

**Modelo de Black-Litterman para la optimización de portafolios con *views*
obtenidos por modelación de volatilidad**

Jorge Andrei Valencia García

jvalen95@eafit.edu.co

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Administración Financiera

Asesor

Alfredo Trespalacios Carrasquilla

alfredo.trespalcios@gmail.com

Universidad EAFIT

Escuela de Economía y Finanzas

Maestría en Administración Financiera

Medellín

2018

Resumen

El modelo de Black-Litterman incorpora los retornos de equilibrio del mercado y los *views* de los inversionistas, para generar una nueva predicción del retorno del portafolio. Se aplica este modelo para la optimización de portafolios de acciones en Colombia. La principal diferencia frente a la literatura existente en el país es la utilización de procesos GARCH para el pronóstico de los retornos que se usan como *views* en el optimizador. Se modelan portafolios semanalmente con horizonte de 20 días bursátiles para el segundo semestre de 2017 y se comparan las rentabilidades reales de dichos portafolios ajustados por Black-Litterman versus los portafolios de referencia. Se encuentra que el 58,82% de los portafolios supera al COLCAP con la metodología sugerida. Además, se realizan comparaciones respecto a la medida de agregación de valor (α), presentando Black-Litterman un mejor desempeño.

Palabras clave: Modelo de Black-Litterman, Optimización de portafolios, GARCH, Volatilidad.

Abstract

The Black-Litterman model incorporates the market equilibrium returns and investors views to generate a new prediction of the return of the portfolio. This model is applied for the optimization of stock portfolios in Colombia. The main difference compared to the existing literature in Colombia is the use of GARCH processes for forecasting the returns that are used as views in the optimizer. Portfolios are modeled weekly with a horizon of 20 trading days for the second semester of 2017 and the real returns of those portfolios adjusted by Black-Litterman versus the reference portfolios are compared. It is found that 58.82% of portfolios outperform COLCAP with the suggested methodology. In addition, comparisons are made with respect to the measure of value aggregation (α), with Black-Litterman presenting a better performance.

Key words: Black-Litterman model, Portfolio optimization, GARCH, Volatility.

Contenido

1. Introducción.....	4
2. Construcción estado del arte.....	9
3. Regularidades presentes en las series de retornos de activos	11
4. Modelo de Black-Litterman.....	14
4.1 Descripción del modelo de Black-Litterman	16
4.1.1 Retorno implícito: vector Π	16
4.1.2 Confianza en el equilibrio: escalar τ	19
4.1.3 Incorporación de los <i>views</i> : las matrices P y Q.....	19
4.1.4 Confianza en los <i>views</i> : matriz Ω	21
4.1.5 Retornos esperados de BL: μ_{BL}	21
5. Metodología.....	22
6. Conclusiones.....	37

Lista de tablas

Tabla 1. Trabajos por autor, año y objetivo sobre aplicación del BL y aplicaciones GARCH..	9
Tabla 2. Portafolio de equilibrio (COLCAP ajustado)	24
Tabla 3. Estadísticas descriptivas de las series de acciones utilizadas.....	25
Tabla 4. Rentabilidad EGARCH (1,1) acumulada para el periodo T+20 desde el 31 de octubre	27
Tabla 5. Resultados BL: retorno esperado, ponderación, ponderación ajustada y cambios respecto al W de mercado	29
Tabla 6. Rendimientos reales BL vs COLCAP	35
Tabla 7. Análisis de sensibilidad ante cambios en el coeficiente de aversión al riesgo λ	36

Lista de gráficos

Gráfico 1. Frontera eficiente portafolio base, 31 de octubre 2017	30
Gráfico 2. Composición del portafolio de Markowitz con los insumos del modelo BL.....	32
Gráfico 3. Composición del portafolio de BL ajustado	32
Gráfico 4. Evolución portafolios BL para un mes	34

1. Introducción

La selección de activos para la conformación de portafolios óptimos de inversión ha sido continua y es uno de los temas claves en los mercados financieros globales. Los administradores de portafolios están en la búsqueda constante de metodologías y de adaptaciones a estas, que les permitan seleccionar los activos que mejor se adapten a sus necesidades o a las de sus clientes. Es el caso de la Teoría de Portafolios Modernos (Markowitz, 1952), la cual combina dos objetivos básicos de inversión: maximización del retorno y, al mismo tiempo, minimizar el riesgo y, de esta forma, encontrar portafolios eficientes en términos de la media y la varianza de los retornos esperados. Dicho modelo es considerado base fundamental en la teoría de selección de portafolios.

A pesar del atractivo de esta metodología, diversos autores han encontrado que su aplicación es limitada al generar resultados extremos, poco intuitivos, poco diversificados, inestables y que no son apropiados para ser implementados en el portafolio de un cliente (He & Litterman, 2002) (Idzorek, 2004) (Lummer, Riepe, & Siegel, 1994) (Jones, Lim, & Zangari, 2007) (Mahrivandi, Noviyanti, & Riwi, 2017).

Motivados por las limitaciones presentadas por el modelo de Markowitz (1952), y con el fin de presentar un modelo más aplicable en la asignación de activos, por parte de inversionistas profesionales, Fischer Black y Robert Litterman desarrollaron en 1991 su modelo, el cual permite combinar los retornos de los activos en equilibrio con las expectativas o *views* existentes, respecto a una determinada gama de activos financieros (Black & Litterman, 1992). De esta forma se superan las limitaciones asociadas al modelo de media-varianza, al arrojar ponderaciones menos extremas y menos susceptibles a variaciones en los parámetros

iniciales y, así, generar resultados más consistentes con el comportamiento “normal” de un inversionista “promedio” (Drobetz, 2001).

Este modelo, hace el uso de información muestral y extra muestral para minimizar el error de estimación de los parámetros. La información extra muestral se entiende como la relacionada a la intuición y a las opiniones subjetivas o *views* del administrador del portafolio o de expertos; esta estrategia de manejar estos dos tipos de información se conoce como la estadística bayesiana. La estadística bayesiana es una aproximación natural para la construcción de portafolios, ya que provee una teoría para combinar diferentes fuentes de información (Herold, 2003).

Diversos autores han realizado trabajos en Colombia poniendo a prueba las bondades del modelo de Black-Litterman (en adelante BL) sobre los modelos tradicionales de media-varianza. Trujillo (2009) y Bernal (2013) realizaron estudios basados en la comparación de portafolios de inversión optimizados bajo el modelo de media-varianza de Markowitz y el modelo de BL, el primero para los Fondos de Pensiones Obligatorias colombianos por lo que tenía en cuenta activos tanto nacionales como internacionales; y el segundo, para selección de activos solo nacionales; en ambos casos se observó que el de BL arroja resultados más acertados sobre el comportamiento del portafolio en términos de diversificación y tipos de activos. Del mismo modo, Luna & Tamayo (2015) realizaron una aplicación del modelo de BL en el mercado de renta variable colombiano, obteniendo mejores resultados, medidos como rentabilidades promedio mayores que las del mercado en términos absolutos y estadísticamente significativos.

A pesar de superar muchas de las limitaciones presentes en los modelos tradicionales de media varianza, el modelo de BL presenta un inconveniente; este radica en asumir que los

retornos de equilibrio y los *views* distribuyen normalmente, una suposición muy fuerte para los retornos de los activos financieros (Meucci, 2005). Adicionalmente, la incorporación de los *views* en el modelo representa un componente arbitrario y subjetivo, propio de cada administrador o experto y se basa en predicciones que resultan del supuesto de normalidad ya mencionado (Drobtz, 2001). De hecho, Mandelbrot (1963) demostró que la mayoría de las series financieras de retornos de acciones están caracterizadas por distribuciones leptocúrticas, agrupaciones de volatilidad y otras regularidades que las hacen alejarse de una distribución normal.

En la literatura investigada para el caso colombiano: (Trujillo, 2009) (Bernal, 2013) (Torres, 2014) (Giraldo, y otros, 2015) (Luna & Tamayo, 2015) (Rangel & Ávila, 2016), se realizaron aplicaciones del modelo BL basadas en los supuestos de normalidad, en los que se ha buscado solo eso, aplicar el modelo. En el presente trabajo se realiza el tratamiento necesario a las series, con el fin de obtener pronósticos de volatilidad y retorno que tengan en cuenta las regularidades propias de estas series, para obtener portafolios de inversión más objetivos. Las rentabilidades reales de los portafolios conformados por BL y de los portafolios de mercado se comparan con el objetivo de concluir al respecto de la capacidad predictiva del modelo basado en procesos GARCH.

En particular, se utiliza el modelo de heterocedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH) y, más específicamente, su variación GARCH exponencial (EGARCH) como aproximación a los *views* sobre las acciones. Los modelos GARCH capturan de una manera adecuada las muchas regularidades existentes en los retornos de las acciones de una manera elegante y sistemática (Beach & Orlov, 2007), tales como: asimetría en la volatilidad, exceso de curtosis, efectos de apalancamiento, volatilidad cambiante en el tiempo, reversión

a la media, relación inversa entre volatilidad y correlación serial, efectos de las variables macroeconómicas en la volatilidad (Bollerslev, Chou, & Kroner, 1992). Los modelos GARCH, además, son reconocidos por ser una herramienta aproximada para modelar la dinámica de los retornos de los activos financieros. Los pronósticos son ayudados modelando la volatilidad como el promedio ponderado de una tendencia de largo plazo, el pronóstico de la varianza de periodos pasados y la información observada en los periodos previos (Abascal, 2016). Lo anterior es consistente con el denominado “clúster de volatilidad” o “agrupamiento de la volatilidad”, que hace referencia a la persistencia de periodos de alta volatilidad y tranquilidad.

