Universidad EAFIT
Departamento de Ciencias Básicas

COORDINACIÓN DE UNA CADENA DE SUMINISTROS EN UN MODELO CON DOS CUPOS DE RESERVA

Memoria presentada por Carolina Rendón Aguirre para optar al grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Director:
Dr. Gerardo Arango Ospina

A quienes durante este tiempo de lucha constante, de gratas vivencias, momentos de éxitos y también de angustias, me apoyaron para poder cumplir mis objetivos e hicieron que los deseos de lograr mi meta se hicieran cada vez más fuertes y lograr vencer todos los obstáculos para así poder alcanzar uno de mis más grandes anhelos, culminar mi maestría.

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos al Dr. Gerardo Arango quien además de ser mi director de tesis ha sido un excelente guía, se ha ganado mi lealtad, respeto y admiración, ha inculcado en mí un sentido de responsabilidad, seriedad y rigor académico, sin los cuales no podría tener una formación completa como investigadora. Sus conocimientos, orientaciones, su manera de trabajar, su persistencia, paciencia y motivación han sido fundamentales para mi formación, para la culminación de este trabajo y el éxito que él conlleve.

A Cesar Escalante, quien durante este año ha sido constante e incondicional y sus aportes han sido fundamentales para la culminación de este proyecto.

A Iván Alejandro Durán y Juan Carlos Rivera, por el tiempo dedicado a la lectura y evaluación de la tesis. Sus aportes y correcciones fueron muy importantes y enriquecedores para el proyecto.

A José Valdés, por ser un excelente orientador y por depositar la confianza en mí para llevar a cabo este trabajo.

A mis padres, Carlos Rendón y Gloria Aguirre, que son los pilares fundamentales en mi vida, porque me han brindado todo el apoyo necesario para alcanzar mis metas y sueños, han estado día a día compartiendo los buenos y los malos momentos desde el día en que nací, me han dado lo que soy como persona con todo el amor sin pedir nunca nada a cambio. A mis hermanos, Lizeth y Pablo, quienes me han inundado de alegría y han sido mis grandes amigos. Los amo y gracias de todo corazón.

A Andrés Felipe Cortés, quien durante este año ha sido mi confidente y ante todo mi gran apoyo.

A Sergio Restrepo por su paciencia, su comprensión y el respaldo que me ha brindado para terminar mi maestría.

A todas las personas que de alguna u otra manera participaron durante la realización de este proyecto. Muchas gracias.

Carolina Rendón Aguirre

Índice general

INTRODUCCIÓN

Las primeras actividades formales de la investigación de operaciones se dieron en Inglaterra durante la segunda guerra mundial, cuando un equipo de científicos debía tomar decisiones acerca de cómo utilizar de una mejor manera los materiales bélicos en defensa del país. Al término de la guerra, las ideas formuladas en operaciones militares fueron adaptadas para mejorar la eficiencia y la productividad en el sector empresarial, social y político. La aplicación de la Investigación de Operaciones proporciona a quien toma las decisiones un conjunto de herramientas que lo capacitan para hacerlo de una manera lógica, consistente y con tanta precisión como sea necesario. Los modelos más importantes para la investigación de operaciones, son los modelos simbólicos o matemáticos, que emplean un conjunto de símbolos y funciones para representar las variables de decisión y las relaciones utilizadas para describir el comportamiento del sistema.

Una importante aplicación de la Investigación de Operaciones se da en los modelos de inventarios. Las empresas mantienen inventarios de materias primas, de productos terminados y de productos en proceso. Puesto que estos inventarios representan frecuentemente una considerable inversión, las decisiones con respecto a las cantidades de las distintas referencias almacenadas en el inventario son importantes. Los modelos de inventario y la descripción matemática de los sistemas de inventario constituyen una base para estas decisiones.

¿Cómo decide una empresa, cuándo y cómo se reabastece? En una empresa pequeña, el administrador puede llevar un recuento de su inventario y tomar estas decisiones. Sin embargo, como ésto puede no ser factible, incluso en pequeñas empresas, muchas compañías han ahorrado grandes sumas de dinero al formular un modelo matemático que describe el comportamiento del sistema de inventarios. Con frecuencia se utilizan computadoras para mantener un registro de los niveles de inventario y señalar cuándo conviene reabastecer.

Un problema de inventario existe cuando es necesario guardar mercancías con el propósito de satisfacer la demanda durante un tiempo específico (finito o infinito). Las decisiones acerca de cuándo hacer pedidos y en qué cantidad, son típicas de cada problema de inventario. La demanda requerida puede satisfacerse con sobre-almacenamiento o no ser satisfecha por sub-almacenamiento. Los dos extremos son costosos. Las decisiones, considerando la cantidad ordenada y el tiempo en el cual se ordena, pueden estar basadas sobre la minimización de una función de costo apropiada, la cual balancea los costos totales resultantes de sobre-almacenamiento y sub-almacenamiento. Existen varios modelos de inventarios, los cuales se pueden clasificar según tengan o no demanda aleatoria. El primer tipo es el que se abordará en el trabajo, recurriendo al modelo clásico del vendedor de periódicos, en el cual se debe realizar el pedido antes de iniciar el periodo de venta, considerando la demanda como una variable aleatoria. Se afrontan dos situaciones: en primer lugar, si el vendedor pide una cantidad mayor a la demandada se le quedarán periódicos sin vender e incurrirá en exceso de inventario, por el otro lado, si pide una cantidad menor a la demandada pierde la oportunidad de vender y la demanda no será satisfecha. Por lo tanto el vendedor debe decidir su cantidad de pedido de tal manera que el riesgo de perder sea controlado.

