

**COMPARACIONES ESTOCÁSTICAS ENTRE ESTADÍSTICOS
DE ORDEN Y SU APLICACIÓN EN LA OPTIMIZACIÓN DE
SISTEMAS**

**FERNEY ANTURÍ VARGAS
LUIS ALBERTO OVIEDO PLAZAS**

**UNIVERSIDAD EAFIT
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEDELLÍN
2007**

**COMPARACIONES ESTOCÁSTICAS ENTRE ESTADÍSTICOS
DE ORDEN Y SU APLICACIÓN EN LA OPTIMIZACIÓN DE
SISTEMAS**

**FERNEY ANTURÍ VARGAS
LUIS ALBERTO OVIEDO PLAZAS**

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para
optar al título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

**Director
HENRY LANIADO RODAS
MAGISTER EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

**UNIVERSIDAD EAFIT
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEDELLÍN
2007**

A Dios por darme la oportunidad de culminar una meta más dentro de mi vida profesional, a mi madre quien me dió la vida y que junto con mi esposa María Elsa y mis hijos Brayam Ferney y David Stiven son mis grandes aliados y mi bendición.

Ferney

A Linda Lucía, Julieth Daniela y María del Rosario.
Alberto

Agradecimientos

Este trabajo surge como una propuesta muy pertinente planteada por nuestro asesor Henry Laniado Rodas, quien desde su trabajo como investigador en el área de la confiabilidad nos presentó algunas inquietudes que una vez evaluamos decidimos abordar.

También queremos agradecer al Doctor Jairo Villegas G, quien desde su papel como Coordinador de la Maestría y como docente nos acompañó y nos motivó para continuar en la investigación, además consideramos asumió el papel de un segundo asesor en nuestra tesis.

Cabe resaltar el gran apoyo ofrecido por los directivos de la Universidad de la Amazonia, en particular al Doctor Óscar Villanueva Rojas y Luis Eduardo Torres García, quienes fueron parte activa dentro del desarrollo del convenio establecido entre las dos instituciones. Así mismo es extensivo el agradecimiento al Doctor Mauro Montealegre, eminente profesor y también impulsor del convenio interinstitucional celebrado para el desarrollo de la Maestría en Matemáticas Aplicadas.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	1
1. Preliminares y conceptos básicos	5
1.1. Antecedentes históricos de la teoría matemática de la confiabilidad	5
1.2. Confiabilidad	9
1.3. Tiempo de vida promedio	10
1.4. La función tasa de fallo	12
1.5. Tasa de fallo reversa	13
1.6. Sistemas coherentes	15
1.6.1. Las funciones estructura	15
2. Ordenes estocásticos univariados y clases de envejecimiento	21
2.1. Definición y condiciones equivalentes	21
2.2. Propiedades de clausura	24
2.3. Una propiedad en la teoría de la confiabilidad	24
2.4. El orden tasa de fallo	28
2.4.1. Definición y condiciones equivalentes	28
2.5. La relación entre órdenes hr y st	30
2.6. Estadísticos de orden	32
2.7. El orden tasa de fallo reversa	41
2.8. El orden de razón de verosimilitud	43
2.9. Orden de vida media residual	50
2.9.1. La relación entre mrl y otros órdenes	51
2.9.2. Algunas propiedades de clausura	52
2.9.3. Una propiedad en la teoría de confiabilidad	54

3. Comparaciones Estocásticas entre Estadísticos de Orden	55
3.1. Preliminares	56
3.2. Ubicación Óptima de Reservas en un Sistema 2 de 3 con Respecto al Orden Estocástico Usual	58
3.3. Sistema k de n cuyas Componentes son Sistemas Series de Componentes Exponenciales	60
3.4. Ubicación de Componentes en un Sistema Paralelo con Respecto al Orden de Razón de Verosimilitud	63
3.5. Cotas para la tasa de Fallo Reversa de un Sistema Paralelo de Componentes Exponenciales	65
Bibliografía	73

Introducción

Cuando se quiere comparar variables aleatorias, se podría pensar en un simple análisis de su comportamiento desde una perspectiva estadística inicial, esto es, estableciendo comparación de medidas tales como la media, mediana, moda, varianza e incluso de la covarianza. Dado que el estudio de dichas comparaciones es demasiado débil se recurre a los órdenes estocásticos los cuales brindan comparaciones más fuertes.

En este trabajo se presentarán algunas comparaciones entre variables aleatorias con éstos órdenes en el marco de la teoría de confiabilidad con el fin de establecer la mejor configuración de un sistema que hace uso de reservas.

Los órdenes estocásticos se están usando de manera acelerada en diversas áreas de la probabilidad y la estadística. El presente trabajo retoma lo que se conoce sobre algunos de estos órdenes, e ilustra su utilidad y aplicabilidad.

La manera más simple de comparar dos variables aleatorias es por medio de la comparación de las medias asociadas; sin embargo, tal comparación es considerada débil. Además de esto, algunas veces las medias no existen. En muchos momentos de las aplicaciones es necesario tener información más detallada de las variables aleatorias, con el propósito de hacer comparaciones más estrictas, por ejemplo, la función de densidad, la función de distribución o la función de confiabilidad.

El resultado del presente trabajo de investigación es desarrollado en el siguiente orden, con el fin de hacer más atractiva su lectura. En el

2 Introducción

Capítulo 1, se presentan de manera didáctica y sin pérdida de rigurosidad, los preliminares y conceptos básicos de la teoría de confiabilidad que han sido estudiados en las referencias [3] [4] y [20].

Órdenes estocásticos univariados, sus propiedades e implicaciones entre ellos, serán examinados con detalle en el Capítulo 2. En el Capítulo 3 se retomaran algunas aplicaciones en la teoría de confiabilidad que han sido publicadas en artículos de investigaciones recientes, con el propósito de que el lector pueda tener una visión general asociada al estado del arte en estos temas. Para posteriormente, en este capítulo introducir el concepto de estadísticos de orden, su función de distribución y además se presentarán algunos resultados importantes de investigaciones que surgen a partir de la comparación estocástica con respecto a los órdenes de razón de verosimilitud, tasa de fallo y tasa de fallo reversa.

Desde la importancia de la aplicación se presentan también en el Capítulo 3 algunos resultados nuevos y generalizaciones que en confiabilidad adquieren relevancia, por ejemplo, en [34], se demuestra que la distribución uniforme de reservas en un sistema serie con componentes y reservas independientes e idénticamente distribuidas (*iid*) minimiza la tasa de fallo del tiempo de vida del sistema, con base en este resultado la presente investigación demuestra que la distribución uniforme de reservas en un sistema *2 de 3*, maximiza la función de confiabilidad del sistema.

Otro resultado importante que se muestra hace referencia a la peor ubicación de un sistema paralelo de dos componentes con respecto al orden de máxima verosimilitud, cuando las componentes y las reservas siguen distribuciones exponenciales con distinto parámetro.

También en este capítulo se plantea una interpretación de la relación establecida por el orden de mayorización propuesta en la definición e intuitivamente se concluye que un vector es mayorizado por otro si sus componentes tienen una distribución mas homogénea, en tal sentido para un sistema se prueba que la ubicación menos adecuada, en el sentido del orden de verosimilitud, de K reservas exponenciales de parámetro α_i conectadas en serie con las componentes también exponenciales de parámetros λ_1 y λ_2 en un sistema paralelo de dos componentes es, conectar en serie con la componente cuyo parámetro es λ_i $i = 1, 2$ r -reservas, donde r es el mínimo número entero positivo tal que:

$$\lambda_i + \sum_{i=1}^r \alpha_i \geq \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \sum_{i=1}^K \alpha_i \right).$$

En la otra componente irán $(K - r)$ reservas conectadas en serie. La expresión anterior generará una ubicación homogénea de reservas, luego por teorema se indica que es la menos conveniente.

Se concluye, además que la mejor ubicación de las reservas para un sistema homogénea sería la conexión en serie de las K reservas con la componente más débil. El débil se refiere a la de mayor tasa de fallo.

Por último se intentará obtener cotas para la tasa de fallo reversa de una configuración paralelo, donde las componentes del sistema son a su vez sistemas series, de componentes exponenciales. El estudio se hace con base en el supuesto que en el j -ésimo sistema serie hay una componentes inicial de parámetro λ y m_j componentes adicionales de parámetro α formando un sistema serie.

CAPÍTULO 1

Preliminares y conceptos básicos

1.1. Antecedentes históricos de la teoría matemática de la confiabilidad

La teoría matemática de la confiabilidad surge a partir de las demandas de la tecnología moderna y particularmente desde las experiencias de la Segunda Guerra Mundial con los sistemas militares complejos. Una de las primeras áreas de la confiabilidad estudiadas con técnicas matemáticas fue el área de mantenimiento de máquinas (Khintchine, 1932, y C.Palm, 1947). Las técnicas usadas para resolver problemas de mantenimiento de máquinas se crearon a partir de las experiencias exitosas de A.K.Erlang, C.Palm, y otros, resolviendo problemas de la central de teléfonos.

Los primeros intentos para justificar la distribución de Poisson como la distribución de entradas de llamadas a una central de teléfonos también dieron las bases para el uso de la distribución exponencial como la ley de fallo de equipamiento complejo. Erlang y Palm presentan los argumentos heurísticos para apoyar la distribución de Poisson como una distribución límite para las llamadas de teléfono, y finalmente Khintchine (1960) y Ososkov (1956) establecen pruebas rigurosas para proporcionar las condiciones necesarias y suficientes para tal fin.

Las aplicaciones de los procesos de renovación para problemas de reemplazo fueron discutidas a principios de 1939 por A.J.Lotka. En 1941 N.R.Campbell también trató los problemas de reemplazo usando las técnicas

6 Preliminares y conceptos básicos

de la teoría de renovación. W.Feller se acredita con la teoría de renovación en vía de desarrollo como una disciplina matemática (Feller, 1941,1949).

Antes de 1930 el asunto referido a la fatiga en los materiales y lo relacionado con la teoría de valor extremo era estudiado por W.Weibull (1939), Gumbel (1935), y Epstein (1948), entre otros. Posteriormente el libro de Gumbel's (1958) suministra los datos de manera cuidadosa para ilustrar el uso de cada una de las distribuciones de valor extremo (asintótica) para representar los tiempos de vida. En 1939 Weibull, profesor del Instituto Royal de Tecnología en Suiza, propone la distribución que hoy lleva su nombre *Distribución Weibull*, apropiada para el estudio de tiempos de vida. Después, H.E.Daniels (1945) y Z.W.Birnbaum y S.C.Saunders (1958) proponen modelos matemáticos justificando los supuestos de las familias normal y gamma en ciertas situaciones.

Durante el año 1940 el mayor esfuerzo de la estadística sobre problemas de confiabilidad era en el área de control de calidad. A principios de 1950 el área de confiabilidad, empieza a recibir una mayor atención de los estadísticos, matemáticos e ingenieros en la compleja industria del proyectil.

En diciembre de 1950 la Fuerza Aérea y el Grupo ad hoc sobre Confiabilidad de Equipamiento de Electrónica estudian y recomiendan medidas de mejoramiento de la confiabilidad de equipamiento y la disminución del mantenimiento. Algunas técnicas del Grupo Consultivo sobre la confiabilidad de equipamiento Electrónico (AGREE) se publicaron en un primer reporte sobre confiabilidad en junio de 1957. Este reporte incluyó los límites mínimos de aceptabilidad, los requerimientos para las pruebas de confiabilidad, efectos de almacenaje sobre confiabilidad, entre otros.

En 1951 Epstein y Sobel inician el trabajo en el campo de verificación de tiempos de vida lo cual dio como resultado una gran corriente de artículos importantes y de influencia extrema. Este trabajo marcó el comienzo de las suposiciones difusas de la distribución exponencial en la investigación de tiempos de vida.

En la industria del proyectil, hombres como Robert Lusser, Richard R.Carhart, y otros, fueron también importantes en este tipo de investigaciones, promoviendo el interés en la confiabilidad y exponiendo los problemas de más interés para su tecnología. Según una fuente, "La definición básica de confiabilidad fue presentada primero por Robert Lusser, en un simposio en

Conviar San Diego en 1952". Richard R Carhart, de la Corporación Rand, despliega una atención más científica, aunque quizás menos significativa.

En 1952 D.J.Davis publicó un artículo llamado *datos de fallo* donde se presentan los resultados de diversas pruebas de bondad de ajuste para varias distribuciones de fallo en competencia. Con la aplicación de este artículo y el artículo de Epstein-Sobel (1953), la distribución exponencial adquirió una única posición en la verificación de tiempos de vida. Esta posición se volvió más segura en 1957 con el reporte AGREE, el cual fue considerado un reporte parcial.

Una razón fundamental de la popularidad de la distribución exponencial y su difusa explotación para trabajar la confiabilidad es que llegan a la suma simple de tasas de fallo y hace posible la compilación de designar datos de una manera sencilla. De cualquier modo, a principios de 1955 inician consideraciones serias para dar otras distribuciones de tiempo de vida. J.H.Kao (1956, 1958), entre otros, influye brevemente la atención a la distribución Weibull. Este interés en la distribución Weibull adquiere importancia con la publicación del artículo de Zelen-Dannemiller el cual señala que algunos de los procedimientos de pruebas de tiempos de vida basados en la exponencial no son fuertes.

El problema de la confiabilidad para proyectiles puede ser considerado en términos de intervalos de confianza para productos de parámetros binomiales (Buchler, 1953). Este problema también recibió atención por parte de G.P.Steek (1957), J.R.Rosenblatt (1963), y A.Madansky (1958).

Matemáticamente la importancia del artículo de Moore y Shannon aparece en 1956. Moore y Shannon fueron estimulados por Von Neumann's, quien intenta describir ciertas operaciones del cerebro humano y la alta confiabilidad que se logra por organismos biológicos complejos. De igual forma en 1956 aparece el reporte de G.Weiss, el cual introduce el uso de los procesos Semi-Markovianos para resolver problemas de sistemas de mantenimiento.

En 1958 una recopilación de los resultados matemáticos conocidos en la teoría de renovación fue presentada por Walter Smith. Como se ha mencionado esta teoría tiene muchas aplicaciones en problemas de reemplazo. En el mismo año la primera bibliografía extensiva sobre verificación de tiempos de vida era publicada por William Mendenhall (1958), indicando la llegada

8 Preliminares y conceptos básicos

de una nueva etapa en este campo.

Bastante motivado por los problemas de vibración encontrado en la nueva aeronave de chorro comercial, Z.W.Birnbaum y S.C.Saunders en 1958 presentan un ingenioso modelo estadístico para las largas vidas de las estructuras bajo cargamento dinámico. Hecho su modelo es posible expresar la distribución de probabilidad de larga vida en términos de la carga dada como una función de tiempo y de deterioro ocurrida en tiempo independiente de la carga. El caso especial de una constante de carga o de un cargamento periódico con constante de primera amplitud sugiere la distribución gamma para longitudes de vida en ciertas situaciones.

También en 1958 Sobel y Tischendorf presentan un proyecto de aceptación muestral con nuevos objetivos de prueba de vida. Aunque matemáticamente esta aproximación no provee una nueva base para escribir las especificaciones de la prueba de vida, este proyecto muestral fue basado en la distribución exponencial y más tarde fue extendido a otras distribuciones de larga vida por S. Gupta y M.Sobel.

En parte motivado por el artículo de Birnbaum-Saunders (1958), R.F.Tate en 1959 toma el problema de obtener la varianza mínima no basada en estimaciones de funciones de parámetros para las distribuciones Gamma, Weibull, y la distribución exponencial de dos parámetros. En particular, Tate obtuvo la varianza mínima no basada en estimaciones para la probabilidad de que un sistema o estructura sobreviva en un periodo específico, basado en n periodos observados para el fallo.

En 1959 y 1960 una prueba de confiabilidad y problemas de logística fueron resueltos por Black y Proschan, con Proschan usando algunas de las técnicas de positividad total. En 1961 apareció un artículo de Birnbaum, Esary, y Saunders el cual extiende significativamente el trabajo anterior de E.F.Moore y C.E. Shannon (1956).

La sofisticación matemática de la confiabilidad se fue incrementando en paralelo con el crecimiento en la complejidad de los sistemas y con el importante papel asumido por los procesos estocásticos y la teoría relacionada con los mismos.

A partir de los años 60, una de las principales líneas de investigación desarrollada fue la dedicada al mantenimiento de los equipos y sistemas. El monográfico de Barlow and Proschan (1965) marcó un punto de partida en

el estudio de estas políticas de mantenimiento.

[[2], [3], [4] y [20]]

1.2. Confiabilidad

El concepto de confiabilidad se ha desarrollado simultáneamente con el avance técnico y eminentemente asociado al campo de la seguridad. La complicación de los dispositivos modernos, así como el carácter crítico de las aplicaciones que involucran estudios de confiabilidad, hacen que éste parámetro de diseño esté presente en la planificación de cualquier sistema seguro.

Considerando los diferentes problemas de confiabilidad, es fundamental analizar y calcular ciertos aspectos de interés, señalados en la literatura con una variedad de etiquetas tales como, confiabilidad, eficacia, intervalo de eficacia, eficiencia, efectividad, etc. Infortunadamente, las definiciones dadas en la literatura son algunas veces no claras e inexactas y variadas entre diferentes autores. Se espera que el lector no experimente confusión en la comprensión de este trabajo; por ello, los conceptos específicos de interés en cada problema serán definidos explícitamente en términos de probabilidades o de valores esperados, cuando el problema se está presentado.

Aunque no se está de acuerdo en un conjunto comprensivo de definiciones para el entendimiento de los modelos, puede ser de algún valor presentar un tratamiento unificado de los diferentes conceptos y aspectos involucrados en el tema de la confiabilidad matemática.

La confiabilidad de un sistema o componente se relaciona con la idea de *la probabilidad, de que dicho sistema o componente funcione satisfactoriamente dentro de los límites de desempeño establecidos en una determinada etapa de su vida útil y para un tiempo de operación estipulado teniendo como condición que el sistema o componente se utilice según sea el fin para el cual fue diseñado.*

La Norma Británica BS4778(1991), la define la confiabilidad como “la característica de un ítem (o sea de un elemento de un equipo, de un equipo completo o de un sistema), expresada por la probabilidad de que efectúe una función requerida (es decir, que no falle), bajo ciertas condiciones (o sea en condiciones normales de operación), en un período de tiempo establecido.”

