quad (2.3.16) \\
& + \|Z_{k-1}\| \{ \|\gamma_{n-k,n-k}\| \|\alpha_{k-1,0}\| + \dots + \|\gamma_{n-2k-1,n-k}\| \|\alpha_{0,k-1}\| \} \\
& + \|Z_{k-2}\| \{ \|\gamma_{n-k,n-k}\| \|\alpha_{k-2,0}\| + \dots + \|\gamma_{n-2k-2,n-k}\| \|\alpha_{0,k-2}\| \} + \dots \\
& + \|Z_1\| \{ \|\gamma_{n-k,n-k}\| \|\alpha_{1,0}\| + \|\gamma_{n-k-1,n-k}\| \|\alpha_{0,1}\| \} \\
& + \|Z_0\| \|\gamma_{n-k,n-k}\| \|\alpha_{0,0}\|.
\end{aligned}$$

Por 2.3.15 $\|Z_j\| \leq Z$ y por la desigualdad 2.3.16 y el teorema 3.1

$$\begin{aligned} \|I_n\| &\leq \sum_{j=1}^{n-k} \|g_{n-j}\| \|Z_{n-j}\| + Z(\Gamma_0 + N\Gamma_1) \{\|\alpha_{k-1,0}\| + \cdots + \|\alpha_{0,k-1}\|\} \\ &\quad + Z(\Gamma_0 + N\Gamma_1)\Gamma_j \{\|\alpha_{k-2,0}\| + \cdots + \|\alpha_{0,k-2}\|\} + \cdots \\ &\quad + Z(\Gamma_0 + N\Gamma_1) \{\|\alpha_{1,0}\| + \|\alpha_{0,1}\|\} + Z(\Gamma_0 + N\Gamma_1) \|\alpha_{0,0}\|. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

La ecuación 2.3.17 puede ser escrita en la forma

$$\begin{aligned} \|I_n\| &\leq \sum_{j=1}^{n-k} \|g_{n-j}\| \|Z_{n-j}\| + Z(\Gamma_0 + N\Gamma_1) [\{\|\alpha_{k-1,0}\| + \cdots + \|\alpha_{0,0}\|\} \\ &\quad + \{\|\alpha_{k-2,1}\| + \|\alpha_{k-3,1}\| + \cdots + \|\alpha_{0,1}\|\} + \cdots \\ &\quad + \{\|\alpha_{1,k-2}\| + \|\alpha_{0,k-2}\|\} + \|\alpha_{0,k-1}\|], \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

y por 2.3.15

$$\|I_n\| \leq \sum_{j=1}^{n-k} \|g_{n-j}\| \|Z_{n-j}\| + ZkA(\Gamma_0 + N\Gamma_1). \quad (2.3.19)$$

El lado derecho de 2.3.14 podemos escribirlo como

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{p=0}^{n-k} \gamma_{p,n-k} \lambda_{n-k-p} + \sum_{p=0}^{n-k} \gamma_{p,n-k} h_{n-p-1}^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{j,n-k-p}^{(1)} Z_{n-k-p+j} \\ &\quad + \gamma_{0,n-k} h_{n-1}^2 \beta_{k,n-k}^{(1)} Z_n + \sum_{p=1}^{n-k} \gamma_{p,n-k} h_{n-p-1}^2 \beta_{k,n-k-p}^{(1)} Z_{n-p} \\ &\quad + \sum_{p=0}^{n-k} \gamma_{p,n-k} h_{n-p-1}^2 \sum_{j=0}^k \beta_{j,n-k-p}^{(2)} Z_{n-k-p+j-l}. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Denotemos D_n por

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{p=0}^{n-k} \gamma_{p,n-k} \lambda_{n-k-p} + \sum_{p=0}^{n-k} \gamma_{p,n-k} h_{n-p-1}^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{j,n-k-p}^{(1)} Z_{n-k-p+j} \\ &\quad + \sum_{p=1}^{n-k} \gamma_{p,n-k} h_{n-p-1}^2 \beta_{k,n-k-p}^{(1)} Z_{n-p} \\ &\quad + \sum_{p=0}^{n-k} \gamma_{p,n-k} h_{n-p-1}^2 \sum_{j=0}^k \beta_{j,n-k-p}^{(2)} Z_{n-k-p+j-l}, \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

y recordando que $\gamma_{0,n-k} = 1$ combinando 2.3.20 y 2.3.21 R_n se transforma en

$$R_n = h_{n-1}^2 \beta_{k,n-k}^{(1)} Z_n + D_n. \quad (2.3.22)$$

si consideramos $h = \max\{h_j, j = 0, \dots, n\}$ tenemos

$$\|R_n\| = \left\| h_{n-1}^2 \beta_{k,n-k}^{(1)} Z_n + D_n \right\| \leq h^2 \beta \|Z_n\| + \|D_n\|. \quad (2.3.23)$$

por 2.3.15

$$\sum_{p=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k \left\| \beta_{j,n-k-p}^{(2)} \right\| \|Z_{n-k-p+j}^*\| = \sum_{l=0}^n C_l \|Z_l^*\| \leq \beta_*^{(2)} \sum_{l=0}^n \|Z_l^*\|, \quad (2.3.24)$$

donde $C_0 = \left\| \beta_{0,0}^{(2)} \right\|$, $C_1 = \left\| \beta_{0,1}^{(2)} \right\| + \left\| \beta_{1,0}^{(2)} \right\|, \dots, C_{k-1} = \left\| \beta_{0,k-1}^{(2)} \right\| + \dots + \left\| \beta_{k-1,0}^{(2)} \right\|$, $C_{k+1} = \left\| \beta_{1,k}^{(2)} \right\| + \dots + \left\| \beta_{k,1}^{(2)} \right\|, \dots, C_n = \left\| \beta_{k,n-k}^{(2)} \right\|$, y

$$\sum_{p=0}^{n-k} \sum_{j=0}^{k-1} \left\| \beta_{j,n-k-p}^{(1)} \right\| \|Z_{n-k-p+j}\| + \sum_{p=1}^{n-k} \left\| \beta_{k,n-k-p}^{(1)} \right\| \|Z_{n-p}\| \leq \beta_*^{(1)} \sum_{l=0}^{n-1} \|Z_l\|. \quad (2.3.25)$$

Entonces, por 2.3.24, 2.3.25 y 2.3.15

$$\begin{aligned} Dn &= \sum_{p=0}^{n-k} \gamma_{p,n-k} \lambda_{n-p-k} + \sum_{p=0}^{n-k} \gamma_{p,n-k} h_{n-p-1}^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{j,n-k-p}^{(1)} Z_{n-k-p+j} + \\ &\quad + \sum_{p=1}^{n-k} \gamma_{p,n-k} h_{n-p-1}^2 \beta_{k,n-k-p}^{(1)} Z_{n-p} + \\ &\quad + \sum_{p=0}^{n-k} \gamma_{p,n-k} h_{n-p-1}^2 \sum_{j=0}^k \beta_{j,n-k-p}^{(2)} Z_{n-k-p+j-l}. \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

$$\|\lambda_m\| \leq \Lambda, 0 \leq m \leq N$$

$$\begin{aligned} Dn &= \sum_{p=0}^{n-k} \gamma_{p,n-k} \left[\lambda_{n-p-k} + h_{n-p-1}^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{j,n-k-p}^{(1)} Z_{n-k-p+j} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=1}^{n-k} h_{n-p-1}^2 \beta_{k,n-k-p}^{(1)} Z_{n-p} + h_{n-p-1}^2 \sum_{j=0}^k \beta_{j,n-k-p}^{(2)} Z_{n-k-p+j-l} \right] \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

$$\begin{aligned} \|D_n\| &\leq \sum_{p=0}^{n-k} \gamma_{p,n-k} \left[\sum_{p=0}^{n-k} \lambda_{n-p-k} \right] \\ &\quad \sum_{p=0}^{n-k} \gamma_{p,n-k} h^2 \left(\sum_{p=0}^{n-k} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{j,n-k-p}^{(1)} Z_{n-k-p} + \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k \beta_{j,n-k-p}^{(2)} Z_{n-k-p+j-l} \right) \\ \|D_n\| &\leq (\Gamma_0 + N\Gamma_1) \left\{ \sum_{p=0}^{n-k} \Lambda + h^2 \left[\beta_*^{(2)} \sum_{i=0}^n \|Z_{i-l}\| + \beta_*^{(1)} \sum_{l=0}^{n-1} \|Z_l\| \right] \right\}. \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Por 2.3.15 y 2.3.22

$$Z_n - I_n = h_{n-1}^2 \beta_{k,n-k}^{(1)} Z_n + D_n,$$

y en consecuencia

$$\|Z_n\| \leq h^2 \beta \|Z_n\| + \|I_n\| + \|D_n\|,$$

así que, por 2.3.19 y 2.3.28

$$\begin{aligned} \|Z_n\| &\leq \sum_{j=1}^{n-k} \|g_{n-j}\| \|Z_{n-j}\| + ZkA(\Gamma_0 + N\Gamma_1) + h^2 \beta \|Z_n\| \tag{2.3.29} \\ &\quad + (\Gamma_0 + N\Gamma_1) \left\{ \sum_{p=0}^{n-k} \Lambda + h^2 \left[\beta_*^{(2)} \sum_{i=0}^n \|Z_{i-l}\| + \beta_*^{(1)} \sum_{l=0}^{n-1} \|Z_l\| \right] \right\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|Z_n\| (1 - h^2 \beta) &\leq \sum_{j=1}^{n-k} \|g_{n-j}\| \|Z_{n-j}\| + ZkA(\Gamma_0 + N\Gamma_1) \tag{2.3.30} \\ &\quad + (\Gamma_0 + N\Gamma_1) \left\{ n\Lambda + h^2 \left[\beta_*^{(2)} \sum_{i=0}^n \|Z_{i-l}\| + \beta_*^{(1)} \sum_{l=0}^{n-1} \|Z_l\| \right] \right\}. \end{aligned}$$