Los estudios acerca del problema clásico del vendedor de periódicos rara vez consideran las políticas y la decisión del fabricante, quien también afronta riesgos al producir, por eso algunos autores como Zimmer [24] y Weng [22] han realizado algunas extensiones del modelo donde también se tienen en cuenta los riesgos del fabricante. Otros autores como Zhang, Song y Wu [23] y Baruch Keren [3], han extendido el modelo del vendedor de periódicos abordando el tema de cadenas de suministros y mecanismos de coordinación. A diferencia de los autores mencionados, en J. Li y L. Liu [12] se extiende el problema clásico del vendedor de periódicos, tendiendo en cuenta los riesgos y las decisiones tanto del fabricante como del minorista, conformando así una cadena simple de suministros o sistema en el que el minorista realiza un pedido al fabricante y si el minorista no satisface la demanda, tiene la posibilidad de realizar un segundo pedido dentro de un cupo limitado y condicionado por el fabricante. Cada una de las partes de la cadena de suministros resuelve sus propios problemas en su toma de decisiones, lo cual conduce a que el sistema no tenga un buen funcionamiento en conjunto. Por esa razón, es mejor para la cadena que la toma de decisiones sea conjunta, de tal manera que mediante un *mecanismo de coordinación* entre las dos partes la ganancia esperada del sistema sea máxima.

En este trabajo se ampliará el modelo descrito por J. Li y L. Liu, permitiendo que el minorista tenga la posibilidad de recurrir a un segundo cupo de reserva al final del periodo, bajo condiciones similares, buscando optimizar la ganancia esperada del sistema. El establecimiento de dos cupos de reserva posibilita que el sistema incremente la oferta total del producto y mejore la expectativa de ganancias.

El trabajo está distribuido de la siguiente manera, en el capitulo 1 se presenta la fundamentación teórica del trabajo, en el capitulo 2 se hace la descripción general del proyecto, en el capitulo 3 se resuelve el modelo propuesto con dos cupos de reserva y se presentan algunos ejemplos numéricos para ilustrar la validez del modelo, en el capitulo 4 se plantea una posible extensión a n cupos y finalmente en el capitulo 5 se concluye y se discuten futuras extensiones.

Capítulo 1

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

1.1. INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Definición.

La Investigación de Operaciones se puede definir de la siguiente manera: "La Investigación de Operaciones es la aplicación por grupos interdisciplinarios del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda la organización"[5].

Las ideas de lo que resta de esta sección son tomadas de Hadley y Whitin [8] y Taha [19].

Historia.

Las raíces de la investigación de operaciones se remontan muchas décadas, al tiempo cuando se hicieron los primeros intentos para emplear el método científico en la administración de una empresa. A la investigación de operaciones se le atribuye la aplicación de las matemáticas y del método científico a las operaciones militares, debido a que las primeras actividades de la investigación de operaciones se dieron durante la segunda guerra mundial, cuando jefes militares británicos pidieron a científicos e ingenieros que analizaran varios problemas militares, tales como la toma de decisiones acerca de cómo utilizar de una mejor manera los materiales bélicos en defensa del país. Al terminar la guerra, el éxito de la investigación de operaciones en las actividades bélicas generó un gran interés en sus aplicaciones fuera del campo militar y las ideas formuladas en estas operaciones militares fueron adaptadas para mejorar la eficiencia y la productividad en el sector empresarial, social y político.

En la actualidad, la Investigación de Operaciones se está aplicando en muchas actividades que van más allá de las aplicaciones militares e industriales, para incluir hospitales, instituciones financieras, bibliotecas, planeación urbana, sistemas de transporte y sistemas de comercialización, entre otros.

Metodología de la Investigación de Operaciones.

El proceso de la Investigación de Operaciones comprende las siguientes fases:

1. Formulación y definición del problema.
2. Construcción del modelo.
3. Solución del modelo.
4. Validación del modelo.
5. Implementación de resultados.

Aplicación de la Investigación de Operaciones.

El rápido crecimiento del tamaño y la complejidad de las empresas de hoy implica que las decisiones se tomen de una manera oportuna y efectiva. La dificultad para tomar decisiones hizo que el hombre se dedicara a la búsqueda de una herramienta o método que le permitiera tomar las mejores decisiones de acuerdo con los recursos disponibles y con los objetivos que persigue. Tal herramienta, que recibió el nombre de Investigación de Operaciones, permite un planteamiento científico útil para la toma de decisiones a través del diseño de modelos que permitan simular sistemas y optimizar su desempeño.

Los modelos más importantes para la investigación de operaciones, son los modelos simbólicos o matemáticos, que emplean un conjunto de símbolos y funciones para representar las variables de decisión y sus relaciones para describir el comportamiento del sistema. El uso de las matemáticas para construir el modelo, el cual es una representación aproximada de la realidad, permite aprovechar las computadoras de alta velocidad y técnicas de solución con matemáticas avanzadas.

Como su nombre lo dice, la Investigación de Operaciones se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización.

La aplicación de la Investigación de Operaciones proporciona a quien toma las decisiones un conjunto de herramientas que lo capacitan para hacerlo de una manera lógica, consistente y con tanta precisión como sea posible.