Definición 1.2.1 (Función de Confiabilidad). *Sea F la función de distribu-*

10 Preliminares y conceptos básicos

ción de una variable aleatoria T . Llamaremos función de supervivencia o de confiabilidad de T a la función

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t), \quad t \geq 0$$

Obviamente, $\bar{F}(t) = P[T \geq t]$ representa la probabilidad de que el tiempo de vida de un dispositivo o sistema sobrepase el instante t .

Para expresar esta relación matemáticamente, se define la variable aleatoria continua T como el tiempo de vida del sistema o componente.

Entonces, la función de confiabilidad puede ser expresada como

$$\bar{F}(t) = P[T \geq t],$$

donde

$$\bar{F}(t) \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \bar{F}(t) = 1, \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}(t) = 0.$$

$\bar{F}(t)$ es la probabilidad de que el tiempo de vida sea mayor o igual a t . Además, $F(t)$ es la probabilidad de que ocurra un fallo antes del tiempo t .

Luego,

$$F(t) = 1 - \bar{F}(t) = P[T < t], \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = 0, \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$$

1.3. Tiempo de vida promedio

Sea T una variable aleatoria no negativa que representa el tiempo de vida de un componente. Entonces, el tiempo de vida promedio de la variable aleatoria T es $E(T)$, es decir, el valor esperado de la variable aleatoria. En el siguiente teorema se probará que este tiempo de vida promedio se puede expresar como

$$E(T) = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt,$$

donde \bar{F} es su función de confiabilidad.

Para efecto de la demostración de dicho teorema, se enunciará a continuación el siguiente lema.

Lema 1.3.1. Si T es una variable aleatoria no negativa con función de distribución F , entonces

$$0 \leq t\bar{F}(t) = t \int_t^{\infty} dF(x) \leq \int_t^{\infty} x dF(x)$$

[Ver G. E. Willmot [39]].

Teorema 1.3.2. *Sea T una variable aleatoria no negativa con esperanza finita, $E(T) < \infty$. Sea \bar{F} su función de confiabilidad, entonces*

$$E(T) = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt.$$

Demostración.

Haciendo $u = t$, y $dv = dF(t)$, entonces $du = dt$ y $v = \int dF(t) = F(t)$ luego,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t dF(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k t dF(t) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \{tF(t)\}_0^k - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k F(t) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \{t[1 - \bar{F}(t)]\}_0^k - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k [1 - \bar{F}(t)] dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \{t - t\bar{F}(t)\}_0^k - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k dt + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \bar{F}(t) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \{k - k\bar{F}(k) - 0\} - \lim_{k \rightarrow \infty} t|_0^k + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k - \lim_{k \rightarrow \infty} k\bar{F}(k) - \lim_{k \rightarrow \infty} k + \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} [k - k] - \lim_{k \rightarrow \infty} k\bar{F}(k) + \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt \end{aligned}$$

Como $\bar{F}(\infty) = 0$, entonces se tendrá

$$\int_0^{\infty} t dF(t) = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt.$$

Pero, $0 \leq t\bar{F}(t) = t \int_t^{\infty} dF(x) \leq \int_t^{\infty} x dF(x)$ y puesto que $E(t) < \infty$, se verifica que

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} t\bar{F}(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} x dF(x) = 0.$$

Así,

$$\int_0^{\infty} t dF(t) = 0 + \int_0^{\infty} F(t) dt$$

Esto es,

$$\int_0^{\infty} t dF(t) = \int_0^{\infty} F(t) dt.$$

Lo que equivale a

$$E(T) = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt$$

□

1.4. La función tasa de fallo

Además de las funciones de probabilidad definidas anteriormente, otra función, llamada la función tasa de fallo ó tasa de riesgo, es a menudo usada en confiabilidad.

Definición 1.4.1. Si T es una variable aleatoria continua con función de densidad f , se define la función tasa de fallo como

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad t \geq 0,$$

siempre que $\bar{F}(t) \neq 0$

En sentido práctico por ejemplo, cuando un componente o sistema no ha fallado en un tiempo t , la probabilidad que falle en el instante inmediatamente siguiente es aproximadamente la tasa de fallo. Matemáticamente será

$$P[T \leq t + \Delta t \mid T \geq t] \approx \lambda(t)\Delta t, \quad \text{para } \Delta t \text{ pequeño.}$$

Pero,

$$\begin{aligned} P[T \leq t + \Delta t \mid T \geq t] &= \frac{P[t < T \leq t + \Delta t]}{P[T > t]} \\ &= \frac{P[T \leq t + \Delta t] - P[T < t]}{P[T > t]} \\ &= \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\bar{F}(t)\Delta t} \\ &= \frac{[1 - \bar{F}(t + \Delta t)] - [1 - \bar{F}(t)]}{\bar{F}(t)\Delta t} \\ &= -\frac{\bar{F}(t + \Delta t) - \bar{F}(t)}{\bar{F}(t)\Delta t} \end{aligned}$$

Luego, la tasa de fallo es una intensidad de probabilidad condicional de fallo por unidad de tiempo. Así,

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{F}(t + \Delta t) - \bar{F}(t)}{\Delta t} \frac{1}{\bar{F}(t)} \\ &= - \frac{d\bar{F}(t)}{dt} \frac{1}{\bar{F}(t)} \\ &= - \frac{d}{dt} [1 - F(t)] \frac{1}{\bar{F}(t)} \\ &= \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}\end{aligned}$$

Observación 1.4.1. La función tasa de fallo de una variable aleatoria determina de manera unívoca la distribución de la misma, pues la definición 1.4.1 equivale a escribir

$$\lambda(t) = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\ln(1 - F(t))}{\bar{F}(t)} \right).$$

Integrando esta desigualdad resulta que

$$\ln \bar{F}(t) = - \int_0^t \lambda(x) dx$$

Luego,

$$\bar{F}(t) = \exp \left[- \int_0^t \lambda(x) dx \right].$$

Entonces, $\lambda(t)$ es conocida como la función tasa de fallo o tasa de riesgo instantánea.

La función tasa de fallo $\lambda(t)$ proporciona una forma alternativa de descripción de una distribución de fallo. Las tasas de fallo en algunos casos puede ser caracterizada como creciente (*IFR*), decreciente (*DFR*), ó constante (*CFR*). (ver Figura 1.1)

1.5. Tasa de fallo reversa

Sea T una variable aleatoria no negativa que representa el tiempo de vida de un componente. Entonces la tasa de fallo reversa de T en el punto

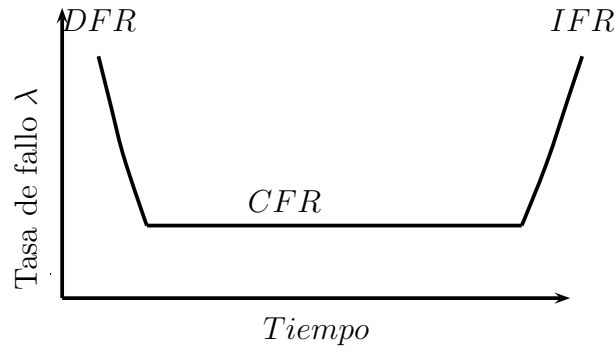


Figura 1.1: Curva bañera

t , denotada por $\hat{\lambda}$, se puede interpretar como: Si dado un tiempo t el componente o sistema falló, entonces, la probabilidad de que hubiese fallado en el instante inmediatamente anterior es aproximadamente la tasa de fallo reversa.

En vista de la definición anterior y suponiendo que la distribución de T es F , se tiene

$$P[T \geq t - \Delta t \mid T < t] \approx \hat{\lambda} \Delta t, \quad \text{para } \Delta t \text{ pequeño.}$$

Pero,

$$\begin{aligned} P[T \geq t - \Delta t \mid T < t] &= \frac{P[t - \Delta t \leq T < t]}{P[T < t]} \\ &= \frac{P[t < t] - P[T \leq t - \Delta t]}{P[T < t]} \\ &= \frac{F(t) - F(t - \Delta t)}{F(t) \Delta t} \\ &= \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{F(t) \Delta t} \end{aligned}$$

Con base en lo anterior, la tasa de fallo reversa se expresa como

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{F(t)} \\ &= \frac{dF(t)}{dt} \frac{1}{F(t)} \\ &= \frac{f(t)}{F(t)} = \frac{d}{dt} [\ln F(t)], \end{aligned}$$

donde F es una función de distribución absolutamente continua.

Desde la conveniencia y teniendo en cuenta las definiciones anteriores, sería apropiado un sistema con tasa de fallo pequeña y tasa de fallo reversa grande.

1.6. Sistemas coherentes

Esta sección examina las técnicas para expresar los arreglos de los componentes en un sistema, y para determinar su confiabilidad. Asumimos que un ítem consiste de n componentes, arreglados dentro de un sistema. Las dos decisiones claves que son siempre una parte de los procesos de modelación son: (i) qué elementos del sistema son excluidos e incluidos, y (ii) el nivel de detalle para ser representado por los componentes.

Si el ítem bajo estudio es un automóvil, por ejemplo, el modelar nos permite decidir si el sistema eléctrico completo debe ser modelado como un componente, ó si el ensamble individual, tal como el alternador ó la ignición, debe ser modelado como componentes. Las funciones estructura son usadas para relacionar los estados de los componentes individuales con el estado del sistema. Un diagrama de bloques es a menudo útil para visualizar la forma en que son arreglados los componentes. De igual manera, los conjuntos de camino mínimo y de corte mínimo son otras dos formas para describir los arreglos de los componentes de un sistema.

Las funciones de confiabilidad son usadas para determinar la fiabilidad del sistema en un punto particular en el tiempo, dadas las confiabilidades de los componentes en ese tiempo. Los límites de confiabilidad, pueden usarse para obtener un intervalo de confiabilidad del sistema cuando existen muchos componentes, y la confiabilidad exacta del sistema es difícil de calcular.

1.6.1. Las funciones estructura

Una función estructura es una herramienta útil que describe la forma en que los n componentes se relacionan para formar un sistema. La función estructura define el estado del sistema como una función de los estados de los componentes. Un sistema es asumido como una colección de n componentes. Además, se asume que los componentes y el sistema pueden estar funcionando o fallando. Aunque esta suposición binaria puede ser no realista para cierto tipo de componentes o sistemas, la matemática la hace

más tratable.

La suposición implica que el fallo del componente debido a causas catastróficas se modela en buena parte debido a la degradación gradual de la falla de un componente. Un componente eléctrico que sufre deterioro o un componente mecánico que sufre desgaste debe tener un valor de entrada definido con el objeto de establecer el estado del ítem en los estados de funcionamiento o fallo para analizar el ítem usando estas técnicas.

Para la ampliación de éstos conceptos si el lector lo considera necesario ver [3], [4] y [20].

Los estados de funcionamiento y fallo para los componentes y los sistemas serán denotados por 1 y 0, respectivamente, como se muestra en la siguiente definición.

Definición 1.6.1. *El estado de la i -ésima componente, denotada por x_i , es*

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{si la componente } i \text{ ha fallado,} \\ 1, & \text{si la componente } i \text{ está funcionando,} \end{cases}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Estos n valores pueden ser escritos como el vector estado del sistema $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Puesto que existen n componentes, entonces existen 2^n valores diferentes que el vector estado del sistema puede asumir, y $\binom{n}{j}$ de estos vectores corresponden a los j componentes funcionando exactamente $j = 0, 1, \dots, n$.

Una forma más general es llamada la función estructura $\phi(\mathbf{x})$, ella mapea el vector estado del sistema \mathbf{x} para 0 ó 1 facilitando el estado del sistema y se define a continuación.

Definición 1.6.2. *La función estructura ϕ es*

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{si el sistema ha fallado.} \\ 1, & \text{si el sistema está funcionando.} \end{cases}$$

Las estructuras de los sistemas más comunes son los sistemas serie y paralelo, los cuales están definidos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.6.1. Un sistema serie funciona cuando todos sus componentes funcionan. Así, $\phi(\mathbf{x})$ asume el valor 1 cuando $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, y

0 en otro caso. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 0, & \text{si existe un } i \text{ tal que } x_i = 0, \\ 1, & \text{si } x_i = 1 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \\ &= \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ &= \prod_{i=1}^n x_i.\end{aligned}$$

Estas tres formas diferentes de expresar el valor de la función estructura son equivalentes.

Los sistemas que funcionan únicamente cuando todos sus componentes funcionan deben ser modelados como sistemas serie. Si una calculadora, por ejemplo, es modelada como un sistema de cuatro componentes (un teclado, el display, el microprocesador y la batería), un arreglo serie es apropiado puesto que el fallo de cualquier componente resulta fallo en el sistema. Los diagramas de bloques son usados para visualizar un sistema de componentes. El diagrama de bloque correspondiente a un sistema serie de n componentes se muestra en la Figura 1.2

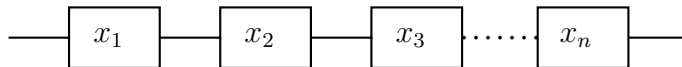


Figura 1.2: Diagrama de bloque de un sistema serie

Un diagrama de bloque, es un método gráfico para expresar el arreglo de los componentes que forman un sistema. Si un camino de los componentes que están funcionando puede ser trazado de un lado a otro desde la izquierda a la derecha en un diagrama de bloque, entonces el sistema funciona. Las cajas representan los componentes del sistema, y los números de los componentes o probabilidades son ubicados dentro de las cajas.

Una segunda estructura de un sistema popular es el arreglo paralelo.

Ejemplo 1.6.2. Un sistema paralelo funciona cuando uno o más de los componentes funcionan. Lo cual quiere decir que $\phi(\mathbf{x})$ asume el valor de 0 cuando $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, y 1 en otro caso, esto es

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 0, & \text{si } x_i = 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n \\ 1, & \text{si existe un } i \text{ tal que } x_i = 1 \end{cases} \\ &= \text{máx}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i).\end{aligned}$$

Como en el caso del sistema serie, las tres formas de la definición de $\phi(\mathbf{x})$ son equivalentes. El diagrama de bloques de un arreglo paralelo de n componentes se muestra en la Figura 1.3.

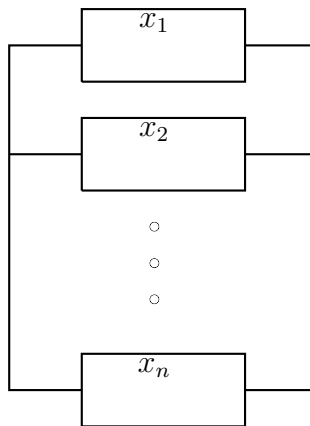


Figura 1.3: Diagrama de bloque de un sistema paralelo

Un arreglo paralelo de n componentes es apropiado cuando todos los componentes deben fallar para que el sistema por completo falle. Existen numerosos ejemplos de sistemas paralelo. Los riñones son un ejemplo de un sistema paralelo de dos componentes, puesto que basta con el funcionamiento de uno de ellos para que una persona pueda vivir.

Los sistemas serie y paralelo son casos especiales de los sistemas k de n : el sistema funciona si k ó más de los n componentes funcionan.

Un sistema serie es un sistema n de n , y un sistema paralelo es un sistema 1 de n . Un puente colgante que necesita solamente k de sus n cables para soportar el puente, un motor de automóvil que necesita solamente k de sus n cilindros para correr, y una bicicleta de ruedas que necesita solamente k de sus n radios para funcionar son algunos ejemplos de sistema k de n .

Ejemplo 1.6.3. La función estructura para un sistema k de n es

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i < k \\ 1, & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i \geq k \end{cases}$$

El diagrama de bloque para un sistema k de n es en general difícil de dibujar, pero para casos específicos puede ser dibujado repitiendo las componentes en el diagrama. El diagrama de bloque para un sistema 2 de 3, indica que si todas las tres componentes, o exactamente dos de las tres componentes (en particular 1 y 2, 1 y 3 ó 2 y 3) funcionan, entonces el sistema funciona.

La función estructura para un sistema 2 de 3 es dada por

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_1x_3)(1 - x_2x_3) \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1^2x_2x_3 - x_1x_2^2x_3 - x_1x_2x_3^2 + (x_1x_2x_3)^2 \end{aligned}$$

Desafortunadamente, muchas posibles funciones estructura pueden definirse para un sistema. Considerar un sistema de un componente con función estructura $\phi(\mathbf{x}) = 1 - x$, el cual indica que el sistema está funcionando cuando el componente ha fallado, y viceversa. Esta no es una función estructura muy razonable.

Para evitar el estudio de las funciones estructura que no son razonables, definimos los sistemas coherentes, esto es, un subconjunto de todos los sistemas posibles de n componentes.

Un sistema es coherente si $\phi(\mathbf{x})$ es no decreciente en \mathbf{x} [por ejemplo, $\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ para todo i] y no existen componentes no revelantes. La condición de que $\phi(\mathbf{x})$ sea no decreciente en \mathbf{x} implica que el sistema no crece si un componente disminuye. Una componente es no relevante si su estado no tiene impacto sobre la función estructura.

De los muchos sistemas relacionados con los sistemas coherentes, un teorema que describe los méritos relativos del componente y la redundancia

del sistema es de particular importancia. Si un particular diseño de ingeniería no puede lograr una meta de confiabilidad, este teorema muestra que es más sabio usar la redundancia al nivel del componente, que la redundancia al nivel del sistema.

Teorema 1.6.3. *Sea ϕ la función estructura de un sistema coherente de n componentes. Para cualesquiera vectores de estado \mathbf{x} y \mathbf{y} ,*

$$\phi(1 - (1 - x_1)(1 - y_1), \dots, 1 - (1 - x_n)(1 - y_n)) \geq 1 - [1 - \phi(\mathbf{x})][1 - \phi(\mathbf{y})]$$

y la igualdad se cumple cuando

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

Par efectos de la prueba ver [20]

Un concepto final relacionado a las funciones estructura es la noción de la importancia estructural, el cual mide el impacto de cada componente sobre la función estructura. Esto conduce a una definición formal para la importancia estructural de cada componente.

