

Universidad EAFIT
Departamento de Ciencias Básicas

**SOLUCIÓN VISCOSA A UN SISTEMA
DE ELASTICIDAD GENERALIZADO**

Tesis de Maestría en Matemáticas
Aplicadas presentada por:

Adrian Ricardo Gómez Plata

Director:

Miller Cerón Gómez

**Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño**

Universidad EAFIT
Departamento de Ciencias Básicas

**SOLUCIÓN VISCOSA A UN SISTEMA
DE ELASTICIDAD GENERALIZADO**

**Tesis de Maestría en Matemáticas
Aplicadas presentada por:**

Adrian Ricardo Gómez Plata

**Maestría en Matemáticas Aplicadas
Medellin
2011**

Agradecimientos

Esta tesis de maestría se ha podido realizar gracias a la oportuna dirección del profesor Miller Cerón Gómez.

Agradezco a los directivos de la Universidad EAFIT, a la Universidad Militar Nueva Granada, y al departamento de ciencias básicas de la Universidad Libre en Bogotá por brindarme el apoyo logístico y administrativo durante el desarrollo de la maestría.

Finalmente agradezco al profesor Yunguang Lu de la Universidad Nacional de Colombia, por brindarnos su asesoría desinteresada en el planteamiento de los objetivos, que en ese momento se proyectaba como una posible tesis.

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares Matemáticos	1
1.1. Ecuación del Calor	9
1.1.1. Ecuación del calor homogénea	9
1.1.2. Ecuación de calor no homogénea	12
1.2. Ecuación de calor semilineal	14
1.3. Principio del máximo para ecuaciones parabólicas	16
1.4. Teoría básica de leyes de conservación hiperbólica (LCH)	20
2. Soluciones Viscosas	24
2.1. Solución viscosa para una LCH	24
2.2. Solución viscosa para LCH con fuente	28
2.3. Lemas auxiliares para soluciones viscosas.	29
3. Sistemas de Elasticidad Extendidos	33
3.1. Condiciones para el sistema	33
3.2. Soluciones a sistemas de elasticidad sin fuente	34
3.3. Solución a sistemas de elasticidad con fuente	38
Conclusiones	44

Introducción

El estudio de los sistemas de elasticidad puede realizarse desde diversas áreas de la ciencia, e ingeniería. Los ingenieros civiles están interesados en que sus estructuras de concreto mantengan niveles de elasticidad que toleren fenómenos sísmicos, los físicos les interesa tener en cuenta la elasticidad para el estudio de la resistencia de un material, algunos especialistas en física analizan la elasticidad de los fluidos y de ciertos gases.

La elasticidad de un material es definida en ingeniería y física como la relación que se da entre la fatiga y la deformación de un objeto. La elasticidad finita es la teoría del estudio de las grandes deformaciones en los objetos, esta teoría es no lineal y por ende una teoría de difícil tratamiento matemático y físico. En general las teorías de la elasticidad se han convertido en una situación de estudio desde la matemática, debido a su difícil entendimiento como objeto físico, de hecho en libros como el de Gurtin [16] y Ciarlet [15] se hace un estudio interesante de la elasticidad finita y de la elasticidad en tres dimensiones respectivamente, donde el componente matemático es fundamental para dar interpretaciones y argumentaciones al interior de la teoría.

En este trabajo se aborda el estudio de las soluciones de un sistema general de ecuaciones de elasticidad y que son conocidos como sistemas de elasticidad extendidos. Según Lu en [1] este tipo de sistemas generalizan los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales relacionados a un gas politropico, dos sistemas especiales de ecuaciones de Euler y las ecuaciones generales de Euler para un fluido comprensible. El estudio está relacionado a las Ecuaciones diferenciales Parciales, en particular a un tópico especial llamado Leyes de conservación hiperbólica. Las leyes de conservación hiperbólica son un tipo particular de leyes de balance. Para este trabajo se estudiará la búsqueda de

soluciones viscosas a un sistema de elasticidad que presentan conservación de masa y momento, y mostraremos toda la teoría requerida para estimar dichas soluciones. En especial se darán condiciones para demostrar una proposición que se cumple para encontrar ciertas estimaciones de las soluciones del sistema.

Para demostrar algunos teoremas y proposiciones de este trabajo se usan resultados conocidos como los son el principio de contracción de Banach, el principio del máximo, y una metodología inherente a las leyes de conservación hiperbólica que permite estimar soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales hiperbólicos vía sistemas de ecuaciones diferenciales parabólicos.

Finalmente se debe decir que como parte fundamental del trabajo se han demostrado ciertos resultados que se encuentran en la literatura, que no se demuestran con frecuencia en los libros especializados de Ecuaciones Diferenciales Parciales y que sirven para estimar soluciones del sistema de elasticidad estudiado.

El desarrollo del trabajo es como sigue:

En el capítulo 1 se presenta los requerimientos matemáticos para abordar el estudio de los sistemas de elasticidad.

En el capítulo 2 se presentará la teoría que permite encontrar los resultados del capítulo 3.

En el capítulo 3 se establecen las condiciones de los sistemas de elasticidad para poder demostrar la existencia de soluciones viscosas usando el principio del máximo.

Capítulo 1

Preliminares Matemáticos

Diversos fenómenos naturales, expresan comportamientos de conservación o balance como se sabe por ramas de estudio en Física, Química o Economía, ejemplos de este tipo de aplicaciones se pueden ver en [1], [2], [3], [4], [5], [6]. En particular los libros del profesor Plaza [7] y [31] presentan una intuitiva introducción a las leyes de balance y de conservación. En esta primera parte de estos preliminares matemáticos se resume algunas de las ideas que el profesor Plaza presenta en estos libros. En una segunda parte de estos preliminares se presenta la ecuación del calor homogénea, no homogénea, semilineal, el principio del máximo para ecuaciones parabólicas y la teoría matemática básica relacionada a las leyes de conservación hiperbólica.

Para comprender que es una ley de conservación y una ley de balance, tomemos

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \quad t \in [0, \infty).$$

donde t , generalmente se toma como el tiempo y $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ se puede ver como el espacio-tiempo donde ocurren ciertos fenómenos. Las leyes de conservación o balance se expresan en términos de n cantidades de conservación, conocidos como variables de estado.

Sean u_1, u_2, \dots, u_n con $n \geq 1$, las densidades de las variables de estado; entonces el vector de densidades de variables de estado es

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \\ \vdots \\ u_n(x, t) \end{pmatrix}$$

donde $u(x, t) \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$.

Se tomará que si Ω es un abierto de \mathbb{R}^n tal que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ entonces $u \in \Omega$ se llamará el conjunto de variables de estado del sistema.

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ una región del espacio físico, acotada y abierta con frontera ∂D suave y orientable, donde se puede aplicar el teorema de la divergencia. Sea $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\vec{n}\| = 1$, el vector normal a la frontera ∂D en la dirección exterior a D .

Se entenderá por $M(t)$ el vector

$$M(t) = \int_D u(x, t) dx \in \mathbb{R}^n$$

que representa la cantidad total (ó masa) de las variables de estado en D para un tiempo $t > 0$.

La razón de cambio de la masa $M(t)$ está balanceada por el flujo F de la misma a través de la frontera $\partial\Omega$.

La función flujo se puede escribir como

$$\begin{aligned} F : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^{n \times d} \\ u &\rightarrow F(u) \end{aligned}$$

donde $F(u) = (f^1(u), \dots, f^d(u))$. Las funciones de flujo $f^i(u) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ se toman de clase C^2 .

Podemos suponer que en el sistema interactúa campos externos con densidades dadas por el campo vectorial

$$g(x, t) = \begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ \vdots \\ g_n(x, t) \end{pmatrix}$$

La cantidad total de variables de estado u que fluye a través de un elemento de superficie dS_x sobre la frontera ∂D , cuya normal exterior en la dirección del vector normal $\vec{\mathbf{n}}$; está dada por:

$$-F(u)\vec{\mathbf{n}}dS_x$$

De lo anterior el principio de balance está dado por

$$\frac{d}{dt} \int_D u dS_x = - \int_D F(u) \vec{\mathbf{n}} dS_x + \int_D g(x, t) dx$$

para todo dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Si no hay campos externos, es decir, si $g = 0$ la ley de balance se llama ley de conservación,

$$\frac{d}{dt} \int_D u dx = - \int_{\partial D} F(u) \vec{\mathbf{n}} dS_x$$

Aplicando el teorema de la divergencia para $1 \leq k \leq n$ en la ley de balance, se ve que:

$$\begin{aligned} \int_D g_k(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_D u_k dx + \int_{\partial D} \sum_{j=1}^d n_j f_k^j(u) dS_x \\ &= \frac{d}{dt} \int_D u_k dx + \int_D \operatorname{div} \begin{pmatrix} f_k^1 \\ \vdots \\ f_k^d \end{pmatrix} dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_D u_k dx + \int_D \sum_{j=1}^d (f_k^j(u))_{x_j} dx \end{aligned}$$

de donde

$$\int_D u_t dt + \int_D \sum_{j=1}^d (f^j(u))_{x_j} dx = \int_D g(x, t) dx$$

obtenemos

$$u_t + \sum_{j=1}^d (f^j(u))_{x_j} dx = g$$

que se llama sistema de leyes de balance y si $g = 0$ se llama sistemas de leyes de conservación.

Para este trabajo el objetivo principal de estudio, son las soluciones de sistemas de leyes de conservación, en esta dirección veamos algunos ejemplos de dichos sistemas.

Ejemplo 1. (Sistema de Euler para un fluido compresible.)

Un fluido compresible es aquel en el cual existen variaciones de densidad significativas producidas por cambios de temperatura, presión o por grandes velocidades.