Muchas industrias, incluyendo la aérea, la automotriz, la de comunicaciones, computación, energía eléctrica, electrónica, alimenticia, metalúrgica, minera, del papel, del petróleo y del transporte, han empleado la Investigación de Operaciones. Las instituciones financieras, gubernamentales y de salud están incluyendo cada vez más estas técnicas.

Algunos problemas se han resuelto mediante técnicas de Investigación de Operaciones, por ejemplo, la programación lineal se ha usado con éxito en varias operaciones tales como la solución de problemas referentes a la asignación de personal, la mezcla de materiales, la distribución y el transporte y las carteras de inversión. La programación dinámica se ha aplicado con buenos resultados en áreas tales como la planeación de los gastos de comercialización, la estrategia de ventas y la planeación de la producción. La teoría de colas ha tenido aplicaciones en la solución de problemas referentes al congestionamiento del tráfico, al servicio de máquinas sujetas a descomposturas, a la determinación del nivel de la mano de obra, a la programación del tráfico aéreo, al diseño de presas, a la programación de la producción y a la administración de hospitales. La teoría de inventarios ofrece importantes campos de aplicación de la Investigación de Operaciones.

1.2. TEORÍA DE INVENTARIOS

El problema de los inventarios surge desde mucho tiempo atrás, por la necesidad de almacenar grandes cantidades de alimentos para ser utilizados en los tiempos de sequía. Tener inventario, nace como una forma de hacer frente a los periodos de escasez, almacenando todos los bienes y alimentos necesarios para sobrevivir y asegurar el desarrollo de las actividades normales.

Históricamente, se ha dado un proceso en el que ha cambiado radicalmente el pensamiento con respecto a la tenencia de inventarios: Hace alrededor de 300 años, el tener inventarios era una medida de riqueza, actualmente, los inventarios son vistos principalmente como un riesgo potencial mayor. Han aparecido aspectos tales como el riesgo de obsolescencia tecnológica, que hacen a los inventarios cada vez de más cuidado, al presentarse ciclos de vida de producto mucho más cortos. Lo que se trata de lograr, sin embargo, es un equilibrio entre tener y no tener inventarios. El arte del manejo adecuado de los inventarios radica en descubrir su nivel óptimo de acuerdo con características particulares de cada caso, tales como el sector productivo, localización de la empresa, su estrategia competitiva y el mercado, entre otras.

Debido a que el mantenimiento y el manejo de los inventarios representan una considerable inversión para las organizaciones, las decisiones con respecto a la cantidad de unidades almacenadas son importantes. El objetivo de la teoría de inventarios es determinar como reducir al mínimo los costos relacionados con el mantenimiento de existencias y cumplir con la demanda del consumidor.

Existen diversas razones por las cuales es conveniente que una empresa mantenga inventarios de materias primas ó de productos terminados. De acuerdo con Ballou [2], las principales ventajas de mantener inventarios son las siguientes:

- ***Mejoramiento del servicio al cliente***, en el sentido de satisfacer sus órdenes directamente del inventario disponible, sin producir despachos pendientes u órdenes perdidas. Los sistemas de operación quizá no estén diseñados para responder de manera instantánea a los requerimientos que los clientes hacen de los productos o servicios. Disponer de inventario para los clientes no sólo puede mantener las ventas, sino que también puede aumentarlas.

- ***Reducción de costos***. Aunque mantener inventarios tiene un costo asociado, su uso puede reducir indirectamente los costos de operación de otras actividades de la cadena de suministros, que podrían más que compensar el costo de manejo de inventarios. Algunos costos que se pueden reducir son los costos de producción, de compra y de transporte de una forma indirecta, a través de la producción o compra de lotes más grandes y más homogéneos, con los cuales se logran economías de escala en la cadena de suministro. Adicionalmente, puede pensarse en realizar compras de lotes mayores a bajo costo actual, en anticipación de un alza de precios en el futuro. Desde este punto de vista, el costo de llevar el inventario es dominado por los ahorros potenciales producidos por las economías de escala, los bajos precios de compra y las posibles condiciones de pago y financiación de los inventarios.

- ***Reducción de costos de operación***, al reducir el impacto de la variabilidad de los tiempos de producción y transporte. Los inventarios se usan a menudo en muchos puntos del canal para amortiguar los efectos de esta variabilidad, y por lo tanto para ayudar a que las operaciones transcurran sin sobresaltos.

- ***Implementación de mecanismos para responder a factores externos o internos inesperados***. En el sistema logístico pueden acontecer impactos no planeados tales como huelgas, demoras excesivas en el envío de materiales, desastres naturales, etc. Tener algún inventario en puntos clave del canal de suministros permite al sistema seguir operando durante un tiempo, mientras se puede disminuir el efecto del impacto.

De manera análoga, Ballou [2] plantea también algunas desventajas de mantener inventarios, tales como:

- ***Absorción excesiva de capital sin adicionar un valor significativo al producto***. Desde este punto de vista, algunos analistas consideran los inventarios como un desgaste innecesario.

- ***Enmascaramiento de problemas de calidad***. Cuando ocurren problemas de calidad, reducir los inventarios existentes para proteger la inversión de capital es, a menudo, la consideración principal. Corregir los problemas de calidad puede tardar mucho tiempo.

- ***Dificultad para el diseño integrado de las cadenas de abastecimiento***. El uso de inventarios promueve una actitud aislada de la gestión del canal de suministros como un todo al establecer islas con intereses propios que ocasionan la suboptimización del sistema.