Definición 1.6.4. *La importancia estructural del i -ésimo componente en un sistema coherente de n componentes es*

$$I_\phi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{[x|x_i]} [\phi(1_i, \mathbf{x}) - \phi(0_i, \mathbf{x})] \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

La suma en esta definición pasa por todos los 2^{n-1} vectores estado \mathbf{x} , tal que $x_i = 1$. La suma cuenta el número de estos vectores para el cual $\phi(1_i, \mathbf{x}) - \phi(0_i, \mathbf{x}) = 1$. Es de anotar que dicha suma da más peso a los vectores para el cual el fracaso del i -ésimo componente resulta dentro del fallo del sistema. Así, para cualquier sistema coherente, $0 < I_\phi(i) \leq 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

La importancia estructural puede ser útil para el ingeniero de diseño, quien tiene los recursos para mejorar uno o más componentes en un sistema. Asumiendo que la meta es actualizar esos componentes con el impacto más grande en el sistema, el diseñador debe hacer mejoras en los componentes junto con la importancia estructural más grande.

CAPÍTULO 2

Ordenes estocásticos univariados y clases de envejecimiento

El objetivo de este capítulo es estudiar los diferentes órdenes estocásticos. Además, se desarrollan algunos resultados clásicos que se necesitan en el estudio de los mismos. Recordemos entonces las definiciones y algunas propiedades importantes de los diferentes órdenes estocásticos. Ver Shaked and Shanthikumar.[35]

2.1. Definición y condiciones equivalentes

Definición 2.1.1 (Orden de la media). *Sean X y Y variables aleatorias con esperanza finita. Se dice que X es menor que Y en el orden de la media, denotado por $X \leq_m Y$, si*

$$E(X) \leq E(Y).$$

Es de anotar que éste orden no es lo suficientemente fuerte como en realidad se quisiera y desde una perspectiva inicial podría ser de utilidad.

Definición 2.1.2 (Conjunto Superior). *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que U es un conjunto superior o creciente si*

$$y \in U \text{ siempre que } y \geq x \text{ para todo } x \in U.$$

Observación 2.1.1. En el caso univariado un conjunto U es un conjunto superior si, y solamente si, es un abierto o una semi recta cerrada a derecha.

Definición 2.1.3 (Orden estocástico usual). Sean X y Y dos variables aleatorias tales que

$$P(X > u) \leq P(Y > u), \quad -\infty < u < \infty. \quad (2.1.1)$$

Entonces se dice que X es menor que Y según el orden estocástico usual (denotado por $X \leq_{st} Y$).

Nótese que (2.1.1) es lo mismo que

$$P(X \leq u) \geq P(Y \leq u), \quad -\infty < u < \infty \quad (2.1.2)$$

Es fácil verificar (notando que cualquier intervalo cerrado es una intersección infinita de intervalos abiertos) que $X \leq_{st} Y$ si, y sólo si,

$$P(X \geq u) \leq P(Y \geq u), \quad -\infty < u < \infty. \quad (2.1.3)$$

En efecto, podemos reformar (2.1.1) y (2.1.3) en una definición aparentemente más general, pero realmente una equivalente, de la manera siguiente

$$P(X \in U) \leq P(Y \in U), \quad \text{para todo conjunto } U \subseteq \mathbb{R} \quad (2.1.4)$$

En el caso univariado, la equivalencia de (2.1.4) con (2.1.1) y (2.1.3) es trivial. Entonces otra forma de reescribir (2.1.1) ó (2.1.3) es la siguiente

$$E[I_U(X)] \leq E[I_U(Y)] \quad \text{para todos los conjuntos superiores } U, \quad (2.1.5)$$

donde I_U denota la función indicadora de U y $U \subseteq \mathbb{R}$.

Lema 2.1.4.

$$X \leq_{st} Y \implies E(X) \leq E(Y).$$

Demostración. Es conocido que cualquier variable aleatoria se puede escribir como la diferencia de dos variables aleatorias no negativas

$$Z = Z^+ - Z^-$$

Donde $Z^+ = \max\{Z, 0\}$ y $Z^- = -\min\{Z, 0\}$. Haciendo uso de la hipótesis se verifica que

$$X \leq_{st} Y \implies X^+ \leq_{st} Y^+ \quad \text{y} \quad X^- \geq_{st} Y^-.$$

De la definición de orden estocástico usual y del Teorema 1.3.2 se tiene que

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-) \geq E(Y^+) - E(Y^-) = E(Y)$$

□

Teorema 2.1.5.

$$X \leq_{st} Y \iff E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$$

para ϕ una función creciente.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos primero que $X \leq_{st} Y$ y sea ϕ una función creciente. Mostremos entonces que

$$\phi(X) \leq_{st} \phi(Y).$$

Sea

$$\phi^{-1}(a) = \inf\{x \mid \phi(x) \geq a\}, \quad a \geq 0.$$

Entonces,

$$P[\phi(X) > a] = P[X > \phi^{-1}(a)] \leq P[Y > \phi^{-1}(a)] = P[\phi(Y) > a].$$

Por tanto, $\phi(X) \leq_{st} \phi(Y)$, y por el Lema 2.1.4 se concluye que

$$E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$$

(\Leftarrow)

Supongamos ahora que $E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$ para toda función creciente ϕ . Luego, para un a sea ϕ_a la función creciente definida como

$$\phi_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > a \\ 0, & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

Entonces,

$$E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)] \Rightarrow P[X \geq a] \leq P[Y \geq a] \Rightarrow X \leq_{st} Y$$

□

Definición 2.1.6. Sean X y Y variables aleatorias discretas tomando valores en $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$. Sean $p_i = P(X = i)$ y $q_i = P(Y = i)$, $i \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$. Entonces $X \leq_{st} Y$ si, y sólo si

$$\sum_{j=-\infty}^i p_j \geq \sum_{j=-\infty}^i q_j, \quad i \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\},$$

o, equivalentemente,

$$X \leq_{st} Y$$

si, y sólo si,

$$\sum_{j=i}^{\infty} p_j \leq \sum_{j=i}^{\infty} q_j, \quad i \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}.$$

Definición 2.1.7 (Orden probabilístico). Sean X y Y variables aleatorias. Se dice que X es mayor que Y en el orden probabilístico, denotado $X \geq_{pr} Y$, si

$$P(X > Y) \geq P(Y > X), \quad (2.1.6)$$

donde la distribución de las variables aleatorias X y Y , para este caso es la distribución conjunta de las variables que se comparan.

2.2. Propiedades de clausura

Teorema 2.2.1. Si $X \leq_{st} Y$ y g es cualquier función creciente[decreciente], entonces $g(X) \leq_{st} [\geq_{st}]g(Y)$

Demostración. Como g es una función creciente, entonces su inversa g^{-1} existe. Por tanto,

$$P[g(X) > a] = P[X > g^{-1}(a)] \geq P[Y > g^{-1}(a)] = P[g(Y) > a].$$

Se sigue que,

$$g(X) \leq_{st} g(Y)$$

□

Para el caso decreciente es similar.

2.3. Una propiedad en la teoría de la confiabilidad

Si X es una variable aleatoria no negativa con una función de distribución absolutamente continua F , entonces la tasa de fallo de X en $t \geq 0$ es definida como $\lambda(t) = \frac{d}{dt}(-\ln(1 - F(t)))$. La tasa de fallo puede alternativamente expresarse como se mostró en la sección 1.4, esto es

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{X \leq t + \Delta t \mid X > t\}}{\Delta t} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad t \geq 0, \quad (2.3.1)$$

donde $\bar{F}(t) \equiv 1 - F(t)$ es la función de supervivencia y $f(t) = (d/dt)F(t)$ es la función de densidad correspondiente. Como puede verse de (2.3.1), la tasa de fallo $\lambda(t)$ puede ser considerada como la intensidad de fallo de un componente, con un tiempo de vida aleatorio X , en el tiempo t .

Definición 2.3.1. Una variable aleatoria no negativa X con función de distribución F es llamada logcóncava si,

$$F[\alpha x + (1 - \alpha)y] \geq F^\alpha(x)F^{1-\alpha}(y),$$

para $\alpha \in (0, 1)$ y $0 \leq x, y < \infty$.

Definición 2.3.2 (Clase IFR). Una variable aleatoria no negativa X con función de distribución F y función de supervivencia \bar{F} se dice que tiene tasa de fallo creciente IFR (increasing failure rate) si, $-\ln \bar{F}$ es convexa en $\{t : \bar{F}(t) > 0\}$, esto es, si \bar{F} es logcóncava.

Observación 2.3.1. Si X tiene una función tasa de fallo λ , entonces ésta es IFR si, y solo si, $\lambda(t)$ es creciente en t .

Teorema 2.3.3. Si la tasa de fallo existe, \bar{F} es logcóncava si, y sólo si, X tiene tasa de fallo IFR

Demostración. Supongamos que X tiene tasa de fallo creciente. Luego, $-\ln \bar{F}$ es función convexa, esto es,

$$\begin{aligned} -\ln \bar{F}[\alpha x + (1 - \alpha)y] &\leq -\alpha \ln \bar{F}(x) - (1 - \alpha) \ln \bar{F}(y) \\ \ln \bar{F}[\alpha x + (1 - \alpha)y] &\geq \alpha \ln \bar{F}(x) + (1 - \alpha) \ln \bar{F}(y) = \ln[\bar{F}^\alpha(x)\bar{F}^{1-\alpha}(y)] \\ \bar{F}[\alpha x + (1 - \alpha)y] &\geq \bar{F}^\alpha(x)\bar{F}^{1-\alpha}(y) \end{aligned}$$

Luego de la definición 2.3.1, entonces $\bar{F}(x)$ es logcóncava.

La demostración en el otro sentido es similar. □

Definición 2.3.4 (Clase DFR). Una variable aleatoria no negativa X con función de distribución F y función de supervivencia \bar{F} se dice que tiene tasa de fallo decreciente DFR (decreasing failure rate) si, $-\ln \bar{F}$ es cóncava en $\{t : \bar{F}(t) > 0\}$, esto es, si \bar{F} es logconvexa.

Si X tiene una función tasa de fallo λ , ésta es DFR si, y sólo si, $\lambda(t)$ es decreciente en t .

Observación 2.3.2. Una forma alternativa para establecer si la variable aleatoria es IFR ó DFR es tomando

$$\lambda(t) \uparrow \iff \frac{\bar{F}(t+a)}{\bar{F}(t)} \downarrow_t$$

y

$$\lambda(t) \downarrow \iff \frac{\bar{F}(t+a)}{\bar{F}(t)} \uparrow_t,$$

donde $\lambda(t) \uparrow$ significa tasa de fallo no decreciente *IFR* y $\lambda(t) \downarrow$ tasa de fallo no creciente *DFR*.

Definición 2.3.5 (Clase NBU). *Una variable aleatoria no negativa X con función de confiabilidad \bar{F} se dice que tiene la propiedad de nuevo mejor que usado NBU (new better than used) si*

$$P[X > t + s \mid X > t] \leq P[X > s],$$

esto es,

$$\bar{F}(s + t) \leq \bar{F}(s)\bar{F}(t), \text{ para todo } s \geq 0 \text{ y todo } t \geq 0.$$

Definición 2.3.6 (Clase NWU). *Una variable aleatoria no negativa X con función de supervivencia \bar{F} se dice que tiene la propiedad de nuevo peor que usado NWU (new worse used) si, y solo si,*

$$P[X > t + s \mid X > t] \geq P[X > s],$$

esto es,

$$\bar{F}(s + t) \geq \bar{F}(s)\bar{F}(t), \text{ para todo } s \geq 0 \text{ y todo } t \geq 0.$$

Teorema 2.3.7.

(i) *La variable aleatoria X es IFR si, y solo si,*

$$[X - t \mid X > t] \geq_{st} [X - t' \mid X > t'] \text{ siempre que } t \leq t'$$

(ii) *La variable aleatoria no negativa X es NBU si, y solo si,*

$$X \geq_{st} [X - t \mid X > t] \text{ para todo } t > 0.$$

Demostración. (i) (\Leftarrow) Supongamos que

$$[X - t \mid X > t] \geq_{st} [X - t' \mid X > t'].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P[X - t \geq a \mid X > t] &\geq P[X - t' \geq a \mid X > t'] \\ P[X \geq t + a \mid X > t] &\geq P[X \geq t' + a \mid X > t'] \\ \frac{P[X \geq t + a]}{P[X > t]} &\geq \frac{P[X \geq t' + a]}{P[X > t']} \\ \frac{\bar{F}(t + a)}{\bar{F}(t)} &\geq \frac{\bar{F}(t' + a)}{\bar{F}(t')} \text{ siempre que } t \leq t'. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\bar{F}(t+a)}{\bar{F}(t)} \downarrow_t.$$

Por observación (2.3.2) se verifica que $\lambda(t)$ es creciente en t , lo cual implica que X es *IFR*

(\Rightarrow) Supongamos ahora que la variable aleatoria X es *IFR*. Entonces, por definición (2.3.2), sabemos que $\lambda(t)$ es creciente en t , esto es,

$$\frac{\bar{F}(t+a)}{\bar{F}(t)} \downarrow_t.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\bar{F}(t+a)}{\bar{F}(t)} \geq \frac{\bar{F}(t'+a)}{\bar{F}(t')} \text{ siempre que } t \leq t'.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{P[X \geq t+a]}{P[X > t]} &\geq \frac{P[X \geq t'+a]}{P[X > t']} \\ P[X \geq t+a \mid X > t] &\geq P[X \geq t'+a \mid X > t'] \\ [X-t \geq a \mid X > t] &\geq [X-t' \geq a \mid X > t']. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[X-t \mid X > t] \geq_{st} [X-t' \mid X > t'].$$

(ii) (\Leftarrow) Supongamos que $X \geq_{st} [X-t \mid X > t]$ para todo $t > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} P[X > a] &\geq P[X-t > a \mid X > t] \\ P[X > a] &\geq P[X > t+a \mid X > t] \\ P[X > a] &\geq \frac{P[X > t+a]}{P[X > t]} \\ P[X > t]P[X > a] &\geq P[X > t+a] \\ \bar{F}(t)\bar{F}(a) &\geq \bar{F}(t+a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, X es *NBU*.

(\Rightarrow) Supongamos que X es *NBU*. Entonces,

$$\bar{F}(t+a) \leq \bar{F}(t)\bar{F}(a), \text{ para todo } t \geq 0 \text{ y todo } a \geq 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 P[X > t + a] &\leq P[X > t]P[X > a] \\
 \frac{P[X > t + a]}{P[X > t]} &\leq P[X > a] \\
 P[X > t + a \mid X > t] &\leq P[X > a] \\
 P[X - t > a \mid X > t] &\leq P[X > a].
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$P[X > a] \geq P[X - t > a \mid X > t].$$

Por lo tanto,

$$X \geq_{st} [X - t \mid X > t]$$

□

Definición 2.3.8. Si X es una variable aleatoria que representa el tiempo de vida de un componente, entonces la variable aleatoria $X_t = [X - t \mid X > t]$ representa el tiempo de vida residual para todo $t > 0$. Si la distribución de X es F , entonces la distribución de X_t es

$$\bar{F}_{X_t}(a) = \frac{\bar{F}(a + t)}{\bar{F}(t)}, \quad a \geq 0, \quad t \geq 0.$$

2.4. El orden tasa de fallo

2.4.1. Definición y condiciones equivalentes

Sea X una variable aleatoria no negativa con distribución absolutamente continua F . La tasa de fallo de X está definida como la probabilidad de falla en el instante de tiempo t , condicionada a que la unidad no ha fallado hasta el momento.

Definición 2.4.1 (Orden tasa de fallo). Sean X y Y dos variables aleatorias no negativas con funciones de distribución absolutamente continuas y con funciones tasa de fallo λ_1 y λ_2 , respectivamente, tales que

$$\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t), \quad t \geq 0 \tag{2.4.1}$$

Entonces se dice que X es menor que Y en el orden tasa de fallo, denotado como $X \leq_{hr} Y$.

Aunque el orden tasa de fallo es usualmente aplicado a tiempos de vidas aleatorias (esto es, variables aleatorias no negativas), la definición (2.4.1) puede también usarse para comparar variables aleatorias más generales; todo lo que necesita ser modificado en (2.4.1) es reemplazar la restricción $t \geq 0$ por $t > -\infty$.

Observación 2.4.1. Una condición adicional, la cual es equivalente a $X \leq_{hr} Y$ cuando X y Y tienen distribuciones absolutamente continuas F y G , respectivamente, es la siguiente

$$\frac{f(u)}{\overline{F}(v)} \geq \frac{g(u)}{\overline{G}(v)}, \quad \text{para todo } u \leq v. \quad (2.4.2)$$

Teorema 2.4.2.

$$X \leq_{hr} Y \iff \frac{\overline{F}(t)}{\overline{G}(t)} \downarrow_t,$$

donde $F(t)$ y $G(t)$ son las funciones de distribución de X e Y , respectivamente.

Demostración. Supongamos que las funciones de densidad de las variables aleatorias X e Y existen y son respectivamente $f(t)$ y $g(t)$, entonces

$$\begin{aligned} X \leq_{hr} Y &\iff \lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \\ &\iff \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} \geq \frac{g(t)}{\overline{G}(t)} \\ &\iff f(t)\overline{G}(t) \geq g(t)\overline{F}(t) \\ &\iff f(t)\overline{G}(t) - g(t)\overline{F}(t) \geq 0 \\ &\iff -f(t)\overline{G}(t) + g(t)\overline{F}(t) \leq 0 \\ &\iff -\frac{f(t)\overline{G}(t) - g(t)\overline{F}(t)}{[\overline{G}(t)]^2} \leq 0 \\ &\iff -\frac{d}{dt} \left[\frac{\overline{F}(t)}{\overline{G}(t)} \right] \leq 0. \end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$X \leq_{hr} Y \iff \frac{\overline{F}(t)}{\overline{G}(t)} \downarrow_t .$$

□

Lema 2.4.3. Una condición equivalente para $X \leq_{hr} Y$ es

$$\frac{1 - FG^{-1}(1 - u)}{u} \leq \frac{1 - FG^{-1}(1 - v)}{v} \quad \text{para toda } 0 < u \leq v < 1 \quad (2.4.3)$$

Teorema 2.4.4.

$$X \leq_{hr} Y \iff X_t \leq_{st} Y_t$$

Demostración.

$$\begin{aligned} X_t \leq_{st} Y_t &\iff P[X_t \geq a] \leq P[Y_t \geq a] \\ &\iff P[X - t \geq a \mid X > t] \leq P[Y - t \geq a \mid Y > t] \\ &\iff P[X \geq t + a \mid X > t] \leq P[Y \geq t + a \mid Y > t] \\ &\iff \frac{P[X \geq t + a]}{P[X > t]} \leq \frac{P[Y \geq t + a]}{P[Y > t]} \\ &\iff \frac{\bar{F}(t + a)}{\bar{F}(t)} \leq \frac{\bar{G}(t + a)}{\bar{G}(t)} \\ &\iff \frac{\bar{F}(t + a)}{\bar{G}(t + a)} \leq \frac{\bar{F}(t)}{\bar{G}(t)} \\ &\iff \frac{\bar{F}(t)}{\bar{G}(t)} \downarrow_t. \end{aligned}$$

Ahora bien, por el Teorema (2.4.2), tenemos que $X \leq_{hr} Y$ □

2.5. La relación entre la tasa de fallo y el orden estocástico usual

Si X tiene la función tasa de fallo λ_1 y la función de supervivencia \bar{F} , entonces

$$\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t \lambda_1(u) du}, \quad t \geq 0.$$

Similarmente, si Y tiene la función tasa de fallo λ_2 y la función de supervivencia \bar{G} , entonces

$$\bar{G}(t) = e^{-\int_0^t \lambda_2(u) du}, \quad t \geq 0.$$

Teorema 2.5.1. Si X y Y son dos variables aleatorias tales que $X \leq_{hr} Y$, entonces $X \leq_{st} Y$.