El sistema modela la dinámica del fluido compresible no viscoso que no conduce calor

$$\rho_k + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad (\text{conservación de la masa})$$

$$(\rho v)_t + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \nabla p = 0 \quad (\text{conservación del momento lineal})$$

$$(\rho E)_t + \operatorname{div}(\rho E v + p v) = 0 \quad (\text{conservación de la energía})$$

donde $\rho > 0$ es la densidad de la masa del fluido, v es el campo de velocidades, p es la presión termodinámica, E es la densidad de energía total del fluido. Diversos estudios relacionados con este sistema, teóricos o numéricos se pueden encontrar en [7], [8], [9], [10], [11], [33].

Ejemplo 2. (Modelo de tráfico)

Considerese una carretera en un solo sentido y sin desviaciones. Sea ρ el número de autos en la carretera, de modo que $0 \leq \rho \leq \rho_{max}$ donde ρ_{max} es el número máximo posible de autos que pueden en la carretera. Sea u la velocidad de los autos y u_{max} el límite de velocidad en carretera.

La conservación de masa de autos en la carretera, que se desplazan con velocidad u se pueden ver por las leyes de conservación como

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

Se puede proponer una relación simple para la velocidad dependiendo de la densidad. Para esto supongamos que se quiere que esta relación cumpla que:

$$u(0) = u_{max} \quad y \quad u \rightarrow 0 \quad si \quad \rho_{max} \rightarrow \infty$$

una posible relación que cumple lo anterior es

$$u(\rho) = u_{max} \left(\frac{1 - \rho}{\rho_{máx}} \right)$$

El modelo inicial toma la forma

$$\rho_t + \left[\rho u_{max} \left(\frac{1 - \rho}{\rho_{máx}} \right) \right]_x = 0$$

donde $u_{max} \left(\frac{1 - \rho}{\rho_{máx}} \right)$ es la función de flujo. Una técnica para resolver este modelo se da con el método de las características que se puede encontrar en [20].

El modelo finalmente obtenido es llamado modelo de Lighthill-Whitham-Richards [12][13][14].

Ejemplo 3. (Materiales Hiperelásticos)

Considere un sólido deformable que ocupa un lugar $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Se va a describir el movimiento de este sólido mediante un mapeo

$$(x, t) \mapsto X(t); \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$$

que denota la posición en el tiempo t de una partícula en el sólido. La velocidad local V y el tensor de deformación U se definen como

$$\begin{aligned} V : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3, & U : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ V &= X_t, & U &= \nabla_x X \end{aligned}$$

Un material se dice hiperelástico si su densidad de energía interna W se puede escribir como $W = W(U)$ y que las fuerzas de deformación \mathfrak{S}_α se puedan escribir en la forma

$$\mathfrak{S}_\alpha = \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \frac{\partial W}{\partial U_{\alpha j}}, \quad \text{con } \alpha = 1, 2, 3$$

es decir, si su densidad de energía interna W depende el tensor de deformación y si las fuerzas de deformación se derivan de esta energía.

Para expresar la dinámica del sistema en leyes de conservación se requiere que:

- a) La densidad de energía sea invariante bajo una rotación R .
($W(U) = W(RU)$ tal que $R^T R = 1$ y $\det R = 1$)
- b) El material no cambie de deformación es decir, $\det U > 0$
- c) El material sea conductor de calor, que el proceso sea insentrópico, es decir que la entropía del sistema permanezca constante.
- d) No hayan fuerzas externas.

De esta manera las ecuaciones del movimiento son las siguientes:

$$\begin{aligned} \partial_t U_{ij} - \partial_{x_j} V_i &= 0; \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \partial_t V_i - \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \frac{\partial W}{\partial U_{\alpha j}} &= 0; \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

que se puede abreviar como

$$U_t - \nabla_x V = 0$$

$$V_t - \operatorname{div}_x \partial(U) = 0$$

donde $\sigma(U) := \frac{\partial W}{\partial U}$ es el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff [15][16].

El sistema anterior se puede leer de arriba hacia abajo físicamente como la ley de conservación de masa y momento. Un tratamiento matemático de este sistema se puede encontrar en [4].

Ejemplo 4. (Magnetohidrodinámica)

Es un ejemplo del movimiento de un fluido en presencia de un campo electromagnético de tal manera, que la aceleración del fluido se ve afectada por el campo y el cuerpo del fluido influye en la evolución del campo. El sistema es el siguiente

$$\rho_t + \sum_{j=1}^3 (\rho V_j)_{x_j} = 0$$

$$(\rho V_i)_t + \operatorname{div}(\rho V_i V) + (p + \frac{1}{2} |B|^2)_{x_j} - \operatorname{div}(B_i B) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} \rho |V|^2 + \rho e + \frac{1}{2} |B|^2 \right)_t + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} V \rho |V|^2 + V \rho e + p V + E_x B \right) = 0$$

$$B_t \times \nabla_x E = 0$$

donde $\rho > 0$ es la densidad de la masa del fluido, V es el campo de velocidades, $e > 0$ es la densidad de energía interna, p es la presión termodinámica y E , B son el campo eléctrico y magnético respectivamente. La primera ecuación del sistema representa la conservación de masa, la segunda (de arriba hacia abajo) la conservación del momento, la tercera la conservación de energía y la cuarta la ley de Faraday. Las ecuaciones del sistema anterior son bien estudiadas en [17] [18] y [19].

Este trabajo se hace para estudiar los sistemas extendidos de elasticidad sin fuente y con fuente; en concreto, se demuestra la existencia de un cierto tipo de soluciones de estos sistemas y en particular se estudia el problema de Cauchy. Por tanto los siguientes sistemas ocuparán un lugar central en el tercer capítulo.

Ejemplo 5. (Sistemas de elasticidad extendidos)

(a.) Sin fuente:

$$u_t + (c u + f(v))_x = 0$$

$$v_t + (u + g(v))_x = 0$$

(b.) con fuente:

$$u_t + (c u + f(v))_x = g_1(u, v)$$

$$v_t + (u + g(v))_x = g_2(u, v),$$

si $c = g(v) = 0$ en las ecuaciones de (a.) y (b.), v es la deformación, $f(v)$ la fatiga y u la velocidad; el sistema (a.) de elasticidad, describe la conservación de masa y momento y el sistema (b.) el balance de masa y momento lineal, ya que tiene dos términos fuente g_1 y g_2 . El sistema (a.) es estudiado completamente por Lu en [1]; él usa el método de las regiones invariantes para encontrar soluciones viscosas y el método de la compacidad compensada para encontrar soluciones débiles al sistema. En este trabajo se encuentran soluciones viscosas al sistema (a.) usando el principio del máximo y también se encuentran soluciones viscosas al sistema (b.) usando los resultados de Zhixin y Ming en [29].

1.1. Ecuación del Calor

La ecuación del calor es el ejemplo más simple de lo que es una ecuación diferencial parcial parabólica. Una ecuación parabólica junto con su problema de valor inicial se pueden describir así:

Sean U un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n , entonces $U_t = U \times (0, T]$ para un $T > 0$ fijo y $\Gamma_T = \overline{U}_t / U_t$ la frontera de U_t . El problema de Cauchy para ecuaciones parabólicas es

$$\begin{cases} u_t + L u = f \text{ en } U_t \\ u = g \text{ sobre } U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

donde $f : U_t \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas y $u : U_t \rightarrow \mathbb{R}$ es desconocida.

La ecuación de calor para una constante $k > 0$ que puede ser homogénea o no homogénea se conoce respectivamente como

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

y

$$u_t - k u_{xx} = F(x, t)$$

donde $F : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada.

1.1.1. Ecuación del calor homogénea

El problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x) \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

tiene una sencilla pero interesante interpretación física. La ecuación (1.1) es conocida como difusión de calor; si $V \subset U$ es una subregión suave, la rata de cambio de la cantidad total de volumen en V es igual al negativo de la cantidad de flujo que pasa por la frontera ∂V

$$\frac{d}{dt} \int_V u \, dx = - \int_{\partial V} \vec{F} \cdot n \, dS$$

donde \vec{F} es la densidad de flujo. De esta manera

$$u_t = -\operatorname{div} \vec{F} \quad (1.2)$$

En diversas situaciones F es proporcional al gradiente de u y de dirección opuesta. Si D representa el operador diferencial F se puede escribir como:

$$\vec{F} = -aD u \quad (a > 0).$$

Sustituyendo F en (1.2) se obtiene la ecuación diferencial mencionada en (1.1) .

En la ecuación (1.1), $t > 0$ y $x \in U$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.

La solución $u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es desconocida y $u = u(x, t)$, el Laplaciano Δ con respecto de $x = (x_1, \dots, x_n)$ es

$$\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

Se puede usar la transformada de Fourier de u denotada por \hat{u} en la variable x en (1.1) para hallar a u así:

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + |y|^2 \hat{u} &= 0 \text{ para } t > 0 \\ \hat{u} &= \hat{g} \end{aligned}$$

Luego $\hat{u}_t = -|y|^2 \hat{u}$ que es una ecuación diferencial ordinaria de variables separables

$$\frac{\widehat{u}_t}{\widehat{u}} = -|y|^2$$

de donde $\ln(\widehat{u}) = -|y|^2 t + c$

$$\widehat{u} = e^{-|y|^2 t + c} = e^{-|y|^2 t} \cdot e^c \quad (1.3)$$

pero si $t = 0$, $\widehat{u} = g$ y sustituyendo en (1.3) tenemos

$$\widehat{u} = e^{-|y|^2 t} \widehat{g},$$

inmediatamente $u = \left(e^{-|y|^2 t} \widehat{g} \right)^\vee$, se entenderá como la transformada inversa de Fourier (\vee) de un producto de funciones.

Luego

$$u = \frac{g * F}{(2\pi)^{n/2}} \quad (1.4)$$

donde $\widehat{F} = (e^{-|y|^2 t})$ y usando el teorema integral de Cauchy vemos que:

$$F = \left(e^{-|y|^2 t} \right)^\vee = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy - t|y|^2} dy = \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Usando (1.4) se tiene

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy$$

Una presentación de la transformada de Fourier se puede ver en [20].