Costos de los Inventaros.

Según el Ing. Ramón Morales Higuera [15], los inventarios representan una inversión cuantiosa para muchas compañías, en especial los fabricantes, los distribuidores, y las tiendas. De allí que sea importante minimizar los costos y el reto para el administrador es precisamente alcanzar el nivel deseado de servicio al cliente a un costo mínimo.

Se consideran cuatro tipos de costos que están asociados directamente con los costos de los inventarios y estos son:

- ***Costo o precio de compra***. Incluye el precio de un artículo más los impuestos, los gastos de compra y los costos del transporte. Si la compañía produce el artículo, entonces, el costo completo que debe incluirse se llama costo de producción. Se usará precio como sinónimo de costo de compra o costo de adquisición.

- ***Costo de ordenar***. Dentro de los costos de ordenar se incluyen gastos de cotización, teléfono, fax, mano de obra para preparar la órden, timbres de correos, comidas, viáticos y cualquier otro costo directo.

- ***Costo de conservación o mantenimiento*** . Dentro de éstos costos se incluyen el costo de capital (financieros), equipo de almacenamiento y movimientos, edificios, costo de espacio ocupado, depreciación, rentas, impuestos, seguros, costo de oportunidad, riesgos, deterioro, mermas, desperdicios, obsolescencia, etc.

- ***Costo de faltantes o de agotamientos***. Estos son los costos de penalización en que se incurre cuando se agota la mercancía cuando ésta se necesita. Generalmente comprende costos debido a pérdida de clientes, prestigio y pérdida potencial de utilidad debido a pérdidas en ventas o los gastos asumidos en aquellos casos en que no se tiene a la mano el artículo y que posteriormente se satisface la demanda.

Clasificación de los Inventarios.

De acuerdo Ballou[2], los inventarios pueden clasificarse en cinco formas:

1. ***Los inventarios pueden hallarse en ductos***. Estos son los inventarios en tránsito entre los niveles del canal de suministros. Cuando el movimiento es lento o sobre grandes distancias, o ha de tener lugar entre muchos niveles, la cantidad de inventario en ductos puede exceder al que se mantiene en los puntos de almacenamiento. De manera similar, los inventarios de trabajo en proceso entre las operaciones de manufactura pueden considerarse como inventarios en ductos.

2. ***Se pueden mantener existencias para especulación, pero todavía son parte de la base total de inventario que debe manejarse.*** Las materias primas, como cobre, oro y plata se compran tanto para especular con el precio como para satisfacer los requerimientos de la operación. Cuando la especulación de precios tiene lugar durante períodos más allá d e las necesidades previsibles de operaciones, dichos inventarios resultantes tal vez sean más un tema de manejo financiero que de dirección logística. Sin embargo, cuando los inventarios se establecen con anticipación a las ventas estacionales o de temporada, u ocurren debido a actividades de compra inmediata, es probable que estos inventarios sean responsabilidad de los encargados de la logística.

3. ***Las existencias pueden ser de naturaleza regular o cíclica***. Estos son los inventarios necesarios para satisfacer la demanda promedio durante el tiempo entre reaprovisionamientos sucesivos. La cantidad de existencias (stock) en el ciclo depende en gran medida del volumen de la producción, de las cantidades económicas del envío, de las limitaciones de espacio de almacenamiento, de los tiempos de reaprovisionamiento totales, de los programas de descuento por precio y cantidad, y de los costos de manejo de inventarios.

4. ***El inventario puede crearse como protección contra la variabilidad en la demanda de existencias y el tiempo total de reaprovisionamiento***. Esta medida extra de inventario, o existencias

de seguridad, es adicional a las existencias regulares que se necesitan para satisfacer la demanda promedio y las condiciones del tiempo total promedio. Las existencias de seguridad se determinan a partir de procedimientos estadísticos relacionados con la naturaleza aleatoria de la variabilidad involucrada. La cantidad mantenida de existencias de seguridad depende del grado de variabilidad involucrada y del nivel de disponibilidad de existencias que se suministre. Es esencial un pronóstico preciso para minimizar los niveles de existencias de seguridad.

5. ***Cuando se mantiene durante un tiempo, parte del inventario se deteriora, llega a caducar, se pierde o es robado***. Dicho inventario se refiere como existencias obsoletas, stock muerto o perdido. Cuando los productos son de alto valor, perecederos o pueden ser robados fácilmente, deben tomarse precauciones especiales para minimizar la cantidad de existencias.

Tipos de Inventarios.

Los inventarios se han clasificado de acuerdo a su utilización en los siguientes tipos [14]:

1. ***Inventarios de materia prima.*** Comprende los elementos básicos o principales que entran en la elaboración del producto. En toda actividad industrial concurren una variedad de articulos y materiales, los cuales serán sometidos a un proceso para obtener al final un artículo terminado o acabado. A los materiales que intervienen en la producción se les considera "Materia Prima", ya que su uso se hace en cantidades lo suficientemente importantes del producto acabado. La materia prima, son aquellos artículos sometidos a un proceso de fabricación que al final se convertirán en un producto terminado.

2. ***Inventarios de Productos en Proceso.*** El inventario de productos en proceso consiste en todos los artículos que se utilizan en el proceso de producción. Es decir, son productos parcialmente terminados que se encuentran en un grado intermedio de producción y a los cuales se les aplicó la labor directa y gastos indirectos inherentes al proceso de producción en un momento dado. Una de las características del inventarios de productos en procesos es que va aumentando el valor

a medida que se es transformado de materia prima en el producto terminado como consecuencia del proceso de producción.