Demostración. Supongamos que $X \leq_{hr} Y$. Entonces,

$$\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t).$$

Luego,

$$\int_0^t \lambda_1(x) dx \geq \int_0^t \lambda_2(x) dx.$$

Por tanto,

$$-\int_0^t \lambda_1(x) dx \leq -\int_0^t \lambda_2(x) dx.$$

En consecuencia,

$$e^{-\int_0^t \lambda_1(x) dx} \leq e^{-\int_0^t \lambda_2(x) dx}.$$

Esto es,

$$\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t).$$

Lo cual es equivalente a decir

$$P[X \geq t] \leq P[Y \geq t],$$

es decir,

$$X \leq_{st} Y.$$

□

Teorema 2.5.2. Si $X \leq_{hr} Y$, y g es cualquier función creciente, entonces $g(X) \leq_{hr} g(Y)$.

Demostración. Supongamos que g es absolutamente continua. Además, supongamos, que $t_1 < t_2$. Como $g(t_1) < g(t_2)$, entonces $g^{-1}(t_1) < g^{-1}(t_2)$.

Por hipótesis tenemos que el cociente $h(x) = \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)}$ es decreciente en x . Luego, $h[g^{-1}(t_1)] \geq h[g^{-1}(t_2)]$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}[g^{-1}(t_1)]}{\bar{G}[g^{-1}(t_1)]} \geq \frac{\bar{F}[g^{-1}(t_2)]}{\bar{G}[g^{-1}(t_2)]} &\iff \frac{P[X \geq g^{-1}(t_1)]}{P[Y \geq g^{-1}(t_1)]} \geq \frac{P[X \geq g^{-1}(t_2)]}{P[Y \geq g^{-1}(t_2)]} \\ &\iff \frac{P[g(X) \geq t_1]}{P[g(Y) \geq t_1]} \geq \frac{P[g(X) \geq t_2]}{P[g(Y) \geq t_2]} \\ &\iff \frac{\bar{F}_{g(X)}(t_1)}{\bar{G}_{g(Y)}(t_1)} \geq \frac{\bar{F}_{g(X)}(t_2)}{\bar{G}_{g(Y)}(t_2)}. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $t_1 \leq t_2$, entonces $\frac{\bar{F}_{g(X)}(t)}{\bar{G}_{g(Y)}(t)}$ es decreciente. Luego,

$$g(X) \leq_{hr} g(Y).$$

□

2.6. Estadísticos de orden

Los estimadores no paramétricos de tendencia central son los llamados estimadores de orden o estadísticos de orden, puesto que las observaciones o valores de la variable aleatoria X deben ser ordenados en orden creciente. Bajo hipótesis relativamente sencilla sobre las funciones de distribución de dos familias de variables aleatorias independientes, se dan resultados generales relacionados con desigualdades para el valor esperado de los estadísticos de orden extremos. Como consecuencia directa deducimos cotas inferiores (respectivamente superiores) para la esperanza de máximo (respectivamente mínimo). Estas cotas resultan ser asintóticamente óptimas y, en muchas ocasiones, tienen el mismo comportamiento asintótico que $E(X_{n:n})$ (cuando $n \uparrow \infty$).

Definición 2.6.1 (Estadísticos de orden). Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F . El j -ésimo estadístico de orden de X_1, \dots, X_n denotado por $X_{(j)}$ ó Y_j está definido por

$$Y_j = j\text{-ésimo más pequeño de los } \{X_1, \dots, X_n\}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Nota 2.6.1. La definición anterior significa que, para cada $s \in \mathfrak{S}$, $Y_j(s)$ es el j -ésimo más pequeño entre los números $X_1(s), \dots, X_n(s)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Uno de los problemas en que estamos interesados con los estadísticos de orden es el de encontrar la función de densidad de probabilidad conjunta de los estadísticos de orden Y_1, \dots, Y_n . Para tal efecto, se establece el siguiente teorema.

Teorema 2.6.2. Si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad de probabilidad f positiva para $a < x < b$ y 0 en otro caso, entonces la función de densidad de probabilidad conjunta de los estadísticos de orden Y_1, \dots, Y_n está dada por

$$g(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} n!f(y_1), \dots, f(y_n) & a < y_1 < \dots < y_n < b, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La prueba de este teorema puede ser revisada en [30]

Otro problema interesante y de gran ayuda en nuestra investigación, es el hallazgo de la función de densidad de probabilidad de cada Y_j , $j = 1, 2, \dots, n$, así como la función de densidad de probabilidad conjunta de cualquiera sea el Y_j . En respuesta parcial a este problema, tenemos el siguiente teorema

Teorema 2.6.3. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F y función de densidad de probabilidad f positiva y continua para $(-\infty \leq) a < x < b (\leq \infty)$ y cero en otro caso, y sean Y_1, Y_2, \dots, Y_n los estadísticos de orden. Entonces la función de densidad de probabilidad g_j de Y_j , $j = 1, 2, \dots, n$, esta dada por

$$g_j(y_j) = \begin{cases} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} [F(y_j)]^{j-1} [1 - F(y_j)]^{n-j} f(y_j), & a < y_j < b, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración.

Del teorema 2.6.2, tenemos que $g(y_1, \dots, y_n) = n!f(y_1) \dots f(y_n)$ para $a < y_1 < \dots < y_n < b$ e igual a 0 en otro caso.

Puesto que f es positiva en (a, b) , se sigue que F es estrictamente creciente en (a, b) y por tanto F^{-1} existe en este intervalo.

Ahora, si $u = F(y)$, $y \in (a, b)$, entonces $y = F^{-1}(u)$, $u \in [0, 1]$ y $\frac{dy}{du} = \frac{1}{f[F^{-1}(u)]}$, $u \in [0, 1]$

Por lo tanto, tomando $U_j = F(Y_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, se tiene que la función de densidad de probabilidad conjunta h de los U 's esta dada por

$$h(u_1, \dots, u_n) = n!f[F^{-1}(u_1)] \dots f[F^{-1}(u_n)] \frac{1}{f[F^{-1}(u_1)] \dots f[F^{-1}(u_n)]}$$

para $0 \leq u_1 < \dots \leq u_n \leq 1$ e igual a cero en otro caso; esto es, $h(u_1, \dots, u_n) = n!$ para $0 \leq u_1 < \dots \leq u_n \leq 1$ e igual a cero en otro caso

Por lo tanto, para $u_j \in [0, 1]$,

$$h(u_j) = n! \int_0^{u_j} \dots \int_0^{u_2} \int_{u_j}^1 \dots \int_{u_{n-1}}^1 du_n \dots du_{j+1} du_1 \dots du_{j-1}$$

34 Ordenes estocásticos univariados y clases de envejecimiento

Las primeras $n - j$ integraciones con respecto a las variables u_n, \dots, u_{j+1} da como resultado $\frac{1}{(n-j)!}(1-u_j)^{n-j}$ y las últimas $j - 1$ integraciones con respecto a las variables u_1, \dots, u_{j-1} produce $\frac{1}{(j-1)!}u_j^{j-1}$. Así,

$$h(u_j) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}u_j^{j-1}(1-u_j)^{n-j},$$

para $u_j \in [0, 1]$ e igual a cero en otro caso. Finalmente, usando una vez más la transformación $U_j = F(y_j)$, obtenemos

$$g(y_j) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}[F(y_j)]^{j-1}[1-F(y_j)]^{n-j}f(y_j)$$

para $y_j \in [a, b]$ y cero en otro caso.

□

Lema 2.6.4. *El producto de funciones positivas decrecientes es una función decreciente*

El orden tasa de fallo es cerrado bajo la operación tomando mínimos, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.6.5. *Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes con función de distribución F y sean Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes con distribución G tal que $X_i \leq_{hr} Y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces*

$$\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq_{hr} \min\{Y_1, \dots, Y_n\}$$

Demostración. Sea \bar{F}_i la función de supervivencia de la variable aleatoria X_i y \bar{G}_i la función de supervivencia de la variable aleatoria Y_i para $i = 1, \dots, n$. Entonces

$$\begin{aligned} P[\min\{X_1, \dots, X_n\} > t] &= P[X_1 > t \wedge X_2 > t \dots \wedge X_n > t] \\ &= P[X_1 > t]P[X_2 > t] \dots P[X_n > t] \\ &= [\bar{F}_1(t)][\bar{F}_2(t)] \dots [\bar{F}_n(t)] \\ &= \prod_{i=1}^n \bar{F}_i(t) \end{aligned}$$

De manera similar, la función de supervivencia de las Y_i viene dada por

$$\begin{aligned} P[\min\{Y_1, \dots, Y_n\} > t] &= P[Y_1 > t \wedge Y_2 > t \dots \wedge Y_n > t] \\ &= \prod_{i=1}^n \overline{G}_i(t) \end{aligned}$$

Por hipótesis, $X_i \leq_{hr} Y_i$, esto es,

$$\frac{\overline{F}_i(t)}{\overline{G}_i(t)} \downarrow t$$

y por lema (2.6.4),

$$\frac{\prod_{i=1}^n \overline{F}_i(t)}{\prod_{i=1}^n \overline{G}_i(t)}$$

es decreciente en t . Por tanto,

$$\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq_{hr} \min\{Y_1, \dots, Y_n\}$$

□

Nota 2.6.2. Si X_1, \dots, X_n en el teorema 2.6.5 son idénticamente distribuidas y si Y_1, \dots, Y_n son también idénticamente distribuidas, entonces todos los estadísticos de orden correspondientes a los X_i 's y los Y_i 's pueden ser comparados en el orden tasa de fallo. Esto es mostrado en el siguiente resultado.

Teorema 2.6.6. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y sean Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $X_i \leq_{hr} Y_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces, $X_{(k)} \leq Y_{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Demostración. Supongamos que

$$X_i \sim F \text{ y } Y_i \sim H.$$

Por teorema (2.6.3)

$$g_k[x_k] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x_k)]^{k-1} [1 - F(x_k)]^{n-k} f(x_k)$$

y

$$g_k[y_k] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [H(y_k)]^{k-1} [1 - H(y_k)]^{n-k} h(y_k).$$

36 Ordenes estocásticos univariados y clases de envejecimiento

De aquí que la distribución del k -ésimo estadístico de orden para X y Y serán respectivamente,

$$G_k[x_k] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^t [F(x_k)]^{k-1} [1 - F(x_k)]^{n-k} f(x_k) dx$$

y

$$G_k[y_k] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^t [H(y_k)]^{k-1} [1 - H(y_k)]^{n-k} h(y_k) dy_k$$

Entonces,

$$\frac{\overline{G}_k[x_k]}{\overline{G}_k[y_k]} = \frac{1 - \left[\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^t [F(x_k)]^{k-1} [1 - F(x_k)]^{n-k} f(x_k) dx_k \right]}{1 - \left[\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^t [H(y_k)]^{k-1} [1 - H(y_k)]^{n-k} h(y_k) dy_k \right]}$$

Como $\frac{\overline{F}(t)}{\overline{H}(t)} \downarrow_t$ basta probar que esta igualdad es decreciente en t .

En efecto, haciendo

$$S(t) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^t [F(x_k)]^{k-1} [1 - F(x_k)]^{n-k} f(x_k) dx_k$$

Sea $x = 1 - F(x_k)$. Entonces, $dx = -f(x_k) dx_k$, luego,

$$S(p) = -\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_1^p (1-x)^{k-1} x^{n-k} dx,$$

esto es,

$$S(p) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_p^1 (1-x)^{k-1} x^{n-k} dx.$$

Así,

$$\overline{S}(p) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p (1-x)^{k-1} x^{n-k} dx = h(p)$$

Entonces,

$$\frac{1 - h(p)}{(1 - p)h'(p)} = \frac{1 - \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \int_0^p (1-x)^{k-1} x^{n-k} dx}{(1-p) \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} (1-p)^{k-1} p^{n-k}}$$

Ahora bien, si hacemos $\theta = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, entonces

$$\frac{1 - h(p)}{(1 - p)h'(p)} = \frac{1}{(1 - p)\theta(1 - p)^{k-1}p^{n-k}} - \frac{1}{1 - p} \int_0^p \left[\frac{1 - x}{1 - p} \right]^{k-1} \left[\frac{x}{p} \right]^{n-k} dx.$$

Nuevamente, haciendo $u = \left[\frac{1-x}{1-p} \right]$ y por consiguiente $du = - \left[\frac{1}{1-p} \right] dx$, en esta última integral tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1 - h(p)}{(1 - p)h'(p)} &= \frac{1}{(1 - p)\theta(1 - p)^{k-1}p^{n-k}} + \int_{\frac{1}{1-p}}^1 u^{k-1} \left[\frac{1 - u(1 - p)}{p} \right]^{n-k} du \\ &= \frac{1}{(1 - p)\theta(1 - p)^{k-1}p^{n-k}} + \int_0^1 u^{k-1} \left[\frac{1 - u(1 - p)}{p} \right]^{n-k} du \\ &\quad - \int_0^{\frac{1}{1-p}} u^{k-1} \left[\frac{1 - u(1 - p)}{p} \right]^{n-k} du \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{1-p}} u^{k-1} \left[\frac{1 - u(1 - p)}{p} \right]^{n-k} du &= \frac{1}{1 - p} \int_1^0 \left[\frac{1 - x}{1 - p} \right]^{k-1} \left[\frac{x}{p} \right]^{n-k} dx \\ &= -\frac{1}{(1 - p)(1 - p)^{k-1}p^{n-k}} \int_0^1 (1 - x)^{k-1} x^{n-k} dx \end{aligned}$$

Ahora bien, como $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1}(1 - y)^{\beta-1} dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{1-p}} u^{k-1} \left[\frac{1 - u(1 - p)}{p} \right]^{n-k} du &= -\frac{1}{(1 - p)(1 - p)^{k-1}p^{n-k}} B[n - k + 1, k] \\ &= -\frac{1}{(1 - p)(1 - p)^{k-1}p^{n-k}} \frac{\Gamma(n - k + 1)\Gamma(k)}{\Gamma(n + 1)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{1-h(p)}{(1-p)h'(p)} &= \frac{1}{(1-p)\theta(1-p)^{k-1}p^{n-k}} + \int_0^1 u^{k-1} \left[\frac{1-u(1-p)}{p} \right]^{n-k} du \\
 &\quad - \frac{1}{(1-p)(1-p)^{k-1}p^{n-k}} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \\
 &= \frac{1}{(1-p)(1-p)^{k-1}p^{n-k}} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} + \int_0^1 u^{k-1} \left[\frac{1-u(1-p)}{p} \right]^{n-k} du \\
 &\quad - \frac{1}{(1-p)(1-p)^{k-1}p^{n-k}} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \\
 &= \int_0^1 u^{k-1} \left[\frac{1-u(1-p)}{p} \right]^{n-k} du \\
 &= -\frac{1}{1-p} \int_1^p \left[\frac{1-x}{1-p} \right]^{n-k} \left[\frac{x}{p} \right]^{k-1} dx
 \end{aligned}$$

Pero, esta última función es decreciente en p . Por lo tanto, garantiza la conservación, en consecuencia, $\frac{\bar{F}(t)}{H(t)} \downarrow t$, esto es,

$$X_{(k)} \leq Y_{(k)} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

□

Lema 2.6.7. Si las variables aleatorias X y Y son tales que $X \leq_{hr} Y$ y si Z es una variable aleatoria independiente IFR de X y Y , entonces

$$X + Z \leq_{hr} Y + Z \quad (2.6.1)$$

Demostración. Denotemos por f_W y \bar{F}_W la función de densidad y la función de supervivencia de cualquier variable aleatoria W . Note que, para $x \leq y$

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_{X+Z}(x)\bar{F}_{Y+Z}(y) - \bar{F}_{X+Z}(y)\bar{F}_{Y+Z}(x) &= \int_v \int_{u \geq v} [f_X(u)\bar{F}_Z(x-u)f_Y(v)\bar{F}_Z(y-v) \\
 + f_X(v)\bar{F}_Z(x-v)f_Y(u)\bar{F}_Z(y-u)]dudv &- \int_v \int_{u \geq v} [f_X(u)\bar{F}_Z(y-u)f_Y(v)\bar{F}_Z(x-v) \\
 + f_X(v)\bar{F}_Z(y-v)f_Y(u)\bar{F}_Z(x-u)]dudv &= \int_v \int_{u \geq v} [\bar{F}_X(u)f_Y(v) - f_X(v)\bar{F}_Y(u)] \\
 &\quad \times [\bar{F}_Z(y-v)f_Z(x-u) - f_Z(y-u)\bar{F}_Z(x-v)]dudv,
 \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es obtenida por integración por partes con respecto a u y por agrupación de términos. Puesto que $X \leq_{hr} Y$ se sigue de la

observación(2.4.2) que la expresión dentro del primer conjunto de corchetes en la última integral es no positiva. Puesto que Z es *IFR* puede verificarse que la cantidad en el segundo par de corchetes en la última integral es también no positiva. Por lo tanto la integral es no negativa. Esto prueba (2.6.1) \square

Teorema 2.6.8. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes y sean Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes tales que $X_i \leq_{hr} Y_i$, con $i = 1, 2, \dots, n$. Si $X_i, Y_i, i = 1, 2, \dots$ son todas *IFR*, entonces

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq_{hr} \sum_{i=1}^n Y_i$$

Demostración. Puesto que X_1 y Y_1 son variables aleatorias tales que $X_1 \leq_{hr} Y_1$, y además X_2 es una variable aleatoria independiente *IFR* de X_1 y Y_1 , entonces por la ecuación 2.6.1 se tiene que

$$X_1 + X_2 \leq_{hr} Y_1 + X_2$$

Además, como $X_2 \leq_{hr} Y_2$, entonces

$$X_1 + X_2 \leq_{hr} Y_1 + Y_2$$

Análogamente, como X_1, X_2, Y_1 y Y_2 son variables aleatorias tales que

$$X_1 + X_2 \leq_{hr} Y_1 + Y_2,$$

y además X_3 es una variable aleatoria independiente *IFR* de X_1, X_2, Y_1 y Y_2 , entonces nuevamente por 2.6.1 se tiene que

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq_{hr} Y_1 + Y_2 + X_3$$

Una vez más, puesto que $X_3 \leq_{hr} Y_3$, entonces

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq_{hr} Y_1 + Y_2 + Y_3$$

Repitiendo sucesivamente el proceso anterior, se concluye que

$$X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n \leq_{hr} Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n$$

Así,

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq_{hr} \sum_{i=1}^n Y_i$$

\square

Observación 2.6.1. Si X es una variable aleatoria, entonces $X_{(-\infty, a]}$ denota el truncamiento de X en a , esto es $X_{(-\infty, a]}$ tiene como su distribución la distribución condicional de X dado que $X \leq a$. en forma similar se define $X_{(a, \infty)}$

Lema 2.6.9. Sea X una variable aleatoria. Entonces $X_{(-\infty, a]}$ y $X_{(a, \infty)}$ son crecientes en a en el sentido del orden tasa de fallo.