Observemos que $\sum_{i=0}^n \|Z_{i-l}^*\| \leq lZ + \sum_{J=1}^{n-l} \|Z_J\| \leq lZ + \sum_{J=0}^{n-1} \|Z_J\|$, $(1 - h^2 \beta) > 0$ y si definimos $C(j)$ por

$$C(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq j < n - k \\ 1 + \frac{\|g_{n-j}\|}{h^2 (\Gamma_0 + N\Gamma_1) \{ \beta_*^{(2)} + \beta_*^{(1)} \}} & \text{si } n - k \leq j \leq n - 1, \end{cases} \tag{2.3.31}$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \|Z_n\| (1 - h^2\beta) &\leq [\Gamma_0 + N\Gamma_1] \{ZkA + n\Lambda + h^2lZ\beta_*^{(2)}\} \\ &+ h^2 [\Gamma_0 + N\Gamma_1] (\beta_*^{(2)} + \beta_*^{(1)}) \sum_{l=0}^{n-1} C(j) \|Z_l\|. \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Denotemos K_* y L_* por

$$\left. \begin{aligned} K_* &= \frac{1}{(1-h^2\beta)} \left((\Gamma_0 + N\Gamma_1) \left\{ ZkA + n\Lambda + h^2lZ\beta_*^{(2)} \right\} \right) \\ L_* &= \frac{1}{(1-h^2\beta)} \left((\Gamma_0 + N\Gamma_1) (\beta_*^{(2)} + \beta_*^{(1)}) \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.3.33)$$

de esta forma, la ecuación 2.3.32 se transforma en

$$\|Z_n\| \leq K_* + h^2 L_* \sum_{l=0}^{n-1} C(j) \|Z_l\|.$$

Usando la siguiente desigualdad de Gronwall

$$\text{si } \|Z_n\| \leq p + q \sum_{j=0}^{n-1} c(j) \|Z_j\| \text{ entonces } Z(n) \leq p \prod_{j=0}^{n-1} (1 + qc(j)),$$

nosotros obtenemos que

$$\|Z_n\| \leq K_* \prod_{j=0}^{n-1} (1 + h^2 C(j) L_*),$$

y usando el hecho de que $1 + g(t) \leq e^{g(t)}$, para $g(t) \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|Z_n\| &\leq K_* \prod_{j=0}^{n-1} \exp(h^2 C(j) L_*) \\ &= K_* \exp\left(h^2 L_* \sum_{j=0}^{n-1} C(j)\right), \end{aligned}$$

y si recordamos la definición de $C(j)$

$$\begin{aligned} \|Z_n\| &\leq K_* \exp\left(h^2 L_* \left(n + \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \|g_{n-j}\|}{h^2(\Gamma_0 + N\Gamma_1) \{\beta_*^{(2)} + \beta_*^{(1)}\}}\right)\right) \\ &\leq K_* \exp\left(h^2 L_* n + \frac{1}{(1-h^2\beta)} \sum_{j=0}^{n-1} |g_{n-j}|\right). \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

A partir de 2.3.11-2.3.13 y teniendo en cuenta 2.2.4

$$\sum_{j=0}^{n-k} \|g_{n-j}\| \leq (\Gamma_0 + N\Gamma_1)L$$

donde

$$L = \sum_{i=1}^k \sum_{j=i}^{N-k} \|\alpha_{k-i,j} - \alpha_{k-i,N-k+i-1}\|,$$

y así la ecuación 2.3.34 toma la forma

$$\|Z_n\| \leq K_* \exp \left(h^2 L_* n + \frac{L}{(1 - h^2 \beta)} (\Gamma_0 + N\Gamma_1) \right). \quad (2.3.35)$$

que es la expresión propuesta en el teorema.

Observación 2.3.1. Para el caso en el cual el tamaño del paso es constante, $L = 0$ la ecuación resultante es

$$\|Z_n\| \leq K_* \exp (h^2 L_* n)$$

que es similar a la dada en [19].

Observación 2.3.2. Observemos también que si $r = 1$, la ecuación resultante es similar a la obtenida en [33], con algunas diferencias respecto a la notación.

2.4 Error global de truncación.

Dado el método multipaso variable 2.2.1, le asociamos el operador en diferencias \mathfrak{L} , el cual, para un número positivo h_n y una función $y(t)$ continuamente diferenciable, se define por

$$\mathfrak{L}[y(t_n); h_n] = \sum_{l=0}^k \alpha_{l,n} y(t_{n+l}) - h_{n+k-1}^2 \sum_{l=0}^k \beta_{l,n} y^{(2)}(t_{n+l}), \quad (2.4.1)$$

donde $\alpha_{k,n} = 1$.

Cuando pensamos en las aplicaciones, nosotros debemos asumir que la sucesión $\{y_n\}$ obtenida en 2.2.1 no es una solución exacta de la ecuación en diferencias 2.2.1, en vez de ello y_n satisface

$$\sum_{l=0}^k \alpha_{l,n} y_{n+l} - h_{n+k-1}^2 \sum_{l=0}^k \beta_{l,n} y_{n+l}^{(2)} = \theta_n K h_{n+k-1}^{s+2}, \quad (2.4.2)$$

donde $|\theta_n| \leq 1$, $n \geq 0$ y w , K son constantes no negativas.

Restando de 2.4.2 la cantidad $\mathfrak{L}[y(t_n), h_n]$, obtenemos que el error global de discretización

$$e_n = y(t_n) - y_n.$$

verifica

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^k \alpha_{l,n} e_{n+l} - h_{n+k-1}^2 \sum_{l=0}^k \beta_{l,n} [y^{(2)}(t_{n+l}) - y_{n+l}^{(2)}] \\ = \mathfrak{L}[y(t_n); h_n] - \theta_n K h_{n+k-1}^{s+2}. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Nosotros estamos interesados ahora en estudiar el operador $\mathfrak{L}[y(t_n); h_n]$. Si $y(t)$ es una función diferenciable hasta orden p , por el teorema de Taylor tenemos que

$$y(t_{n+i}) = \sum_{\mu=0}^p \frac{1}{\mu!} y^{(\mu)}(t_n) (t_{n+i} - t_n)^\mu + R(n+i, p+1), \quad (2.4.4)$$

donde $R(n+i, p+1)$ es la forma del resto de Lagrange

$$R(n+i, p+1) = \frac{1}{p!} \int_{t_n}^{t_{n+i}} (t_{n+i} - x)^p y^{(p+1)}(x) dx,$$

o lo que es lo mismo,

$$R(n+i, p+1) = \frac{1}{p!} \int_0^{t_{n+i}-t_n} (t_{n+i} - t_n - s)^p y^{(p+1)}(t_n + s) ds. \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Notemos que

$$\left. \begin{aligned} t_{n+i} - t_n &= (t_{n+i} - t_{n+i-1}) + (t_{n+i-1} - t_{n+i-2}) + \dots + (t_{n+1} - t_n) \\ &= h_{n+i-1} + h_{n+i-2} + \dots + h_n \\ &= \left[\frac{h_{n+i-1}}{h_{n+k-1}} + \frac{h_{n+i-2}}{h_{n+k-1}} + \dots + \frac{h_n}{h_{n+k-1}} \right] h_{n+k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4.5)$$

y que

$$\begin{aligned} \frac{h_{n+i-1}}{h_{n+k-1}} &= \frac{1}{\frac{h_{n+k-1}}{h_{n+k-2}} \frac{h_{n+k-2}}{h_{n+k-3}} \cdots \frac{h_{n+i}}{h_{n+i-1}}} = \frac{1}{w_{n+k-1} w_{n+k-2} \cdots w_{n+i}} \\ \frac{h_{n+i-2}}{h_{n+k-1}} &= \frac{1}{w_{n+k-1} w_{n+k-2} \cdots w_{n+i-1}} \\ &\vdots \\ \frac{h_n}{h_{n+k-1}} &= \frac{1}{w_{n+k-1} w_{n+k-2} \cdots w_{n+1}}, \end{aligned}$$

por 2.4.4 nosotros tenemos

$$\begin{aligned} t_{n+i} - t_n &= h_{n+k-1} \sum_{s=0}^{i-1} \frac{h_{n+s}}{h_{n+k-1}}, \\ t_{n+i} - t_n &= \left[\frac{h_{n+k-1}}{w_{n+k-1} w_{n+k-2} \cdots w_{n+i}} + \cdots + \frac{h_{n+k-1}}{w_{n+k-1} w_{n+k-2} \cdots w_{n+1}} \right], \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

observemos que en el caso en el cual $w_j = 1$ obtenemos el resultado conocido $t_{n+i} - t_n = ih$.