3. ***Inventarios de Productos Terminados.*** Comprende los artículos terminados que han sido transferidos por el departamento de producción al almacén y que a la hora de la toma física de inventarios se encuentren aun en los almacenes, es decir, los que todavía no han sido vendidos. El nivel de inventarios de productos terminados va a depender directamente de las ventas, es decir su nivel esta dado por la demanda.

4. ***Inventarios de Materiales y Suministros.*** En el inventario de materiales y suministros se incluye:

   - Materias primas secundarias, sus especificaciones varían según el tipo de industria.
   - Artículos de consumo destinados para ser usados en la operación de la industria. Entre los artículos de consumo los más importantes son los destinados a las operaciones, y están formados por los combustibles y lubricantes, que en las industria tiene gran relevancia.
   - Los artículos y materiales de reparación y mantenimiento de las maquinarias y aparatos operativos. Los artículos de reparación por su gran volumen necesitan ser controlados adecuadamente, y sus existencias varían en relación con las necesidades.

5. ***Inventario de Seguridad.*** Este tipo de inventario es utilizado para impedir la interrupción en el aprovisionamiento causado por demoras en la entrega o por el aumento imprevisto de la demanda durante un período de reabastecimiento. Su importancia está ligada al nivel de servicio, la fluctuación de la demanda y la variación de las demoras de la entrega.

Los modelos de inventarios responden a las siguientes preguntas: ¿Cuándo se debe pedir el producto? y ¿Cuánto se debe pedir del producto?

Modelos de Inventarios.

Los modelos de inventario de clasifican en [21]:

1. ***Modelos de Demanda Determinística:*** este tipo de modelos requiere que se conozca con certeza la demanda durante cualquier período. Se clasifican en:

   - **Modelos estáticos del lote económico de pedido (EOQ)**
     - Modelo EOQ clásico.
     - Modelo EOQ con descuentos por cantidades de compra o producción.
     - Modelo EOQ con faltantes.
     - Modelo EOQ de artículos múltiples con límite de almacenamiento.
     - Modelo EOQ con rata finita de reposición.
   - **Modelos dinámicos del lote económico de pedido (EOQ)**
     - Modelo sin costo de preparación.
     - Modelo con costo de preparación.

2. ***Modelos de Demanda Probabilística:*** en este tipo de modelos la demanda es incierta o aleatoria, durante un periodo dado, pero puede describirse en términos de una distribución de probabilidad. Se clasifican en:

   - Modelo (s, Q)
   - Modelo (s, S)
   - Modelo (R, S)
   - Modelo (R, S, s)

   La notación básica que se utiliza es la siguiente:

   $s =$ Punto de reorden, o sea el nivel de inventario efectivo para el cual debe emitirse una nueva orden.

   Q: Cantidad a ordenar en cada orden.

   S: Nivel máximo de inventario hasta el cual debe ordenarse.

   R: Unidades de tiempo cada que se revisa el inventario efectivo.

Un modelo de demanda probabilística es el ***Modelo clásico del vendedor de periódicos***, el cual se explicará más a fondo debido a que es el que se asumirá en el trabajo.

1.3. MODELO CLÁSICO DEL VENDEDOR DE PERIÓDICOS

Las empresas se enfrentan con frecuencia a problemas en los que se tiene la siguiente sucesión de eventos:

1. La empresa decide cuantas unidades pedir.
2. Se tiene una demanda aleatoria durante un período de tiempo.
3. Dependiendo de la demanda y del número de unidades pedidas se incurre en un costo.

Los problemas que siguen esta secuencia siguen el modelo del vendedor de periódicos el cual consiste en un vendedor que debe realizar su pedido antes de iniciar el período de venta, considerando la demanda como una variable aleatoria. Afronta dos situaciones: en primer lugar, si pide una cantidad mayor a la demanda se le quedarán periódicos sin vender e incurrirá en exceso de inventario, por otro lado, si pide una cantidad menor a la demanda, pierde la oportunidad de vender y la demanda no será satisfecha. Por lo tanto el vendedor debe decidir su cantidad de pedido de tal manera que controle el riesgo de perder.

Se mostrará cómo se puede analizar el problema del vendedor de periódicos cuando la demanda es una variable aleatoria.

La notación es la siguiente:

X: Demanda aleatoria con función de distribución F, función de densidad f y media finita μ. Claramente $X \geq 0$.
Q: Primera cantidad de pedido del minorista.
p: Precio de venta unitario.
w: Precio de compra unitario.
v: Valor unitario de salvamento.
r: Costo unitario de escasez. Es una penalidad que refleja la pérdida de imagen y la disminución de la utilidad marginal por ventas.