Teorema 2.6.10. Sea X una variable aleatoria no negativa *IFR*, y sea $a \leq 1$ una constante positiva. Entonces, $aX \leq_{hr} X$.

Demostración. En efecto, como $X_t = [X - t \mid X > t]$ es el tiempo de vida residual de la variable aleatoria X , la cual por hipótesis es *IFR*, implica que

$$\begin{aligned} aX_t &= P[aX - t \mid aX > t] \leq P[X - t \mid X > t] = X_t \\ P[aX - t \geq h \mid aX > t] &\leq P[X - t \geq h \mid X > t] \\ P[X \geq \frac{t+h}{a} \mid \frac{t}{a}] &\leq P[X \geq t+h \mid X > t] \\ \frac{P[X \geq \frac{t+h}{a}]}{p[X > \frac{t}{a}]} &\leq \frac{P[X \geq t+h]}{P[X > t]} \end{aligned}$$

Se sigue que,

$$\frac{\bar{F}(\frac{t+h}{a})}{\bar{F}(t+h)} \leq \frac{\bar{F}(\frac{t}{a})}{\bar{F}(t)}$$

lo que equivale a

$$\frac{\bar{F}(\frac{t+h}{a})}{\bar{F}(t+h)} \downarrow_t$$

Se concluye así que

$$aX \leq_{hr} X.$$

□

Teorema 2.6.11. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes no negativas e idénticamente distribuidas con funciones tasa de fallo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, respectivamente. Entonces, $X_{(k)} \leq_{hr} X_{(k+1)}$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$

Demostración. Sean $F_{X_{(k)}}(t)$ y $F_{X_{(k+1)}}(t)$ la distribución del k -ésimo estadístico de orden y la distribución del $(k+1)$ -ésimo estadístico de orden. Para probar que $X_{(k)} \leq_{hr} X_{(k+1)}$ basta demostrar que

$$\frac{\bar{F}_{X_{(k)}}(t)}{\bar{F}_{X_{(k+1)}}(t)} \downarrow_t$$

Entonces, por 2.6.6 podemos escribir

$$\frac{\bar{F}_k[x_k]}{\bar{F}_k[x_{k+1}]} = \frac{1 - \left[\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^t [F(x_k)]^{k-1} [1 - F(x_k)]^{n-k} f(x_k) dx_k \right]}{1 - \left[\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^t [F(x_{k+1})]^k [1 - F(x_{k+1})]^{n-k-1} f(x_{k+1}) dy_{k+1} \right]}$$

Se sigue de 2.6.6 que este cociente es decreciente y por hipótesis se verifica el resultado que se quiere. \square

2.7. El orden tasa de fallo reversa

Definición 2.7.1 (Función tasa de fallo reversa). *Si X es una variable aleatoria con función de distribución absolutamente continua F , entonces la tasa de fallo reversa de X en el punto t está definida por*

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(t) &= \frac{d}{dt} [\ln F(t)] \\ &= \frac{f(t)}{F(t)} \end{aligned}$$

Definición 2.7.2 (Orden tasa de fallo reversa). *Sean X y Y dos variables aleatorias con funciones de distribución absolutamente continuas F y G y con funciones tasa de fallo reversa $\tilde{\lambda}_1$, y $\tilde{\lambda}_2$, respectivamente, tales que*

$$\tilde{\lambda}_1(t) \leq \tilde{\lambda}_2(t), \quad t \geq 0 \tag{2.7.1}$$

Entonces se dice que X es menor que Y en el orden tasa de fallo reversa y se denota por $X \leq_{rh} Y$

Una interpretación del orden tasa de fallo reversa, puede ser la siguiente. Sea T una variable aleatoria con distribución F no negativa, entonces T puede ser considerado como el tiempo de vida de una componente. Dado que la componente falla antes de determinado tiempo t entonces la probabilidad

de que éste sobreviva por encima de un tiempo $t - \epsilon$ (para ϵ pequeño y mayor que cero) es aproximadamente $\epsilon \tilde{\lambda}_F(t)$, esto es,

$$\begin{aligned} \epsilon \tilde{\lambda}_F(t) &\approx P(T \geq t - \epsilon \mid T \leq t) \\ &\approx \frac{P(t - \epsilon \leq T \leq t)}{P(T \leq t)} \\ &\approx \frac{F(t) - F(t - \epsilon)}{\epsilon F(t)}. \end{aligned}$$

Suponiendo existencia del límite se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_F(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(t - \epsilon)}{\epsilon F(t)} \\ &= \frac{f(t)}{F(t)}. \end{aligned}$$

Proposición 2.7.3. *Sea X, Y variables aleatorias no negativas con función de distribución F y G respectivamente (absolutamente continuas) y tasa de fallo reversa $\tilde{\lambda}_1$ y $\tilde{\lambda}_2$ respectivamente, entonces*

$$\tilde{\lambda}_F(t) \geq \tilde{\lambda}_G(t) \iff \frac{F(t)}{G(t)} \text{ es no decreciente en } t \geq 0$$

Demostración. (\implies) Supongamos que F y G son diferenciables para $t \geq 0$. Sea $L(t) = \frac{F(t)}{G(t)}$. Entonces,

$$\tilde{\lambda}_F(t) - \tilde{\lambda}_G(t) \geq 0 \implies \frac{G(t)F'(t) - F(t)G'(t)}{G^2(t)} \geq 0$$

Luego, $L'(t) \geq 0$. Por lo tanto, $L(t)$ es no decreciente.

(\impliedby) Supongamos ahora que $L(t)$ es no decreciente, entonces

$$\begin{aligned} \frac{G(t)F'(t) - F(t)G'(t)}{G^2(t)} \geq 0 &\implies \frac{G(t)F'(t) - F(t)G'(t)}{F(t)G(t)} \geq 0 \\ &\implies \frac{F'(t)}{F(t)} \geq \frac{G'(t)}{G(t)} \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\tilde{\lambda}_F(t) \geq \tilde{\lambda}_G(t)$$

□

Las pruebas de los siguientes teoremas pueden ser revisados en [35], [3], [8], entre otros, también se hace necesario que ante todo que como lo que se busca es despertar el interés en el tema, se espera que estas afirmaciones que son de gran importancia sean abordadas en la medida de los requerimientos por el investigador.

Teorema 2.7.4. *Si X y Y son dos variables aleatorias tales que $X \leq_{rh} Y$, entonces $X \leq_{st} Y$.*

Teorema 2.7.5. *Si $X \leq_{rh} Y$ y g es cualquier función estrictamente creciente[decreciente], entonces $g(X) \leq_{rh} [\geq_{rh}]g(Y)$.*

Teorema 2.7.6. *Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes con función de distribución F y sean Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes con función de distribución G tales que $X_i \leq_{rh} Y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces*

$$\max \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq \max \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}.$$

Lema 2.7.7. *Si las variables aleatorias X y Y son tales que $X \leq_{rh} Y$, y si Z es una variable aleatoria independiente de X e Y y tiene tasa de fallo reversa decreciente, entonces*

$$X + Z \leq_{rh} Y + Z.$$

Teorema 2.7.8. *Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes y sean Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes tales que $X_i \leq_{rh} Y_i$, con $i = 1, 2, \dots, n$. Si X_i, Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ todas tienen tasa de fallo reversa decreciente, entonces*

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq_{rh} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

2.8. El orden de razón de verosimilitud

Definición 2.8.1. *Sean X y Y variables aleatorias continuas con densidades f y g , respectivamente, tales que*

$$\frac{f(t)}{g(t)} \downarrow_t \text{ para todo } t \geq 0 \quad (2.8.1)$$

o equivalentemente

$$f(u)g(v) \geq f(v)g(u), \text{ para todo } u \leq v \quad (2.8.2)$$

Entonces se dice que X es menor que Y en el orden de razón de verosimilitud y se denota por $X \leq_{lr} Y$.

Teorema 2.8.2. *Si X y Y son dos variables aleatorias continuas tales que $X \leq_{lr} Y$, entonces $X \leq_{hr} Y$ y $X \leq_{rh} Y$.*

Demostración. Primero veamos que

$$X \leq_{lr} Y \implies X \leq_{hr} Y$$

En efecto como $X \leq_{lr} Y$ se sigue que si $t \leq x$, entonces

$$\frac{f_Y(x)}{f_X(x)} \geq \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} \tag{2.8.3}$$

o también,

$$f_Y(x) \geq \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} f_X(x).$$

Ahora

$$\lambda_Y(t) = \frac{f_Y(t)}{\bar{F}_Y(t)} = \frac{f_Y(t)}{\int_t^\infty f_Y(x)dx} \leq \frac{f_Y(t)}{\int_t^\infty \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} f_X(x)dx} = \frac{f_X(t)}{\int_t^\infty f_X(x)dx} = \lambda_X(t).$$

lo que implica que

$$X \leq_{hr} Y.$$

Ahora veamos que $X \leq_{lr} Y \implies X \leq_{rh} Y$

De la ecuación 2.8.3 podemos obtener la ecuación

$$f_X(t)f_Y(t) \geq f_X(x)f_Y(t).$$

Esta desigualdad se conserva si la asumimos como integrando, definiendo adecuadamente los límites de integración, esto es,

$$\int_0^x \int_0^t f_X(t_1)f_Y(t_2)dt_1dt_2 \geq \int_0^x \int_0^t f_X(t_2)f_Y(t_1)dt_1dt_2.$$

Se sigue que

$$\left(\int_0^t f_X(t_1)dt_1\right)\left(\int_0^x f_Y(t_2)dt_2\right) \geq \left(\int_0^t f_Y(t_1)dt_1\right)\left(\int_0^x f_X(t_2)dt_2\right).$$

que es equivalente a escribir

$$F_X(t)F_Y(x) \geq F_X(x)F_Y(t).$$

Lo cual como ya sabemos, es equivalente a

$$X \leq_{rh} Y.$$

□

Los teoremas 2.8.3 a 2.8.6 solamente son presentados y se sugiere al investigador interesado en la prueba de los mismos acudir al monográfico [35]. Además cabe anotar que dichos teoremas son extensiones de afirmaciones ya expuestas y permiten la verificación de éstos cuando se trabaja con variables aleatorias discretas.

Teorema 2.8.3. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes y sean Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes tales que $X_i \leq_{lr} Y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Si X_i, Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, todas tienen densidades logcóncavas, excepto probablemente una X_l y una Y_k con ($l \neq k$), entonces

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq_{lr} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Teorema 2.8.4. Sea $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes no negativas con densidades logcóncavas. Sean M y N dos variables aleatorias discretas positivas valoradas enteras tal que $M \leq_{lr} N$. Entonces

$$\sum_{i=1}^M X_i \leq_{lr} \sum_{i=1}^N X_i.$$

Teorema 2.8.5. Sea $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes no negativas con densidades logcóncavas. Sean M y N dos variables aleatorias discretas positivas valoradas enteras tal que $M \leq_{hr} N$. Entonces

$$\sum_{i=1}^M X_i \leq_{lr} \sum_{i=1}^N X_i.$$

Teorema 2.8.6. Sea $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes no negativas que son IFR, es decir tienen tasa de fallo reversa decreciente. Sean además, M y N dos variables aleatorias discretas positivas valoradas enteras tal que $M \leq_{lr} N$. Entonces

$$\sum_{i=1}^M X_i \leq_{hr} [\leq_{rh}] \sum_{i=1}^N X_i.$$

Teorema 2.8.7. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes y sean Y_1, Y_2, \dots, Y_n variables aleatorias independientes, todas con distribuciones absolutamente continuas. Si $X_i \leq_{lr} Y_j$, para todas las elecciones de i y j , entonces

$$X_{(k)} \leq_{lr} Y_{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Demostración. Denotemos la densidad, la función de distribución y la función de supervivencia de X_i por f_i, F_i y \bar{F}_i , respectivamente, $i = 1, 2, \dots, n$. Similarmente, denotemos la densidad, la función de distribución y la función de supervivencia de Y_i por g_i, G_i y \bar{G}_i , respectivamente, $i = 1, 2, \dots, n$. Puesto que f_i/g_i es decreciente se sigue que F_i/G_i y \bar{F}_i/\bar{G}_i son también decrecientes. Las funciones de densidad de las $X_{(k)}$ y $Y_{(k)}$ son

$$f_{(k)} = \sum f_{\pi_1} F_{\pi_2} \dots F_{\pi_k} \bar{F}_{\pi_{k+1}} \dots \bar{F}_{\pi_n}$$

y

$$g_{(k)} = \sum g_{\pi_1} G_{\pi_2} \dots G_{\pi_k} \bar{G}_{\pi_{k+1}} \dots \bar{G}_{\pi_n},$$

respectivamente, donde las sumas están encima de todas las permutaciones de $(1, 2, \dots, n)$. Por consiguiente,

$$\frac{f_{(k)}}{g_{(k)}} = \frac{\sum f_{\pi_1} F_{\pi_2} \dots F_{\pi_k} \bar{F}_{\pi_{k+1}} \dots \bar{F}_{\pi_n}}{\sum g_{\pi_1} G_{\pi_2} \dots G_{\pi_k} \bar{G}_{\pi_{k+1}} \dots \bar{G}_{\pi_n}}$$

Sin embargo, para cualquier elección de dos permutaciones $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ y $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ tenemos

$$\frac{f_{\pi_1} F_{\pi_2} \dots F_{\pi_k} \bar{F}_{\pi_{k+1}} \dots \bar{F}_{\pi_n}}{g_{\sigma_1} G_{\sigma_2} \dots G_{\sigma_k} \bar{G}_{\sigma_{k+1}} \dots \bar{G}_{\sigma_n}}.$$

es decrecientes porque $f_i/g_i, F_i/G_i$, y \bar{F}_i/\bar{G}_i son decrecientes. Por lo tanto, $f_{(k)}/g_{(k)}$ es decreciente. \square

Teorema 2.8.8. Sea X una variable aleatoria no negativa con una densidad logcóncava, y sea $a \leq 1$ una constante positiva. Entonces $aX \leq_{lr} X$.

Una idea de la prueba de este teorema puede ser vista en [35] y alternativamente la prueba del teorema 2.6.10 puede ser de gran utilidad.

Teorema 2.8.9. Sean X y Y dos variables aleatorias independientes tales que ambas tienen distribuciones absolutamente continuas o ambas tienen distribuciones discretas

(i) Si $X \leq_{lr} Y$, entonces $X \leq_{lr} \max\{X, Y\}$.

(ii) Si $X \leq_{lr} Y$, entonces $Y \geq_{lr} \min\{X, Y\}$.

Demostración. Primero probemos (i) para el caso absolutamente continuo. Sean F y f la función de distribución y la función de densidad de X , respectivamente, y sean G y g la función de distribución y la función de densidad de Y , respectivamente. Entonces, la función de densidad h del $\max\{X, Y\}$ esta dada por

$$h(x) = f(x)G(x) + g(x)F(x).$$

Así,

$$\frac{h(x)}{f(x)} = G(x) + \frac{g(x)}{f(x)}F(x),$$

el cual es creciente en x por el supuesto $X \leq_{lr} Y$. Esto es,

$$X \leq_{lr} \max\{X, Y\}.$$

La prueba de (ii) para el caso absolutamente continuo es similar, tomando en cuenta el hecho de que la función de densidad del $\min\{X, Y\}$ es

$$f(x)\bar{G}(x) + g(x)\bar{F}(x).$$

Una prueba alternativa de (i) y (ii) para el caso absolutamente continuo puede ser construida usando el Teorema (2.8.7).

Para probar (i) para el caso discreto, note que

$$P\{\max\{X, Y\} = k\} = P\{X = k\}P\{Y \leq k\} + P\{Y = k\}P\{X < k\}.$$

Así,

$$\frac{P\{\max\{X, Y\} = k\}}{P\{X = k\}} = P\{Y \leq k\} + \frac{P\{Y = k\}}{P\{X = k\}}P\{X < k\}$$

el cual es creciente en x por el supuesto $X \leq_{lr} Y$. Esto es,

$$X \leq_{lr} \max\{X, Y\}.$$

La prueba de (ii) para el caso discreto es similar. □

El siguiente resultado es más fuerte que 2.8.9, pero pero podemos solamente probarlo para variables aleatorias continuas.

Teorema 2.8.10. Sean X, Y y Z tres variables aleatorias independientes con funciones de distribución absolutamente continuas.

(i) Si $X \leq_{lr} Y \leq_{lr} Z$, entonces $\text{el } \max\{X, Y\} \leq_{lr} \max\{Y, Z\}$.

(ii) Si $X \leq_{lr} Y \leq_{lr} Z$, entonces $\text{el } \min\{X, Y\} \leq_{lr} \min\{Y, Z\}$.