Definamos la cantidad $q(i, k, n)$ por

$$q(i, k, n) = \frac{1}{w_{n+k-1} w_{n+k-2} \cdots w_{n+i}} + \cdots + \frac{1}{w_{n+k-1} w_{n+k-2} \cdots w_{n+1}}, \quad (2.4.7)$$

entonces, por 2.4.6 y por 2.4.7 obtenemos

$$t_{n+i} - t_n = h_{n+k-1} q(i, k, n), \quad (2.4.8)$$

con esta notación usando las ecuaciones 2.4.4 y 2.4.8 obtenemos

$$y(t_{n+i}) = \sum_{\mu=0}^p \frac{1}{\mu!} y^{(\mu)}(t_n) h_{n+k-1}^\mu q^\mu(i, k, n) + R(n+i, p+1),$$

así

$$\begin{aligned} y(t_{n+i}) &= y^{(1)}(t_n) h_{n+k-1} q(i, k, n) + R(n+i, p+1) + \\ &\quad + \frac{1}{2!} y^{(2)}(t_n) h_{n+k-1}^2 q^2(i, k, n) + R(n+1, p+1) + \\ &\quad + \frac{1}{3!} y^{(3)}(t_n) h_{n+k-1}^3 q^3(i, k, n) + R(n+i, p+1) + \cdots + \\ &\quad + \frac{1}{p!} y^{(p)}(t_n) h_{n+k-1}^p q^p(i, k, n) + R(n+i, p+1), \end{aligned}$$

Ahora derivemos para obtener $y^{(2)}$ de t_{n+i}

$$\begin{aligned} y'(t_{n+i}) &= y^{(2)}(t_n)h_{n+k-1}q(i, k, n) + \\ &+ \frac{1}{2!}y^{(3)}(t_n)h_{n+k-1}^2q^2(i, k, n) + \\ &+ \frac{1}{3!}y^{(3)}(t_n)h_{n+k-1}^3q^3(i, k, n) + \dots + \\ &+ \frac{1}{p!}y^{(p+1)}(t_n)h_{n+k-1}^p q^p(i, k, n) + R(n+i, p+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(t_{n+i}) &= y^{(3)}(t_n)h_{n+k-1}q(i, k, n) + \\ &+ \frac{1}{2!}y^{(4)}(t_n)h_{n+k-1}^2q^2(i, k, n) + \\ &+ \frac{1}{3!}y^{(5)}(t_n)h_{n+k-1}^3q^3(i, k, n) + \dots + \\ &= \frac{1}{p!}y^{(p+2)}(t_n)h_{n+k-1}^p q^p(i, k, n) + R(n+i, p+1), \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$y^{(2)}(t_{n+i}) = \sum_{\mu=0}^{p-2} \frac{1}{\mu!} y^{(\mu+2)}(t_n) h_{n+k-1}^{\mu} q^{\mu}(i, k, n) + R(n+i, p-2-1),$$

con

$$R(n+i, p-2-1) = \frac{1}{(p-2)!} \int_0^{t_{n+i}-t_n} (t_{n+i}-t_n-s)^{p-2} y^{(p+1)}(t_n+s) ds .$$

Y por lo tanto, podemos escribir (4.46) en la forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[y(t_n); h_n] &= \sum_{l=0}^k \alpha_{l,n} \left\{ \sum_{\mu=0}^p \frac{1}{\mu!} y^{(\mu)}(t_n) h_{n+k-1}^{\mu} q^{\mu}(l, k, n) + R(n+l, p+1) \right\} \\ &- h_{n+k-1}^2 \sum_{l=0}^k \beta_{l,n} \left\{ \sum_{\mu=0}^{p-2} \frac{1}{\mu!} y^{(\mu+2)}(t_n) h_{n+k-1}^{\mu} q^{\mu}(l, k, n) + R(n+l, p-2+1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{L}[y(t_n); h_n] &= \sum_{l=0}^k \alpha_{l,n} R(n+l, p+1) - h_{n+k-1}^2 \sum_{l=0}^k \beta_{l,n} R(n+l, p-2+1) \\
 &\quad + \sum_{l=0}^k \alpha_{l,n} \sum_{\mu=0}^p \frac{1}{\mu!} y^{(\mu)}(t_n) h_{n+k-1}^\mu q^\mu(l, k, n) \\
 &\quad - \sum_{l=0}^k \beta_{l,n} \sum_{s=2}^p \frac{1}{(s-2)!} y^{(s)}(t_n) h_{n+k-1}^s q^{s-2}(l, k, n) \\
 &= \sum_{l=0}^k \alpha_{l,n} R(n+l, p+1) - h_{n+k-1}^2 \sum_{l=0}^k \beta_{l,n} R(n+l, p-2+1) \\
 &\quad + (y(t_n) + y'(t_n) h_{n+k-1}) \sum_{l=0}^k \alpha_{l,n} q^\mu(l, k, n) \\
 &\quad + \sum_{\mu=2}^p y^{(\mu)}(t_n) h_{n+k-1}^\mu \left\{ \sum_{l=0}^k \left(\frac{\alpha_{l,n}}{\mu!} q^\mu(l, k, n) - \frac{\beta_{l,n}}{(\mu-2)!} q^{\mu-2}(l, k, n) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Sea $C(\mu)$ el coeficiente de $y^{(\mu)}(t_n) h_{n+k-1}^\mu$ en la ecuación anterior

$$C(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu!} \sum_{l=0}^k \alpha_{l,n} q^\mu(l, k, n), & \text{si } 0 \leq \mu \leq 1 \\ \sum_{l=0}^k \left(\frac{\alpha_{l,n}}{\mu!} q^\mu(l, k, n) - \frac{\beta_{l,n}}{(\mu-2)!} q^{\mu-2}(l, k, n) \right), & \text{si } 2 \leq \mu \leq p \end{cases}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{L}[y(t_n); h_n] &= \sum_{l=0}^k \alpha_{l,n} R(n+l, p+1) - h_{n+k-1}^2 \sum_{l=0}^k \beta_{l,n} R(n+l, p-2+1) \\
 &\quad + \sum_{\mu=0}^p C(\mu) y^{(\mu)}(t_n) h_{n+k-1}^\mu \tag{2.4.9}
 \end{aligned}$$

Las transformaciones que hemos realizado en la ecuación que define $\mathfrak{L}[y(t_n); h_n]$ están estrechamente ligadas a la noción de consistencia de un método multipaso, para aclarar mejor esto, introducimos la siguiente definición:

Definición 2.4.1. *Decimos que el método multipaso variable 2.2.1 es consistente de orden w , si todos los coeficientes de $y^{(\mu)}(t_n) h_{n+k-1}^\mu$ que aparecen en la ecuación 2.4.9 de $\mathfrak{L}[y(t_n); h_n]$ son cero para $\mu = 0, 1, \dots, r + w - 1$.*

En este caso el operador $\mathfrak{L}[y(t_n); h_n]$ puede ser escrito en la forma

$$\mathfrak{L}[y(t_n); h_n] = \sum_{l=0}^k \{ \alpha_{l,n} R(n+l, r+2) - h_{n+k-1}^2 \beta_{l,n} R(n+l, w) \}. \quad (2.4.10)$$

Sea M definido por

$$M = \max \{ \|y^{(w+2)}(t)\|, \quad a \leq t \leq b \}.$$

entonces

$$\begin{aligned} R(n+l, 2+w) &= \frac{1}{(w+1)!} \int_0^{t_{n+l}-t_n} (t_{n+l}-t_n-s)^{(w+1)} y^{(w+2)}(t_n+s) ds \\ \|R(n+l, 2+w)\| &\leq \frac{M}{(w+1)!} \int_0^{t_{n+l}-t_n} (t_{n+l}-t_n-s)^{(w+1)} ds \\ &\leq \frac{M}{(w+2)!} [h_{n+k-1} q(l, k, n)]^{(w+2)}, \quad l = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

en forma semejante, obtenemos que

$$\begin{aligned} R(n+l, w) &= \frac{1}{(w-1)!} \int_0^{t_{n+l}-t_n} (t_{n+l}-t_n-s)^{w-1} y^{(w+2)}(t_n+s) ds \\ \|R(n+l, w)\| &\leq \frac{M}{(w-1)!} \int_0^{t_{n+l}-t_n} (t_{n+l}-t_n-s)^{w-1} ds \\ &\leq \frac{M}{w!} [h_{n+k-1} q(l, k, n)]^w, \quad l = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Por la ecuación 2.4.10 se sigue que

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{L}[y(t_n); h_n]\| &\leq \sum_{l=0}^k \{ \|\alpha_{l,n}\| \|R(n+l, 2+w)\| + h_{n+k-1}^2 \|\beta_{l,n}\| \|R(n+l, w)\| \} \\ &\leq M h_{n+k-1}^{(w+2)} \sum_{l=0}^k \left\{ \|\alpha_{l,n}\| \frac{1}{(w+2)!} [q(l, k, n)]^{(w+2)} + \|\beta_{l,n}\| \frac{1}{w!} [q(l, k, n)]^w \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Sea $G > 0$ definido de forma tal que

$$\sum_{l=0}^k \left\{ |\alpha_{l,n}| \frac{1}{(w+2)!} [q(l, k, n)]^{(w+2)} + |\beta_{l,n}| \frac{1}{w!} [q(l, k, n)]^w \right\} \leq G,$$

aplicando la desigualdad 2.4.11

$$\|\mathfrak{L}[y(t_n); h_n]\| \leq h_{n+k-1}^{(w+2)} GM,$$

y por lo tanto, considerando el lado derecho de 2.4.3

$$\lambda_n = \mathfrak{L}[y(t_n); h_n] - \theta_n K h_{n+k-1}^{s+2},$$

se tiene que

$$\|\lambda_n\| \leq h_{n+k-1}^{(w+2)} GM + \theta_n K h_{n+k-1}^{s+2}. \quad (2.4.12)$$