El vendedor de periódicos debe determinar la cantidad del primer pedido Q que maximice el valor esperado de sus ganancias $\Pi_b(Q)$. De acuerdo con el tamaño de la demanda, el valor de las ganancias se calcula de la siguiente manera:

1. Si $X \leq Q$, el vendedor todavía tiene inventario al final del período, por lo tanto la ganancia como funcion de la cantidad a pedir Q está dada por:
$$\Pi_b\,(Q|X \leq Q) = pX - wQ + v(Q - X) \tag{1.1}$$

2. Si $X > Q$, debido a la demanda insatisfecha $(X - Q)$, se incurre en costo por escasez, por lo tanto la ganancia en este caso está dada por:
$$\Pi_b\,(Q|X > Q) = pQ - wQ - r(X - Q) \tag{1.2}$$

De las situaciones anteriores se tiene que la función de ganancia $\Pi_b\,(Q)$ está dada por:

$$\Pi_b(Q) = \begin{cases} pX - wQ + v(Q - X); & X \leq Q \\ pQ - wQ - r(X - Q); & X > Q + M + N \end{cases}$$

La ganancia esperada del minorista $E[\Pi_b(Q)]$ es la suma de los valores esperados de las ganacias dadas por (1.1) y (1.2). Se calcula así:

$$E[\Pi_b(Q)] = \int_0^Q [(p - v)x - (w - v)Q]f(x)dx + \int_Q^\infty [(p + r - w)Q - rx]f(x)dx.$$

Usando $\int_0^\infty xf(x)dx = \mu$ y $\int_0^\infty f(x)dx = 1$ se tiene que:

$$E[\Pi_b(Q)] = p\mu - wQ + v\int_0^Q (Q - x)f(x)dx - (p + r)\int_Q^\infty (x - Q)f(x)dx.$$

De otra parte:

$$\frac{\partial^2 E[\Pi_b(Q)]}{\partial^2 Q} = (v - p - r)f(Q)$$

Dado que $p > v$, $\frac{\partial^2}{\partial^2 Q}E[\Pi_b(Q)] < 0$. Entonces $E[\Pi_b(Q)]$ es una función cóncava de Q y por lo tanto la ganancia esperada del minorista se maximiza en términos de Q. Además,

$$\frac{\partial E[\Pi_b(Q)]}{\partial Q} = (-w) + vF(Q) + (p+r)[1 - F(Q)]$$

y tomando $\frac{\partial}{\partial Q}E[\Pi_b(Q)] = 0$, se obtiene Q_b, la cantidad óptima para el pedido del vendedor mediante la ecuación

$$F(Q_b) = \frac{p+r-w}{p+r-v} \tag{1.3}$$

El modelo clásico del vendedor de periódicos no tiene en cuenta el fabricante, el cual también afronta riesgos al producir, por eso se han realizado algunas extensiones del modelo donde también se tienen en cuenta los riesgos del fabricante. J. Li y L. Liu [12] extienden el problema clásico del vendedor de periódicos conformando una cadena simple de suministros. Para entrar más a fondo en el problema planteado por J. Li y L. Liu se analizará en que consiste la coordinación de cadenas de suministros.

1.4. CADENAS DE SUMINISTROS

Según lo expresa Ignacio Gómez Escobar [7]:

Las cadenas de suministros, también llamadas cadenas de abastecimiento, son una estrategia de negocios en las que distribuidores y proveedores se comprometen y trabajan juntos para lograr, además de ganancias, mejores valores para los consumidores. Una cadena de suministros bien diseñada logra reducción en los costos de fabricación, reducción de empaques y la compra más eficiente de materias primas. Permite también utilizar el inventario disponible de algunos fabricantes o empresas de distribución como propio. Los costos administrativos y del marketing también de reducen significativamente como consecuencia de un movimiento más rápido de las mercancías, mejorando sustancialmente la rotación. Se consiguen así mismo reducciones importantes de costos de almacenamiento y una mejor utilización del capital de trabajo disponible.

La creación de las cadenas de abastecimiento implica un cambio profundo en los sistemas habituales de comercialización, se rompen esquemas en la manera y cultura de hacer negocios. Ello implica una gerencia con mentes abiertas y dispuestas a la innovación y aplicación de nuevas metodologías para lograr unos mejores resultados. Las decisiones en una cadena de suministros dependen del grado de centralización de la cadena. Muchas veces lo que se hace entonces es tratar de coordinar las decisiones particulares entre los diversos agentes del sistema.

Vidal [21] afirma que dos aspectos fundamentales a considerar en el diseño de un sistema de control de inventarios en cadenas de suministro son el tipo de información que se tiene y el tipo de control. La información puede ser ***global*** o ***local***. En la primera, todo punto de la cadena conoce características de los demás puntos, tales como la información sobre demanda del consumidor final. En la segunda, solo se dispone de información local en cada eslabón de la cadena y con ella se decide. Por otra parte, el tipo de control puede ser ***centralizado*** o ***descentralizado***. Como su nombre lo indica, en el primer tipo de control, las decisiones se toman por un solo ente encargado de toda la cadena. El segundo tipo de control implica que las decisiones se pueden tomar en forma independiente en cada lugar de la cadena. La complejidad de los sistemas de inventarios en cadenas de suministro aumenta notablemente cuando se considera demanda aleatoria.

Los sistemas descentralizados con información global son muy utilizados en la práctica, pero de acuerdo con Silver [18], los sistemas centralizados con información global son frecuentemente la mejor solución, aunque requieren un alto grado de coordinación en la cadena.

Capítulo 2

PLANTEAMIENTO DEL PROYECTO

2.1. MARCO DE REFERENCIA

A continuación se comentan algunos artículos e investigaciones que han abordado el tema que nos ocupa. Los antecedentes de la investigación están fundamentados sobre dos vertientes fundamentales: en primer lugar el modelo clásico del vendedor de periódicos y sus extensiones y, por otra parte, la teoría sobre coordinación de una cadena de suministros.