Al aplicar procesos ARCH y GARCH para la modelación de la varianza en series de retornos de acciones, es importante que la información recogida de dicha modelación pueda ser utilizada para los posteriores pronósticos de los retornos. Para esto se utiliza el índice de vida media (HL por sus siglas en inglés) (Bollerslev, Engle, & Nelson, 1994), el cual mide la velocidad, en días, en que la varianza condicional converge a la varianza de largo plazo. En Colombia, Montoya & Trespacios (2014) realizaron una aplicación de procesos ARCH y GARCH para 6 acciones del mercado entre 2010 y 2014, encontrando un HL para el ARCH de 25 días y 40 días para el GARCH. Duqui, Franci & Torluccio (2014) realizaron una modelación con EGARCH-M para las acciones del Dow Jones entre junio de 2002 y diciembre de 2011, el resultado fue un HL promedio de 54 días. En este trabajo se asume que el inversionista tiene un horizonte de inversión de 20 días bursátiles (1 mes calendario), el cual, a la luz de los trabajos mencionados, lograría capturar los efectos de varianza condicional que le dan su razón de ser a esta investigación.

Para la aplicación se utilizan las series de los retornos de las acciones que componen el COLCAP, indicador de referencia para el mercado de renta variable colombiano, entre el 30 de mayo de 2013 y el 31 de octubre de 2017. Dichas series presentan varias de las regularidades expresadas, haciendo que requieran el tratamiento del caso. El modelo empleado es el EGARCH (GARCH exponencial), con el fin de generar los pronósticos de los retornos y sus respectivas volatilidades. De esta forma, se podrán corregir algunas de las limitaciones presentes en los GARCH, como por ejemplo, la posibilidad de capturar correctamente el hecho de que los choques negativos llevan a una varianza condicional mayor de lo que lo harían los choques positivos (Poon & Granger, 2003).

Los rendimientos pronosticados se usan como *views*, estos se ingresan al modelo BL junto con los retornos de equilibrio, que resultan de un proceso de optimización inversa a partir de las ponderaciones de equilibrio, para generar portafolios óptimos de inversión en el mercado de acciones colombiano. Este ejercicio se realiza de manera dinámica ingresando la información nueva disponible para los retornos y, de esta forma, evaluar qué tan significativo es el cambio en las ponderaciones óptimas en el corto plazo. Adicionalmente, se compara la rentabilidad del portafolio real versus el portafolio del modelo BL conformado por los *views* resultantes del modelo GARCH. Poniendo esto en práctica, se pretende contribuir a la extensa teoría y práctica existente con base al modelo BL en Colombia, pero con la intención de generar resultados que tengan en cuenta la realidad de las series de retornos con estos procesos econométricos, facilitando la toma de decisiones para los administradores de portafolios, basados en el riesgo asumido con una modelación correcta de este, eliminando lo más posible la incertidumbre asociada a confiar en sus propios *views* o los de los expertos.

Siguiendo con lo presentado en esta introducción, en la siguiente parte se ofrece una tabla resumen con los autores y trabajos consultados para la elaboración del presente trabajo. El capítulo 3 hace una descripción de las regularidades presentes en las series de los retornos de acciones que hacen necesaria la modelación de su volatilidad y se describe el proceso econométrico para el pronóstico de los *views*. En el capítulo 4 se presentan los elementos necesarios para la aplicación del modelo BL. El capítulo 5 presenta los datos y la construcción del portafolio óptimo basado en los resultados del modelo econométrico. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Construcción estado del arte

En la siguiente tabla se presentan algunos de los autores que han aplicado las metodologías presentes en este trabajo de investigación: modelos de BL y procesos GARCH:

Tabla 1. Trabajos por autor, año y objetivo sobre aplicación del BL y aplicaciones GARCH

Autor y año	Objetivo y metodología
Black (1976)	Estudiar las regularidades que afectan a los retornos de acciones y su volatilidad.
Pagan, Schwert (1990)	Comparar los modelos ARCH/GARCH/EGARCH y otros para la modelación de volatilidad en acciones de USA.
Nelson (1991)	Introducir los modelos EGARCH como solución a las restricciones en los ARCH/GARCH.
Black, Litterman (1992)	Presentar el modelo BL para activos globales, desde el mercado de equilibrio hasta la formulación de los <i>views</i> para mercados internacionales
Bollverslev, Chou, Kroner (1992)	Mostrar una visión general de algunos de los desarrollos en la formulación de los modelos ARCH y sus aplicaciones a series financieras.
Lummer, Riepe, Siegel (1994)	Revisar las limitaciones de los optimizadores de MV y proveer los procedimientos adecuados para estimar adecuadamente los <i>inputs</i> para selección de activos.
Drobtetz (2001)	Mostrar los inconvenientes del modelo de Markowitz, explicar el modelo de BL y cómo logra sobrellevar los problemas del primero.

Appiah-Kusi, Menyah (2002)	Modelar los retornos ajustados semanales de índices bursátiles africanos como procesos GARCH para investigar el criterio débil de eficiencia en la formación de precios.
Idzorek (2002)	Consolidar las ideas de trabajos sobre el BL y dar una guía paso a paso para la implementación del modelo con una metodología para controlar las ponderaciones finales.
He, Litterman (2002)	Demostrar que los portafolios óptimos generados por BL son simples e intuitivos, definidos por un equilibrio que se desvía hacia las expectativas en la confianza dada.
Beach, Orlov (2007)	Aplicar el BL con <i>views</i> derivados del EGARCH-M para modelar la volatilidad controlando las regularidades propias de las series de retornos de acciones.
Jones, Linez, Zangari (2007)	Presentar diferentes formas de aplicar los <i>views</i> y aplicar el BL para la construcción de portafolios estructurados, haciendo énfasis en el factor riesgo.
Trujillo (2009)	Aplicar el modelo BL para la inversión de los FPO colombianos y comparar los resultados con los obtenidos por Markowitz.
Martínez (2010)	Aplicar del modelo BL para la construcción de portafolios de inversiones de acuerdo con las políticas del Banco Central de Bolivia.
Cruz (2012)	Aplicar BL a la construcción de portafolios de acciones globales teniendo en cuenta el riesgo de tasa de cambio.
Bernal (2013)	Comparar el desempeño de tres portafolios BL con diferentes <i>views</i> contra los resultados obtenidos por Markowitz.
Torres (2014)	Aplicar el modelo de BL a los portafolios del MILA y compararlos con resultados obtenidos a través de Markowitz.
Walters (2014)	Presentar la taxonomía y literatura asociada al modelo BL y describir detalladamente el modelo. Presentar opciones para el escalar <i>tau</i> .
Duqi, Franci, Torluccio (2014)	Aplicar el modelo de BL con <i>views</i> derivados del EGARCH-M para modelar la volatilidad de los retornos.
Montoya, Trespalacios (2014)	Valorar opciones europeas (<i>put</i> y <i>call</i>) cuando los retornos del subyacente son modelados por procesos ARCH y GARCH y comparar los resultados con la valoración convencional de Black-Scholes.
Luna, Tamayo (2015)	Aplicación de BL para acciones del COLCAP y comparación contra el desempeño real de la cartera.
Giraldo y otros (2015)	Estructurar un portafolio óptimo sobre el COLCAP mediante el modelo de Markowitz con los insumos del BL.
Harris, Stoja, Tan (2016)	Incorporar la variación en el tiempo en la distribución condicional de los retornos y elegir un modelo de volatilidad adecuado para la matriz de covarianzas en el BL.
Rangel, Ávila (2016)	Aplicar el modelo de BL en los fondos de inversión colectiva (FIC's) y contrastarlos con el desempeño de la rentabilidad histórica de estos.
Abascal (2016)	Familiarizar al usuario con los diferentes modelos de análisis y tratamiento de series de tiempo y realizar una aplicación práctica.
Mahrivandi y otros (2017)	Proponer una solución al inconveniente de BL donde se asumen normalidad, proveyendo una solución alternativa donde los retornos de los activos y los <i>views</i> son modelados desde distribuciones no normales.
Gertzell (2013)	Aplicar BL al mercado sueco comparándolo con dos modelos de media varianza.

Fuente: Elaboración propia, 2017.

Teniendo en cuenta la metodología utilizada por los autores consultados, se seleccionan las series y se define el tamaño y la periodicidad de estas, para iniciar con el proceso de modelación GARCH, revisando el índice de vida-media de Bollerslev (HL) para verificar que el horizonte de pronóstico aún contenga información relevante acerca de la varianza condicional de la serie; de esta forma se obtiene uno de los insumos principales para el modelo BL, el vector de *views* (Q); acto seguido, se inicia el proceso de optimización por medio de BL, iniciando con la selección del portafolio de equilibrio y la construcción de la matriz de covarianzas; a partir de estos, se realiza el proceso de optimización inversa para generar el vector de retornos implícitos o de equilibrio (Π), el cual se calibra con el coeficiente de aversión al riesgo (λ); luego se procede con la construcción del vector de *views* (Q), el cual resulta de la modelación GARCH, y la matriz de activos sobre los que se tiene un *view* (P); como insumo final se construye la matriz diagonal Ω , la cual define la confianza que se tiene en los *views*. Teniendo los insumos necesarios para BL se obtiene el vector de retornos esperados y, finalmente, por medio del mismo proceso de optimización inversa, utilizado inicialmente, se obtienen las ponderaciones óptimas para cada uno de los activos del portafolio.

3. Regularidades presentes en las series de retornos de activos

El modelo de BL supera diversos inconvenientes de los optimizadores convencionales de media varianza (como el de Markowitz). Sin embargo, hay un inconveniente dentro de los supuestos del modelo, ya que se asume normalidad en las distribuciones de los retornos implícitos y de los *views* y, teniendo en cuenta, que estamos tratando con retornos de activos financieros, es un supuesto muy fuerte para definir este tipo de series (Meucci, 2005).