La solución de la ecuación (1.1) se puede escribir así

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}} dy \quad (1.5)$$

donde la función $G(x, t)$ definida por

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \quad (1.6)$$

es llamada la función de Green y la función (1.5) se puede escribir como

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t)g(y)dy. \quad (1.7)$$

La función de Green tiene las siguientes propiedades:

Lema 1. Para todo $t > 0$ se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t)dx = 1$$

Lema 2. Para todo $t > 0$, se tiene que

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |G_y(x - y, t - \tau)| dyd\tau = 2\sqrt{\frac{t}{\pi k}}$$

1.1.2. Ecuación de calor no homogénea

El problema de Cauchy no homogéneo

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x) \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

es la ecuación general de calor no homogénea.

En [20] se encuentra la expresión de la solución de esta ecuación.

Se estudiará un caso particular de (1.8) dado por

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x, t) \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) \quad \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (1.9)$$

donde $F : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, es una función dada.

Se busca la solución general de (1.9), para esto tomese en cuenta un principio tipo Duhamel, que establece que la solución del problema

$$\begin{cases} v_t - k v_{xx} = F(x, t) \text{ en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ v(x, 0) = 0 \text{ en } \mathbb{R} \times [t = 0] \end{cases} \quad (1.10)$$

más la solución dada por

$$\begin{cases} w_t - k w_{xx} = 0 \text{ en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ w(x, 0) = g(x) \text{ en } \mathbb{R} \times [t = 0] \end{cases}$$

donde

$$v(x, t) = \int_0^t v(x, t, \tau) d\tau$$

y $v(x, t, \tau)$ es solución de

$$\begin{cases} v_t - k v_{xx} = 0 \text{ en } \mathbb{R} \times (\tau, \infty) \\ v(x, t; \tau) = F(x, \tau) \text{ en } \mathbb{R} \times \{t = \tau\} \end{cases}$$

que es un problema homogéneo como en (1.5) y cuya solución es de la forma

$$v(x, t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y, \tau) G(x - y, t - \tau) dy$$

de manera que la solución de (1.10) se puede escribir como

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} F(y, \tau) G(x - y, t - \tau) dy d\tau$$

y la solución del problema (1.9) es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) G(x - y, t) dy + \\ &\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} F(y, \tau) G(x - y, t - \tau) dy d\tau \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.2. Ecuación de calor semilineal

Se presenta el problema semilineal de ecuación del calor de la forma

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x + g(u) = \varepsilon u_{xx} \text{ en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0 \text{ en } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (1.12)$$

donde $\varepsilon > 0$, $f \in C^1$ y $g \in C$. Véase [32].

Lema 3. Si u es una solución acotada del problema (1.12) sobre $\mathbb{R} \times [0, t)$, entonces u se puede expresar usando la función de Green (1.6) así:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)G(x-y, t)dy + \\ & \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(u(y, \tau))G_y(x-y, t-\tau)dyd\tau - \\ & \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g(u(y, \tau))G(x-y, t-\tau) \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde $G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon t}}$.

Recíprocamente se tiene que si una función acotada $u(x, t)$ satisface (1.13), entonces $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \tau))$ es solución de (1.12).

Demostración.

Sea $u(x, t)$ solución de (1.12) sobre $\mathbb{R} \times [0, t)$, haciendo

$$F(x, t) = -f(u(x, t))_x - g(u(x, t))$$

el problema (1.12) se describe como:

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon(u)_{xx} = F(x, t) \text{ en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (1.14)$$

que tiene una solución de la forma (1.11) así:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)G(x - y, t)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} F(y, \tau)G(x - y, t - \tau)dyd\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)G(x - y, t)dy - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(u(y, \tau))_y G(x - y, t - \tau)dyd\tau \\
 &\quad - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g(u(y, \tau))G(x - y, t - \tau)dyd\tau
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Integrando por partes la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u(y, \tau))_y G(x - y, t - \tau)dy$$

así con

$$\begin{aligned}
 r &= G(x - y, t - \tau) & dv &= f(u(y, \tau))_y dy \\
 dr &= G_y(x - y, t - \tau) & v &= f(u(y, \tau))
 \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(u(y, \tau))_y G(x - y, t - \tau)dy &= G(x - y, t - \tau)f(u(y, \tau))\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} f(u(y, \tau))G_y(x - y, t - \tau)dy
 \end{aligned}$$

pero

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} G(x - y, t - \tau) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon(t - \tau)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}} = 0$$

como f y u son acotadas, luego

$$G(x - y, t - \tau)f(u(y, \tau))\Big|_{-\infty}^{\infty} \rightarrow 0$$

por tanto

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)G(x - y, t)dy - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(u(y, \tau))G_y(x - y, t - \tau)dyd\tau \\
 &\quad - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g(u(y, \tau))G(x - y, t - \tau)dyd\tau
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.3. Principio del máximo para ecuaciones parabólicas

Considerese el operador dado por

$$L u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x,t) u - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.17)$$

en $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, con $T > 0$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado.

Tomemos

$$A u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x,t) u$$

y los coeficientes de (1.17) como funciones acotadas en Ω_T , L como un operador lineal.

Se entenderá que

$$C^2(\Omega_T) = \left\{ u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}; u, u_T, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C(\Omega_T) \right\}$$

y

$$\partial^* \Omega_T = \partial \Omega_T \setminus \Omega \times \{T\}$$

Definición 1. Se dice que L es un operador parabólico en Ω_T si existe $\lambda > 0$ tal que para todo $(x, t) \in \Omega_T$ y para cualquier vector $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j > \lambda |\xi|^2.$$

Teorema 1. Sea L un operador parabólico en Ω_T , cuyos coeficientes son funciones acotadas en Ω_T y con $c(x, t) = 0$. Si $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega})$ satisface

$$L(u) = A(u) - u_t \geq 0, \text{ entonces } \sup_{\Omega_T} u = \max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\partial^* \Omega_T} u$$

Demostración.

Supongase $L(u) > 0$ y que el máximo se da en $(x_0, t_0) \in \Omega$. Por tanto $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ en

(x_0, t_0) y $a_{ij}D^2(u) \leq 0$ lo que implica que $Lu \leq 0$; hecho que es una contradicción. Si el máximo se da en (x_0, T) entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, T) \leq 0$$

y esto implica que

$$L(u) = (a_{ij})D^2 u - u_t \leq 0$$

lo que es contradictorio.

Si $L(u) \geq 0$ tomando $u^\varepsilon = u - \varepsilon t$ tenemos

$$\begin{aligned} L(u^\varepsilon) &= A u^\varepsilon - \partial_t u^\varepsilon \\ &= (A - \partial_t) u^\varepsilon \\ &= (A - \partial_t)(u - \varepsilon t) \quad (1.17.1) \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} L(u^\varepsilon) &= L(u + \varepsilon t) = L(u) + L(\varepsilon t) \\ &= L(u) + \varepsilon L(t) \\ &= L(u) + \varepsilon > 0 \quad (1.17.2) \end{aligned}$$

es decir, de (1.17.1)(1.17.2)

$$L(u^\varepsilon) = (A - \partial_t)(u - \varepsilon t) = L(u) + \varepsilon > 0$$

esto implica que:

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u^\varepsilon = \max_{\partial^* \Omega_T} u^\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Tomando que $\varepsilon \rightarrow 0$ vemos que $u^\varepsilon \rightarrow u$ y

$$\sup_{\Omega_T} u = \max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\partial^* \Omega_T} u$$

□

El teorema 1 es una versión particular del principio del máximo en su forma débil.

El siguiente teorema es la versión general del principio del máximo en su forma débil.

Teorema 2. Sea L un operador parabólico en Ω_T , cuyos coeficientes son acotados en Ω_T y $c(x, t) \leq 0$.

Si $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ y $L(u) = A(u) - u_t \geq 0$, entonces

$$\sup_{\Omega_T} u = \max_{\overline{\Omega_T}} u \leq \max_{\partial^* \Omega_T} u^+$$

donde $u = u^+ - u^-$ y $u^+ = \max(u, 0)$

Demostración. Supongase que $L(u) > 0$ y que u tiene un máximo no negativo en $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, entonces

$$L(u) = (a_{ij})D^2(u) + C(x_0, t_0)u$$

pero $(a_{ij})D^2(u) \leq 0$, $C(x_0, t_0) \leq 0$ y $u \geq 0$, entonces $L(u) < 0$; hecho que es una contradicción.

Si el máximo se dá en (x_0, T) , entonces $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, T) \geq 0$, entonces

$$L(u) = ((a_{ij})D^2(u) - u_t + C(x_0, T))u$$

pero $(a_{ij})D^2(u) \leq 0$, $-u_t \leq 0$ y $C(x_0, T)u \leq 0$, entonces $L(u) \leq 0$, hecho que es una contradicción.

Ahora si $L(u) \geq 0$. Suponga que $\Omega \subset \{\|x_1\| < d\}$.