Consideremos $h = \max\{h_i, i = 0, \dots, N\}$, entonces 2.4.12 puede ser expresado en la forma

$$\|\lambda_n\| \leq h^{(\bar{w}+2)} (GM + K), \quad \bar{w} = \begin{cases} \max\{s, w\}, & h \geq 1 \\ \min\{s, w\}, & h < 1. \end{cases} \quad (2.4.13)$$

El lado izquierdo de 2.4.3, puede ser escrito de la siguiente manera, siendo y_m^* el valor calculado por interpolación a partir de los datos del intervalo previo,

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t_m) - y_m^{(2)} &= f(t_m, y(t_m), y(t_{m-l})) - f(t_m, y_m, y_{m-l}) \\ &= f(t_m, y(t_m), y(t_{m-l})) - f(t_m, y(t_m), y_{m-l}) + \\ &\quad f(t_m, y(t_m), y_{m-l}) - f(t_m, y_m, y_{m-l}). \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Si definimos $D_m^{(1)}$ y $D_m^{(2)}$ por:

$$\begin{aligned} D_m^{(1)} &= f(t_m, y(t_m), y_{m-l}) - f(t_m, y_m, y_{m-l}), \\ D_m^{(2)} &= f(t_m, y(t_m), y(t_{m-l})) - f(t_m, y(t_m), y_{m-l}), \end{aligned}$$

nosotros tenemos por 2.4.14 que

$$y^{(2)}(t_m) - y_m^{(2)} = D_m^{(1)} + D_m^{(2)},$$

Y por las condiciones de Lipschitz concluimos que

$$\begin{aligned} D_m^{(1)} &\leq L_1 \|y(t_m) - y_m\| = L_1 \|e_m\| \\ D_m^{(2)} &\leq L_2 \|y(t_{m-l}) - y_{m-l}\| = L_2 \|e_{m-l}\|. \end{aligned}$$

definiendo $g_m^{(1)}$ y $g_m^{(2)}$ por

$$\begin{aligned} g_m^{(1)} &= \begin{cases} \frac{D_m^{(1)}}{\|e_m\|} & \text{si } e_m \neq 0 \\ 0 & \text{si } e_m = 0 \end{cases} \\ g_m^{(2)} &= \begin{cases} \frac{D_m^{(2)}}{\|e_{m-l}\|} & \text{si } e_{m-l} \neq 0 \\ 0 & \text{si } e_{m-l} = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

entonces $\|g_m^{(1)}\| \leq L_1$ y $\|g_m^{(2)}\| \leq L_2$ y partiendo de la ecuación 2.4.3 obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_{j,n} e_{n+j} &= h_{n+k-1}^2 \sum_{j=0}^k \beta_{j,n} \left[g_{n+j}^{(1)} e_{n+j} + g_{n+j}^{(2)} e_{n+j-l} \right] \\ &\quad + \mathfrak{L}[y(t_n); h_n] - \theta_n K h_{n+k-1}^{w+1}, \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Pero esta es la ecuación 2.3.1 con $\lambda_n = \mathfrak{L}[y(t_n); h_n] - \theta_n K h_{n+k-1}^{w+1}$.

Todo el desarrollo anterior nos permite ahora enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.4.1. *Sea 2.2.1 un método multipaso variable consistente de orden w , y sea $y(t)$ la solución teórica del problema 2.1.1 y sea $t \in [a, \tau]$ o en general podemos tomar $t \in [a + k\tau, a + (k+1)\tau]$. Asumamos que tenemos un método multipaso variable, de k pasos, fuertemente estable perturbado cuyos valores de partida $y_j = \eta(h)$ $j = 0, 1, \dots, k-1$ satisfacen que $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \max \|\eta(h) - y(a + jh)\| = 0$ y si hacemos $Z = h\delta$ Con la notación previa, si $h_1 + \dots + h_n = t - a$, y $\beta h_j < 1$, $1 < j < n$ entonces el error global de discretización en t verifica la relación*

$$\|e_n\| \leq K_* \exp \left(h^r L_* n + \frac{L}{(1 - h^2 \beta)} (\Gamma_0 + N\Gamma_1) \right), \quad (2.4.16)$$

con K_* y L_* dados por

$$\begin{aligned} K_* &= \frac{1}{(1 - h^2 \beta)} \left((\Gamma_0 + N\Gamma_1) \{ ZkA + nh^{(\bar{w}+r)} (GM + K) + h^2 \tau \beta_*^{(2)} \} \right) \\ L_* &= \frac{1}{(1 - h^2 \beta)} \left((\Gamma_0 + N\Gamma_1) (\beta_*^{(2)} + \beta_*^{(1)}) \right), \end{aligned}$$

y en consecuencia el método 2.2.1 es convergente.

Demostración. El teorema se obtiene si consideramos que a partir de los resultados previos, el error global de discretización cumple la ecuación 2.3.1 y conjuntamente con las hipótesis dadas, haciendo $e_n = Z_n$, $e_{n-l} = Z_{n-l}$ y $\Lambda = h^{(\bar{w}+2)} (GM + K)$ obtenemos, aplicando el teorema 3.2

$$\|e_n\| \leq K_* \exp \left(h^2 L_* n + \frac{L}{(1 - h^2 \beta)} (\Gamma_0 + N\Gamma_1) \right).$$

con

$$\begin{aligned} K_* &= \frac{1}{(1-h^2\beta)} \left((\Gamma_0 + N\Gamma_1) \{ ZkA + n\Lambda + h^2\tau\beta_*^{(2)} \} \right) \\ &= \frac{1}{(1-h^2\beta)} \left((\Gamma_0 + N\Gamma_1) \{ ZkA + nh^{(\bar{w}+2)} (GM + K) + h^2\tau\beta_*^{(2)} \} \right) \\ L_* &= \frac{1}{(1-h^2\beta)} \left((\Gamma_0 + N\Gamma_1) (\beta_*^{(2)} + \beta_*^{(1)}) \right), \end{aligned}$$

Para probar la convergencia, observemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} K_* = 0$$

y de manera similar

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} nL_*h^2 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nh^2}{(1-h^2\beta)} (\Gamma_0 + N\Gamma_1) (\beta_*^{(2)} + \beta_*^{(1)}) \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t_n - a)}{(1-h^2\beta)} \left(\Gamma_0 + \left(\frac{b-a}{h} \right) \Gamma_1 \right) h (\beta_*^{(2)} + \beta_*^{(1)}) \\ &\leq (b-a)^2 \Gamma_1 (\beta_*^{(2)} + \beta_*^{(1)}), \end{aligned}$$

y tomando L tal que $L \leq h$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L}{(1-h^r\beta)} (\Gamma_0 + N\Gamma_1) &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \left(\Gamma_0 + \left(\frac{b-a}{h} \right) \Gamma_1 \right) \\ &= (b-a) \Gamma_1 \end{aligned}$$

con lo cual $\|e_n\| \rightarrow 0$ y por lo tanto el método es convergente que es lo que queríamos probar.

Observación 2.4.1. Para el caso en el cual $r = 1$, la ecuación que se obtiene es equivalente a la dada en [33]. Así mismo, si el paso es constante $L = 0$ y la ecuación resultante es

$$\|e_n\| \leq K_* \exp(h^2 L_* n)$$

que es similar a la dada en [41] o en [19].

Ejemplo 2.4.1. El siguiente ejemplo es una aplicación de un método multipaso variable para la solución de un problema del tipo 2.1.1.