Los retornos de acciones se caracterizan por contener diversas regularidades: agrupamiento de volatilidad (alta persistencia de periodos de volatilidad y tranquilidad), exceso de curtosis, asimetría, reversión a la media, autocorrelación en riesgo, heterocedasticidad, efectos de apalancamiento, relación inversa entre volatilidad y correlación serial, movimientos conjuntos en volatilidades a través de activos y mercados (Beach & Orlov, 2007). En efecto, los retornos de acciones tienden a presentar distribuciones no normales en forma de asimetría, pero más pronunciado en la formación de exceso de curtosis (Bollerslev, Chou, & Kroner, 1992).

Un hallazgo común en la mayoría de la literatura empírica que utiliza datos financieros de alta frecuencia (i.e., retornos de acciones) es la aparente persistencia de varianza condicional (Bollerslev, Engle, & Nelson, 1994). Dicha varianza, además de ser variante en el tiempo (heterocedasticidad), también puede ser condicional en cuanto a que las observaciones actuales dependen de las observaciones pasadas (sean inmediatas o no).

De acuerdo con lo anterior, se hace necesaria la utilización de modelos que permitan tener en cuenta la mayoría de las regularidades mencionadas y modelar la varianza, de tal forma que se logren capturar los efectos de varianza condicional en los retornos pronosticados de los activos. Para tal efecto, se usan los modelos GARCH, los cuales permiten modelar la relación entre las varianzas pasadas y futuras, así como también el exceso de curtosis y el agrupamiento de volatilidad (Bollerslev, Chou, & Kroner, 1992).

Modelo econométrico GARCH

Los modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicionada (ARCH por sus siglas en inglés) tienen su origen en (Engle, 1982), donde se introduce esta familia de modelos con el

fin de analizar la volatilidad de la inflación en el Reino Unido. La idea básica en su aplicación a las series temporales financieras es que un shock en el rendimiento de un activo financiero no está autocorrelacionado, pero sí es dependiente, es decir, la varianza futura dependerá de las varianzas (inmediatamente) pasadas, convirtiéndose en una buena herramienta para analizar la varianza condicional del retorno de los activos.

A pesar de su utilidad, estos modelos tenían una serie de limitaciones. Por un lado, asumían que los shocks negativos y positivos generaban los mismos efectos en la volatilidad de los retornos y precios, lo cual impide estimar adecuadamente el efecto apalancamiento discutido por autores como Black (1976), quien llegó a la conclusión que los shocks negativos afectan más intensamente a la volatilidad de los retornos que los positivos. Además, en ocasiones el número de retardos necesarios para estimar la varianza condicional es demasiado alto, haciéndolo poco parsimonioso y difícil de implementar (Abascal, 2016); no obstante, los modelos ARCH representaron un buen punto de partida para la familia de modelos GARCH.

Con el fin de superar dichas limitaciones, Bollerslev (1986) introdujo la familia de modelos GARCH (modelo generalizado autorregresivo de heterocedasticidad condicionada), los cuales ofrecían modelos más parsimoniosos (menos parámetros) haciéndolos más sencillo de implementar. Estos utilizan las varianzas pasadas y los pronósticos de las varianzas pasadas para pronosticar las varianzas futuras; matemáticamente se definen de la siguiente forma:

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t, \text{ donde } \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (1)$$

Con el fin de garantizar que la varianza condicional estimada sea positiva en todos los periodos, se aplican las siguientes condiciones:

$$\omega > 0$$

$$\alpha_i, \beta_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$$

Los GARCH sí lograron generar modelos más parsimoniosos, sin embargo, seguían sin lograr capturar los efectos de asimetría generados por los shocks positivos y negativos y, además, las condiciones de no negatividad eran en muchas ocasiones difíciles de alcanzar y restringían la dinámica de los procesos de varianza condicional (Nelson, 1991).

Pagan & Schwert (1990) y, posteriormente, Nelson (1991) introdujeron una variación de los modelos GARCH, conocida como EGARCH (modelo exponencial generalizado autorregresivo de heterocedasticidad condicionada), modelado matemáticamente de la siguiente forma:

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t, \text{ donde } \ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^q \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p \theta_j g(\varepsilon_{t-j}) \quad (2)$$

Al modelar el logaritmo de la varianza $\ln(\sigma_t^2)$ no se hace necesario restringir el valor de los parámetros para evitar varianzas negativas de los modelos ARCH y GARCH y, gracias a la inclusión de $g(\varepsilon_t)$, se logra que el modelo responda asimétricamente a los shocks positivos y negativos (Bollerslev, Chou, & Kroner, 1992).

4. Modelo de Black-Litterman

El modelo de BL para la optimización de portafolios de inversión fue desarrollado por Fischer Black y Robert Litterman en 1990 para Goldman Sachs y documentado en sus trabajos (Black & Litterman, 1991) y (Black & Litterman, 1992). El modelo comparte la misma base teórica del enfoque tradicional del optimizador de media-varianza de Markowitz, pero asumiendo

que los inversionistas tienen expectativas que quieren incorporar en los retornos esperados para diferentes activos.

Markowitz (1952) define las bases de la teoría moderna de portafolios en la cual se establece como objetivo la maximización de la rentabilidad esperada al mínimo riesgo posible, formando un conjunto de portafolios eficientes que establecen la rentabilidad máxima posible para cada nivel dado de riesgo que el inversionista está dispuesto a asumir. El principal aporte de Black y Litterman es la posibilidad de combinar los *views* de los activos con el equilibrio del mercado, de tal forma que el administrador se pueda adelantar a las desviaciones que presentará dicho equilibrio y tomar ventaja mientras el mercado se acomoda nuevamente (Tamayo & Marín, 2014).

Para lograr esto, el modelo BL hace uso de información muestral y no muestral para minimizar el error de estimación de los parámetros. La información no muestral hace referencia a los *views* o expectativas que los administradores de portafolio tienen sobre los activos del mercado; esta estrategia de manejar dos fuentes de información, muestral y no muestral, se conoce como estadística bayesiana. La estadística bayesiana permite combinar diferentes fuentes de información y modelar la incertidumbre asociada a dicha información (Herold, 2003). De acuerdo con Castillo (2006), la estadística bayesiana ha hecho una contribución muy importante a la práctica de la toma de decisiones al haber formulado una teoría estadística coherente, que ha permitido estructurar y modelar probabilidades subjetivas en el contexto de un problema de decisión.

La estadística bayesiana presenta una ventaja importante para la toma de decisiones de inversión y gestión de portafolios, cuando la información muestral que se tiene es limitada,

permitiendo que la información no muestral genere valor al proceso de optimización (Scherer & Martin, 2005).

4.1 Descripción del modelo de Black-Litterman

El modelo BL parte de un portafolio de referencia (equilibrio de mercado) y corresponde al conjunto de retornos esperados que igualan la oferta y la demanda de activos financieros, si todos los inversionistas tienen las mismas perspectivas (Black & Litterman, 1992). El rendimiento esperado que un inversionista tenga sobre un activo debe ser igual al rendimiento esperado por el consenso del mercado sobre el mismo activo, a menos que el inversionista tenga una expectativa diferente, es por esta razón que el modelo BL no necesita que el inversionista defina un retorno esperado para cada activo (como sí sucede en el modelo de Markowitz). Simplemente, aquellos activos sobre los que el inversionista no tiene ninguna expectativa específica entran al modelo con su retorno de equilibrio. Este equilibrio de mercado puede ser comprendido como el centro de gravedad sobre el que se mueve el mercado y del que se desvía constantemente, pero al que siempre tiende. De esta forma, los estimadores mejoran al optimizar con base a ese centro de gravedad, permitiendo al inversionista tomar ventajas al anticiparse a esos movimientos (Torres, 2014).

A continuación, se describen cada uno de los componentes del modelo de BL.

4.1.1 Retorno implícito: vector Π

En el modelo BL los retornos implícitos o de equilibrio (Π) pueden derivarse de dos formas: mediante una teoría como el CAPM, la cual sostiene que los inversionistas solo son compensados por aceptar riesgo necesario, es decir, el riesgo de mercado, no por los riesgos

no correlacionados con el mercado, que se pueden mitigar mediante la diversificación, proporcionando un criterio de comparación contra el cual los inversionistas contrastarán sus expectativas o *views* (Trujillo, 2009); o también asumiendo que el mercado está en equilibrio y utilizando un método de optimización inversa, es decir, en lugar de encontrar una ponderación, dada una rentabilidad determinada, se busca una serie de rentabilidades esperadas dado unas ponderaciones. En ambos casos se conduce a la siguiente fórmula:

$$\Pi = \lambda \Sigma w \quad (3)$$

Donde:

Σ : Es la matriz de varianzas-covarianzas de los retornos de los activos sobre la tasa libre de riesgo diaria.

w : Es el vector de ponderaciones calculadas por capitalización de mercado.

λ : Es el coeficiente de aversión al riesgo.

El coeficiente de aversión al riesgo (λ) representa la compensación esperada riesgo-retorno.

Es la tasa a la cual un inversionista renunciará a determinada rentabilidad por tener menos riesgo (Idzorek, 2004). Se determina de la siguiente forma:

Se deriva del modelo CAPM, donde:

$$\Pi = \beta(Rm - Rf) \quad (4)$$

El vector β es el cociente entre la covarianza de los retornos de los activos del portafolio con el retorno del mercado y la varianza del mercado, es decir:

$$\beta = \frac{\Sigma w}{w' \Sigma w} \quad (5)$$

Reemplazando (3) en (2)

$$\Pi = \frac{\Sigma w (RM - RF)}{w' \Sigma w} \quad (6)$$

Donde $\frac{(Rm-Rf)}{w' \Sigma w}$ es el coeficiente de aversión al riesgo λ , llegando al planteamiento inicial de los retornos en exceso de equilibrio $\Pi = \lambda \Sigma w$.