Considere

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon e^{\alpha x_1}$$

entonces

$$\begin{aligned} L(u_\varepsilon) &= L(u + \varepsilon e^{\alpha x_1}) = L(u) + L(\varepsilon e^{\alpha x_1}) \\ &= L(u) + \varepsilon L(e^{\alpha x_1}) \quad (1.17.3) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L(u_\varepsilon) &= A(u_\varepsilon) - \partial_t(u_\varepsilon) \\ &= A(u + \varepsilon e^{\alpha x_1}) - \partial_t(u + \varepsilon e^{\alpha x_1}) \\ &= (A - \partial_t)(u + \varepsilon e^{\alpha x_1}) \quad (1.17.4) \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} L(e^{\alpha x_1}) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 e^{\alpha x_1}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial e^{\alpha x_1}}{\partial x_i} + c(x, t) e^{\alpha x_1} \\ &= (\alpha^2 a_{11}(x, t) + \alpha b_1(x, t) + c(x, t)) e^{\alpha x_1} \end{aligned}$$

y sustituyendo en (1.17.3) y tomando (1.17.4) vemos que

$$\begin{aligned} L(u_\varepsilon) &= (A - \partial_t)(u + \varepsilon e^{\alpha x_1}) \\ &= L(u) + \varepsilon (\alpha^2 a_{11}(x, t) + \alpha b_1(x, t) + c(x, t)) e^{\alpha x_1} \\ &\geq \varepsilon (\alpha^2 \lambda - \alpha \|b_1\|_\infty - \|C\|_\infty) e^{\alpha x_1} \end{aligned}$$

tomando α suficientemente grande se ve que $L(u_\varepsilon) > 0$ y para $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\Omega_T} u \leq \sup_{\overline{\Omega_T}} u_\varepsilon \leq \max_{\overline{\Omega_T}} u_\varepsilon^+ = \max_{\partial^* \Omega_T} u_\varepsilon^+ \leq \max_{\partial^* \Omega_T} u^+ + \varepsilon e^{\alpha d}$$

si se toma $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene que:

$$\sup_{\Omega_T} u = \max_{\overline{\Omega_T}} u \leq \max_{\partial^* \Omega_T} u^+$$

□

El principio del máximo débil tiene aplicaciones al Análisis y a las Ecuaciones diferenciales parciales [22].

Teorema 3. (*Principio del Máximo fuerte*)

Sea Ω un abierto, acotado y conexo en \mathbb{R}^n . Sea L un operador parabólico en Ω_T y con coeficientes acotados en Ω_T . Sea $C^{(1,2)}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ con $Lu = Au - \partial_t u \geq 0$ entonces

- a) Si $c \equiv 0$, entonces u no puede tener un máximo global en Ω_T a menos que u sea constante.
- b) Si $c \leq 0$, entonces u no puede tener un máximo global no negativo en Ω_T , a menos que u sea constante.

Demostración. En [20] puede encontrarse una demostración de a) en la página 376 y una demostración para el caso $Lu = Au - \partial_t u \leq 0$ y $c \geq 0$ que da la idea para construir la demostración de b).

□

En [23] se hace un completo estudio del principio del máximo. En los capítulos 2 y 3 se usa el principio del máximo débil para presentar y obtener algunos resultados centrales en este trabajo.

1.4. Teoría básica de leyes de conservación hiperbólica (LCH)

Considerese el sistema de leyes de conservación

$$\begin{cases} u_t + f_1(u, v)_x = 0 \\ v_t + f_2(u, v)_x = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

donde $u, v \in \mathbb{R}$ y el sistema de leyes de conservación con fuente

$$\begin{cases} u_t + f_1(u, v)_x + g_1(u, v) = 0 \\ v_t + f_2(u, v)_x + g_2(u, v) = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Sean $U = (u, v)^T$, $F(U) = (f_1, f_2)$ y $G(U) = (g_1, g_2)^T$ entonces el sistema (1.18) y (1.19) pueden ser escritos como

$$U_t + dF(U)U_x = 0 \quad (1.18.1)$$

$$U_t + dF(U)U_x + G(U) = 0 \quad (1.19.1)$$

donde $dF(U)$ es el Jacobiano de F .

Definición 2. *El sistema (1.18.1) se dice hiperbólico si la matriz dF tiene valores propios λ_1 y λ_2 reales. Si los valores propios λ_1 y λ_2 son reales distintos entonces el sistema (1.18.1) dice estrictamente hiperbólico.*

Se denota los vectores propios derechos e izquierdos de la matriz $dF(U)$ como $\ell_{\lambda_1}, \ell_{\lambda_2}$ y $\gamma_{\lambda_1}, \gamma_{\lambda_2}$ respectivamente.

Definición 3. *Las funciones $w = w(u, v)$, $z = z(u, v)$ son llamadas invariantes de Riemman del sistema (1.18.1) correspondientes a λ_1 y λ_2 si ellas satisfacen*

$$\nabla w \cdot \gamma_{\lambda_1} = 0 \quad ; \quad \nabla z \cdot \gamma_{\lambda_2} = 0 \quad (1.20)$$

Es decir que w y z son constantes a lo largo de las trayectorias de los campos vectoriales $\gamma_{\lambda_1}, \gamma_{\lambda_2}$ respectivamente. Las ecuaciones (1.20) se resuelven tomando una curva C que no sea tangente en algún punto de γ_{λ_1} ó γ_{λ_2} y asignando valores para w o z a lo largo de C . Después se soluciona cada par de ecuaciones (diferenciales ordinarias) a través de C , dadas por $\dot{U} = \gamma_{\lambda_1}(U)$ y $\dot{U} = \gamma_{\lambda_2}(U)$ haciendo w y z constante a lo largo de cada trayectoria. Ejemplos de esto se encuentran en [2].

Si γ_{λ_1} y γ_{λ_2} son linealmente independientes, una trayectoria de $\dot{U} = \gamma_{\lambda_2}(U)$ sirve para describir a C . Tómese ahora una trayectoria fija en particular Γ_{λ_2} y fíjese la otra trayectoria Γ_{λ_1} que pasa a través de Γ_{λ_2} y elíjase a z estrictamente creciente a lo largo Γ_{λ_1} ; ver la figura 1.1.

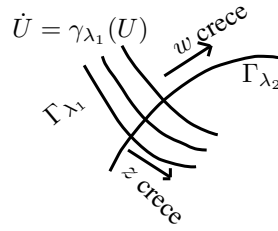


Figura 1.1: Trayectorias para $\gamma_{\lambda_1}, \gamma_{\lambda_2}$

Es posible mostrar que el mapeo $(u, v) \rightarrow (w, z)$ es biyectivo en una región simple conexa [2].

Es conocido del análisis de matrices que los vectores propios derecho r e izquierdo ℓ correspondientes a valores propios distintos λ_1 y λ_2 son ortogonales [24], es decir si $dFr = \lambda_1 r$, $\ell dF = \lambda_2 \ell$, entonces $\lambda_2 \ell r = \ell dFr = \lambda_1 \ell r$ y $\ell r = 0$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

De la definición de invariante de Riemman se ve que $\ell_{\lambda_2} \cdot r_{\lambda_1} = 0$ implica que ∇w es un múltiplo de ℓ_{λ_2} , por tanto ∇w es un vector propio izquierdo de dF con valor propio λ_2 , luego

$$\nabla w dF = \lambda_2 \nabla w \tag{1.21}$$

de igual forma se puede ver que ∇z es múltiplo de r_{λ_1} y por tanto ∇z es un vector propio izquierdo de dF con valor propio λ_1 , luego

$$\nabla z dF = \lambda_1 \nabla z \tag{1.22}$$

Usando (1.21) y (1.22) y multiplicando (1.18) en la izquierda por ∇w y ∇z respectivamente se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla w U_t + \nabla w dF(U) U_x &= \nabla w U_t + \lambda_2 \nabla w U_x \\ &= w_t + \lambda_2 w_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\nabla z U_t + \nabla z dF(U) U_x &= \nabla z U_t + \lambda_1 \nabla z U_x \\
&= z_t + \lambda_1 z_x \\
&= 0
\end{aligned}$$

luego

$$w_t + \lambda_2 w_x = 0 \quad (1.23)$$

y

$$z_t + \lambda_1 z_x = 0 \quad (1.24)$$

Teniendo en cuenta que el mapeo $(u, v) \rightarrow (w, z)$ es biyectivo, las ecuaciones (1.23) y (1.24) son equivalentes al sistema (1.18), en el sentido clásico de una solución [2].

Al sistema (1.18) se le puede adicionar un término de regularización así

$$\begin{cases} u_t + f_1(u, v)_x = \varepsilon u_{xx} \\ v_t + f_2(u, v)_x = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \quad (1.25)$$

con

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad y \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (1.26)$$

que es un sistema de ecuaciones parabólicas semilineales cuyas soluciones son llamadas viscosas [1].

Las soluciones viscosas de este tipo de sistemas llamados de leyes de conservación hiperbólica (LCH) son el tema de interés del siguiente capítulo.

Capítulo 2

Soluciones Viscosas

Se requiere para este capítulo del conocimiento de espacios Banach, del teorema del punto fijo, operadores acotados, funciones de Lipschitz y de la norma L^∞ que pueden leerse en [21] [25] [26].

2.1. Solución viscosa para una LCH

Teorema 4. Sea

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x + g(u) = \varepsilon u_{xx} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

con g localmente Lipschitz y $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $u \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

- (a) Para un $\varepsilon > 0$ fijo, el problema de Cauchy (2.1) con condición acotada medible $u(x, 0) = u_0(x)$ tiene solución única local suave $u^\varepsilon(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, t))$ para un tiempo pequeño τ , el cual depende de la norma L^∞ en los datos iniciales.

Demostración. El problema de Cauchy (2.1) es equivalente a :

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)G(x - y, t)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(u(y, \tau))G_y(x - y, t - \tau)dyd\tau \\ & - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g(u)G(x - y, t - \tau)dyd\tau \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde $G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon t}}$.

Definamos

$$B = \{u(x, t) : u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \tau)) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times 0, \tau)\}$$

es fácil ver que B es un espacio de Banach bajo la norma $\|u(x, t)\|_B = \|u(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times 0, \tau)}$.

Para todo τ

$$B_\tau = \left\{ u(x, t) : u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \tau)), \|u(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \tau])} \leq 2M \right\}$$

es un subconjunto convexo cerrado y acotado de B .

Definamos un operador T sobre B_τ como

$$\begin{aligned} T(u) = & \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)G(x-y, t)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(u(y, \tau))G_y(x-y, t-\tau)dyd\tau \\ & - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g(u)G(x-y, t-\tau)dyd\tau. \end{aligned}$$

Se probará que existe τ_0 tal que para cualquier $u \in B_{\tau_0}$, donde $T(u) \in B_{\tau_0}$ es una contracción.