Consideremos el método multipaso variable

$$\sum_{j=0}^3 \alpha_{j,n} y_{n+j} = h_{n+2}^2 \sum_{j=0}^3 \beta_{j,n} f_{n+j}$$

Sean los coeficientes $\alpha_{3,n} = 1$ y $\alpha_{0,n} = \frac{3}{8}$ entonces para calcular los coeficientes $\alpha_{2,n}$ y $\alpha_{1,n}$ se deberán cumplir las ecuaciones

$$\frac{1}{\mu!} \sum_{l=0}^3 \alpha_{l,n} q^\mu(l, 3, n) = 0$$

para $\mu = 0$ y $\mu = 1$, si tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} q(0, 3, n) &= 0 \\ q(1, 3, n) &= \frac{h_n}{h_{n+2}} \\ q(2, 3, n) &= \frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}} \\ q(2, 3, n) &= \frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}} + 1 \end{aligned}$$

entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} + \alpha_{1,n} + \alpha_{2,n} + 1 &= 0 \\ \frac{h_n}{h_{n+2}} \alpha_{1,n} + \frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}} \alpha_{2,n} + \frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}} + 1 &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} \alpha_{1,n} &= -\frac{3h_n + 3h_{n+1} - 8h_{n+2}}{8h_{n+1}} \\ \alpha_{2,n} &= \frac{3h_n - 8h_{n+1} - 8h_{n+2}}{8h_{n+1}} \end{aligned}$$

y tomando $\beta_{3,n} = 0$ y $\beta_{1,n} = -1$ los coeficientes $\beta_{2,n}$ y $\beta_{0,n}$ se pueden obtener al considerar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\sum_{l=0}^3 \left(\frac{\alpha_{l,n}}{\mu!} q^\mu(l, 3, n) - \frac{\beta_{l,n}}{(\mu-r)!} q^{\mu-r}(l, 3, n) \right) = 0$$

para $r = 2$, $\mu = 2$ y $\mu = 3$ es decir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \sum_{l=0}^3 \alpha_{l,n} q^2(l, 3, n) &= \sum_{l=0}^3 \beta_{l,n} \\ \frac{1}{3!} \sum_{l=0}^3 \alpha_{l,n} q^3(l, 3, n) &= \sum_{l=0}^3 \beta_{l,n} q(l, 3, n) \end{aligned}$$

si consideramos los valores de los coeficientes $q(l, 3, n)$ definidos previamente, el sistema anterior se transforma en

$$\begin{aligned}\beta_{0,n} - 1 + \beta_{2,n} &= \frac{1}{2!}\alpha_{1,n}\frac{h_n^2}{h_{n+2}^2} + \frac{1}{2!}\alpha_{2,n}\left(\frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2!}\alpha_{3,n}\left(\frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}} + 1\right)^2 \\ -\frac{h_n}{h_{n+2}} + \beta_{2,n}\frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}} &= \frac{1}{3!}\alpha_{1,n}\frac{h_n^3}{h_{n+2}^3} + \frac{1}{3!}\alpha_{2,n}\left(\frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}}\right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{3!}\alpha_{3,n}\left(\frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}} + 1\right)^3\end{aligned}$$

y considerando los valores que hemos obtenido para $\alpha_{1,n}$, $\alpha_{2,n}$ y $\alpha_{3,n}$ obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}\beta_{0,n} - 1 + \beta_{2,n} &= -\frac{3h_n + 3h_{n+1} - 8h_{n+2}}{16h_{n+1}}\frac{h_n^2}{h_{n+2}^2} \\ &\quad + \frac{3h_n - 8h_{n+1} - 8h_{n+2}}{16h_{n+1}}\left(\frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}} + 1\right)^2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}-\frac{h_n}{h_{n+2}} + \beta_{2,n}\frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}} &= -\frac{3h_n + 3h_{n+1} - 8h_{n+2}}{48h_{n+1}}\frac{h_n^3}{h_{n+2}^3} \\ &\quad + \frac{3h_n - 8h_{n+1} - 8h_{n+2}}{48h_{n+1}}\left(\frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}}\right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{h_n + h_{n+1}}{h_{n+2}} + 1\right)^3\end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}\beta_{2,n} &= \frac{h_n^2(2h_n + 3h_{n+1}) + h_n(h_{n+1}^2 + 8h_{n+1}h_{n+2} + 24h_{n+2}^2)}{16h_{n+2}^2(h_n + h_{n+1})} \\ &\quad + \frac{(h_{n+1} + h_{n+2})(2h_{n+1} + h_{n+2})}{6h_{n+2}(h_n + h_{n+1})} \\ \beta_{0,n} &= \frac{3h_n^3 + 9h_n^2h_{n+1} + 6h_nh_{n+1}^2 + 8h_{n+2}(h_{n+1}^2 + 6h_{n+1}h_{n+2} - h_{n+2}^2)}{48h_{n+2}^2(h_n + h_{n+1})}\end{aligned}$$

observemos que si $h_n = h_{n+1} = h_{n+2}$, entonces $\alpha_{1,n} = \frac{1}{4}$, $\alpha_{2,n} = -\frac{13}{8}$, $\beta_{2,n} = \frac{27}{16}$ y $\beta_{0,n} = \frac{11}{16}$ obteniéndose el método lineal de paso constante

$$y_{n+3} = \frac{13}{8}y_{n+2} - \frac{1}{4}y_{n+1} - \frac{3}{8}y_n + h_{n+2}^2 \left(\frac{27}{16}f_{n+2} - f_{n+1} + \frac{11}{16}f_n \right)$$

donde las raíces del polinomio $P(z) = z^3 - \frac{13}{8}z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}$, son $z = 1$ de multiplicidad 2 y $z = -\frac{3}{8}$.

Con miras a determinar el orden del método, debemos calcular los coeficientes $C(\mu)$ definidos previamente, en este caso $C(\mu) = 0$ para $\mu = 0, \dots, 3$ y por lo tanto el método es de orden 2.

Nosotros aplicaremos este método para resolver la ecuación diferencial con retardo

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= y(t-1) & t \in [0, 1] \\ y(t) &= e^{-t} + 1 & t \in [-1, 0] \\ y'(0) &= -1 \end{aligned}$$

Para esta ecuación la solución teórica está dada, en el intervalo $[0, 1]$, por

$$y(t) = \frac{e^{1-t}}{5} + \frac{(35-4e)\cos(2t)}{20} + \frac{(e-5)\sin(2t)}{10} + \frac{1}{4}$$

y su representación gráfica puede verse en la Figura 2.1

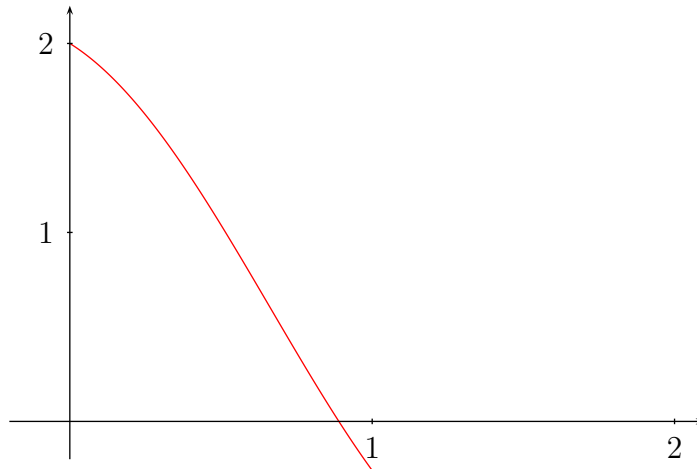


Figura 2.1. Solución teórica en el intervalo $[0, 1]$

t	$y(t)$	y_{aprox}	$ y(t) - y_{\text{aprox}} $
0.0075	1.9923796690	1.9923796690	$4.489135107x10^{-10}$
0.0475	1.9476967730	1.9476968230	$5.052368062x10^{-8}$
0.0875	1.8963002430	1.8963004240	$1.810774141x10^{-7}$
0.3550	1.3973123310	1.3973151390	$2.807739885x10^{-6}$
0.4875	1.0719951910	1.0720000150	$4.823763191x10^{-6}$
0.5620	0.8753826610	0.8753886454	$5.984426915x10^{-6}$
0.6355	0.5328824868	0.5328902208	$7.734075228x10^{-6}$
0.8140	0.1941161936	0.1941252016	$9.007961426x10^{-6}$
0.8660	0.0598391780	0.0598485223	$9.344302034x10^{-6}$
1.0000	-0.2594921334	-0.2594824913	$9.642072855x10^{-6}$

Tabla 2.1. Solución usando el método multipaso en el intervalo $[0, 1]$

En la Tabla 2.1 se muestran algunos de los valores de y_n que se obtuvieron al aplicar el método multipaso variable descrito, así como los valores de los errores que se presentan.

Para estos cálculos se usó una partición con 500 pasos de tamaños 0.002, 0.0015, 0.001.

La Figura 2.1 muestra los valores calculados aplicando el método multipaso variable descrito en esta sección.

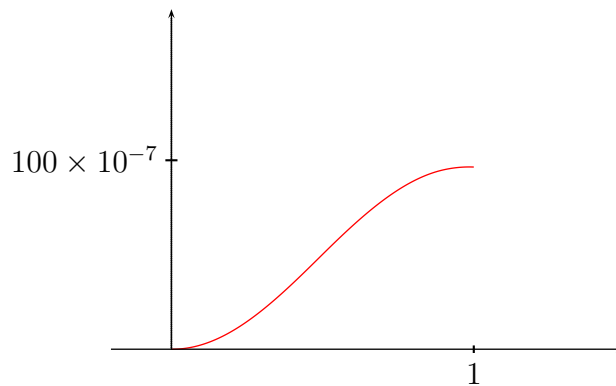


Figura 2.2. error absoluto en el intervalo $[0, 1]$

La Figura 2.2 muestra como está distribuido el error, y corresponde a la gráfica $|y_n - y(t_n)|$.

Capítulo 3

Interpolación Polinómica

La interpolación representa una de las ramas de la teoría de la aproximación, de gran interés para los procesos físicos en los que el sistema permite la obtención de datos exactos o con cierto error, en un conjunto discreto de puntos.

Permite el ajuste perfecto de una función, usualmente un polinomio, tarea que puede realizarse globalmente o por tramos. El primer enfoque de ajuste perfecto global, ha constituido la teoría clásica de la interpolación y ello se logra aumentando todo lo que se necesite el grado del polinomio interpolador, lo cual produce efectos indeseables, más la presencia de fuertes oscilaciones en el polinomio interpolador.