Demostración. Primero probemos (i) Sean F, G y H las funciones de distribución de X, Y y Z , respectivamente, y sean f, g y h las correspondientes funciones de densidad. La función de densidad del $\max\{X, Y\}$ está dada por

$$f(x)G(x) + g(x)F(x),$$

y la función de densidad del $\max\{Y, Z\}$ está dada por

$$g(x)H(x) + h(x)G(x).$$

La razón de estas dos funciones de densidad puede ser escrita como

$$\frac{f(x)G(x) + g(x)F(x)}{g(x)H(x) + h(x)G(x)} = \frac{f(x)/g(x) + F(x)/G(x)}{h(x)/g(x) + H(x)/G(x)} \quad (2.8.4)$$

Por el supuesto f/g es decreciente. También, F/G es decreciente por el Teorema 2.8.2 y el Lema 2.6.9. Así, el numerador del lado derecho de (2.8.4) es decreciente.

Similarmente puede mostrarse que el denominador del lado derecho de (2.8.4) es creciente. Por consiguiente la expresión en (2.8.4) es decreciente, y la prueba de (i) es completa.

La prueba de (ii) es similar. Las funciones de densidad del $\min\{X, Y\}$ y el $\min\{Y, Z\}$ están dadas por

$$f(x)\bar{G}(x) + g(x)\bar{F}(x)$$

y

$$g(x)\bar{H}(x) + h(x)\bar{G}(x),$$

respectivamente.

La prueba de que su razón es creciente es similar a la prueba de que son decrecientes, como se mostró.

□

Una prueba alternativa de éste Teorema puede ser construida usando el Teorema (2.8.2).

El orden \leq_{lr} puede ser usado para caracterizar variables aleatorias con densidades logcóncavas.

El siguiente resultado lista varias de tales caracterizaciones. El muestra que la lonconcauidad puede ser interpretada como una noción de envejecimiento en la teoría de la confiabilidad para un correcto uso del ordenamiento de razón de verosimilitud.

Teorema 2.8.11. *La variable aleatoria X tiene una densidad logcóncava (esto es, una frecuencia de Polya de orden 2 (PF_2)) si, y solamente si, una de las siguientes condiciones equivalentes se cumple*

(i) $[X - t \mid X > t] \geq_{lr} [X - t' \mid X > t']$ siempre que $t \leq t'$

(ii) $X \geq_{lr} [X - t \mid X > t]$ para todo $t \geq 0$ (cuando X es una variable aleatoria no negativa)

(iii) $X + t \leq_{lr} X + t'$ siempre que $t \leq t'$.

Las variables aleatorias que satisfacen (i) en el Teorema (2.8.11) (y por tanto cualquiera de las condiciones de ese Teorema), se dice que tiene la propiedad *ILR* (razón de verosimilitud creciente.)

Otra conexión entre la loconcauidad y el orden de razón de verosimilitud es ilustrado en el siguiente resultado.

Teorema 2.8.12. *Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes que tienen función de densidad logcóncava. Entonces*

$$[X_i \mid \sum_{j=1}^n X_j = s] \leq_{lr} [X_i \mid \sum_{j=1}^n X_j = s']$$

siempre que $s \leq s'$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Demostración. Puesto que la convolución de las funciones de densidad logcóncava es logcóncava, basta probar el resultado para $n = 2$ e $i = 1$. Sean f_1 y f_2 las funciones de densidad de X_1 y X_2 , respectivamente. La densidad condicional de X_1 , dado $X_1 + X_2 = s$, es

$$f_{X_1|X_1+X_2=s}(x_1) = \frac{f_1(x_1)f_2(s-x_1)}{\int f_1(u)f_2(s-u)du}.$$

Así,

$$\frac{f_{X_1|X_1+X_2=s'}(x_1)}{f_{X_1|X_1+X_2=s}(x_1)} = \frac{f_2(s' - x_1) \int f_1(u)f_2(s - u)du}{f_2(s - x_1) \int f_1(u)f_2(s' - u)du} \quad (2.8.5)$$

La logconcauidad de f_2 implica que la expresión en 2.8.5 crece en x_1 . Por el Teorema 2.8.2 la prueba es completa. \square

2.9. Orden de vida media residual

Definición 2.9.1. Sea X una variable aleatoria que representa el tiempo de vida de un dispositivo con función de supervivencia \bar{F} . Se define la vida residual en el instante t como la variable aleatoria $X_t = [X - t | X > t]$ que posee función de supervivencia

$$P(X_t > a) = P[X - t > a | X > t] = \frac{P[X > a + t]}{P[X > t]}$$

De donde

$$\bar{F}_{X_t}(a) = \frac{\bar{F}(a + t)}{\bar{F}(t)}, \quad a \geq 0, \quad t \geq 0$$

Siempre que $\bar{F}(t) > 0$

Definición 2.9.2. (Tiempo de vida media residual)

Dada una variable aleatoria continua X , se define su función de vida media residual como

$$m(t) = \begin{cases} E[X_t], & \text{si } \bar{F}(t) > 0; \\ 0, & \text{Si } \bar{F}(t) = 0. \end{cases} \quad (2.9.1)$$

Observación 2.9.1. La función vida media residual puede expresarse como

$$m(t) = \int_t^\infty \frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(t)} du$$

Siempre que $\bar{F}(t) > 0$

Definición 2.9.3. Sean X y Y dos variables aleatorias no negativas. La variable aleatoria X se dice que es menor que la variable aleatoria Y en el sentido del orden de vida media residual (denotado como $X \leq_{mrl} Y$) si

$$m_X(t) \leq m_Y(t), \quad t \geq 0. \quad (2.9.2)$$

Observación 2.9.2. Análogamente a 2.9.2 se puede mostrar que $X \leq_{mrl} Y$, si y solo si

$$\bar{G}(t) \int_t^\infty \bar{F}(u) du \leq \bar{F}(t) \int_t^\infty \bar{G}(u) du \quad \text{para todo } t \quad (2.9.3)$$

2.9.1. La relación entre la vida media residual y algunos otros órdenes estocásticos

Teorema 2.9.4. Si X y Y son dos variables aleatorias tales que $X \leq_{hr} Y$, entonces $X \leq_{mrl} Y$.

Demostración. Sean $\lambda_X(t)$ y $\lambda_Y(t)$ las tasas de fallo para las variables aleatorias X y Y , respectivamente. Entonces como se mostró en la sección 1.4, la tasa de fallo se define como

$$\lambda_X(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[T \leq t + \Delta t \mid T \geq t]}{\Delta t}$$

De donde

$$\lambda_X(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1 - P[T > t + \Delta t \mid T > t]}{\Delta t} \right]$$

esto es,

$$\lambda_X(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ 1 - \frac{\bar{F}_X(t + \Delta t)}{\bar{F}_X(t)} \right\}.$$

Análogamente,

$$\lambda_Y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ 1 - \frac{\bar{F}_Y(t + \Delta t)}{\bar{F}_Y(t)} \right\}$$

ahora bien, como $X \leq_{hr} Y$, entonces $\lambda_X(t) \geq \lambda_Y(t)$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_X(t + \Delta t)}{\bar{F}_X(t)} &\leq \frac{\bar{F}_Y(t + \Delta t)}{\bar{F}_Y(t)} \Leftrightarrow E(X_t) \leq E(Y_t) \\ &\Leftrightarrow m_X(t) \leq m_Y(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty \frac{\bar{F}_X(t + \Delta t)}{\bar{F}_X(t)} dt \leq \int_0^\infty \frac{\bar{F}_Y(t + \Delta t)}{\bar{F}_Y(t)} dt$$

Lo cual significa que

$$\int_0^{\infty} \bar{F}_{X_t}(t) dt \leq \int_0^{\infty} \bar{F}_{Y_t}(t) dt$$

y por lo tanto $m_X(t) \leq m_Y(t)$, esto es

$$X \leq_{mlr} Y.$$

□

Teorema 2.9.5. Sean X y Y dos variables aleatorias con m y l funciones mrl , respectivamente. Supongamos que $m(t)/l(t)$ crece en t . Entonces, si $X \leq_{mlr} Y$, $X \leq_{hr} Y$ y en particular, $X \leq_{st} Y$.

Demostración. No es difícil verificar que m es diferenciable en $\{t : P\{X > t\} > 0\}$ y que si X tiene función tasa de fallo λ_1 , entonces

$$\lambda_1(t) = \frac{m'(t) + 1}{m(t)},$$

donde m' denota la derivada de m . Similarmente, si Y tiene la función tasa de fallo λ_2 , entonces

$$\lambda_2(t) = \frac{l'(t) + 1}{l(t)}.$$

La monotonicidad de $m(t)/l(t)$, junto con 2.9.2, implica que

$$\lambda_1(t) = \frac{m'(t)}{m(t)} + \frac{1}{m(t)} \geq \frac{l'(t)}{l(t)} + \frac{1}{l(t)} = \lambda_2(t),$$

esto es,

$$X \leq_{hr} Y$$

□

2.9.2. Algunas propiedades de clausura

En general, si $X_1 \leq_{mrl} Y_1$ y $X_2 \leq_{mrl} Y_2$, donde X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes y Y_1 y Y_2 también son variables aleatorias independientes, entonces no es necesariamente cierto que $X_1 + X_2 \leq_{mrl} Y_1 + Y_2$. Sin embargo, si éstas variables aleatorias son IFR, entonces es cierto.

Lema 2.9.6. Si las variables aleatorias X y Y son tales que $X \leq_{mrl} Y$ y si Z es una variable aleatoria independiente IFR de X y Y , entonces

$$X + Z \leq_{mrl} Y + Z. \tag{2.9.4}$$

Demostración. Denotamos por f_W y \bar{F}_W la función de densidad y la función de supervivencia de cualquier variable aleatoria W .

Note que

$$\begin{aligned}
 \int_{x=s}^{\infty} \bar{F}_{X+Z}(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_X(u)\bar{F}_Z(s-u)du \quad \forall s. \text{ Ahora para } s \leq t, \text{ calculamos} \\
 & \int_{x=s}^{\infty} \bar{F}_{X+Z}(x)dx \int_{y=t}^{\infty} \bar{F}_{Y+Z}(y)dy - \int_{x=t}^{\infty} \bar{F}_{X+Z}(x)dx \int_{y=s}^{\infty} \bar{F}_{Y+Z}(y)dy \\
 &= \int_v \int_{u \geq v} [\bar{F}_X(u)\bar{F}_Z(s-u)\bar{F}_Y(v)\bar{F}_Z(t-v) + \bar{F}_X(v)\bar{F}_Z(s-v)\bar{F}_Y(u)\bar{F}_Z(t-u)]dudv \\
 &= - \int_{x=v} \int_{u \geq v} [\bar{F}_X(u)\bar{F}_Z(t-u)\bar{F}_Y(v)\bar{F}_Z(t-v) + \bar{F}_X(v)\bar{F}_Z(t-v)\bar{F}_Y(u)\bar{F}_Z(s-u)]dudv \\
 &= \int_v \int_{u \geq v} [\int_{x=u}^{\infty} \bar{F}_X(x)dx \cdot \bar{F}_Y(v) - \int_u^{\infty} \bar{F}_Y(x)dx \cdot \bar{F}_X(v)] [f_Z(s-u)\bar{F}_Z(t-v) \\
 & \qquad \qquad \qquad - f_Z(t-u)\bar{F}_Z(s-v)]dudv,
 \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es obtenida por integración por partes y por agrupación de términos. Puesto que $X \leq_{mrl} Y$ se sigue de 2.9.3 que la expresión dentro del primer conjunto de corchetes en la última integral es no positiva. Puesto que Z es IFR puede verificarse que la cantidad en el segundo par de corchetes en la última integral es también no positiva. Por consiguiente, la integral es no negativa. Esto prueba (2.9.4). \square

Definición 2.9.7. *La variable aleatoria X se dice (o tiene) vida media residual decreciente (DMRL), si $m(t)$ es decreciente en t .*

Lema 2.9.8. *Si las variables aleatorias X e Y son tales que $X \leq_{hr} Y$ y si Z es una variable aleatoria independiente DMRL de X y Y , entonces $X + Y \leq_{mrl} Y + Z$*

Demostración. Integrando la identidad en la prueba del lema 2.6.7, obtenemos que, para $s \leq t$ se sigue que

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=s}^{\infty} \bar{F}_{X+Z}(x)dx \int_{y=t}^{\infty} \bar{F}_{X+Z}(y)dy - \int_{x=t}^{\infty} \bar{F}_{X+Z}(x)dx \int_{y=s}^{\infty} \bar{F}_{X+Z}(y)dy \\
 & \qquad \qquad \qquad = \int_v \int_{u \geq v} [\bar{F}_X(u) - f_Y(v) - f_X(v)\bar{F}_Y(u)] \\
 & \times \left[\int_{y=t}^{\infty} \bar{F}_Z(y-v)dy \cdot \bar{F}_Z(s-u) - \int_{x=s}^{\infty} \bar{F}_Z(x-v)dx \cdot \bar{F}_Z(t-y) \right] dudv.
 \end{aligned}$$

El resultado se obtiene de los supuestos. \square

Teorema 2.9.9. *Sea X una variable aleatoria no negativa DMRL, y sea $a \leq 1$ una constante positiva. Entonces*

$$aX \leq_{mrl} X.$$

Demostración. Es fácil verificar que la función de vida media residual de aX está dada por $am(\frac{t}{a})$, para todo t , donde m es la función de vida media residual de X .

Ahora

$$am(\frac{t}{a}) \leq m(\frac{t}{a}) \leq m(t) \text{ para todo } t,$$

donde la primera desigualdad se sigue de $a \in [0,1]$ y la segunda desigualdad se sigue del supuesto de que es DMRL. La prueba ahora se sigue de (2.9.2). \square

2.9.3. Una propiedad en la teoría de confiabilidad

Teorema 2.9.10. *La variable aleatoria X es DMRL, si y solamente si, cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes se cumple*

- (i) $[X - t \mid X > t] \geq_{mrl} [X - t' \mid X > t']$ siempre que $t \leq t'$
- (ii) $X \geq_{mrl} [X - t \mid X > t]$ para todo $t \geq 0$ (cuando X es una variable aleatoria no negativa)
- (iii) $X + t \leq_{mrl} X + t'$ siempre que $t \leq t'$

CAPÍTULO 3

Comparaciones Estocásticas entre Estadísticos de Orden

Los estadísticos de orden juegan un papel importante en la teoría de confiabilidad y estadística en general. En el tratamiento específico de sistemas k de n adquieren gran importancia comparaciones estocásticas entre estadísticos de orden. Recordando algunas definiciones presentadas en capítulos anteriores, un sistema k de n cumplirá la labor con éxito si y solo si al menos k de las n componentes que lo conforman la cumple. El tiempo de vida de un sistema de esta naturaleza, con componentes cuyos tiempos de vida están representados por las variables *iid* X_1, X_2, \dots, X_n , corresponde al $(n - k + 1)$ -ésimo estadístico de orden. Luego, el estudio de un sistema k de n es equivalente al estudio de la distribución del estadístico de orden $(n - k + 1)$. Por ejemplo, un sistema serie de n componentes es un sistema n de n , y un sistema paralelo es un sistema 1 de n .

Sistemas serie y paralelo son simples ejemplos de sistemas coherentes que fueron definidos en el capítulo 1 y han sido estudiados fuertemente en este tiempo; en particular cuando sus componentes son *iid*. Sin embargo, no es común encontrar estudios acerca de sistemas cuyas componentes no sean *iid*.

Algunos resultados generales de estos sistemas han sido obtenidos en Plender and Proschan (1971) [27], Proschan and Sethuraman (1976) [28], Bapat and Kochar (1994) [1], Boland and Hollander (1996) [10] y Kochar and Rojo (1996) [18], entre otros.

En este capítulo se retomarán conceptos importantes tales como estadísticos de orden, su función de densidad y distribución, que han sido definidos previamente en la sección 2.6. Se presentarán algunos resultados importantes de investigaciones recientes que surgen bajo la comparación estocástica entre estadísticos de orden con respecto a los órdenes de razón de verosimilitud, tasa de fallo y tasa de fallo reversa.

Desde la importancia de la aplicación se presentan aquí algunos resultados y generalizaciones que en confiabilidad adquieren relevancia, por ejemplo, en [34], se demuestra que la uniforme distribución de K reservas en un sistema serie con componentes y reservas *iid* minimiza la tasa de fallo del tiempo de vida del sistema. En este trabajo se demostrará que la uniforme distribución de K reservas en un sistema *2 de 3* maximiza la función de confiabilidad del sistema. Sección (3.2)

Al examinar características del *i-ésimo* estadístico de orden, estudiadas en [18], se analizan algunos sistemas, donde sus componentes son a su vez sistemas series, obteniendo los siguientes resultados.

- Sistema *k de n* cuyas componentes son sistemas series de componentes exponenciales. En este caso se obtiene número de componentes que deben de ir en cada uno de los n sistemas series para maximizar la función de confiabilidad del sistema en general. También se obtiene la ubicación menos adecuada bajo el mismo criterio. Sección (3.3)
- Sistema *1 de 2* cuyas componentes son sistemas series de componentes exponenciales de distinto parámetro. En este caso se obtiene número de componentes que debe de ir en cada uno de los 2 sistemas series con el objetivo de tener la mejor configuración en el sentido del orden de razón de verosimilitud. También se obtiene la ubicación menos adecuada bajo el mismo criterio. Sección (3.4)
- Sistema *1 de n* cuyas componentes son sistemas series de componentes exponenciales. En este caso se obtiene cotas superior e inferior para la tasa de fallo reversa del tiempo de vida del sistema. Sección (3.5)

3.1. Preliminares

Teorema 3.1.1. Sean X_1, \dots, X_n variables *iid* con función de distribución F y función de densidad de probabilidad f , continua en $(-\infty \leq) a < x <$

b ($\leq \infty$) y cero en otro caso. Sean $X_{[1:n]}, X_{[2:n]}, \dots, X_{[n:n]}$ los estadísticos de orden; entonces la función de densidad de probabilidad $g(x_{[j:n]})$ de $X_{[j:n]}$ se expresa:

$$g(x_{[j:n]}) = \begin{cases} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} [F(x_{[j:n]})]^{j-1} [1 - F(x_{[j:n]})]^{n-j} f(x_{[j:n]}) & \text{si } a < x_{[j:n]} < b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

[Roussas G.][30]

Teorema 3.1.2. Sean X_1, \dots, X_n y Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, continuas y no negativas, con función de distribución $F(t)$ y densidad $f(t)$. Sea $X_{[r:n]}$ el r -ésimo estadístico de orden de X_1, \dots, X_n y $Y_{[r:n]}$ el r -ésimo estadístico de orden de Y_1, \dots, Y_n . Sea $Z_{[r:n]}$ el r -ésimo estadístico de orden de $\max(X_1, Y_1), \max(X_2, Y_2), \dots, \max(X_n, Y_n)$, entonces

$$Z_{[r:n]} \geq_{lr} \max \{ X_{[r:n]}, Y_{[r:n]} \}.$$

Con base en el teorema anterior que compara estadísticos de orden, Horsinger Singh y R.S. Singh en su artículo (On Allocation Spares At Component Level Versus System Level [33]) han concluido que para un sistema k de n de componentes *iid* y teniendo n reservas igualmente distribuidas, es mejor ubicar una reserva activa en cada componente, en vez de duplicar el sistema. Inicialmente se propone teniendo en cuenta el orden estocástico de la tasa de fallo, pero la rigurosidad de los autores los lleva a establecer una tesis más fuerte y demuestran el principio bajo el criterio del orden de razón de verosimilitud; orden que implica el orden tasa de fallo y tasa de fallo reversa.