Sea $u \in B_\tau$, entonces existe una K , constante positiva, tal que

$$|f(u)| \leq K, \quad |g(u)| \leq K$$

puesto que f, g son continuas, g es acotada y u es acotada por estar en B_τ . Además, existe una constante $L > 0$ y u_1, u_2 soluciones de (2.1) tal que

$$|f(u_2) - f(u_1)| \leq L|u_2 - u_1| \tag{2.3}$$

y

$$|g(u_2) - g(u_1)| \leq L|u_2 - u_1| \tag{2.4}$$

ya que f, g son localmente de Lipschitz.

De lo anterior y considerando los lemas 1 y 2 tenemos que:

$$\begin{aligned}
 |T(u)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |u_0(y)| |G(x-y, t)| dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| |G_y(x-y, t-\tau)| dy d\tau \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} |g(u(y, \tau))| |G(x-y, t-\tau)| dy d\tau \\
 &\leq M \int_{-\infty}^{\infty} |G(x-y, t)| dy + K \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |G_y(x-y, t-\tau)| dy d\tau \\
 &\quad + K \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |G(x-y, t-\tau)| dy d\tau \\
 &\leq M + 2K \sqrt{\frac{t}{\pi\varepsilon}} + Kt.
 \end{aligned}$$

De manera similar teniendo en cuenta las desigualdades (2.3) y (2.4), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \|T(u_2) - T(u_1)\| &\leq \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |f(u_1) - f(u_2)| |G_y(x-y, t-\tau)| dy d\tau \\
 &\quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |g(u_1) - g(u_2)| |G(x-y, t-\tau)| dy d\tau \\
 &\leq L \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [|u_2 - u_1| |G_y(x-y, t-\tau)| + |u_1 - u_2| |G(x-y, t-\tau)|] dy d\tau \\
 &\leq L(\|u_2 - u_1\|_{L^\infty}) \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |G_y(x-y, t-\tau)| + |G(x-y, t-\tau)| dy d\tau \\
 &\leq (2L \sqrt{\frac{t}{\pi\varepsilon}} + Lt)(\|u_2 - u_1\|_{L^\infty})
 \end{aligned}$$

por tanto

$$\|T(u_2) - T(u_1)\|_{L^\infty} \leq (2L \sqrt{\frac{t}{\pi\varepsilon}} + Lt) \|u_2 - u_1\|_{L^\infty}$$

y como

$$\begin{aligned} \|T(u_2) - T(u_1)\|_{B_\tau} &= \|T(u_2) - T(u_1)\|_{L^\infty} \\ &\leq (2L\sqrt{\frac{\tau}{\pi\varepsilon}} + L\tau) \|u_2 - u_1\|_{L^\infty} \\ &= (2L\sqrt{\frac{\tau}{\pi\varepsilon}} + L\tau) \|u_2 - u_1\|_{B_\tau} \end{aligned}$$

si se escoge a $\tau_0 > 0$ tal que

$$2K\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi\varepsilon}} + K\tau_0 \leq M \quad y \quad (2L\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi\varepsilon}} + L\tau_0) < 1$$

entonces $T(u) \in B_{\tau_0}$ es una contracción, por tanto existe un único $u^\varepsilon \in B_{\tau_0}$, tal $T(u) = u$, de donde, para el problema de Cauchy (2.1) se tiene única solución $u^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \tau_0))$ y $|u^\varepsilon(x, t)| \leq 2M \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \tau_0]$

□

- (b.) Si la solución u^ε tiene estimaciones a priori en L^∞ de la forma $\|u^\varepsilon(x, t)\|_{L^\infty} \leq M(\varepsilon, T)$ para $t \in [0, T]$, entonces la solución existe sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$

Demostración. Si la solución tiene estimaciones a priori $|u^\varepsilon(x, t)|_{L^\infty} \leq M(\varepsilon, T)$, $\forall t \in [0, T]$, entonces $u_0(x) \leq M(T)$, entonces de (a) existe $\tau > 0$ el cual depende solo de $M(T)$ tal que la solución u^ε , existe en $\mathbb{R} \times [0, \tau_0]$ y debido a la hipótesis tenemos que $|u^\varepsilon(x, t)| \leq M(T)$.

Si consideramos τ como el tiempo inicial, un procedimiento similar, muestra que la solución existe en $\mathbb{R} \times [\tau, 2\tau]$ y $|u^\varepsilon(x, t)| \leq 2M(T) \quad \forall (x, t) \in [\tau, 2\tau]$.

De esto tenemos $|u^\varepsilon(x, 2\tau)| \leq M(T)$ y haciendo el mismo procedimiento, se puede ver que el tiempo local τ puede ser extendido a T , ya que el tiempo depende solamente de $M(T)$.

□

2.2. Solución viscosa para LCH con fuente

Se considera el siguiente problema de Cauchy para el sistema semilineal parabólico:

$$\begin{cases} u_t^1 + f_1(u^1, u^2, \dots, u^n) + g_1(u^1, u^2, \dots, u^n) = \varepsilon u_{xx}^1 \\ u_t^2 + f_2(u^1, u^2, \dots, u^n) + g_2(u^1, u^2, \dots, u^n) = \varepsilon u_{xx}^2 \\ \vdots \\ u_t^n + f_n(u^1, u^2, \dots, u^n) + g_n(u^1, u^2, \dots, u^n) = \varepsilon u_{xx}^n \end{cases} \quad (2.5)$$

en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ con datos iniciales medibles acotados

$$\begin{aligned} u^1(x, 0) &= u_0^1(x), \dots, u^n(x, 0) = u_0^n(x) \\ |u_0^1(x)| &\leq M, \dots, |u_0^n(x)| \leq M \end{aligned} \quad (2.6)$$

Teorema 5.

- (a) Supongase que g_i son funciones localmente Lipschitz para (u^1, u^2, \dots, u^n) , acotadas y continuas en $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ y $f_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ para $i = 1, \dots, n$.

Entonces el problema de Cauchy (2.5) y (2.6) tiene única solución $(u^{1\varepsilon}, u^{2\varepsilon}, \dots, u^{n\varepsilon}) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \tau_0))$ para todo τ_0 pequeño el cual depende de sólo la norma L^∞ de los datos iniciales y

$$|u^{1\varepsilon}(x, t)| \leq 2M, \dots, |u^{n\varepsilon}(x, t)| \leq 2M \quad ; \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \tau_0);$$

- (b) Además, si la solución $(u^{1\varepsilon}, u^{2\varepsilon}, \dots, u^{n\varepsilon})$ tiene estimaciones apriori

$$\|u^{1\varepsilon}(x, t)\|_{L^\infty} \leq M(T), \dots, \|u^{n\varepsilon}(x, t)\|_{L^\infty} \leq M(T)$$

$\forall t \in [0, T]$, entonces la solución existe sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$. Particularmente si existe $N > 0$ tal que

$$\|u^{1\varepsilon}(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))} \leq N, \dots, \|u^{n\varepsilon}(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))}$$

entonces la solución $(u^{1\varepsilon}, u^{2\varepsilon}, \dots, u^{n\varepsilon})$, existe sobre $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.

Demostración. La demostración está basada en el teorema 4 para u^i soluciones con $i = 1, \dots, n$. Se puede ver esta demostración en [27].

2.3. Lemas auxiliares para soluciones viscosas.

Lema 3. Sea v^ε una solución de la ecuación diferencial parabólica

$$v_t + (vf(u))_x = \varepsilon v_{xx}; \quad v(x, 0) = v_0(x)$$

donde $f(u)$ es continua para $u \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$v^\varepsilon \geq c(t, \delta, \varepsilon) > 0, \quad \text{si } v_0(x) \geq \sigma > 0$$

donde σ es una constante positiva y $c(t, \delta, \varepsilon)$ puede tender a cero o t tiende a infinito.

Demostración. La ecuación $v_t + (vf(u))_x = \varepsilon v_{xx}$ se puede escribir como

$$w_t + f(u)w_x + f(u)_x = \varepsilon(w_{xx} + w_x^2)$$

donde $w = \log(v)$, entonces

$$w_t = \varepsilon w_{xx} + \varepsilon \left(w_x - \frac{f(u)}{2\varepsilon} \right)^2 - f(u)_x - \frac{f^2(u)}{4\varepsilon} \quad (2.7)$$

La solución de (2.7) con dato inicial $w_0(x) = \log(v_0(x))$ puede ser representada por la función de Green

$$G(x - y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon t}}$$

así:

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) w_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varepsilon \left(w_x - \frac{f(u)}{2\varepsilon} \right)^2 - \frac{f^2}{4\varepsilon} - f(u)_x \right) G(x - y, t - s) dy ds \quad (2.8)$$

por el lema 1 y 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |G_y(x - y, t)| dy \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon t}}$$

se sigue de (2.8) que

$$\begin{aligned}
 w &\geq \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) w_0(y) dy \\
 &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{f^2(u)}{4\varepsilon} - f(u)_x \right) G(x-y, t-s) dy ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) w_0(y) dy \\
 &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (f(u) G_y(x-y, t-s)) - \frac{f^2(u)}{4\varepsilon} G(x-y, t-s) dy ds \\
 &\geq \log(\sigma) - \frac{Mt}{\varepsilon} - \frac{M_1 \sqrt{t}}{\sqrt{\varepsilon}} \geq -c(t, \delta, \varepsilon) > -\infty
 \end{aligned}$$

de donde $v^\varepsilon(x, t)$ tiene una cota inferior positiva $c(t, \delta, \varepsilon)$ para un ε fijo y un $t < \infty$

□

Lema 4. Supongase que $v^\varepsilon(x, t)$ satisface la ecuación parabólica

$$v_t + (vf(u, v))_x + g(v, u) = \varepsilon v_{xx} \quad (2.9)$$

y $v(x, 0) = v_0(x) \geq \delta > 0$, donde $f(u, v) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g(u, v)$ es localmente Lipchitz continua y $g(u, v) = vh(u, v)$, $h(u, v) \in C(\mathbb{R})$.