La teoría más moderna basada en los "Splines" que se traduce como función Ranura, mostrados por el artificio mecánico que deforma una placa haciéndola por ciertos puntos con la condición mecánica natural de que la energía de flexión sea mínima, busca un ajuste lo más suave posible aunque lo tenga que realizar por tramos, con las debidas condiciones de continuidad en cada tramo.

Lo anterior ubica a la teoría de interpolación con la base de diversas técnicas de análisis numérico tales como la integración numérica. En lo que respecta a nuestro trabajo, necesitamos de la teoría de la interpolación cuando intentamos buscar la solución en el intervalo $[1, 2]$ debido a que estamos utilizando un método multipaso variable, la información que se requiere del intervalo $[0, 1]$ no necesariamente va a estar disponible para los cálculos del intervalo $[1, 2]$ en este caso lo que hacemos es aplicar un proceso de interpolación que nos ajuste los datos discretos de que disponemos como soluciones aproximadas del intervalo $[0, 1]$, de esta forma lo que obtenemos es una solución continua, formada por polinomios para este intervalo. Como la ecuación diferencial original nos permite calcular el valor de la segunda

derivada en cualquier punto del intervalo, el tipo de interpolador que vamos a utilizar es cúbico y lo construimos conociendo los valores de la función y sus segundas derivadas en dos puntos consecutivos, en esta sección presentaremos una justificación de los procesos de interpolación que vamos a utilizar y luego haremos la solución aproximada para el intervalo $[1, 2]$.

Definición 3.0.2 (Condición de Haar). *Un subespacio vectorial $y \subset C[a, b]$ de dimensión finita n se dice que satisface la condición de Haar si y solo si toda función $\varphi \in y$, $\varphi \neq 0$, tiene a lo sumo $n - 1$ ceros en el intervalo $[a, b]$.*

Lema 3.0.2 (Lema de Haar). *Sea $y \subset C[a, b]$ un subespacio vectorial de dimensión finita n , y satisface la condición de Haar si y solo si para toda base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ de y y n puntos distintos $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$ se verifica*

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(t_n) & \dots & \varphi_n(t_n) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (3.0.1)$$

Realicemos algunas construcciones teóricas relacionales con la interpolación de polinomios.

Sea $f \in C[a, b]$ e y un subespacio vectorial de dimensión infinita $n + 1$ contenido en $C[a, b]$ sean $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, $n + 1$ puntos distintos de $[a, b]$ la función $f^* \in y$, tal que $f^*(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ recibe el nombre de función de interpolación simple de f .

Supongamos que y satisface la condición de Haar 3.0.2 y sea $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ una base de y si existe una función de interpolación de f en y será de la forma

$$f^*(x) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x)$$

y por lo tanto los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n serán solución del sistema lineal

$$\sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n \quad (3.0.2)$$

El determinante de dicho sistema es

$$\Delta = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

Como y satisface la condición de Haar por el Lema 3.0.2 el determinante Δ es distinto de cero. En consecuencia, existe una única función de interpolación

de f en y se puede obtener resolviendo el sistema 3.0.2. Por la regla de Cramer podemos escribir

$$f^*(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\Delta_j}{\Delta} \varphi_j(x) \quad (3.0.3)$$

En donde Δ_j se obtiene sustituyendo en Δ la columna j por la columna $f(x_i), i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ desarrollando cada Δ_j por los elementos de la columna j se obtiene:

$$\Delta_j = \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta_{ji}$$

Donde Δ_{ji} son los adjuntos correspondientes, entonces, 3.0.3 resulta

$$f^*(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \psi_i(x)$$

Siendo

$$\psi_i(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\Delta_j}{\Delta} \varphi_j(x), i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Las funciones $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ pertenecen a y y satisfacen las condiciones

$$\psi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Por lo cual tenemos de la discusión anterior un teorema que permite determinar un polinomio interpolador en el caso más simple que es cuando y es el conjunto de los polinomios de grado n .

Teorema 3.0.3. *Sea $f \in C[a, b]$ y sean $x_0, x_1, \dots, x_n, n + 1$ puntos distintos del intervalo $[a, b]$ existe un único polinomio $P_n^*(x)$ de grado n tal que*

$$P_n^*(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$$

Haciendo $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \dots, \varphi_n(x) = x^n$ en el sistema 3.0.2 resulta que los coeficientes del polinomio interpolador.

$$P_n^*(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

son solución del sistema

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n &= f(x_0) \\ &\dots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n &= f(x_n) \end{aligned}$$

Hay varias formas de obtener el polinomio interpolador, dependiendo de la manera como organicemos dicho polinomio, las dos más usuales son:

1. Polinomio de Lagrange:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = (-1)^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{-1^i}{t-i} \binom{n}{i} f(x_i)$$

2. Polinomio de Newton:

$$f_n^*(x) = N_n(x) = f(x_0) + \pi_0(x)\delta f[x_0, x_1] + \dots + \pi_{n-1}(x)\delta f[x_0, \dots, x_n]$$

Ahora podemos analizar el problema de interpolación general o de Hermite

3.1 Interpolación Polinómica General o De Hermite

Un problema más general es encontrar una función de interpolación de f , como combinación lineal de un conjunto de funciones linealmente independiente $\varphi_k, 0 \leq k \leq n$ en $[a, b]$

$$f_n^*(x) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x)$$

Tal que

$$f^*(x_i) = f(x_i), f^{*'}(x_i) = f'(x_i), \dots, f^{*m_i}(x_i) = f^{m_i}(x_i), i = 0, 1, \dots, m_i$$

En donde para que exista solución única, en principio habrá que verificarse que:

$$n + 1 = \sum_{i=0}^m (m_i + 1)$$

Y que el determinante Δ del sistema anterior sea nulo.

Limitémonos al caso polinómico, es decir, $\varphi_i(x) = x^i$, y admitamos que existe ese polinomio, de grado, a lo sumo n , que representamos por Q_n , consideremos también el polinomio de Lagrange $L_m(x)$ que pasa por los puntos $f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, m$ puesto que Q_n y L_m coinciden en los puntos $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$ resulta

$$Q_n(x) = L_m(x) + \pi_m(x)Q_{n-m}(x) \quad (3.1.1)$$

Entonces sólo nos falta calcular el polinomio $Q_{n-m}(x)$ de grado $n-m-1$, cuyas derivadas cumplan en los puntos dados las condiciones exigidas; para ello, derivamos 3.1.1 y obtenemos

$$Q'_n(x) = L'_m(x) + \pi'_m(x)Q_{n-m}(x) + \pi_m(x)Q'_{n-m}(x) \quad (3.1.2)$$

Expresión que particularizada en x_i , que anula a $\pi_n(x)$ pero no a $\pi'_n(x)$, resulta

$$Q'_n(x_i) = L'_m(x_i) + \pi'_m(x_i)Q_{n-m}(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, m$$

Para todos los x_i para los que se conoce $Q'_m(x_i)$ la expresión anterior permite conocer $Q_{n-m}(x_i)$ derivando, de nuevo 3.1.2

$$Q''_n(x_i) = L''_m(x_i) + \pi''_m(x_i)Q_{n-m}(x_i) + 2\pi'_m(x_i)Q'_{n-m}(x_i) + \pi_m(x_i)Q''_{n-m}(x_i)$$

Y particularizando

$$Q''_n(x_i) = L''_m(x_i) + \pi''_m(x_i)Q_{n-m}(x_i) + 2\pi'_m(x_i)Q'_{n-m}(x_i)$$

Esta última expresión permite determinar el valor de $Q'_{n-m}(x_i)$ en todos los puntos x_i en los que existe una condición sobre el valor de $Q''_n(x_i)$, en función de los valores calculados previamente de $Q_{n-m}(x_i)$. Podemos iterar este proceso, derivando la expresión 3.1.1 y particularizando para $x = x_i$ con lo que para la determinación del polinomio $Q_{n-m}(x)$ contamos con las condiciones

$$Q_{n-m}(x_i), Q'_{n-m}(x_i), Q''_{n-m}(x_i), \dots, Q_{n-m}^{m_i-1}(x_i), i = 0, 1, \dots, m$$

Cuyo número es:

$$\sum_{i=0}^m (m_i - 1 + 1) = \sum_{i=0}^m m_i$$

Que comparando con 3.1.1 resulta ser igual a $n + 1 - m - 1 = n - m$, el número preciso para determinar los $n-m$ coeficientes de $Q_{n-m}(x)$ que era de grado $n - m - 1$ puesto que el grado de $\pi(x)$ es $m + 1$.

En resumen, la obtención del polinomio Q_{n-m} es un problema de la misma naturaleza que el problema inicial de determinar Q_n solo que el grado del polinomio se ha reducido de n a $n - m - 1$.

Ya se comprende que reiterando el procedimiento llegaremos a un problema simple de interpolación de Lagrange. El polinomio obtenido es único, pues si existieran los polinomios Q_n , \bar{Q}_n , ambos cumpliendo las $n + 1$ condiciones expuestas al iniciar este apartado, su diferencia $Q_n - \bar{Q}_n$ sería un polinomio de grado $\leq n$ que poseería $n + 1$ raíces en $[a, b]$, lo cual es imposible Q_n recibe el nombre de polinomio interpolador de Hermite

3.2 Funciones Ranura ó Splines de interpolación

Los Splines se constituyen en un enfoque alternativo que disminuye el error de interpolación, pues en la teoría de interpolación ordinaria o simple aumenta sensiblemente, el ajuste se obtiene a base de aumentar el grado del polinomio, lo cual introduce fuertes oscilaciones en el polinomio interpolador y sus derivadas, con el consiguiente error de la interpolación. Esta disminución en el error que suministra la función ranura se debe al hecho de que permite construir el polinomio de interpolación por tramos, es decir considerando un número reducido de puntos, por tanto los polinomios de grado inferior que se conectan unos con otros. Este enfoque requiere considerar condiciones adicionales de continuidad en las derivadas sucesivas de los polinomios, a fin de garantizar la suavidad de la conexión de los tramos.