Algunas extensiones del modelo clásico del vendedor de periódicos son estudiadas en los siguientes artículos:

Hariga [9], presenta una extensión del modelo del vendedor de periódicos con dos niveles de almacenamiento, en el cual se halla el pedido que maximiza el valor esperado de la utilidad. Demuestra que la cantidad pedida en el modelo de dos bodegas en un período simple es más pequeña que la cantidad correspondiente en el problema clásico del vendedor de periódicos.

Chung y Flynn [4], extienden el problema clásico del vendedor de periódicos mediante la introducción de la producción reactiva. La producción ocurre en dos etapas, una etapa anticipatoria y una etapa reactiva. En la primera, se determina un nivel de producción que aspira a satisfacer la demanda, lo cual ocurre en una etapa reactiva. Así, la producción en la etapa reactiva toma lugar con total conocimiento de la demanda real y entonces es posible reaccionar a ella. Lo que se considera es cómo estimar la cantidad óptima de producción anticipada para reducir al mínimo los costos de producción.

Konstanting y Sheldon [13], se enfocan en una generalización en tiempo continuo del problema del vendedor de periódicos con un período simple. El problema es caracterizado por un número de repartidores los cuales son organizados y controlados en etapas sucesivas. El objetivo es minimizar los costos por escasez o por excedentes que ocurren al final del período como en el problema clásico del vendedor de periódicos, así también como costos por excedentes intermedios que se incurren en cada momento a lo largo del período. Se demuestra que este problema en tiempo continuo puede ser reducido a un cierto número de problemas con tiempo discreto.

Los estudios sobre el problema clásico del vendedor de periódicos rara vez consideran las políticas y la decisión del proveedor. Algunos autores que lo han tenido en cuenta son:

Zimmer [24], investiga la cadena de suministro y los mecanismos de coordinación por medio de la planeación de pedidos y entregas en un sólo período dentro de un contexto de "justo a tiempo". La meta del artículo es encontrar un mecanismo de coordinación que permita que el sistema funcione de una forma centralizada.

Weng [22], extiende y generaliza el problema clásico del vendedor de periódicos a un modelo que permite analizar las decisiones de la cantidad de pedido coordinadas entre el productor y el comprador, los cuales operan para atender una demanda aleatoria de un producto con un corto ciclo de vida. Weng desarrolla políticas de coordinación por medio de descuentos por cantidad, en las cuales el productor puede inducir al comprador a pedir la cantidad coordinada.

Los siguientes autores, entre otros, han abordado el tema de cadenas de suministros y mecanismos de coordinación:

Thomas y Griffin [20], señalan que las empresas tienen una oportunidad de reducir los gastos de funcionamiento mediante la coordinación de la planificación de las tres etapas fundamentales de la cadena de suministro: adquisiciones, producción y distribución. Ellos revisan la literatura para abordar una planificación coordinada entre dos o más etapas de la cadena de suministro y hacen hincapié en que las empresas pueden reducir los costos de operación por la coordinación de los planes de producción y de pedidos.

Zhang Long, Song Shiji y Wu Cheng [23], estudian un modelo de cadena de suministro en el cual un proveedor vende un producto a un minorista que afronta el problema de vendedor de periódicos. Los resultados muestran que la cantidad de producción óptima con la toma de decisiones descentralizada es menor que con la toma de decisiones centralizada. Analizan las ventajas y desventajas de tres tipos de contratos utilizando ejemplos numéricos.

Arshinder, Kanda y Deshmukh [1], presentan una revisión sistemática de la literatura para esclarecer la importancia de la coordinación de las cadenas de suministros. Los objetivos de este artículo son: hacer un informe y examinar varias perspectivas en asuntos relacionados con coordinación de cadenas de suministros, entender y apreciar varios mecanismos disponibles para la coordinación e identificar los vacios que existen en la literatura sobre el tema.

Baruch Keren [3], estudia la producción en un problema de inventario de período simple (el problema de vendedor de periódicos) con una demanda conocida. Describe una solución general analítica para dos tipos de riesgos de producción, aditivo y multiplicativo. Con varios ejemplos numéricos aplica las soluciones para casos especiales de riesgos de producción con distribución uniforme. Realiza un análisis de una cadena de suministro conformada por un cliente y un productor, revela que al cliente le puede resultar óptimo pedir más de lo necesario, ya que un pedido más grande aumenta la cantidad de producción óptima del productor.

La motivación para realizar este trabajo viene de Jianli Li y Liwen Liu [12], en donde se extiende el problema clásico del vendedor de periódicos conformando una cadena simple de suministros o sistema en el que el minorista realiza un pedido al fabricante, y si éste no satisface la demanda, tiene la posibilidad de realizar un segundo pedido dentro de un cupo limitado y condicionado por el fabricante. Cada una de las partes de la cadena de suministros se puede encontrar con algunos problemas en su toma de decisiones y esto conduce a que el sistema no tenga un buen funcionamiento, por lo tanto, es mejor para la cadena tomar las decisiones en conjunto en vez de hacerlo de manera individual, por eso ellos analizan cómo establecer un mecanismo de coordinación entre las dos partes para que la ganancia esperada del sistema sea máxima. En el presente trabajo se amplía el modelo con un cupo de reserva, permitiendo que el minorista tenga la posibilidad de recurrir a un segundo cupo de reserva al final del período, si no satisface la demanda; se espera que con un segundo cupo de reserva se incremente la oferta total del producto y se mejore la expectativa de ganancia respecto al modelo con un cupo de reserva.