Definición 3.1.3 (Orden de Mayorización). Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ un vector m -dimensional de componentes no negativas. $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[m]}$ denota las componentes de x en orden decreciente. El vector x es mayorizado por el vector $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ y lo denotamos por $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ si

$$\sum_{i=1}^j x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^j y_{[i]} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, m-1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m x_{[i]} = \sum_{i=1}^m y_{[i]}.$$

Definición 3.1.4 (Función Schur Convexa - Schur Cóncava). Sea ϕ una función de valor real definida sobre $[0, \infty)^m$. La función ϕ se llama Schur convexa si $\phi(x) \leq \phi(y)$ siempre que $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$. La función ϕ se llama Schur cóncava si $-\phi$ es Schur convexa.

(Marshall and Olkin, 1979, p.54 [23]).

El orden de mayorización no es un orden total, puesto que si $\mathbf{x} = (40, 40, 20)$ y $\mathbf{y} = (50, 25, 25)$ no se cumple $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ y tampoco $\mathbf{y} \preceq \mathbf{x}$. Sin embargo, el siguiente Lema ilustra que el vector m - dimensional de componentes iguales y no negativas es comparable con cualquiera bajo el orden de mayorización.

Lema 3.1.5. *Sea $\mathbf{k}_0 = (k, k, \dots, k)$ un vector m dimensional de componentes iguales y no negativas y $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$, un vector de componentes no negativas tal que $\sum_{i=1}^m k_i = mk$, entonces $\mathbf{k}_0 \preceq \mathbf{k}$ para todo \mathbf{k}*

Demostración. Sea $K = mk = \sum_{i=1}^m k_{[i]}$ y $j < m$, ya que $k_{[1]} \geq k_{[2]}, \dots, \geq k_{[m]}$ entonces

$$mk_{[1]} \geq jk_{[1]} + k_{[j+1]} + k_{[j+2]} + \dots + k_{[m]}$$

$$mk_{[2]} \geq jk_{[2]} + k_{[j+1]} + k_{[j+2]} + \dots + k_{[m]}$$

.

.

.

$$mk_{[j]} \geq jk_{[j]} + k_{[j+1]} + k_{[j+2]} + \dots + k_{[m]}.$$

Luego

$$\begin{aligned} m \sum_{i=1}^j k_{[i]} &\geq j \left[\sum_{i=1}^j k_{[i]} + k_{[j+1]} + k_{[j+2]} + \dots + k_{[m]} \right] \\ &\geq j \sum_{i=1}^m k_{[i]} \end{aligned}$$

Por tanto, $\sum_{i=1}^j k_{[i]} \geq \frac{jK}{m} = jk$. Luego, $\sum_{i=1}^j k_{[i]} \geq \sum_{i=1}^j k_i$; de donde $\mathbf{k}_0 \preceq \mathbf{k}$. \square

3.2. Ubicación Óptima de Reservas en un Sistema 2 de 3 con Respecto al Orden Estocástico Usual

Se considera el problema de ubicar K reservas en un sistema 2 de 3 donde cada componente debe de tener k_1, k_2, k_3 reservas activas respectivamente,

3.2 Ubicación Óptima de Reservas en un Sistema 2 de 3 con Respecto al Orden Estocástico Usual 59

tal que $k_1 + k_2 + k_3 = K$. Sea $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ un vector de componentes no negativas, la coordenada representa el número de reservas que se ubicarán en la respectiva componente. Sea $T_s(\mathbf{k})$ variable aleatoria que representa el tiempo de vida del sistema resultante. Bajo el supuesto que las componentes junto con las reservas son *iid* y su función de distribución es $F(x)$ entonces, la función de confiabilidad del sistema está dada por

$$\bar{F}_{T_s(\mathbf{k})} = 2F^{K+3}(x) - F^{k_1+k_2+2}(x) - F^{k_1+k_3+2}(x) - F^{k_2+k_3+2}(x) + 1$$

Lema 3.2.1. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vectores de componentes no negativas.

Sean $\mathbf{w} = (x_{[1]} + x_{[2]}, x_{[1]} + x_{[3]}, x_{[2]} + x_{[3]})$ y $\mathbf{u} = (y_{[1]} + y_{[2]}, y_{[1]} + y_{[3]}, y_{[2]} + y_{[3]})$. Si $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ entonces $\mathbf{w} \preceq \mathbf{u}$.

Demostración. Por hipótesis se tiene que $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$. Luego,

$$\begin{aligned} x_{[1]} &\leq y_{[1]} \\ x_{[1]} + x_{[2]} &\leq y_{[1]} + y_{[2]} \\ x_{[1]} + x_{[2]} + x_{[3]} &= y_{[1]} + y_{[2]} + y_{[3]}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición (3.1.3),

$$\begin{aligned} x_{[1]} + x_{[2]} &\geq x_{[1]} + x_{[3]} \geq x_{[2]} + x_{[3]} \\ y_{[1]} + y_{[2]} &\geq y_{[1]} + y_{[3]} \geq y_{[2]} + y_{[3]}. \end{aligned}$$

Considerando los vectores \mathbf{w} y \mathbf{u} , se tiene que

$$w_{[1]} = x_{[1]} + x_{[2]} \leq y_{[1]} + y_{[2]} = u_{[1]}$$

$$\begin{aligned} w_{[1]} + w_{[2]} &= (x_{[1]} + x_{[2]}) + (x_{[1]} + x_{[3]}) \\ &= (x_{[1]} + x_{[2]} + x_{[3]}) + x_{[1]} \\ &= (y_{[1]} + y_{[2]} + y_{[3]}) + x_{[1]} \\ &\leq (y_{[1]} + y_{[2]} + y_{[3]}) + y_{[1]} \\ &= (y_{[1]} + y_{[2]}) + (y_{[1]} + y_{[3]}) \\ &= u_{[1]} + u_{[2]}. \end{aligned}$$

Además,

$$w_{[1]} + w_{[2]} + w_{[3]} = 2(x_{[1]} + x_{[2]} + x_{[3]}) = 2(y_{[1]} + y_{[2]} + y_{[3]}) = u_{[1]} + u_{[2]} + u_{[3]}.$$

□

Lema 3.2.2. Si $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es una función convexa, entonces $\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m f(x_i)$ es una función Schur convexa de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

(Marshall and Olkin, 1979, p.64 [23]).

Claramente si $0 < p < 1$ entonces $g(x) = p^x$ es una función convexa. Luego, por el Lema (3.2.2) la función

$$h(x_1, x_2, x_3) = p^{x_1} + p^{x_2} + p^{x_3}$$

es una función Schur convexa.

Sea $\mathbf{k}_0 = (k, k, k)$ un vector de componentes iguales y no negativas. Del Lema (3.1.5) se garantiza que $\mathbf{k}_0 \prec \mathbf{k}$. Por el Lema (3.2.1) y sabiendo que h es Schur convexa, se verifica que

$$3p^{2k} \leq p^{k_{[1]}+k_{[2]}} + p^{k_{[1]}+k_{[3]}} + p^{k_{[2]}+k_{[3]}}$$

de donde se obtiene,

$$2p^{K+3} - 3p^{2k+2} + 1 \geq 2p^{K+3} - p^{k_{[1]}+k_{[2]}+2} - p^{k_{[1]}+k_{[3]}+2} - p^{k_{[2]}+k_{[3]}+2} + 1$$

siendo, $K = k_1 + k_2 + k_3$.

En particular, para $p = F(x)$ se verifica

$$2F^{K+3}(x) - 3F^{2k+2}(x) + 1 \geq 2F^{K+3}(x) - F^{k_{[1]}+k_{[2]}+2}(x) - F^{k_{[1]}+k_{[3]}+2}(x) - F^{k_{[2]}+k_{[3]}+2}(x) + 1.$$

Logrando dar prueba al siguiente teorema

Teorema 3.2.3.

$$\bar{F}_{T_s(\mathbf{k}_0)} \geq \bar{F}_{T_s(\mathbf{k})}$$

De donde se concluye que la uniforme distribución de las K reservas maximiza la función de confiabilidad del sistema.

3.3. Sistema k de n cuyas Componentes son Sistemas Series de Componentes Exponenciales

En esta sección se procederá a comparar, bajo el criterio del orden estocástico usual, configuraciones k de n donde las componentes del sistema

son a su vez sistemas series, de componentes exponenciales. El estudio se hace con base en el supuesto que en el j -ésimo sistema serie hay una componentes inicial de parámetro λ y m_j componentes adicionales de parámetro α formando un sistema serie. Dado un número M de componentes de parámetro α se pueden formar múltiples configuraciones k de n ; el objetivo se centra en encontrar la mejor y también menos adecuada de estas configuraciones en el sentido del orden estocástico usual.

Teorema 3.3.1. *Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias exponenciales independientes, con tasa de fallo λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Sea Y_1, \dots, Y_n otro conjunto de variables aleatorias exponenciales independientes con tasas de fallo λ_i^* , $i = 1, 2, \dots, n$. Si*

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \succeq \lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*),$$

entonces

$$X_{[1:n]} \equiv_{st} Y_{[1:n]} \text{ y } X_{[j:n]} \geq_{st} Y_{[j:n]}, \text{ para } j = 2, 3, \dots, n.$$

Ver Dykstra R., Kochar S. Rojo J.,[13].

Considerando un sistema k de n de n componentes *iid* por ejemplo exponenciales con parámetro λ , es bien conocido que este parámetro es el inverso de la media o también es la tasa de fallo.

Sean Z_1, \dots, Z_M variables aleatorias independientes exponenciales con tasa de fallo α . Estas variables aleatorias representan el tiempo de vida de M componentes adicionales que se ubicarán formando sistemas series con las componentes iniciales de parámetro λ . Sea m_j el número de componentes adicionales que se ubicarán en serie en la j -ésima componente del sistema k de n , de tal manera que $\sum_{j=1}^n m_j = M$. Sea X_j variable aleatoria que representa el tiempo de vida del sistema cuya configuración serie está compuesto por la j -ésima componente exponencial de parámetro λ y las m_j componentes adicionales exponenciales todas ellas con parámetro α . Luego, la tasa de fallo de X_j está dada por

$$\phi_j = \lambda + \alpha m_j.$$

Si el número de componentes adicionales M es un múltiplo del número de componentes n , se podría pensar en una distribución de componentes en forma homogénea, es decir, tener en cada sistema serie el mismo número de componentes. En esta situación la tasa de fallo ϕ_0 de la j -ésima componente junto con las $\frac{M}{n}$ componentes adicionales se expresa

$$\phi_0 = \lambda + \alpha \frac{M}{n}.$$

62 Comparaciones Estocásticas entre Estadísticos de Orden

Sean Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias que representan el tiempo de vida de las n configuraciones serie, cuando se ubican las componentes adicionales de manera uniforme, en este caso las Y_i serán exponenciales con parámetro ϕ_0 . Definiendo $\vec{\phi}_0 = (\phi_0, \phi_0, \dots, \phi_0)$ y $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ los vectores cuyas componentes son las tasas de fallo de la componente inicial junto con las adicionales bajo ubicación homogénea y ubicación no homogénea respectivamente. Es fácil comprobar que

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = \sum_{i=1}^n \phi_0.$$

Por el Lema 3.1.5 se tiene que ϕ_0 es mayorizado por ϕ_1 y por el Teorema 3.3.1

$$X_{[j:n]} \geq_{st} Y_{[j:n]} \text{ para } j = 2, 3, \dots, n,$$

en particular para $j = (n - k + 1)$ con $k = 1, \dots, (n - 1)$. Luego se concluye que la distribución homogénea de componentes adicionales, ubicadas formando un sistema serie con la componente inicial en un sistema k de n , minimiza la función de confiabilidad del sistema, lo cual se podría pensar que es la ubicación menos adecuada en el sentido del orden estocástico usual.

Pensando en la mejor ubicación en este mismo sentido es natural y fácilmente demostrable que debe ser ubicando las M componentes adicionales formando el sistema serie con una sola componente inicial del sistema k de n . Pues si ocurre esto y sabiendo que la tasa de fallo de cada componente inicial del sistema es λ , además ubicando las M componentes adicionales en serie con la j -ésima componente; la tasa de fallo de la j -ésima componente junto con las M adicionales conectadas en serie esta dada por $\lambda + M\alpha$.

Haciendo la comparación de ésta ubicación con otra cualquiera respecto al orden de mayorización se puede definir los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} \phi &= (\lambda, \lambda, \dots, \lambda + M\alpha, \dots, \lambda) \\ \varphi &= (\lambda + \alpha m_1, \lambda + \alpha m_2, \dots, \lambda + \alpha m_j, \dots, \lambda + \alpha m_n) \end{aligned}$$

Lema 3.3.2.

$$\phi \succeq \varphi$$

Demostración. M es el número total de componentes adicionales que se ubicarán en serie junto con una de las componentes iniciales, teniendo en consideración que $M = \sum_{i=1}^n m_{[i]}$, se verifica que

$$\lambda r + M\alpha > \sum_{i=1}^r [\lambda + \alpha m_{[i]}] \quad r = 1, 2, \dots, (n - 1),$$

además,

$$\lambda n + M\alpha = \sum_{i=1}^n [\lambda + \alpha m_{[i]}],$$

luego para $r = 1, 2, \dots, (n - 1)$ se cumple,

$$\sum_{i=1}^r \phi_{[i]} > \sum_{i=1}^r \varphi_{[i]} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n \phi_{[i]} = \sum_{i=1}^n \varphi_{[i]}.$$

De la definición 3.1.3 se concluye la demostración del Lema 3.3.2. □

Con base en el Lema 3.3.2 y el Teorema 3.3.1 se obtiene el resultado referido a la mejor ubicación de componentes adicionales en serie con respecto al orden estocástico usual en un sistema k de n con componentes exponenciales de parámetro λ y componentes adicionales también exponenciales de parámetro α . La conclusión es que todas las M adicionales se deben ubicar con una sola componente inicial.

3.4. Ubicación de Componentes en un Sistema Paralelo con Respecto al Orden de Razón de Verosimilitud

En esta sección se analizará un sistema paralelo de 2 componentes; similar al modelo anterior, cada componente es un sistema serie. Se intentará presentar una interpretación práctica a un resultado teórico obtenido en [13]. Dado un número K de componentes adicionales, varias configuraciones paralelo de dos sistemas series como componentes se podrían formar. El objetivo vuelve ser obtener la mejor de ellas en el sentido de algún orden estocástico. Si se tratase de ubicar reservas en serie en cada una de las componentes del sistema paralelo, debe de ser claro que lo mejor desde el punto de vista del tiempo de vida del sistema, sería no ubicar ninguna, es decir, dejar el sistema sólo con las dos componentes.

Desde el punto de vista teórico adquiere relevancia el teorema que se enunciará mas adelante, y el análisis práctico del mismo, permitirá establecer mejor ubicación y peor dado el supuesto de que fuese obligatorio ubicar un número determinado K de componentes adicionales que serán conectadas en serie con las componentes del sistema paralelo. Esta mejor y peor ubicación se establecerá teniendo en cuenta el orden de razón de verosimilitud.

Se partirá también del supuesto que las componentes iniciales del sistema siguen una distribución exponencial con parámetros λ_1 y λ_2 y las adicionales siguen también una distribución exponencial con parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$.

Teorema 3.4.1. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes exponenciales con tasas de fallo ϕ_1 y ϕ_2 , respectivamente. Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias también exponenciales independientes con respectivas tasas de fallo ϕ_1^* y ϕ_2^* . Entonces,

$$(\phi_1, \phi_2) \succeq (\phi_1^*, \phi_2^*) \implies X_{[2:2]} \geq_{lr} Y_{[2:2]}$$

Demostración. Con las mismas hipótesis de este teorema, Kochar and Rojo (1996) en el artículo *Some New Results on Stochastic Comparisons of Spacings from Heterogeneous Exponential Distributions* demuestran que

$$X_{[2:2]} - X_{[1:2]} \geq_{lr} Y_{[2:2]} - Y_{[1:2]}.$$

Con base en este resultado y el Lemma 14.B.9. del Texto de Shaked and Shanthikumar (1994) se obtiene:

$$X_{[2:2]} = (X_{[2:2]} - X_{[1:2]}) + X_{[1:2]} \geq_{lr} (Y_{[2:2]} - Y_{[1:2]}) + Y_{[1:2]} = Y_{[2:2]}.$$

Con lo que se garantiza que $X_{[2:2]} \geq_{lr} Y_{[2:2]}$.

Para mejores detalles ver [13].

□

Pensando en una interpretación de la relación establecida por el orden de mayorización propuesta en la definición 3.1.3, intuitivamente se concluye que un vector es mayorizado por otro si sus componentes tienen una distribución mas homogénea. Un caso que se puede señalar como extremo está ilustrado mediante el Lema 3.1.5, el cual muestra que si bien el orden de mayorización no es un orden total, como ya se ha dicho, el vector de componentes constantes es mayorizado por cualquier otro vector comparable bajo este orden.