Si $|u(x, t)| \leq M(\varepsilon, \delta, T)$, $|v^\varepsilon(x, t)| \leq M(\varepsilon, \delta, T)$ en $\mathbb{R} \times [0, T]$, entonces la solución $v^\varepsilon(x, t) \geq c(t, \delta, \varepsilon) > 0$ en $\mathbb{R} \times [0, T]$ donde $c(t, \delta, \varepsilon)$ puede tender a cero cuando δ, ε tienden a cero o t tiende a infinito.

Demostración. Básicamente esta demostración se fundamenta en la demostración del lema 3, agregando un término fuente $g(u, v)$. Véase [29]

Lema 5. Sea u una solución de la ecuación parabólica

$$u_t + a(u, x, t) u_x + g(u, x, t) = u_{xx} \quad (2.10)$$

y $|u(x, 0)| \leq M$, donde $|g(u, x, t)| \leq C|u| + \tilde{C}$, con $C, \tilde{C} > 0$ y $a(u, x, t)$ localmente acotada.

Entonces para todo $T > 0$, existe $M(T) > 0$ tal que $|u(x, t)| \leq M(T)$ sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$.

Demostración. Multiplicando (2.10) por $2u$ se obtiene que

$$\begin{aligned} (u^2)_t + a(u, x, t)(u^2)_x &= 2u u_{xx} - 2u g(u, x, t) \\ &\leq [(2u u_x)_x - 2u_x^2] + 2|u| (C|u| + \tilde{C}) \\ &\leq (u^2)_{xx} + (2C + 1)u^2 + \tilde{C}^2 \end{aligned}$$

Si $v = u^2 e^{-(2C+1)t}$, se puede ver con algunos calculos que

$$v_t + av_x \leq v_{xx} + \tilde{C}^2 e^{-(2C+1)t} \quad (2.11)$$

y sí

$$w = v + \frac{\tilde{C}^2}{2C + 1} e^{-(2C+1)t}$$

se ve que (2.11) se transforma en

$$w_t + a(u, x, t)w_x \leq w_{xx}$$

y

$$w|_{t=0} = (u|_{t=0})^2 + \frac{\tilde{C}^2}{2C + 1} \leq M^2 + \frac{\tilde{C}^2}{2C + 1}$$

por el principio del máximo

$$w(x, t) \leq M^2 + \frac{\tilde{C}^2}{2C + 1}$$

por tanto

$$|u(x, t)| \leq \left[\left(M^2 + \frac{\tilde{C}^2}{2C + 1} e^{(2C+1)t} \right) \right]^{1/2} \leq M(T)$$

□

Corolario 1. Suponga que $u(x, t) \geq (\leq) 0$, satisfice

$$u_t + a(u, x, t) u_x + g(u, x, t) \leq (\geq) u_{xx} \quad (2.12)$$

y $|u(x, 0)| \leq M$, $g(u, x, t) \geq (\leq) C u + \tilde{C}$, con $c, \tilde{C} \in \mathbb{R}$ y $a(u, x, t)$ localmente acotada.

Entonces para todo $T > 0$, existe $M(T) > 0$ tal que

$$u(x, t) \leq M(T), \quad (u(x, t) \geq -M(T))$$

sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$.

Capítulo 3

Sistemas de Elasticidad Extendidos

En este capítulo se considerará una extensión de las leyes de conservación hiperbólica relacionadas con dos sistemas de ecuaciones de Euler, un sistema de ecuaciones generales de Euler para el flujo de un fluido compresible y un sistema para gas dinámico politrópico como se relacionan en [1].

Los resultados que aquí se mostrarán permiten establecer la existencia de soluciones viscosas para sistemas extendidos de elasticidad sin y con término fuente.

3.1. Condiciones para el sistema

Se considera la existencia global de soluciones suaves para el siguiente sistema de elasticidad

$$\begin{cases} u_t + (cu + f(v))_x = 0 \\ v_t + (u + g(v))_x = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

y el sistema de elasticidad extendido con fuente relacionado a (3.1) dado por

$$\begin{cases} u_t + (cu + f(v))_x + g_1(u, v) = 0 \\ v_t + (u + g(v))_x + g_2(u, v) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

En (3.1) y (3.2) las condiciones acotadas medibles están dadas por

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x))$$

En (3.2) g_1 y g_2 son funciones localmente Lipschitz continuas.

En (3.1) cuando $g(v) = 0$ y $c = 0$, se tiene el sistema de elasticidad no lineal unidimensional que describe el balance de masa y momento lineal, donde v denota la tensión, $f(v)$ es la fatiga del sistema y u la velocidad .

No es el interés de este trabajo entrar a estudiar las situaciones físicas inherentes a (3.1) y (3.2). Por ejemplo, el funcionamiento del Tensor de tensión, fatiga etc. Para un estudio al respecto véase [16].

Para los sistemas (3.1) y (3.2) se supondrá que $g(v)$ y $f(v)$ satisfacen:

(A) $f, g \in C^3$ y $f' \geq d$ para $v \in \mathbb{R}$ y

$$2f'' + g''(s_2 + g' - c) > 0, \quad \text{para } v > 0$$

$$2f'' + g''(s_2 + g' - c) < 0, \quad \text{para } v < 0$$

$$2f'' + g''(g' - c - s_2) > 0, \quad \text{para } v > 0$$

$$2f'' + g''(g' - c - s_2) < 0, \quad \text{para } v < 0$$

donde

$$s_2 = \sqrt{(g' - c)^2 + 4f'}$$

Es fácil probar que existen funciones (f, g) que satisfacen la condición (A), según [1] elíjase $f'(v) = (v^2 + d)^\ell$, $g'(v) - c = k(v^2 + e)^m$, donde d, e, m, ℓ, k son constantes positivas y $e \geq d$, $\ell \geq m$.

3.2. Soluciones a sistemas de elasticidad sin fuente

Considerese

$$\begin{cases} u_t + (cu + f(v))_x = \varepsilon u_{xx} \\ v_t + (u + g(v))_x = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \quad (3.3)$$

con las condiciones acotadas medibles dadas por

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x))$$

En [4], se garantiza la existencia de soluciones viscosas globales del sistema (3.2) usando el método de las regiones invariantes .

Aquí se usa el principio del máximo para demostrar la existencia de dichas soluciones como en [30].

Teorema 6. Para un $\varepsilon > 0$, el problema de Cauchy (3.3) y suponiendo cumple las condiciones de (A), tiene solución única global suave $(u^\varepsilon(x, t), v^\varepsilon(x, t))$ que satisface

$$|u^\varepsilon(x, t)| \leq M, \quad |v^\varepsilon(x, t)| \leq M$$

donde M es una constante positiva independiente de ε .

Demostración. El sistema (3.1) se puede escribir como

$$U_t + dFU_x = 0 \tag{3.4}$$

donde $U = (u, v)$, $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$(u, v) \rightarrow (cu + f(u), u + g(v)) \quad y$$

$$dF = \begin{pmatrix} c & f'(v) \\ 1 & g'(v) \end{pmatrix}$$

para calcular los valores propios de dF , se resuelve

$$(c - \lambda)(g'(v) - \lambda) - f'(v) = 0$$

de donde

$$\lambda_1 = \frac{c + g' + \sqrt{(g' - c)^2 + 4f'}}{2} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{c + g' - \sqrt{(g' - c)^2 + 4f'}}{2}$$

llamado $s_2 = \sqrt{(g' - c)^2 + 4f'}$, tenemos que

$$\lambda_1 = \frac{c + g' + s_2}{2} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{c + g' - s_2}{2} \quad (3.5)$$

los vectores propios a derecha γ_1, γ_2 , asociados se calculan resolviendo

$$\gamma_{\lambda_1} = [dF - \lambda_1 I | 0] \quad y \quad \gamma_{\lambda_2} = [dF - \lambda_2 I | 0]$$

de donde se obtiene

$$\gamma_{\lambda_1} = (g' - c + s_2, -2)^T, \quad \gamma_{\lambda_2} = (g' - c - s_2, -2)^T$$

Para calcular los invariantes de Riemman w y z se resuelve:

$$\nabla w \cdot \gamma_{\lambda_1} = 0, \quad \nabla z \cdot \gamma_{\lambda_2} = 0$$

y se encuentra

$$w(u, v) = u + \int_0^v \frac{g' - c + s_2}{2} dv \quad (3.6)$$

$$z(u, v) = u + \int_0^v \frac{g' - c - s_2}{2} dv \quad (3.7)$$

Calculando $w_v, w_u, w_{vv}, w_{uu}, w_{uv}; z_v, z_u, z_{vv}, z_{uu}, z_{uv}$ se tiene

$$w_u = 1 + \frac{\partial}{\partial u} \int_0^v \frac{g' - c + s_2}{2} dv = 1 \quad (3.8)$$

$$z_u = 1 + \frac{\partial}{\partial u} \int_0^v \frac{g' - c - s_2}{2} dv = 1 \quad (3.9)$$

$$w_v = 1 + \frac{\partial}{\partial v} \int_0^v \frac{g' - c + s_2}{2} dv = \frac{g' - c + s_2}{2} \quad (3.10)$$

$$z_v = 1 + \frac{\partial}{\partial v} \int_0^v \frac{g' - c - s_2}{2} dv = \frac{g' - c - s_2}{2} \quad (3.11)$$

$$w_{vv} = \frac{g''(g' - c + s_2) + 2f''}{2s_2} \quad (3.12)$$

$$z_{vv} = \frac{2f'' + g''(g' - c - s_2)}{2s_2} \quad (3.13)$$

$$w_{uu} = w_{uv} = z_{uu} = z_{uv} = 0 \quad (3.14)$$

Multiplicando el sistema (3.3) por $\nabla z(u, t)$ se tiene que

$$\nabla z(U_t + dFU_x) = \varepsilon \Delta U \quad (3.15)$$

sí

$$\nabla z dF = \lambda_1 \nabla z \quad (3.16)$$

entonces se encuentra

$$\begin{aligned} z_t + \lambda_1 z_x &= \nabla z \varepsilon \Delta U = \varepsilon(z_u, z_v)(u_{xx}, v_{xx}) \\ &= \varepsilon z_{xx} - \varepsilon(z_{uu} u_x^2 + 2z_{uv} u_x v_x + z_{vv} v_x^2) \end{aligned}$$