De todas formas, este parámetro puede ser subjetivo para cada inversionista, ya que un mayor λ buscará mayor ponderación de activos más seguros y uno menor buscará mayor ponderación de activos más volátiles. De acuerdo con Walters (2014) este parámetro puede ser computado o asumido, y usualmente se utiliza un parámetro entre 0 y 3, siendo 3 representativo de un inversionista con un nivel de aversión al riesgo mayor al del resto de mercado (Trujillo, 2009).

Los retornos implícitos pueden interpretarse como los retornos de largo plazo que los mercados de capitales proveen y que igualan la oferta y la demanda de activos financieros, y en el modelo BL se utilizan con el fin de “centrar” el portafolio óptimo alrededor de un portafolio de mercado. Es importante destacar que, si bien el CAPM no refleja necesariamente de forma exacta las expectativas del mercado, sí constituye un portafolio de referencia contra el cual se podrán contrastar las expectativas del inversionista y determinar las posibles oportunidades de inversión existentes.

Con este primer elemento, se empieza a definir el vector de retornos en exceso esperados del modelo BL (μ_{BL}), el cual se asume que tiene una distribución de probabilidad que es proporcional al producto de dos distribuciones normales. La primera distribución representa el equilibrio: media μ con matriz de covarianza $\tau \Sigma$. El parámetro τ es un escalar que

representa el grado de incertidumbre asociada al cálculo del vector de retornos implícitos (equilibrio).

$$\mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

4.1.2 Confianza en el equilibrio: escalar τ

El escalar τ hace referencia al nivel de certidumbre que tiene el administrador de portafolios sobre los retornos de equilibrio. Se puede interpretar de diversas formas: un valor pequeño le da mayor ponderación a los retornos de equilibrio (Π), implicando una mayor confianza sobre estos; un valor igual a 0 significa que el administrador no tiene confianza sobre los *views* y, por tanto, el retorno esperado del portafolio será el retorno de equilibrio.

Existen diversas teorías respecto al valor del escalar τ . Black & Litterman (1992) y Lee (2000) establecieron que, dado que la incertidumbre de la media es menor a la incertidumbre de los retornos, el valor del escalar debe ser cercano a 0. Otros, basados en su experiencia con el modelo, definieron un valor adecuado entre 0,01 y 0,05 (Idzorek, 2004). Finalmente, (Blamont & Firoozy, 2003) interpretaron $\tau\Sigma$ como el error estándar en la estimación de los retornos implícitos, de esta forma, el escalar τ es aproximadamente 1 dividido el número de observaciones T.

4.1.3 Incorporación de los *views*: las matrices P y Q

La primera distribución para la definición de los retornos esperados para el modelo BL es representada por el equilibrio (Π). La segunda distribución representa los *views*, es decir, las opiniones, en términos de rentabilidades, que los inversionistas o administradores tienen sobre los activos del portafolio. La inclusión de estas opiniones representa el aporte más significativo e innovador del modelo BL (Luna & Tamayo, 2015).

Las K opiniones que los inversionistas tienen con sus respectivos retornos esperados se pueden representar como:

$$P^T = [p_1, p_2, p_3, \dots, p_k] \quad y,$$

$$Q^T = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_k]$$

Donde, la matriz P selecciona los activos sobre los cuales se tiene un *view*. Se elabora dependiendo del tipo de opinión que se tenga, que pueden ser de tipo relativas o absolutas. Es una opinión relativa cuando se realiza una comparación entre dos o más activos del portafolio, es decir, que el retorno de un activo sobrepasará al de otro en un porcentaje determinado, en este caso los elementos de la fila en la matriz P deben sumar 0; y es una opinión absoluta cuando se espera un exceso de retorno fijo de un activo en particular, en este caso los elementos de esta fila en la matriz P deben sumar 1. Q es el vector de opiniones que contiene las expectativas (retornos) para cada activo p_k . De acuerdo con lo anterior, los *views* son expresados de la siguiente manera:

$$P \cdot \mu = Q + \varepsilon \quad (7)$$

Donde:

P : es una matriz $K \times N$ de activos sobre los que se tiene un *view*.

Q : es un vector $K \times 1$ que contiene los *views*.

ε : es un vector aleatorio $K \times 1$ normalmente distribuido con media cero y matriz diagonal de covarianzas Ω .

Llegando a la siguiente distribución:

$$P \cdot \mu \sim N(Q, \Omega) \quad (8)$$

Donde Ω es una matriz diagonal $K \times K$ con elementos en la diagonal y ceros en el resto de las posiciones, pues se asume que los *views* no están correlacionados entre sí.

4.1.4 Confianza en los *views*: matriz Ω

Los valores de la diagonal de la matriz de covarianzas del error Ω representan el nivel de confianza del administrador en el respectivo *view* que representa. Si la confianza del administrador en sus *views* es baja, entonces la composición del portafolio final tenderá más al equilibrio. Por el contrario, si la confianza es alta, la composición final dependerá más de los *views* y, por ende, se desviará del equilibrio.

La matriz Ω depende de la matriz de covarianza inicial Σ , el escalar de incertidumbre τ y la matriz P , y es diagonal ya que se asume que los valores de Q son independientes:

$$\Omega = \text{diagonal}(P(\tau\Sigma)P^T) \quad (9)$$

4.1.5 Retornos esperados de BL: μ_{BL}

Dadas las distribuciones del equilibrio (priori) y de los *views* (condicional) se llega a la distribución de probabilidad posterior, que representa los retornos esperados, con media μ_{BL} y varianza M dada por:

$$\mu_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q], \quad (10)$$

$$M = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1} \quad (11)$$

Dado que los retornos de los activos se encuentran correlacionados, los *views* sobre algunos activos producirán cambios en los retornos esperados de todos los activos. De esta forma, se

está asegurando que no se generen soluciones muy concentradas, como sí sucede en el optimizador de media-varianza de Markowitz.

Aplicando propiedades matriciales a (7) se obtiene la siguiente representación para la media:

$$\mu_{BL} = \Pi + \tau \Sigma P^T [(P \tau \Sigma P^T) + \Omega]^{-1} (Q - P \Pi) \quad (12)$$

De esta última se aprecia más fácilmente que si no se tienen expectativas sobre los retornos de los activos (la matriz P estará compuesta por ceros), el retorno esperado será el retorno de equilibrio. Esto es consistente con la afirmación de que un inversionista que no tiene expectativas sobre el mercado debe mantener el portafolio de mercado.

Una vez determinado el vector de retornos en exceso esperados de BL, μ_{BL} , se procede a realizar la optimización por media-varianza para conocer las ponderaciones óptimas del modelo del BL. Para esto, es necesario conocer la media y la covarianza de la distribución predictiva de los retornos esperados. La media es igual a la media posterior de los retornos esperados, μ_{BL} , mientras que la covarianza incluye el término del error de la media de la covarianza de la distribución posterior, que refleja el error de estimación (He & Litterman, 2002).

$$\Sigma_p = \Sigma + M \quad (13)$$

Obteniéndose finalmente el vector de ponderaciones óptimas, w_{BL} , de la siguiente forma:

$$w_{BL} = \mu_{BL} (\lambda \Sigma_p)^{-1} \quad (14)$$

5. Metodología

El estudio se realiza para las acciones del mercado de valores colombiano, específicamente para las que componen el índice COLCAP. El COLCAP es el principal indicador del mercado

accionario, y es utilizado como referencia para inversionistas profesionales, tanto locales como internacionales. Es un índice de capitalización que refleja las variaciones de los precios de las acciones más líquidas de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC), donde la participación de cada acción en el índice está determinada por la capitalización bursátil ajustada: flotante de la compañía multiplicada por el último precio (Bolsa de Valores de Colombia, 2016). En la aplicación se siguen los siguientes pasos:

1. Identificación del portafolio de equilibrio y de su estructura inicial, de acuerdo con la composición del COLCAP.
2. Estimación de los pronósticos T+20, correspondiente a 20 días bursátiles, es decir, un mes calendario para cuatro semanas a partir del 31 de octubre.
3. Estimación de los retornos y pesos posteriores del portafolio del índice con base en los *views* de los inversionistas derivados del modelo EGARCH para cada semana.
4. Construcción frontera eficiente.
5. Comparación del portafolio obtenido por el modelo BL con uno de media varianza utilizando los insumos del modelo BL.
6. Evaluación del desempeño de los portafolios mediante la significancia de la relación lineal entre los portafolios BL y el COLCAP.

Inicialmente se identifica la estructura del portafolio inicial. El periodo muestral utilizado para la modelación de los pronósticos EGARCH es desde mayo 20 de 2013 al 31 de octubre de 2017, para un total de 1.087 retornos de acciones. Esta frecuencia y amplitud de la muestra permite tener en cuenta en el análisis eventos importantes en el mercado de capitales. Adicionalmente, las series son lo suficientemente largas para asegurar una significancia adecuada de los parámetros obtenidos por el EGARCH (Hwang & Valls, 2010). En cuanto al

periodo muestral utilizado para la implementación del modelo BL, este está comprendido entre el 4 de enero de 2016 al 31 de octubre de 2017, para un total de 449 datos.