Definición: Sean $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n+1$ abscisas e y_0, y_1, \dots, y_n , $n + 1$ valores. Una función ranura de orden p o $p - splines$ interpolador de los datos $(x_i, y_i); i = 0, 1, \dots, n$ es una función real S definida en $[a, b]$ que satisface:

- i S es clase $C^{p-1}[a, b]$,
- ii En cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, S es un polinomio S_i de grado p ,
- iii $S(x_i) = y_i$, para todo $i = 0, \dots, n$

Observamos que el polinomio S_i puede ser distinto en cada subintervalo. A continuación estudiaremos la existencia de tales funciones interpoladoras

y un procedimiento para obtenerlas. Por facilidad desarrollamos el caso para $p = 3$ correspondiente para los Splines cúbicos.

Teorema 3.2.1. *Dado un conjunto de datos $(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$ existen dos únicos Splines Cúbicos interpoladores de los datos y que satisfacen respectivamente las condiciones siguientes:*

$$i \quad S''(x_0) = S''(x_n) = 0$$

$$ii \quad S'(x_0) = y'_0; S'(x_n) = y'_n \text{ siendo } y'_0 \text{ e } y'_n \text{ datos.}$$

Demostración. La demostración es constructiva y proporciona un procedimiento eficiente para determinar el spline interpolador. Sean y''_0, \dots, y''_n , $n + 1$ valores a determinar y $q(x)$ una función lineal en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, y tal que $q(x_i) = y''_i$ para cada $i = 0, 1, \dots, n$. Si integramos $q(x)$ dos veces obtenemos una función que en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ es un polinomio Cúbico. Veamos que escogiendo la forma adecuada los $n + 1$ valores y''_0, \dots, y''_n , la función $S(x)$ que se obtiene integrando dos veces es el spline buscado.

Definamos,

$$S''_i(x) = y''_i \frac{x_{i+1} + 1 - x}{h_i} + y''_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}, 0 \leq i \leq n - 1$$

Donde $h_i = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, \dots, n - 1$. Es inmediato comprobar que $S''(x)$ es continua en $[a, b]$ y satisface $S''(x_i) = y''_i, 0 \leq i \leq n$. Integrando dos veces se obtiene

$$S_i(x) = \frac{y''_i}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{y''_{i+1}}{6h_i} (x - x_i)^3 + a_i(x - x_i) + b_i(x_{i+1} - x)$$

Donde a_i y b_i son constantes de integración.

Ejemplo 3.2.1. Ahora vamos a regresar a nuestro problema original, se trata aplicar un método multipaso variable para resolver la ecuación diferencial con retardo

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= y(t - 1) & t \in [0, 1] \\ y(t) &= e^{-t} + 1 & t \in [-1, 0] \\ y'(0) &= -1 \end{aligned}$$

en el intervalo $[1, 2]$ suponiendo que ya tenemos una solución discreta en el intervalo $[0, 1]$. Recordemos que en el intervalo $[0, 1]$ la solución teórica está dada por

$$y(t) = \frac{e^{1-t}}{5} + \frac{(35 - 4e) \cos(2t)}{20} + \frac{(e - 5) \sin(2t)}{10} + \frac{1}{4}$$

y con esto podemos ver, para contrastar la solución numérica aproximada, que la solución teórica en el intervalo $t \in [1, 2]$, es entonces

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{e^{2-t}}{25} - \cos(4t - 2) \left(\frac{(4e - 55) \cos(2t)}{320} + \frac{(e - 5) \sin(2t)}{160} \right) + \\ & + \sin(4t - 2) \left(\frac{(e - 5) \cos(2t)}{160} + \frac{(15 - 4e) \sin(2t)}{320} \right) + \\ & + \cos(2t) \left(\frac{(4e - 245) \cos 4 + 4e - 245}{3200 \cos 2} + \frac{t(e - 5) \cos 2}{40} \right) + \\ & + \cos(2t) \left(\frac{4e - 35}{20} - \frac{(10t(4e - 15) - 61e + 455) \sin 2}{800} \right) + \\ & + \sin(2t) \left(\frac{(10t(4e - 35) - 61e + 455) \cos 2}{800} - \frac{e - 5}{10} \right) + \\ & + \sin(2t) \left(\frac{(40t(e - 5) + 4e - 245) \sin 2}{1600} \right) + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

y su representación gráfica puede verse en la Figura 3.1

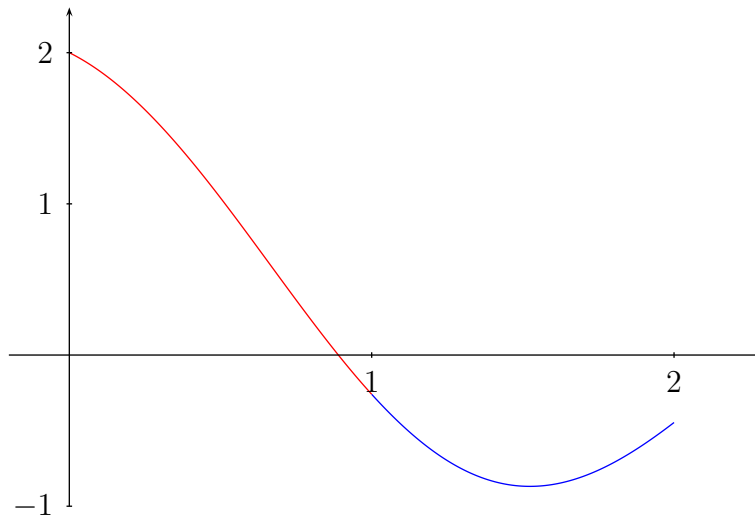


Figura 3.1. Solución teórica en el intervalo $[1, 2]$

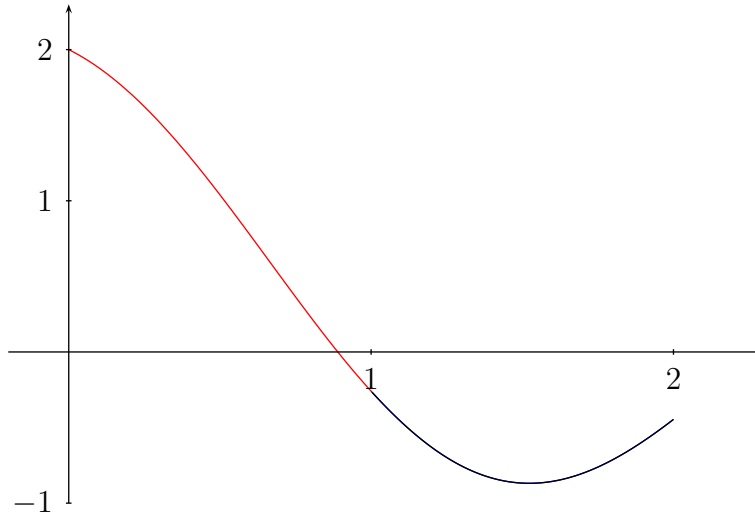


Figura 3.2. Solución aproximada en el intervalo $[1, 2]$

La gráfica de los valores calculados al aplicar el método multipaso variable puede verse en la Figura 3.2

Los interpoladores usados son polinomios $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ tales que, dados los datos de la Tabla 3.1 entonces

t	$y(t)$	$y''(t)$
t_m	y_m	y''_m
t_{m+1}	y_{m+1}	y''_{m+1}

Tabla 3.1. Datos para construir los interpoladores

$$p(t_m) = y_m, \quad p(t_{m+1}) = y_{m+1},$$

$$p''(t_m) = y''_m, \quad p''(t_{m+1}) = y''_{m+1}.$$

Lo cual da origen al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} at_m^3 + bt_m^2 + ct_m + d &= y_m \\ at_{m+1}^3 + bt_{m+1}^2 + ct_{m+1} + d &= y_{m+1} \\ 6at_m + 2bt_m &= y''_m \\ 6at_{m+1} + 2bt_{m+1} &= y''_{m+1} \end{aligned}$$

y cuyas soluciones quedan determinadas por

$$a = \frac{y''_{m+1} - y''_m}{6(t_{m+1} - t_m)}$$

t	$y(t)$	y_{aprox}	error
1.0032	-0.2665291583	-0.2665291582	$7.240467218x10^{-11}$
1.0592	-0.3843804708	-0.3843805005	$2.970286111x10^{-8}$
1.184	-0.6063092261	-0.6063095396	$3.135616182x10^{-7}$
1.3045	-0.7594164099	-0.7594172792	$8.692603426x10^{-7}$
1.591	-0.8586620089	-0.8586648659	$2.856959694x10^{-6}$
1.6358	-0.8412821643	-0.8412853474	$3.183075578x10^{-6}$
1.7166	-0.7897500946	-0.7897538283	$3.733634595x10^{-6}$
1.8141	-0.6965194948	-0.6965237771	$4.282306056x10^{-6}$
1.9038	-0.5856389785	-0.5856436102	$4.631619487x10^{-6}$
2.0000	-0.4462832137	-0.4462880139	$4.800175350x10^{-6}$