Volviendo al problema de esta sección, se hace necesario recordar o por lo menos saber que la tasa de fallo del tiempo de vida de un sistema serie es la suma de las tasas de fallo de sus componentes, cuando éstas operan de manera independiente. Con estas observaciones previas y el teorema 3.4.1 se comprueba que la ubicación menos adecuada, en el sentido del orden de verosimilitud, de K componentes adicionales exponenciales de parámetro α_i conectadas en serie con las componentes también exponenciales de parámetros λ_1 y λ_2 en un sistema paralelo de dos componentes sería:

Conectar en serie con la componente cuyo parámetro es λ_i $i = 1, 2$ r -componentes adicionales, donde r es el mínimo número entero positivo tal que:

$$\lambda_i + \sum_{i=1}^r \alpha_i \geq \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \sum_{i=1}^K \alpha_i \right).$$

En la otra componente irán $(K-r)$ conectadas en serie. La expresión anterior generará una ubicación homogénea de reservas, luego por el Teorema 3.4.1 se verifica que es la menos conveniente.

Se define

$$\phi_1 = \left(\lambda_1, \lambda_2 + \sum_{i=1}^K \alpha_i \right) \quad y \quad \phi_2 = \left(\lambda_1 + \sum_{i=1}^m \alpha_i, \lambda_2 + \sum_{i=m+1}^K \alpha_i \right)$$

Si $\lambda_1 > \lambda_2$ no se puede afirmar nada acerca de la relación entre ϕ_1 y ϕ_2 bajo mayorización, es decir, depende de los valores de λ_i y α_i . Pero, si $\lambda_1 < \lambda_2$ se verifica siempre que:

$$\phi_1 \succeq \phi_2$$

Lo anterior permite concluir que la mejor configuración de las componentes sería la conexión en serie de las K componentes adicionales con la componente más débil. El débil se refiere a la de mayor tasa de fallo.

3.5. Cotas para la tasa de Fallo Reversa de un Sistema Paralelo de Componentes Exponenciales

En [13] se demuestra que la función tasa de fallo reversa del tiempo de vida de un sistema paralelo de n componentes exponenciales con distinto parámetro es una función Schur-Convexa. Este resultado es muy interesante, debido a que si se tiene un sistema paralelo de n componentes exponenciales de parámetro $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ este tendrá mayor tasa de fallo reversa que aquel sistema paralelo de n componentes exponenciales de parámetro $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{n}$. Esto permitirá que se obtenga una cota inferior para la tasa de fallo reversa de un sistema paralelo con n componentes exponenciales de parámetro distinto, dicha cota estará en términos del promedio aritmético de las n tasas de fallo.

Teorema 3.5.1. *Sea $\tilde{r}(\lambda, t)$ la tasa de fallo reversa de un sistema paralelo de n componentes exponenciales de parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, entonces:*

$$\tilde{r}(\lambda, t) \geq \frac{n\bar{\lambda}}{e^{\bar{\lambda}t} - 1},$$

donde $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{n}$

Demostración. La función de distribución del sistema paralelo de n componentes exponenciales de parámetro distinto está dada por

$$F(\lambda, t) = \prod_{i=1}^n [1 - e^{-\lambda_i t}]$$

y la tasa de fallo reversa se expresa

$$\tilde{r}(\lambda, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{e^{\lambda_i t} - 1}.$$

para $x > 0$ el i -ésimo término de la sumatoria es una función convexa en λ_i , entonces por el Lema (3.2.2) $\tilde{r}(\lambda, t)$ es Schur convexa, además por el Lema (3.1.5) se tiene que:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \succeq (\bar{\lambda}, \bar{\lambda}, \dots, \bar{\lambda})$$

y por Definición (3.1.4) se verifica

$$\tilde{r}(\lambda, t) \geq \frac{n\bar{\lambda}}{e^{\bar{\lambda}t} - 1}$$

□

A continuación se intentará obtener cotas para la tasa de fallo reversa de una configuración paralelo, donde las componentes del sistema son a su vez sistemas series, de componentes exponenciales. El estudio se hace con base en el supuesto que en el j -ésimo sistema serie hay una componentes inicial de parámetro λ y m_j componentes adicionales de parámetro α formando un sistema serie.

Dado un número M de componentes de parámetro α se pueden formar múltiples configuraciones paralelo; el objetivo se centra en la obtención de cotas superior e inferior para la tasa de fallo reversa del tiempo de vida del sistema paralelo.

Considérese un sistema paralelo de componentes exponenciales *iid* con parámetro λ . Sean Z_1, \dots, Z_M variables aleatorias independientes exponenciales con tasa de fallo α . Estas variables aleatorias representan el tiempo de vida de M componentes adicionales que se ubicarán formando sistemas series con las componentes iniciales de parámetro λ . Sea m_j el número de componentes adicionales que se ubicarán en serie en la j -ésima componente del sistema paralelo, de tal manera que $\sum_{j=1}^n m_j = M$. Sea X_j variable aleatoria que representa el tiempo de vida del sistema cuya configuración serie

3.5 Cotas para la tasa de Fallo Reversa de un Sistema Paralelo de Componentes Exponenciales 67

está compuesto por la j -ésima componente exponencial de parámetro λ y las m_j componentes adicionales exponenciales todas ellas con parámetro α . Luego, la tasa de fallo de X_j está dada por

$$\phi_j = \lambda + \alpha m_j.$$

La tasa de fallo reversa del sistema paralelo sería

$$\tilde{r}(\phi, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j}{e^{\phi_j t} - 1}.$$

Sea $\bar{\phi} = \frac{\sum_{j=1}^n \phi_j}{n}$, por el Teorema (3.5.1) se verifica que

$$\tilde{r}(\phi, t) \geq \frac{n\bar{\phi}}{e^{\bar{\phi}t} - 1}$$

Pero,

$$\bar{\phi} = \frac{\sum_{j=1}^n \phi_j}{n} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda + \alpha m_j}{n} = \lambda + \frac{M}{n}\alpha,$$

entonces

$$\tilde{r}(\phi, t) \geq \frac{n\lambda + M\alpha}{e^{(\lambda + \frac{M}{n}\alpha)t} - 1}.$$

Definiendo los siguientes vectores

$$\phi = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda + M\alpha, \dots, \lambda)$$

$$\varphi = (\lambda + \alpha m_1, \lambda + \alpha m_2, \dots, \lambda + \alpha m_j, \dots, \lambda + \alpha m_n),$$

por el Lema (3.3.2) se tiene $\phi \succeq \varphi$; y como la tasa de fallo del sistema paralelo es Schur-Convexa entonces:

$$\begin{aligned} \tilde{r}(\phi, t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j}{e^{\phi_j t} - 1} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\lambda + \alpha m_j}{e^{(\lambda + \alpha m_j)t} - 1} \\ &\leq \frac{(n-1)\lambda}{e^{\lambda t} - 1} + \frac{\lambda + M\alpha}{e^{(\lambda + M\alpha)t} - 1} \end{aligned}$$

Por lo analizado en esta última sección, se concluye que:

$$\frac{n\lambda + M\alpha}{e^{(\lambda + \frac{M}{n}\alpha)t} - 1} \leq \tilde{r}(\phi, t) \leq \frac{(n-1)\lambda}{e^{\lambda t} - 1} + \frac{\lambda + M\alpha}{e^{(\lambda + M\alpha)t} - 1}$$

Conclusiones

Sobre la base del objetivo general propuesto nos permitimos presentar los resultados obtenidos de los problemas asociados a la optimización estocástica y la confiabilidad de sistemas planteados en el trabajo.

1. Considerando el problema de ubicar K reservas en un sistema 2 de 3, donde cada componente debe tener k_1 , k_2 y k_3 reservas activas respectivamente, tal que $k_1 + k_2 + k_3 = K$, y considerando que las componentes junto con las reservas son independientes e idénticamente distribuidas, se demuestra que la ubicación uniforme de las K reservas maximiza la función de confiabilidad del sistema según el orden estocástico usual.
2. Si se considera el problema de encontrar la mejor y la peor ubicación de reservas (componentes) adicionales en serie con respecto al orden estocástico usual en un sistema k de n con componentes exponenciales de igual parámetro y las reservas también exponenciales de igual parámetro, se prueba que la distribución homogénea de componentes adicionales, ubicados formando un sistema serie con la componentes inicial en un sistema k de n , minimiza la función de confiabilidad del sistema. Esto permite afirmar que esta ubicación es la menos adecuada en el sentido del orden estocástico usual.
Igualmente, se demuestra que la mejor ubicación de componentes adicionales en serie con respecto al orden estocástico usual en un sistema k de n con componentes exponenciales de parámetro λ y componentes adicionales también exponenciales de parámetro α es que todas la M componentes adicionales se deben ubicar en una sola

componente inicial.

3. Si se considera el problema de determinar la peor y la mejor ubicación de K reservas adicionales conectadas en serie en un sistema paralelo de 2 componentes con respecto al orden de razón de verosimilitud , y partiendo del supuesto de que las componentes iniciales del sistema siguen una distribución exponencial con parámetros λ_1 y λ_2 , y las componentes adicionales siguen también una distribución exponencial con parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, se demuestra que la ubicación menos adecuada en el sentido del orden de razón de verosimilitud es conectar en serie con la componente cuyo parámetro es λ_i para $i = 1, 2$ r -reservas, donde r es el mínimo número entero positivo tal que

$$\lambda_i + \sum_{i=1}^r \alpha_i \geq \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \sum_{i=1}^K \alpha_i)$$

En la otra componente irán $(K - r)$ componentes conectadas en serie.

Por otra parte, si definimos

$$\phi_1 = \left(\lambda_1, \lambda_2 + \sum_{i=1}^K \alpha_i \right) \quad y \quad \phi_2 = \left(\lambda_1 + \sum_{i=1}^m \alpha_i, \lambda_2 + \sum_{i=m+1}^K \alpha_i \right)$$

de tal manera que si $\lambda_1 > \lambda_2$, no se puede afirmar nada acerca de la relación entre ϕ_1 y ϕ_2 bajo mayorización. Pero, si $\lambda_1 < \lambda_2$ se verifica que

$$\phi_1 \succeq \phi_2$$

Lo anterior permite concluir que la mejor configuración de las componentes sería la conexión en serie de las K componentes adicionales con la componente más débil. El débil se refiere a la de mayor tasa de fallo.

4. Finalmente, si consideramos el problema de obtener cotas para la tasa de fallo reversa del tiempo de vida de un sistema paralelo, donde las componentes del sistema son a su vez sistemas series de componentes exponenciales se demuestra que la tasa de fallo, $\tilde{r}(\lambda, t)$, está acotada inferiormente por $\frac{n\lambda + M\alpha}{e^{(\lambda + \frac{M}{n}\alpha)t} - 1}$ y superiormente por $\frac{(n-1)\lambda}{e^{\lambda t} - 1} + \frac{\lambda + M\alpha}{e^{(\lambda + M\alpha)t} - 1}$, donde M representa el número de componentes de parámetro α y λ el parámetro de la j -ésima componente exponencial.

3.5 Cotas para la tasa de Fallo Reversa de un Sistema Paralelo de Componentes Exponenciales 71

Finalmente, con base en esta ecuación, se concluye que la mejor ubicación de las reservas sería la conexión en serie de las K reservas con la componente más débil, donde débil se refiere a la componente de mayor tasa de fallo en el sistema

Algunas cuestiones para futuras investigaciones

En este trabajo de investigación, el cual es un prerrequisito para optar al título de magíster en matemáticas aplicadas, surgen algunas cuestiones abiertas para una futura investigación. En este sentido finalizaremos esta memoria relacionando, brevemente, algunas inquietudes surgidas como consecuencia de la investigación realizada y cuyo estudio consideramos a corto y mediano plazo.

- 1) Probar que si las componentes y las reservas de un sistema paralelo pertenecen a la clase DFR , la ubicación uniforme de reservas maximiza la tasa de fallo reversa del tiempo de vida del sistema.
- 2) Generar un algoritmo que permita simular y a través del cual se pueda mostrar de manera práctica que

$$\frac{n\lambda + M\alpha}{e^{(\lambda + \frac{M}{n}\alpha)t} - 1} \leq \tilde{r}(\phi, t) \leq \frac{(n-1)\lambda}{e^{\lambda t} - 1} + \frac{\lambda + M\alpha}{e^{(\lambda + M\alpha)t} - 1}$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Bagai. i., Kochar, S.C., (1986.) *On likelihood ratio ordering of order statistics*. Linear Algebra Appl. 199. 282-291.
- [2] Barlow, R.E., (1998) *Engineering Reliability* . ASA-SIAM Series on on Statistics and Applied Probabylity.
- [3] Barlow, R. E., Proschan, F., (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Silver Spring, Maryland.
- [4] Barlow, R. E., Proschan, F., (1992.) *Mathematical Theory of Reability*. Marcel Dekker, Inc. New York.
- [5] Boland, P. J., El-Neweihi, E., Proschan, F., (1992) Stochastic Order for redundancy allocations in serie and parallel systems, *Advances in aplied probability* 24,161-171.
- [6] Boland, P. J. Newehi, E.L. and Proschan, F.(1994). *Applications of hazard rate ording in Reability and order statistics*. Jurnal of applied Probability.
- [7] Boland, P. J., El-Neweihi, E., and Prochan, F.(1995). Component redundancy versus system redundancy in the hazard rate ordering. *IEEE Transaction on Reliability*, 8, 614-619.
- [8] P. Boland, (1998). A reliability comparison of basic sistems using hazard rate function, *Appl. Stochastic Models Data Anal.* 13. 377-384.
- [9] Boland, P. J., El-Neweihi, E., Proschan, F. (1992) Stochastic Order for Redundancy Allocations in Series and Parallel Systems, *Adv. Appl. Prob* 24,161-171.

-
- [10] Boland, P.J, Hollander, M., Joag-Dev, K., Kochar, S., (1996.) *Bivariate dependence properties of order statistics. J. Multivariate Anal.* 56. 75-89.
- [11] Belzunce, F., Franco, M., Ruiz, J.M. and Ruiz, M. L (2002) On partial ordering between coherent Systems with different structures, *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 15,273-293.
- [12] Belzunce, F. (1999): *On a characterization of right spread order by the increasing convex order. Statistics and Probability Letters* 45, 103-110.
- [13] Dykstra, R., Kochar, S., Rojo, J. (1997). *Stochastic coparisons of parallel systems of heterogeneous exponential components.* *Jurnal of Statistical Planning and Inference* 65. 203-221.
- [14] Cai, J. and Kalashnikov, V. (2000). NWU Property of a class of random sums. *J.Appl. Prob.*, 37, 283-289.
- [15] Finkelstein, M. S. (2002). On the reversed hazard rate. *Reliability Engineering and System Safety*, 78, 71-75.
- [16] Gnedenko, B. and Ushakov, I. (1995). *Probabilistic Reliability Engineering.* John Wiley & Sons, Inc.
- [17] Hardy, G. H. Littlewood, J. E. Polya, G.(1934). *Inequetites* Cambridge:Cambridge University Press.
- [18] Kochar, S., Rojo, J., (1996.) *Some new results on stochastic comparisons of spacings from heterogeneous exponencial. J. Multivariate Anal.* 59. 272-281.
- [19] Laniado,R.,H and Mejía. G. (2005).*Ubicación Óptima de Reserva en un Sistema serie con respecto al Orden de Tasa de Fallo.* *Revista Ingeniería y Ciencia.* Universidad Eafit. Medellín 21-27.
- [20] Lawrence, M. L. (1995).*Reliability Probabilistic Models and Statistical Methods.* Prentice-Hall. New Jersey.
- [21] Li, X. and Lu, J. (2003). Stochastic comparisons on residual life and inactivity time of series and parallel systems. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 17, 267-275.
- [22] Mann, N. R. Schaffer, R. E. and Singpurwalla, N. D. (1974.) *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data.* John Wiley & Sons Inc. New York.

-
- [23] Marshall, A. W., Olkin, I.,(1979) *Inequalities: Majorization and Its Applications*. Academic Press. New York.
- [24] Mi, J.(1999). Optimal Active Redundancy Allocations in k -out of- n systems, *J.Appl. Prob* 36, 927-933.
- [25] Müller, A. and Stoyan, D. (2002). *Comparison methods for stochastic models and risks*. John Wiley & Sons, New York.
- [26] Nanda, A. k. Shaked, M. (2002.) *The hazard rate and reversed hazard rate orders, With applications to orders stochastics*. Ann. Inst. Statist.Math; próximo a ser publicado.
- [27] Pledger, G., Proschan, F., (1971). *Compararisons of order statistics and spacings from heterogeneous distributions*. In: Rustagi, J.S. (Ed.), *Optimizing Methods in Statistics*. Academic Press. New York. pp. 89 113.
- [28] Proschan, F., Seturaman, J., (1976.) *Stochastic comparisons of order statistics from heterogeneous populations*. with applications in reliability. *J. Multivaririate Anal.* 6. 608 616.
- [29] Romera, R. Valdés, J. E. and Zequeira, R. I. (2003). Active-Redundancy Allocation in Systems. *IEEE Transactions on Reliability* (aceptado para publicar).
- [30] Roussas G.G., (1973). *A first course in mathematical statistics*. Eddison-Wesley Publishing Company. Massachusetts.
- [31] Ross, S.M., (1983). *Stochastic processes*, second edition, John Willy & Sons, Inc.
- [32] Singh, H., Misra, N.(1994). On redundancy allocations in systems, *J.Appl. Prob* 31, 1004-1014.
- [33] Singh, and Singh, R. S. (1997). On allocation of spares at component level versus system level, *J. Appl. Prob.* 34, pp. 283-287.
- [34] Singh, H. and Singh, R.S.(1997). Note: Optimal Allocation of Resources to Nodes of Series Systems with Respect to Failure Rate Ordering, *Naval Research Logistics*, Vol. 44, pp. 147-152.
- [35] Shaked, M., Shanthikumar, J. (1994). *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press, Inc.

-
- [36] Valdés, J. E. and Zequeira, R. I. (1997.) *Sobre la ubicación óptima de una reserva activa en un sistema serie de dos componentes*
- [37] Valdés, J. E. and Zequeira, R. I. (2003). On the optimal allocation of an active redundancy in a two-component series system. *Statistics and Probability Letters*, 63, July, 235-332.
- [38] Valdés, J. E. and Villegas, J. (2003.) *Ubicación óptima de reservas en un sistema serie*. Revista Colombiana de Estadística. Vol. 26, No 2, pp. 181-187.
- [39] Willmot, G. E. and Lin, X. (2000). *Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications*. Springer.