Como portafolio de equilibrio se utiliza la composición del índice al 31 de octubre de 2017, fecha del último rebalanceo de este, se retiraron del ejercicio las acciones de Promigas S.A. (BVC: PROMIGAS), Grupo Aval ordinaria (BVC: GRUPOAVAL), Constructora Concreto (BVC: CONCRETO) y la Empresa de Telecomunicaciones de Bogotá (BVC: ETB), ya que sus series no contaban con la historia necesaria para la modelación GARCH, sus participaciones se repartieron de manera proporcional entre las demás especies. El portafolio de equilibrio queda de la siguiente forma:

Tabla 2. Portafolio de equilibrio (COLCAP ajustado)

NEMOTÉCNICO	DESCRIPCIÓN	%
PFBCOLOM	BANCOLOMBIA S.A.	12,54%
ECOPETROL	ECOPETROL S.A.	9,41%
GRUPOSURA	GRUPO INVERSIONES SURAMERICANA	8,52%
NUTRESA	GRUPO NUTRESA S.A.	7,10%
ISA	INTERCONEXION ELÉCTRICA S.A. E.S.P.	6,48%
BCOLOMBIA	BANCOLOMBIA S.A.	6,25%
GRUPOARGOS	GRUPO ARGOS S.A.	6,24%
PFAVAL	GRUPO AVAL ACCIONES Y VALORES S.A.	5,61%
CEMARGOS	CEMENTOS ARGOS S.A.	4,76%
EEB	EMPRESA DE ENERGÍA DE BOGOTÁ S.A. E.S.P.	4,75%
PFGRUPSURA	GRUPO INVERSIONES SURAMERICANA	4,48%
PFGRUPOARG	GRUPO ARGOS S.A.	4,07%
ÉXITO	ALMACENES ÉXITO S.A.	3,41%
PFDAVVNDA	BANCO DAVIVIENDA S.A.	3,14%
BOGOTÁ	BANCO DE BOGOTÁ S.A.	2,92%
CORFICOLCF	CORPORACION FINANCIERA COLOMBIANA S.A.	2,76%
PFCEMARGOS	CEMENTOS ARGOS S.A.	2,20%
CELSIA	CELSIA S.A E.S.P.	1,85%
CLH	CEMEX LATAM HOLDING	1,84%
PFAVH	AVIANCA HOLDINGS S.A.	1,03%
CNEC	CANACOL ENERGY LTD	0,64%

Fuente: Elaboración propia, 2017.

Adicional a la identificación del portafolio, la Tabla 3 presenta las estadísticas descriptivas de las series de retornos que llevan a las siguientes consideraciones: se presentan desviaciones estándar altas en relación con el nivel de retornos medios; la curtosis media es de 5,4789, lo que indica la presencia de excesos de curtosis, principalmente jalonada por las acciones de Corficolombiana, Avianca y Canacol; en general se presentan asimetrías negativas.

Tabla 3. Estadísticas descriptivas de las series de acciones utilizadas

Acción	Media	Mínimo	Máximo	Desviación Estándar	Asimetría	Curtosis
PFBCOLOM	0,00%	-7,16%	7,25%	1,41%	0,00	2,20
ECOPETROL	-0,08%	-10,45%	10,27%	1,99%	-0,15	3,97
GRUPOSURA	0,00%	-6,26%	5,67%	1,35%	-0,20	3,07
NUTRESA	0,00%	-4,99%	4,28%	1,09%	0,06	2,40
ISA	0,05%	-9,82%	10,48%	1,57%	-0,37	5,48
BCOLOMBIA	0,00%	-7,18%	7,23%	1,48%	0,00	2,03
GRUPOARGOS	-0,01%	-5,62%	9,03%	1,62%	-0,10	2,87
PFAVAL	0,00%	-6,39%	8,15%	1,17%	-0,20	4,38
CEMARGOS	0,03%	-10,45%	6,55%	1,60%	-0,38	3,13
EEB	0,03%	-7,26%	6,92%	1,27%	0,10	5,08
PFGRUPSURA	-0,01%	-5,22%	6,95%	1,32%	-0,15	2,46
PFGRUPOARG	-0,01%	-7,86%	7,21%	1,67%	-0,28	2,03
ÉXITO	-0,06%	-11,95%	8,03%	1,75%	-0,44	5,61
PFDVVVDA	0,02%	-9,41%	5,79%	1,50%	-0,61	3,56
BOGOTÁ	0,00%	-8,85%	6,89%	1,24%	-0,39	5,74
CORFICOLCF	0,00%	-15,87%	6,83%	1,26%	-1,80	24,75
PFCMARGOS	0,02%	-5,65%	5,23%	1,29%	-0,02	2,25
CELSIA	-0,01%	-8,70%	9,53%	1,51%	0,50	5,36
CLH	-0,02%	-9,76%	9,44%	1,81%	-0,12	2,34
PFAVH	-0,04%	-13,70%	19,50%	2,18%	0,59	11,52
CNEC	0,06%	-21,38%	35,57%	3,35%	0,80	14,82
PROMEDIO	0,00%	-9,23%	9,37%	1,59%	-0,15	5,48

Fuente: elaboración propia, 2017.

Teniendo identificada la estructura del portafolio de referencia, se procede a realizar la modelación de varianza y los retornos mediante el modelo GARCH, en combinación con el modelo ARIMA, con el fin de determinar los pronósticos T+20 teniendo en cuenta la varianza condicional presente en cada una de las series. El tratamiento de las series se realiza con el paquete RUGARCH del entorno de programación R, a través del cual se realiza el *fit* del mejor modelo ARIMA para la media, el criterio de información utilizado es el de Akaike (AIC). Una vez determinado el ARIMA se procede a especificar el EGARCH (1,1), de esta forma se obtiene el modelo ARIMA-GARCH para pronosticar los retornos a un mes que se usan como *views* del modelo BL.

La finalidad de la utilización del modelo EGARCH es capturar el efecto de asimetría en la volatilidad, es decir, que los choques negativos tienen efectos mayores en la volatilidad que los choques positivos. Para medir la eficacia del modelo en capturar dicho efecto, se revisa el *Sign Bias Test*, el cual permite medir los impactos de tres factores en la volatilidad: signo, tamaño positivo y tamaño negativo, se busca que los valores t sean no significativos para asegurar que el modelo esté capturando cada uno de los tres efectos. Los *Sign Bias Test* de las series arrojaron valores no significativos en su totalidad, pudiendo afirmar de esta manera, que los modelos están capturando correctamente los efectos de asimetría.

Otro factor importante para tener en cuenta es la medida de persistencia de la volatilidad. Los valores absolutos de las betas son cercanos a 1, lo que permite expresar que estas acciones tienen un largo récord de volatilidad. Una medida de la persistencia de la volatilidad está dada por el índice de vida-media de Bollerslev, el cual se define de la siguiente forma:

$$HL = \frac{\ln(0,5)}{\ln(\beta)} \quad (15)$$

Este indicador mide, en días, la velocidad con la que la varianza condicional converge a la varianza de largo plazo, o varianza incondicional. Se define como el número de periodos que se necesitan para reducir a la mitad la distancia entre la varianza condicional y su nivel promedio (varianza incondicional). En promedio, la vida-media de las acciones analizadas es de 31,98 días. Como ya se dijo, se asumen que los inversionistas tienen un horizonte de inversión de 20 días bursátiles, correspondiente a un mes calendario; de esta forma, se puede obtener información importante del vector de retornos para las estimaciones del modelo BL.

Una vez realizadas las modelaciones y validaciones de los modelos para cada serie, se procede a realizar el pronóstico para un mes adelante (20 días bursátiles), los cuales se emplean como *views* para el modelo de BL. La Tabla 4 reúne los retornos acumulados en T+20 a partir del 31 de octubre de 2017 para los activos del portafolio.

Tabla 4. Rentabilidad EGARCH (1,1) acumulada para el periodo T+20 desde el 31 de octubre

ACTIVO	RENT T+20	ACTIVO	RENT T+20	ACTIVO	RENT T+20
PFBCOLOM	-0,22%	PFAVAL	-0,24%	BOGOTÁ	2,45%
ECOPETROL	-1,07%	CEMARGOS	0,73%	CORFICOLCF	0,84%
GRUPOSURA	0,33%	EEB	1,43%	PFCEMARGOS	-1,02%
NUTRESA	0,03%	PFGRUPSURA	0,19%	CELSIA	-0,26%
ISA	1,59%	PFGRUPOARG	-0,95%	CLH	-0,59%
BCOLOMBIA	-0,12%	ÉXITO	-0,49%	PFAVH	-1,48%
GRUPOARGOS	-0,97%	PFDVVNDA	1,34%	CNEC	0,59%

Fuente: Elaboración propia, 2017.

Para la aplicación del modelo BL se procede con la construcción del vector de retornos de equilibrio (ecuación 3). La matriz de covarianzas Σ se calcula a partir de los rendimientos en exceso diarios sobre la tasa libre de riesgo diaria; como tasa libre de riesgo se toma la IBR a un mes, pues es el mismo horizonte de inversión del portafolio. Dado que el coeficiente λ

computado arroja un resultado pequeño (0,028), representando un inversionista con un nivel de riesgo alto, se utiliza un coeficiente de 0,9, que se encuentra cerca al punto medio entre 0 y 2, correspondiendo a un inversionista con una aversión al riesgo moderada. Mediante un proceso de optimización inversa se computan este coeficiente λ , la matriz Σ y el vector de ponderaciones definidos como equilibrio para obtener el vector Π de retornos de equilibrio (Walters, 2014).