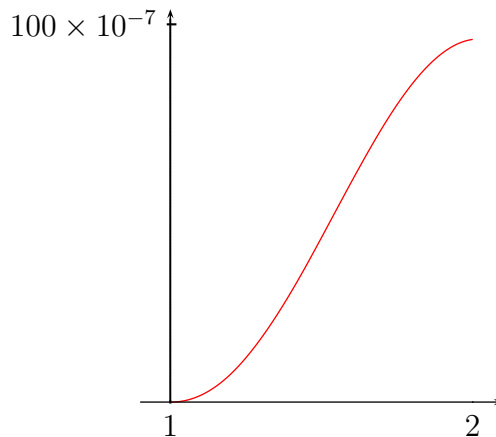
Tabla 3.2. Solución aproximada en el intervalo $[1, 2]$

$$b = \frac{t_m y''_{m+1} - t_{m+1} y''_m}{2(t_{m+1} - t_m)}$$

$$c = \frac{6y_{m+1} - 6y_m - y''_{m+1}(t_{m+1}^2 - 2t_m t_{m+1} - 2t_m^2) - y''_m(2t_{m+1}^2 + 2t_m t_{m+1} - t_m^2)}{6(t_{m+1} - t_m)}$$

$$d = \frac{6y_{m+1} t_m - t_{m+1}(6y_m + t_m(y''_{m+1}(t_{m+1} - 2t_m) + y''_m(2t_{m+1} - t_m)))}{6(t_m - t_{m+1})}$$

La Tabla 3.2 muestra algunos de los valores obtenidos para la solución aproximada cuando $t \in [1, 2]$ aplicando el método propuesto para una partición de 700 pasos con tamaños de .0016, 0.0015, 0.0014 y 0.0013

Figura 3.3. error absoluto en el intervalo $[1, 2]$

El error que se presenta en cada punto al aplicar el método multipaso variable puede verse en la Figura 3.3. Como puede verse en la gráfica de la Figura 3.3 el error termina siendo creciente, esto se debe a que cada vez que tomamos un nuevo calculo, se van acumulando los errores del paso anterior.

Bibliografía

- [1] W. G. AIELLO, *A time delay model of single species growth with stage structure*. Math. Bios 101(1990), 139-153.
- [2] F. S. ANDERSON, *Competition in populations of one age group*, *Biometrika* 16(1960) 19-27.
- [3] R.BELMAN and K.L.COOKE, *Differential-difference equations*, Academic Press, New York, 1962.
- [4] R. K. BRAYTON and R. A. WILLOUGHBY, *On the numerical integration of a symmetric system of difference-differential equations of neutral type*, *J. of Math. appls.* 18(1967) 182-189.
- [5] M.CROUZEIX and F.J.LISBONA, *The convergence of a variable stepsize, variable formula, multistep methods*, *SIAM Numer.Anal.* 21 (1984) 512-534.
- [6] W. J. CUNNINGHAM, *A nonlinear difference equation of growth*, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 40(1954), 708-713.
- [7] C. W. CRYER and L. TAVERNINI, *The Numerical solution of Volterra functional differential equation by Euler's method*. Computer Sciences Technical Report. N° 71 University of Wisconsin. Sep. 1969.
- [8] V. B. CHEREPENNIKOV, *Investigation of de solution of a class of differential-functional equations, Sb assymtotic methods in systems dynamics*, Ed USf Siberian Filial Acad. Sci. Irtusk, (1985) 38-44.
- [9] H. T. DAVIS, *Introduction to non linear differential and integral equations*. Dover, Newyork 1962
- [10] R.D. DRIVER, *Ordinary and Delay Differential Equations*, Applied Math. Sciences 20, Springer, Berlin, 1977.

- [11] M.A. FELDESTEN *Discretization methods for retarded ordinary differential equations*, Ph. D Dissertation. UCLA 1964.
- [12] M.A. FELDESTEN and J.R. SOPKA, *Numerical methods for non-linear Voltera integrodifferential equations*. SIAM Reviv. 11 No 1, 111 (1969).
- [13] C. W. GEAR and K. H. TU, *The effect of a variable mesh size on the stability of multistep methods*, SIAM J. Number. Anal 11(1974), 1025-1043.
- [14] C. W. GEAR and D. S. WATANABE, *Stability and convergence of variable order multistep methods*, SIAM J. Number. Anal 11(1974), 1044-1058.
- [15] R. D. GRIGORIEFF, *Stability of multistep methods on variable grids*. Numer. Math. 42(1983) 359-377.
- [16] E.HAIRER, S.P NORSET, G. WANNER, *Solving ordinary differential equations. I*. Springer verlag.1993.
- [17] P. HENRICI, *Discrete variable methods in ordinary differential equations*. John Willey, New York.
- [18] L. JODAR, J. L. MORERA and G.RUBIO, *Computable explicit bounds for the discretization error of variable stepsize multistep method*.Computers and Mathematics with Applications 39 (2000) 63-77.
- [19] L. JODAR, J.L MORERA and G.RUBIO, *Multistep Methods for a Class of Higher order Differential problems Convergence and error bounds*, Journal of computational mathematics, vol.12,(1994).
- [20] L. JODAR and J.A. MARTIN, *Explicit solution of systems of second order differential difference equations*. J. Comput. Appl. Maths. 43(1992) 323-334.
- [21] L. JODAR and J.A. MARTIN, *Analytical solution of a class of coupled second order differential-difference equations*, Int. J. Math & Math. Sci 16 N° 2(1993) 385-396.
- [22] L. JODAR, R. J. VILLANUEVA, V. COVACHEV and J.A. MARTIN, *Analytic-numerical solutions of variable coefficient second order delay differential-difference equations*, Proc. Fourth Int. Coll. on differential equations, VSP, Utrech (1994), pp 137-146.

- [23] G. N. KEMPER, *Linear multistep methods of a class of functional differential equations*. Numer. Math. 19 361-372 (1972).
- [24] F.T. KROG *Algorithms for changing the step size*, SIAM J. Numer. Anal. 10 (1973) 949-965.
- [25] F.T. KROG. *A variable step variable order multistep methods for the numerical solution of ordinary differential equations*, information processing 68, North Holland, 1969, p 194-199.
- [26] J. D. LAMBERT, *Computational methods in ordinary differential equations*, John Wiley, New York, 1972.
- [27] H.D. LANDAHL and B. D. HANSON, *A three stage population model with cannibalism*, Bull. Math. Biol. 37(1975)
- [28] S. P. LIN, *Damped vibrations of a string*, J. Fluid Mech. 72 (1975). 787-797.
- [29] P. LINZ, *Analytical and numerical methods for Volterra integral equations*. SIAM Studies in Appl. Maths., Philadelphia 1985
- [30] P. LINZ, *Linear multistep methods for Volterra integro-differential equations*. JACM 16. 295-301 (1969)
- [31] G. I. MARCHUCK, *Mathematical models in immunology, Translations series, optimization software*, Springer, New York, 1983.
- [32] J.A. MARTIN, J.L. MORERA and A. SIRVENT. *Linear multistep matrix methods for a coupled delay differential equations Convergence and error bounds*. Int. J. of applied Science and computation. 3 No2 (1996) W. L.
- [33] J.A. MARTIN, and O. GARCIA, *Variable multistep methods for delay differential equations* (in print).
- [34] W.L. MIRANKER, *Existence, uniqueness and stability of solutions of systems of nonlinear difference-differential equations*, J. Math. Mech. 11(1962), 102-108.
- [35] A.D. MISHKIS, *Linear Differential Equations with a Retarded Argument*, Ed. Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1951 (In Russian, 2nd Edit 1972).
- [36] M. OKAMOTO and K. HAYASHI, *Frequency conversion mechanism in enzymatic feedback systems*. J. Theor. Biol. 108(1984), 529-537.

- [37] P. POUZET, *Méthode d'intégration numérique des équations intégrales e intégro-différentielles du type de Volterra de seconde espèce, formules de Runge Kutta*. Symposium on the numerical treatment of ordinary Differential equations Integral and Integro-differential Equations. Rome, 1960, pp 362-368.
- [38] A.RALSTON *Introducción al Análisis Numérico*, Limusa, México. 1970.
- [39] K. REKTORYS, *The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations*, D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, 1982.
- [40] G. G. ROSS, *A difference-differential model in population dynamics*, J. Theor. Biol. 34(1972),477-492.
- [41] A.SIRVENT, J.A. MARTIN, J.L MORERA and L. JODAR, *Multistep matrix methods for higher order delay differential systems*. Fifth International Colloquium on numerical analysis, Ed. Minchev. Academic publication. Sofia, 1997, pp143-152.
- [42] R. D. SKEEL, *Construction of variable stepsize multistep formulas*, *Maths of Computation* Vol 47 N° 176(1986) 503-510.
- [43] S. N. WODD, S. P. BLYTE, W. S. C. GURNEY and R. M. NISBET, *Inestability in mortality estimation schemes related to stage-structure populations model*, IMA J. Math. Appl. Med. Biol. 6(1989),47-68.