sustituyendo z_{uu}, z_{uv}, z_{vv}

$$\begin{aligned} z_t + \lambda_1 z_x &= \varepsilon z_{xx} \varepsilon(z_{vv}) v_x^2 \\ &= \varepsilon z_{xx} - \varepsilon \left(\frac{2f'' + g''(g' - c - s_2)}{2s_2} \right) v_x^2 \end{aligned}$$

por (A) si $v > 0$, $2f' + g''(g' - c - s_2) > 0$, luego

$$z_t + \lambda_1 z_x \leq \varepsilon z_{xx}. \quad (3.17)$$

Ahora multiplicando (3.3) por $\nabla w(u, t)$ se tiene que

$$\nabla w(U_t + dFU_x) = \varepsilon \Delta U$$

si $\nabla w dF = \lambda_2 \nabla w$, se encuentra

$$\begin{aligned} w_t + \lambda_2 w_x &= \nabla w \varepsilon \Delta U = \varepsilon(w_u, w_v)(u_{xx}, v_{xx}) \\ &= \varepsilon w_{xx} - \varepsilon(w_{uu} u_x^2 + 2w_{uv} u_x v_x + w_{vv} v_x^2) \end{aligned}$$

sustituyendo w_{uu}, w_{uv}, w_{vv}

$$\begin{aligned} w_t + \lambda_2 w_x &= \varepsilon w_{xx} \varepsilon(w_{vv}) v_x^2 \\ &= \varepsilon w_{xx} - \varepsilon \left(\frac{2f'' + g''(g' - c + s_2)}{2s_2} \right) v_x^2 \end{aligned}$$

por (A) si $v > 0$, $2f'' + g''(g' - c + s_2) > 0$, luego

$$w_t + \lambda_2 w_x \leq \varepsilon w_{xx} \quad (3.18)$$

Por otra parte de (A), si $v < 0$, $2f'' + g''(g' - c - s_2) < 0$, entonces

$$z_t + \lambda_1 z_x \geq \varepsilon z_{xx} \quad (3.19)$$

y $2f'' + g''(g' - c + s_2) < 0$, entonces

$$w_t + \lambda_2 w_x \geq \varepsilon w_{xx} \quad (3.20)$$

Tomando (3.17) y (3.18) así

$$(-z_t) + \lambda_1(-z_x) \geq \varepsilon(-z_{xx}) \quad (3.21)$$

$$w_t + \lambda_2 w_x \leq \varepsilon w_{xx} \quad (3.22)$$

y (3.19)-(3.20) así

$$z_t + \lambda_1 z_x \geq \varepsilon z_{xx} \quad (3.23)$$

$$(-w_t) + \lambda_2(-w_x) \leq \varepsilon(-w_{xx}) \quad (3.24)$$

Al considerar las desigualdades (3.21)-(3.22) y (3.23)-(3.24) con variables en w y z , por el principio del máximo se puede conseguir estimaciones

$$w(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \leq M, \quad z(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \geq -M, \quad w(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \geq -M, \quad z(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \leq M,$$

del teorema 4 parte (b) se tiene que

$$|u^\varepsilon(x, t)| \leq M \quad y \quad |v^\varepsilon(x, t)| \leq M$$

□

3.3. Solución a sistemas de elasticidad con fuente

Considerese el sistema de ecuaciones diferenciales para las leyes de conservación hiperbólica (3.2) dado por

$$\begin{cases} u_t + (cu + f(v))_x + g_1(u, v) = 0 \\ v_t + (u + g(v))_x + g_2(u, v) = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

donde c es una constante, $g_1(u, v)$ y $g_2(u, v)$ son funciones localmente Lipschitz continuas cuyas condiciones acotadas medibles son

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad (3.26)$$

se supone para (3.25) y (3.26) se cumple las condiciones en (A).

Se debe tener en cuenta que las soluciones locales del sistema (3.25) están garantizadas por el teorema 5. Se va a usar los lemas auxiliares de la sección 2.3 para buscar estimaciones a priori de (3.25) que se puedan extender a sus soluciones globales.

Proposición 1. Supongamos $g_1(u, v)$ y $g_2(u, v)$ de (3.25) cumplen

$$w_u g_1 + w_v g_2 \geq c_1 w + c_2, \quad z_u g_1 + z_v g_2 \leq c_3 z + c_4$$

donde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ y $g_2 = v h(u, v)$, con $h(u, v)$ una función continua para (u, v) , entonces el problema de Cauchy (3.25), (3.26) tiene única solución $(u^\varepsilon(x, t), v^\varepsilon(x, t))$ y satisface que para todo $T > 0$, $|u^\varepsilon(x, t)| \leq M(T)$; $0 < c(\varepsilon, t) \leq v^\varepsilon(x, t) \leq M(T)$, sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$, donde $M(T)$ es una constante positiva que es independiente de ε ; $c(\varepsilon, t)$ es una función positiva la cual puede tender a cero cuando ε tiende a cero o t tiende a infinito.

Demostración. Escribamos el sistema (3.25) como

$$U_t + dF U_x + G = 0$$

donde

$U = (u, v)$, $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$(u, v) \rightarrow (cu + f(v), u + g(v)) \quad y$$

$$dF = \begin{pmatrix} c & f'(v) \\ 1 & g'(v) \end{pmatrix}$$

donde los valores propios de dF están dados por (3.5)

$$\lambda_1 = \frac{c + g' + s_2}{2} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{c + g' - s_2}{2}$$

con vectores propios a derecha

$$\gamma_{\lambda_1} = (g' - c + s_2, -2)^T \quad y \quad \gamma_{\lambda_2} = (g' - c - s_2, -2)^T$$

cuyos invariantes de Riemman están dados por (3.6) y (3.7)

$$w(u, v) = u + \int_0^v \frac{g' - c + s_2}{2} dv, \quad z(u, v) = u + \int_0^v \frac{g' - c - s_2}{2} dv$$

Por otra parte de (3.8),(3.9),(3.10),(3.11),(3.12),(3.13),(3.14) se tiene

$$\begin{aligned} w_u = z_u = 1, \quad w_{uu} = w_{uv} = z_{uu} = z_{uv} = 0 \\ w_v = \frac{g' - c + s_2}{2}, \quad z_v = \frac{g' - c - s_2}{2} \\ w_{vv} = \frac{2f'' + g''(g' - c + s_2)}{2s_2} \\ z_{vv} = \frac{2f'' + g''(g' - c - s_2)}{2s_2} \end{aligned}$$

Considérese ahora el problema de Cauchy para el sistema parabólico relacionado a (3.25)

$$\begin{cases} u_t + (cu + f(v))_x + g_1(u, v) = \varepsilon u_{xx} \\ v_t + (u + g(v))_x + g_2(u, v) = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \quad (3.27)$$

con las condiciones dadas en (3.26) se puede escribir como

$$U_t + dFU_x + G = \varepsilon \Delta U \quad (3.28)$$

Multiplicando (3.28) por la izquierda con ∇z y teniendo en cuenta que

$$\nabla z dF = \lambda_1 \nabla z \quad y \quad z_{uu}, z_{uv}, z_{vv}$$

$$\begin{aligned} z_t + \lambda_1 z_x + (z_u g_1 + z_v g_2) &= \varepsilon z_{xx} - \varepsilon (z_{uu} u_x^2 + 2z_{uv} u_x v_x + z_{vv} v_x^2) \\ &= \varepsilon z_{xx} - \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{2f'' + g''(g' - c - s_2)}{s_2} \right] v_x^2 \end{aligned}$$

de la condición (A).

Si $v > 0$, $2f'' + g''(g' - c - s_2) > 0$ y

$$z_t + \lambda_1 z_x + [g_1 z_u + g_2 z_v] \leq \varepsilon z_{xx}. \quad (3.29)$$

Si $v < 0$, $2f'' + g''(g' - c - s_2) < 0$ y

$$z_t + \lambda_1 z_x + [g_1 z_u + g_2 z_v] \geq \varepsilon z_{xx} \quad (3.30)$$

Por otra parte si se multiplica (3.28) por la izquierda con $\nabla w dF = \lambda_2 \nabla w$ y se usa w_{uu}, w_{uv}, w_{vv}

$$\begin{aligned} w_t + \lambda_2 w_x + (w_1 g_1 + w_2 g_2) &= \varepsilon w_{xx} - \varepsilon (w_{uu} u_x^2 + 2w_{uv} u_x v_x + w_{vv} v_x^2) \\ &= \varepsilon w_{xx} - \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{2f'' + g''(g' - c + s_2)}{s_2} \right] v_x^2 \end{aligned}$$

de la condición (A).