Teniendo definido el prior del mercado, se procede a combinarlo con la información extra muestral, que corresponde a las expectativas de los inversionistas, es decir, el vector Q de *views*. El modelo BL permite emplear tantos *views* como se deseen, es decir, es posible establecer *views* para todos los activos del portafolio o para solo uno. Para representar los activos sobre los cuales se tienen las mejores y las peores expectativas, de acuerdo con el modelo EGARCH, se utilizan los 4 pronósticos más positivos y los cuatro más negativos. De esta forma, el vector Q queda definido de la siguiente forma:

$$Q = [2,45 \quad 1,59 \quad 1,43 \quad 1,34 \quad -0,97 \quad -1,02 \quad -1,07 \quad -1,48]$$

Los valores corresponden a las rentabilidades esperadas desde el periodo T hasta el periodo T+20, a partir del 31 de octubre de 2017, de las acciones de: BOGOTÁ, ISA, EEB, PFDVVNDA, GRUPOARGOS, PFCMARGOS, ECOPETROL y PFAVH, respectivamente. Se encuentran expresados como expectativas absolutas y se leen de la siguiente forma, para el caso de BOGOTÁ: se espera que la acción de BOGOTÁ tenga un exceso de retorno del 2,45% en el periodo; de la misma forma para las expectativas restantes. También se establece la matriz P que se encarga de referenciar aquellos activos sobre los cuales se tiene un *view*.

Utilizando la ecuación 9 se calcula la matriz de covarianzas de los *views* Ω , que define la confianza que se tiene sobre estos. Como escalar τ , que denota la confianza que se tiene sobre

los retornos de equilibrio, se utiliza un valor de 0,05, con el fin de asignarle una incertidumbre baja pero no tan cercana a cero dado el tamaño de la muestra (Idzorek, 2004).

Con los insumos definidos se aplica el modelo de BL, obteniendo inicialmente el vector de retornos esperados BL y finalmente el nuevo vector de ponderaciones sin restricciones, valores que se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5. Resultados BL: retorno esperado, ponderación, ponderación ajustada y cambios respecto al W de mercado

ACTIVO	ER	W _{Equilibrio}	W _{BL}	W _{BL} - W _{Equilibrio}	W _{BL} Ajustado
PFBCOLOM	1,032%	12,54%	11,94%	-0,60%	7,18%
ECOPETROL	0,457%	9,41%	-8,58%	-17,99%	0,00%
GRUPOSURA	0,620%	8,52%	8,12%	-0,41%	4,88%
NUTRESA	0,524%	7,10%	6,76%	-0,34%	4,07%
ISA	1,008%	6,48%	28,20%	21,72%	16,95%
BCOLOMBIA	1,074%	6,25%	5,95%	-0,30%	3,58%
GRUPOARGOS	0,161%	6,24%	-20,24%	-26,48%	0,00%
PFAVAL	0,803%	5,61%	5,34%	-0,27%	3,21%
CEMARGOS	0,273%	4,76%	4,53%	-0,23%	2,73%
EEB	0,898%	4,75%	23,45%	18,70%	14,10%
PFGRUPSURA	0,738%	4,48%	4,27%	-0,21%	2,57%
PFGRUPOARG	0,575%	4,07%	3,87%	-0,19%	2,33%
ÉXITO	0,416%	3,41%	3,25%	-0,16%	1,95%
PFDAVVNDA	0,925%	3,14%	19,60%	16,46%	11,79%
BOGOTÁ	1,401%	2,92%	34,29%	31,38%	20,62%
CORFICOLCF	0,856%	2,76%	2,63%	-0,13%	1,58%
PFCEMARGOS	-0,165%	2,20%	-32,12%	-34,32%	0,00%
CELSIA	0,722%	1,85%	1,76%	-0,09%	1,06%
CLH	0,805%	1,84%	1,76%	-0,09%	1,06%
PFAVH	-0,291%	1,03%	-7,43%	-8,46%	0,00%
CNEC	0,381%	0,64%	0,61%	-0,03%	0,36%
PONDERACIÓN TOTAL		100,00%	97,97%	-2,03%	100,00%

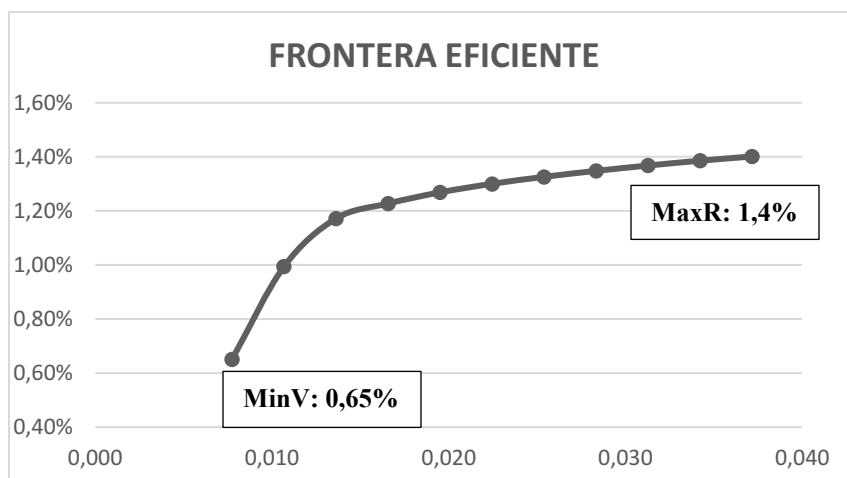
Fuente: Elaboración propia, 2017.

El vector de retornos de equilibrio, que se había definido como centro de gravedad, se desvía de acuerdo con la nueva información disponible. En este caso, de acuerdo con los *views* definidos por el inversionista, se ajustan los retornos esperados permitiendo generar un nuevo portafolio óptimo y aprovechar la oportunidad entregada por el mercado. Se puede observar cómo aquellos activos en los que se tienen *views* positivos, sus ponderaciones se ajustan al alza, mientras que aquellos en los que la expectativa es negativa entregan ponderaciones negativas; este segundo caso sería óptimo si se permiten realizar operaciones en corto, pero para el desarrollo del ejercicio se asume que las ventas en corto no son permitidas. Por tal motivo, las ponderaciones negativas se ajustan a 0 y las demás se normalizan para obtener una ponderación total del 100%. Es importante acotar que el modelo de BL es un modelo que no utiliza restricciones, por tanto, las ponderaciones negativas se normalizan manualmente.

El portafolio óptimo BL permanece diversificado para las necesidades de un inversionista que quiere o debe replicar el índice COLCAP y demuestra ser intuitivo al lograr incorporar las expectativas de los inversionistas.

Con los resultados del modelo para el 31 de octubre, se procede a construir la frontera eficiente para el portafolio modelo con BL con los *views* resultantes del GARCH. Se parte del portafolio de mínima varianza (MinV) y termina en el portafolio de máximo retorno (MaxR).

Gráfico 1. Frontera eficiente portafolio base, 31 de octubre 2017



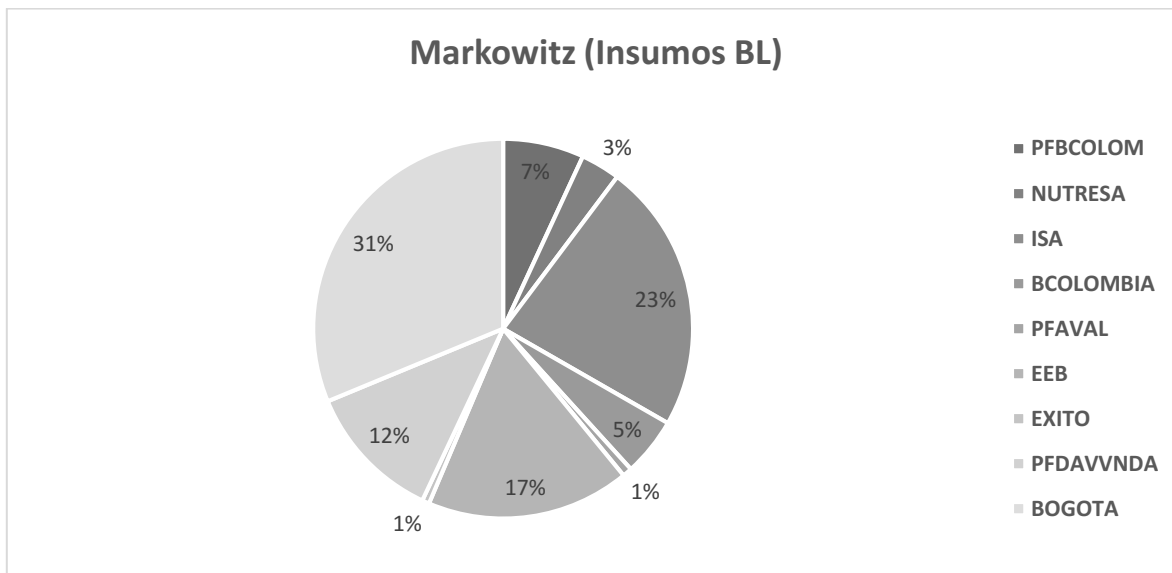
Fuente: Elaboración propia, 2017.

El Gráfico 1 presenta la frontera eficiente del portafolio base, la cual representa el conjunto de portafolios más eficientes para cada nivel de riesgo posible. Los inversionistas se sitúan en esta de acuerdo con su perfil de riesgo, es decir, la cantidad de riesgo que están dispuestos a asumir. El portafolio de máximo retorno está compuesto en su totalidad por la acción del BOGOTÁ, con un retorno de 1,4%. En contraste, el portafolio de mínima varianza está compuesto por las acciones de NUTRESA (25%), EEB (15%), PFCMARGOS (13%), ÉXITO (11%), ISA (10%), BOGOTÁ (9%), PFDVVNDA (5%), PFAVAL (4%), CELSIA (3%), PFBCOLOM (2%), CORFICOLCF (2%), CNEC (2%) y PFAVH (1%) con un retorno de 0,65%.

Adicional a la metodología aplicada, los resultados del modelo BL pueden ser utilizados como insumos para realizar procesos de optimización de media-varianza, como el de Markowitz, solucionando uno de los inconvenientes de este al utilizar retornos y covarianzas provenientes de procesos que han tenido en cuenta la regularidad de las series, en lugar de retornos y volatilidades históricas.

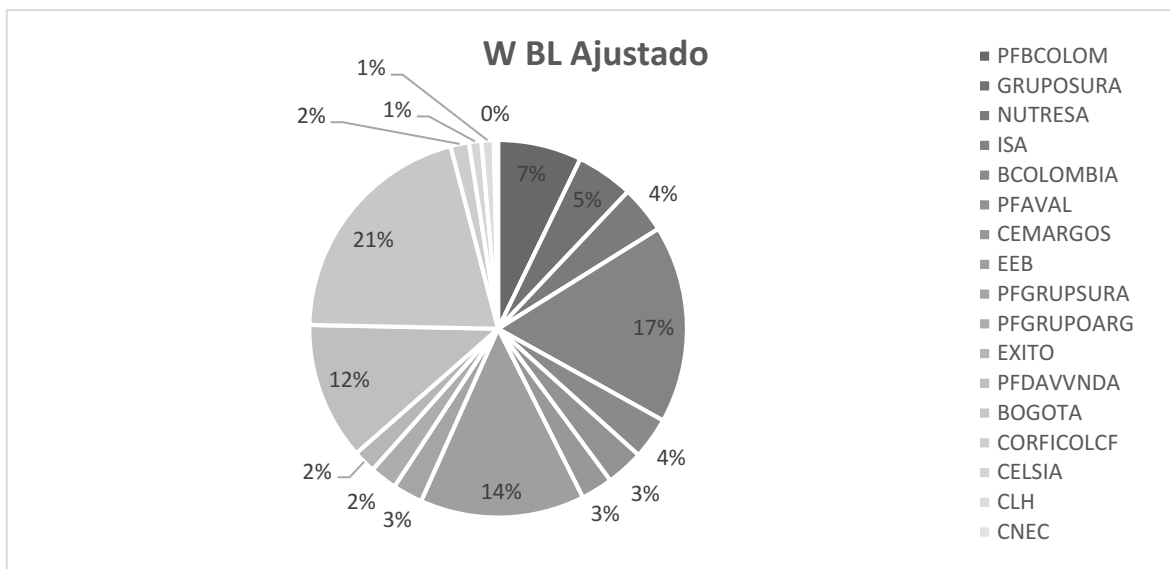
El Gráfico 2 muestra los resultados del portafolio obtenido mediante el proceso de optimización de media-varianza de Markowitz utilizando los insumos de BL y el Gráfico 3 el portafolio óptimo ajustado de BL.

Gráfico 2. Composición del portafolio de Markowitz con los insumos del modelo BL



Fuente: Elaboración propia, 2017.

Gráfico 3. Composición del portafolio de BL ajustado



Fuente: Elaboración propia, 2017.

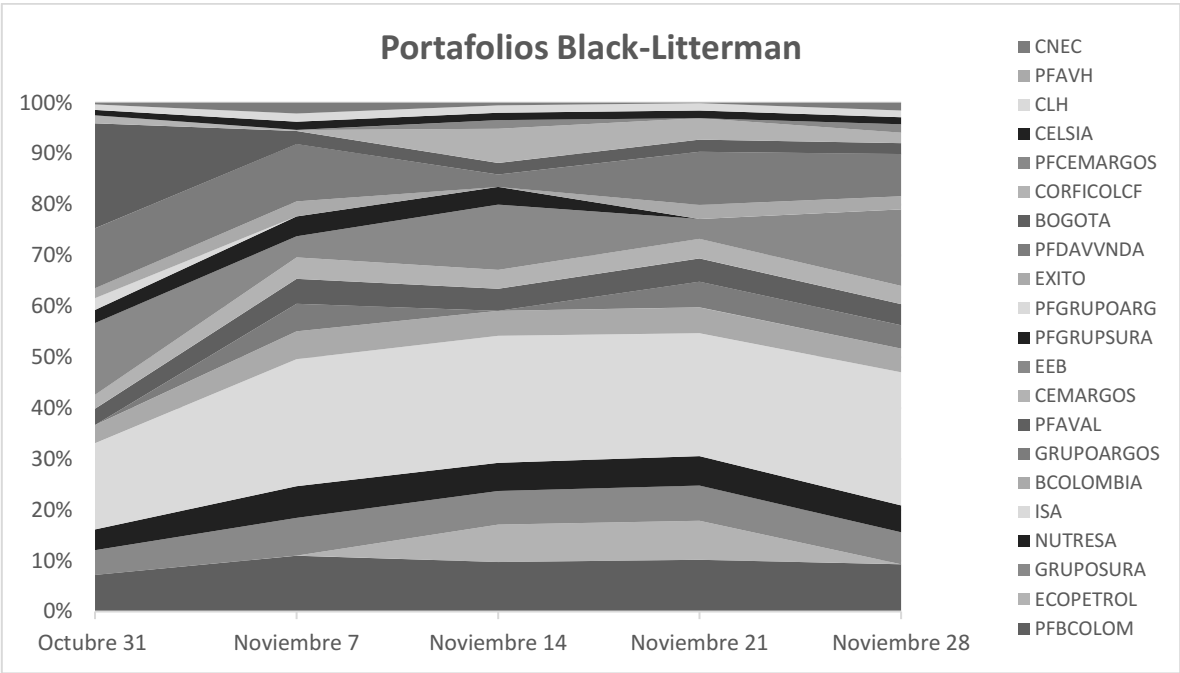
En los ejercicios de optimización de media-varianza se busca maximizar la ratio de Sharpe, la cual mide el exceso de rendimiento por unidad de riesgo asumido. El portafolio optimizado por Markowitz tuvo una ratio de 0,1039 mientras que el BL ajustado tuvo una ratio de 0,0973, un poco menor. Sin embargo, como se puede apreciar en ambos gráficos, el optimizador de Markowitz genera portafolios menos diversificados (solo 9 acciones) y con ponderaciones más extremas, mientras que el modelo BL arroja ponderaciones para 17 acciones de las 21 iniciales.

Como lo expresan Black & Litterman (1992), es difícil medir el desempeño de ambos enfoques en términos de resultados finales, ya que el BL no produce en sí mismo estrategias de inversión y, al requerir *views* para algunos activos, cualquier simulación no es solo una prueba sobre el modelo, sino también de la estrategia producida por los *views*.

Como ya se dijo, el portafolio base analizado utiliza la información disponible al 31 de octubre, día del último rebalanceo del COLCAP, y se genera un portafolio BL a un mes, ideal para inversionistas que desean aprovechar las expectativas disponibles para el corto plazo.

Con el fin de analizar el impacto que tiene en el portafolio la información adicional que se genera y que se modela nuevamente a 20 días a través del proceso GARCH, se realiza el mismo ejercicio para 4 portafolios adicionales con diferencia de una semana: 7 de noviembre, 14 de noviembre, 21 de noviembre y 28 de noviembre. De la misma forma, se utilizan los mismos supuestos para el λ y τ , solo con la diferencia en los cálculos al incluir la nueva información de retornos. El Gráfico 4 muestra la evolución del portafolio óptimo BL.

Gráfico 4. Evolución portafolios BL para un mes



Fuente: Elaboración propia, 2017.

Como se puede observar en el Gráfico 4, el impacto de la nueva información genera movimientos en los portafolios semanales BL, sin embargo, este no tiende a modificar de manera muy significativa las ponderaciones del portafolio inmediatamente anterior. En el caso de los activos que inicialmente tuvieron las mayores ponderaciones (BOGOTÁ, ISA, EEB y PFDAVVNDA) sus ponderaciones, a excepción de la de BOGOTÁ, se mantuvieron dentro de

las mayores en los 4 portafolios siguientes; caso similar para aquellos activos de baja o ninguna ponderación. Es importante recordar que las ponderaciones son consecuentes con los pronósticos generados por los modelos GARCH; de esta forma, si las ponderaciones en promedio se han mantenido, quiere decir que los pronósticos son también consecuentes en el transcurso del mes a pesar del ingreso de nueva información.

Adicionalmente, la información obtenida es importante para el inversionista, quien puede aprovechar la modelación de la nueva información para realizar reponderaciones mínimas sin incurrir en costos de transacciones excesivos.

Finalmente, para realizar la evaluación del desempeño de los portafolios BL, se realizan portafolios a un mes para cada semana desde el 31 de julio al 21 de noviembre, y se evalúan los rendimientos nominales reales de dichos portafolios sobre la tasa libre de riesgo por medio de la medida de agregación de valor (α), el cual es el intercepto resultante de la regresión lineal entre los rendimientos de ambos portafolios. Como tasa libre de riesgo se elige el IBR ya que los portafolios se evalúan a corto plazo.

Tabla 6. Rendimientos reales BL vs COLCAP

Fecha Inicial Portafolio	Rendimiento BL	Rendimiento COLCAP
Julio 31	-1,26%	-0,70%
Agosto 8	2,14%	2,60%
Agosto 15	1,55%	2,73%
Agosto 22	0,66%	0,85%
Agosto 29	0,50%	0,26%
Septiembre 5	-0,65%	-1,11%
Septiembre 12	0,51%	-0,36%
Septiembre 19	-1,06%	-1,02%
Septiembre 26	-0,75%	-0,72%
Octubre 3	1,85%	1,76%
Octubre 10	-3,03%	-3,02%

Octubre 18	-2,26%	-2,36%
Octubre 25	-0,64%	-1,37%
Octubre 31	2,31%	1,89%
Noviembre 7	1,09%	0,77%
Noviembre 14	3,39%	3,33%
Noviembre 21	2,30%	2,32%
Promedio	0,39%	0,34%
α	0,04%	
R^2	0,9295	

Fuente: Elaboración propia, 2017.