Si $v > 0$, $2f'' + g''(s_2 + g' - c) > 0$ y

$$w_t + \lambda_2 w_x + [g_1 w_u + g_2 w_v] \leq \varepsilon w_{xx} \quad (3.31)$$

Si $v < 0$, $2f'' + g''(s_2 + g' - c) < 0$ y

$$w_t + \lambda_2 w_x + [g_1 w_u + g_2 w_v] \geq \varepsilon w_{xx} \quad (3.32)$$

De (3.31)-(3.29) y (3.32)-(3.30) respectivamente tenemos:

$$\begin{cases} w_t + \lambda_2 w_x + [g_1 w_u + g_2 w_v] \leq \varepsilon w_{xx} \\ -z_t - \lambda_1 z_x - [g_1 z_u + g_2 z_v] \geq -\varepsilon z_{xx} \end{cases} \quad (3.33)$$

y

$$\begin{cases} -w_t - \lambda_2 w_x - [g_1 w_u + g_2 w_v] \leq -\varepsilon w_{xx} \\ z_t + \lambda_1 z_x + [g_1 z_u + g_2 z_v] \geq \varepsilon z_{xx} \end{cases} \quad (3.34)$$

Usando la hipótesis de la proposición 1 se tiene para (3.33) y (3.34)

$$\begin{cases} w_t + \lambda_2 w_x + [c_1 w_u + c_2 w_v] \leq \varepsilon w_{xx} \\ -z_t - \lambda_1 z_x - [c_1 z_u + c_2 z_v] \geq -\varepsilon z_{xx} \end{cases} \quad (3.35)$$

y

$$\begin{cases} -w_t - \lambda_2 w_x - [c_1 w_u + c_2 w_v] \leq -\varepsilon w_{xx} \\ z_t + \lambda_1 z_x + [c_1 z_u + c_2 z_v] \geq \varepsilon z_{xx} \end{cases} \quad (3.36)$$

si se considera (3.35) y (3.36) como desigualdades en las variables w y z y aplicando el corolario 1, entonces $w(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \leq N(T)$, $-z(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \leq -N(T)$ sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$ donde $N(T)$ es independiente de ε y T es cualquier número real positivo. De acuerdo a esto se puede encontrar un $M(T) > 0$ tal que $|u^\varepsilon(x, t)| \leq M(T)$ y $|v^\varepsilon(x, t)| \leq M(T)$, según el teorema 5 y en vista del lema 4 se tiene que $0 < c(\varepsilon, t) \leq v^\varepsilon(x, t) \leq M(T)$

□

Observación 1. Se puede ver que existen funciones g_1, g_2 que satisfacen la hipótesis de la proposición 1, por ejemplo

$$g_1(u, v) = k_1 u + k_1 \int_0^v w_v dv; \quad u > 0, k_1 > 0, v > 0$$

$$g_2(u, v) = v h(u, v) = v \left[\frac{k_2}{v^2 + u^2 + 1} \right]; \quad k_2 > 0, v > 0.$$

De hecho teniendo en cuenta que

$$|w_u| = 1, \quad w_v = \frac{g' - c + s_2}{2} \geq -\frac{2f''}{g}$$

se obtiene

$$g_1 w_u = k_1 \left(u + \int_0^v w_v dv \right) = k_1 w \geq c_1 w; \quad c_1 < k_1$$

$$g_2 w_v = v \left[\frac{k_2}{v^2 + u^2 + 1} \right] \left[\frac{g' - c + s_2}{2} \right] \geq -v \frac{k_2}{v^2 + u^2 + 1} \frac{2f''}{g} \geq c_2$$

de aquí se tiene

$$w_u g_1 + w_v g_2 \geq c_1 w + c_2.$$

Por otra parte

$$|z_u| = 1, \quad z_v = \frac{g' - c - s_2}{2} \geq -\frac{2f''}{g} s_2 > 0$$

luego

$$\begin{aligned} g_1 z_u &= k_1 \left(u + \int_0^v \frac{g' - c + s_2}{2} \right) \leq k_1 \left(u + \int_0^v \frac{g' - c - s_2}{2} \right) \\ &\leq k_1 z \leq c_3 z \end{aligned}$$

$$g_2 z_v = v \left[\frac{k_2}{v^2 + u^2 + 1} \right] \left[\frac{g' - c - s_2}{2} \right] \leq -v \frac{k_2}{v^2 + u^2 + 1} \frac{2f''}{g} \leq c_4$$

de aquí se tiene

$$z_u g_1 + z_v g_2 \leq c_3 z + c_4$$

Conclusiones

1. Es posible aplicar la metodología expuesta para la búsqueda de soluciones viscosas a sistemas de L.C.H diversos, por ejemplo sistemas de Euler para un fluido compresible, sistemas de gas politrópico, véase [2],[9],[10],[11].
2. Queda abierta la búsqueda de soluciones débiles a los sistemas de elasticidad planteados, con el uso del método de compacidad compensada y con la ayuda del principio del máximo.
3. Los métodos de búsqueda de estimaciones a priori por perturbación del sistema de leyes de conservación permite la búsqueda de soluciones débiles usando las soluciones viscosas, este hecho indica que este trabajo es previo al cálculo de soluciones débiles.
4. Es interesante que se haga un estudio numérico del problema de elasticidad planteado en este trabajo con aplicaciones a la física o ingeniería.
5. Es posible que situaciones físicas de electricidad y magnetismo sean planteadas desde las leyes de conservación hiperbólica. Por ejemplo leyes de magnetohidrodinámica, de maxwell, etc.
6. Es importante dejar claro que las L.C.H se pueden abordar si se conoce la teoría relacionada a las ecuaciones parabólicas, en particular a la ecuación del calor.

Bibliografía

- [1] Y.G. Lu, Hyperbolic conservations Laws and the compensated methods. 128, Chapman and Hall, New York.2002
- [2] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Difusión Equatións. Springer-Verlag, New York.1994
- [3] D. Chae and S.-Y.Ha, On the formation of shocks to the compressible Euler equations. Commun .Math. Sci. 7. (2009), pp 627-634.
- [4] C.M. Dafermos, Hyperbolic conservation laws in continuum physics, vol 325 of Grundlehnen der Mathematischen Wissenschafte, Springer-Verlag. Berlin, third ed, 2010
- [5] H. Freistuhler and R.G. Plaza, Normal modes and nolinear stability behaivour of dynamic phase boundaries in elastic materials. Arch Rational Mech. Anal. 186.(2007),n.1,pg 1-24
- [6] T. Kato, The Cauchy problem for quasi-linear symmetric Hyperbolic systems, Arch. Rational Mech .Anal. 58(1975),n. 3, pg 181-205
- [7] C.R. Plaza, Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. En preparación.<http://www.fenomec.unam.mx/ramon/publications>. Html. 2011
- [8] F. Bassi, S. Rebay, High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2D Euler equations. Journal of computational physics. 138(1997), pg 251-285
- [9] S. Chung Chang, The method of Space-Time Conservation Element and Solution. A new Approach for solving the Navier-Stokes and Euler equations. Journal of computations physics. 119(1995), pg 295-324

- [10] Maldonado, W. Moreira H, Solving Euler Equations: Clasical methods and the C^1 contraction mapping method revisited. *Revista Brasileira de Economía*, 60,N.2.(2006) pg 167-168
- [11] N. Tsuge, Global solutions to the compressible Euler Equations whit gravitatio-
nal source. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*,S,N.2(2088), pg 317-346
- [12] M.J Lighthill and G.B.Whitman, On Kinematic Waves. II. A theory of traficc flow
on low crowded roads, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 229(1955), pp 317-345
- [13] P.I Richards, Shock waves on the higway. *Operations Res.* 4(1956), pp 42-51
- [14] G.B, Whitman, *Linear and Nolinear Waves.* Pure and Applied Mathematics.
John Wiley y Sons Inc,New York. 1999
- [15] P.G. Ciarlet, *Mathematical elasticity. Vol 1: three-dimensional elasticity*, vol 20
of studies in Mathematics and its Applications, North-Holland Publishing Co,
Amsterdam. 1988
- [16] M.E Gurtin, *Topics in Finite Elasticity.* Society for Industrial Applied mathema-
tics. Philadelphia, Penssylvania. 1981
- [17] L.D. Landau and E.M. lipschitz, *Course of theoretical physics. Vol 8: Electrodynamic
s of continous media*, Pergamon International Library of Science, technology,
Engineering and Social Studies, pergamos Press, oxford. 1984
- [18] V.C.A. Ferrato and C. Plumpton, *An introduction to magneto- fluid mechanics*,
oxford University Press, London. 1961
- [19] W.G. Vicenti and C.H. Kruger, *Introduction to physical Gas Dynamics*, Wiley
& sons, New York. 1965
- [20] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, vol 19, Graduate studies in Mathe-
matics, Amer. Math. Soc, proviedence, RI. 1998
- [21] M. Cerón G, *Soluciones viscosas para un sistema de leyes de Conservación Regu-
larizado*, Tesis de Maestría en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá. 2007

- [22] K.Malakpoor, Maximum Principles for parabolic Equations, www.win.tue.nl/casa/meetings/seminar/previous/abstracto41124files/mpparabolic.pdf. 2004
- [23] M.H. Protter and H.F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations. Springer Verlag, New York. 1984
- [24] R.A Horn and C.R.Jhonson, Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge. 1991
- [25] C.R de Oliveira , Introducao à análise funcional, projeto Euclides, Impa, Rio de Janeiro. 2010
- [26] B.D.Reddy, Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and finite Elements. Springer-Verlag, New York. 1998
- [27] Y.J.Zhixin and C.Ming, Conservation Laws I: Viscosity Solutions, Revista Colombiana de Matemáticas, Vol 41(2007) pg 81-90
- [28] Y-G.Lu, singular limits of stiff relaxation and dominant diffusion for nonlinear systems, J. Diff. Eqs. 179(2002), pg 683-713
- [29] Y.J.Zhixin and C.Ming, Conservation Laws II: Weak Solutions, Revista Colombiana de Matemáticas, vol 41(2007), pg 91-106
- [30] A.R. Gomez P, Solución a sistemas de elasticidad sin fuente, Revista de la Facultad de Ciencias Básicas.Vol 5.N.1.(2009), pg 44-49
- [31] C.R. Plaza, Introduction to initial-Boundary Value Problems for Hyperbolic Systems. En preparación. www.fenomec.unam.mx/ramon/publicaciones.html
- [32] O.A.Ladyzenskaja; V.A Solonnikov, N.N. Ural'ceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic type, American Math.Soc, Providence, RI. 1968
- [33] A.R. Gomez P, Solución al Sistema general de ecuaciones de Euler para un fluido compresible, Revista Ciencia e Ingeniería Neogranadina. Vol 21-1. (2011), pg 115-124