En la Tabla 6 se evidencia que los portafolios BL obtienen mejor rendimiento que el COLCAP en 58,82% de los meses evaluados. Adicionalmente, los portafolios BL tienen un promedio un rendimiento mensual de 0,39%, por encima del 0,34% promedio del COLCAP, sugiriendo que la metodología propuesta a través de BL es superior al índice en 14%. También es importante destacar la medida de agregación de valor (α) de los portafolios BL del 0,04% mensual con respecto al COLCAP, que además es estadísticamente significativo al 95%.

Al analizar la prueba de bondad de ajuste del modelo por medio del coeficiente de determinación (R^2) se encuentra un coeficiente de 0,9295, el cual al ser cercano a 1, evidencia que la relación lineal entre BL y el COLCAP es adecuada para describir la relación entre ambos portafolios. De igual forma, el coeficiente de determinación tiene una interpretación de diversificación e indica que el portafolio BL tiene una alta diversificación.

En la Tabla 7 se considera el cambio en el coeficiente λ de aversión al riesgo con el fin de evaluar el impacto en el desempeño de los portafolios BL.

Tabla 7. Análisis de sensibilidad ante cambios en el coeficiente de aversión al riesgo λ

λ	+20%: 0,72	Base: 0,9	-20%: 1,08
α	0,052%	0,040%	0,026%
R^2	0,9523	0,9295	0,9075

Fuente: Elaboración propia, 2018.

Se evidencia como ante cambios en la aversión al riesgo también se generan cambios en la medida de agregación de valor y el coeficiente de determinación. En este caso, entre mayor sea la aversión al riesgo del inversionista, mayor será la medida de agregación de valor frente al COLCAP, lo cual tiene sentido si se tiene en cuenta que el COLCAP es una cartera diversificada, conformada por activos AAA que representan un riesgo moderado a bajo.

6. Conclusiones

El presente trabajo presenta una forma adicional de poner en práctica el modelo BL para la construcción de portafolios de inversión mediante la utilización de *views*, derivados de procesos EGARCH, con esto se consigue tener en cuenta algunas de las regularidades presentes en las series de retornos de acciones y modelar un pronóstico con base en la varianza condicional presente en cada activo. Combinando estos *views* con los inputs del modelo BL se logran portafolios intuitivos y diversificados, que se ajustan a las necesidades de inversionistas profesionales que deben seguir el mercado, a través de algún índice de referencia pero que, al mismo tiempo, desean obtener retornos (pérdidas) superiores (inferiores) a este.

Los *views* derivados del EGARCH son una buena aproximación para determinar las expectativas para cada activo al modelar regularidades como agrupamiento y asimetría en la volatilidad. Lo anterior se evidencia en la relación lineal significativa existente en los rendimientos reales del COLCAP y los rendimientos reales del portafolio ajustado por BL. Adicionalmente, los *views* EGARCH permiten adicionar a los cálculos la nueva información que llega cada día y, de esta forma, ajustar los cambios en las ponderaciones que puedan generarse por información fundamental que es reunida cada día en el precio de las acciones. Además, el índice de vida media promedio de las acciones (32) permite que en el horizonte

de pronóstico de 20 días se siga contando con información relevante para el pronóstico de la volatilidad y los retornos.

Para portafolios de inversión en Colombia con expectativas de corto plazo (máximo un mes) en donde se busque replicar al COLCAP o, por lo menos, tenerlo como referencia, se evidencia la utilidad del modelo al tener una alta relación lineal con los portafolios BL y, principalmente, al tener una medida de agregación de valor positiva y estadísticamente significativa. Además, la utilización de la nueva información disponible permite agilidad en los rebalances, algo muy útil para inversionistas y administradores activos. Por otro lado, es importante tener en cuenta que para portafolios de plazos superiores a un mes y baja rotación no se considera prudente la utilización del proceso GARCH. Por tal motivo, se recomienda que este modelo sea implementado por inversionistas y administradores de portafolios profesionales que sean activos, ya que los *views* del GARCH tienen efectos más inmediatos, dados los efectos de la varianza condicional, mientras que los *views* de los expertos del mercado tienen efectos más de mediano y largo plazo al utilizar métodos de valoración más fundamentales.

Referencias

Abascal, M. (2016). *Análisis de series temporales financieras*. Santander: Universidad de Cantabria.

Beach, S., & Orlov, A. (2007). An application of the Black–Litterman model with EGARCH-M-derived views for international portfolio management. *Swiss Society for Financial Market Research*, 147-166.

- Bernal, C. (2013). *Black-Litterman vs. Markowitz: Un ejercicio de optimización de portafolios de inversión en Colombia*. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana.
- Black, F. (1976). Studies of stock price volatility changes. *Proceedings of the 1976 Meeting of the Business and Economic Statistics Section*.
- Black, F., & Litterman, R. (1991). Asset Allocation: Combining investor views with market equilibrium. *The Journal of Fixed Income*, 7-18.
- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, 28-43.
- Blamont, D., & Firoozy, N. (2003). Asset Allocation Model. *Global Markets Research*.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 307-327.
- Bollerslev, T., Chou, R., & Kroner, K. (1992). ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 5-59.
- Bollerslev, T., Engle, R., & Nelson, D. (1994). Arch models. *Handbook of Econometrics*, 2959-3038.
- Bolsa de Valores de Colombia (2016). *Metodología para el cálculo del índice COLCAP*. Bogotá.
- Castillo, M. (2006). *Toma de decisiones en las empresas: Entre el arte y la técnica*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Drobetz, W. (2001). How to avoid the pitfalls in portfolio optimization? Putting the Black Litterman approach at work. *Swiss Society for Financial Market Research*, 59-75.

- Duqi, A., Franci, L., & Torluccio, G. (2014). The Black-Litterman model: the definition of views based on volatility forecast. *Applied Financial Economics*, 1285-1296.
- Engle, R. (1982). Autorregresive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of the U.K. Inflation. *Econometrica*, 987-1008.
- Giraldo, L., Díaz, J., Arboleda, S., Galarcio, C., Lotero, J., & Isaza, F. (2015). Modelo de selección de portafolio óptimo de acciones mediante el análisis de Black-Litterman. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 112-130.
- He, G., & Litterman, R. (2002). The intuition behind Black-Litterman model portfolios. *Investment Management Division, Goldman Sachs* (paper).
- Herold, U. (2003). Portfolio Construction with Qualitative Forecasts. *The Journal of Portfolio Management*, 61-72.
- Hwang, S., & Valls, P. (2010). Small sample properties of GARCH estimates and persistence. *The European Journal of Finance*, 473-494.
- Idzorek, T. (2004). A step-by-step guide to the Black Litterman model: Incorporating user-specified confidence levels. *Zephyr Associates, Inc.*
- Jones, R., Lim, T., & Zangari, P. (2007). The Black-Litterman Model for Structured Equity Portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, 24-33.
- Kusi, J., & Menyah, K. (2003). Return predictability in African stock markets. *Review of Financial Economics*, 247-270.
- Lee, W. (2000). *Advanced Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation*. New York: John Wiley & Sons.

- Litterman, B. (2003). *Modern Investment Management: An Equilibrium Approach*. New Jersey: John Wiley.
- Lummer, S., Riepe, M., & Siegel, L. (1994). Taming your optimizer: A guide through the pitfalls of mean-variance optimization. *Global Asset Allocation: Techniques for Optimizing Portfolio Management*.
- Luna, S., & Tamayo, M. (2015). *Aplicación del modelo Black-Litterman al mercado de renta variable colombiano*. Medellín: Universidad EAFIT.
- Mahrivandi, R., Noviyanti, L., & Riwi, G. (2017). Black-Litterman model on non-normal stock return (Case study four banks at LQ-45 stock Index). *American Institute of Physics*.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 394-419.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 77-91.
- Martínez, O. (2010). *Aplicación del modelo de Black-Litterman a la optimización de portafolios del BCB*. La Paz: Banco Central de Bolivia.
- Meucci, A. (2005). Beyond Black-Litterman: View on Non-Normal Market. *Risk Journal*, 87-92.
- Montoya, A., & Trespalacios, A. (2014). Valoración de opciones cuando la varianza no es constante. *Soluciones de Postgrado EIA*, 37-53.
- Nelson, D. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, 347-370.

- Pagan, A., & Schwert, W. (1990). Alternative Models for Conditional Stock Volatility. *Journal of Econometrics*, 267-290.
- Phylaktis, K., & Aristidou, A. (2007). Security Transaction Taxes and Financial Volatility: Athens Stock Exchange. *Applied Financial Economics*, 1455-1467.
- Poon, S.-H., & Granger, C. (2003). Forecasting volatility in financial markets: A review. *Journal of Economic Literature*, 478-539.
- Rangel, R., & Ávila, Y. (2016). Optimización de portafolios en el mercado de capitales colombiano: Modelo propuesto por Black-Litterman. *Colegio de Estudios Superiores en Administración - CESA*.
- Scherer, B., & Martin, D. (2005). *Introduction to Modern Portfolio Optimization with NuOPTTM, S-Plus®, and S+ BayesTM*. New York: Springer.
- Tamayo, L., & Marín, S. (2014). *Optimización de portafolios de energía eléctrica en el mercado mayorista de energía en Colombia*. Medellín: Universidad de Medellín.
- Torres, J. (2014). *Optimización de portafolios: Una aplicación del modelo de Black-Litterman para el Mercado Integrado Latinoamericano, 2009-2014*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Trujillo, M. (2009). *Construcción y gestión de portafolios con el modelo Black-Litterman: Una aplicación a los fondos de pensiones obligatorias en Colombia*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Walters, J. (2014). *The Black-Litterman Model in Detail*. Boston: Boston University.