2.2. MODELO CON UN CUPO DE RESERVA

La notación es la siguiente:

X: Demanda aleatoria con función de distribución $F(x)$, función de densidad $f(x)$ y media finita μ. Claramente $X \geq 0$.
p: Precio de venta unitario del minorista.
w: Precio de venta unitario al por mayor para el primer pedido del minorista.
w': Precio de venta unitario al por mayor para el primer cupo de reserva.
k: Costo unitario para el minorista por la reserva del primer cupo. Este descuento puede ser, por ejemplo, un descuento ofrecido a los clientes por la espera.
v: Valor unitario de salvamento.
r: Costo unitario de escasez para el minorista. Es una penalidad que refleja la pérdida de imagen y la disminución de la utilidad marginal por ventas.
c: Costo unitario de producción del fabricante para el primer pedido del minorista.
c': Costo unitario de producción del fabricante para el primer cupo de reserva.
b: Costo unitario por la reserva de capacidad para el fabricante, si se hace necesario la producción del primer cupo de reserva.
Q: Primera cantidad de pedido del minorista.
M: Capacidad de reserva del productor para el primer cupo.

Ahora se analizan los modelos de ganancia del minorista y el productor, respectivamente. Se analiza primero el problema del minorista.

Minorista

Dado que M es fijado por el fabricante, el minorista debe determinar la cantidad del primer pedido Q que maximice el valor esperado de sus ganancias $\Pi_b(Q, M)$. De acuerdo con el tamaño de la demanda, la función de ganancia del minorista $\Pi_b(Q, M)$ está dada por:

$$\Pi_b(Q,M) = \begin{cases} pX - wQ + v(Q-X); & X \leq Q \\ pX - wQ - (w'+k)(X-Q); & Q < X \leq Q+M \\ p(Q+M) - wQ - (w'+k)M - r(X-(Q+M)); & \\ & Q+M < X \end{cases}$$

La ganancia esperada del minorista $E[\Pi_b(Q, M)]$ está dada por:

$$\begin{aligned} E[\Pi_b(Q,M)] &= (p-w'-k)\mu + (w'+k-w)Q \\ &\quad -(w'+k-v)\int_0^Q (Q-x)f(x)dx \\ &\quad -(p+r-w'-k)\int_{Q+M}^{\infty} (x-Q-M)f(x)dx \end{aligned}$$

La cantidad óptima para el primer pedido del minorista, denotado por Q_b, está determinada por:

$$F(Q_b) = 1 - \frac{w-v-(p+r-w'-k)[1-F(Q_b+M)]}{(w'+k-v)} \tag{2.1}$$

Si se hace $M = 0$ se cumple (1.3), que es la solución del problema clásico del vendedor de periódicos.

Ahora se analiza el problema para el fabricante.

Fabricante

Denotando por $\Pi_s(Q, M)$ la función de ganancia, y por $E[\Pi_s(Q, M)]$ la ganancia esperada a optimizar, M es la variable de decisión y Q es fijado por el minorista. La función de ganancia del fabricante está dada por:

$$\Pi_s(Q,M) = \begin{cases} (w-c)Q - bM; & X \leq Q \\ (w-c)Q + (w'-c')(X-Q) - bM; & Q < X \leq Q+M \\ (w-c)Q + (w'-c')M - bM; & Q+M < X \end{cases}$$

La ganancia esperada del fabricante $E[\Pi_s(Q,M)]$ es:

$$\begin{aligned} E[\Pi_s(Q,M)] &= (w-c)Q + (w'-c') \int_{Q}^{Q+M} (x-Q)f(x)dx \\ &\quad + (w'-c')M \int_{Q+M}^{\infty} f(x)dx - bM \end{aligned}$$

Existe M_s óptimo para maximizar la ganancia esperada del productor dado por:

$$F(Q+M_s) = 1 - \frac{b}{(w'-c')} \tag{2.2}$$

Mecanismo de Coordinación

Si se supone que el fabricante y el minorista son propiedad de una misma firma en un sistema centralizado, el dueño de la firma deseará maximizar la ganancia esperada eligiendo el primer pedido Q y el cupo de reserva M. La ganancia esperada del sistema es la suma de los valores esperados del fabricante y el minorista. La función de ganancia del sistema denotada por $E[\Pi_j(Q,M)]$ está dada por:

$$\begin{aligned} E[\Pi_j(Q,M)] &= (p-c'-k)\mu + (c'+k-c)Q \\ &\quad -(c'+k-v)\int_{0}^{Q}(Q-x)f(x)dx \\ &\quad -(p+r-c'-k)\int_{Q+M}^{\infty}(x-Q-M)f(x)dx - bM \end{aligned}$$

En el sistema centralizado las políticas óptimas (Q_j, M_j) las cuales maximizan $E[\Pi_j(Q, M)]$ están dada por:

$$F(Q_j) = 1 - \frac{c - v - b}{(c' + k - v)} < 1$$

$$F(Q_j + M_j) = 1 - \frac{b}{(p + r - c' - k)} < 1$$

La ganancia esperada incrementada debido a decisiones con el sistema centralizado está dada por:[1]

$$\begin{aligned}\Delta(Q_j, M_j) &= (c' + k - v)\left[\int_{Q_b}^{Q_j} (x - Q_b) f(x)dx\right] \\ &\quad + (p + r - c' - k)\left[\int_{Q_b + M_s}^{Q_j + M_j} (x - Q_b - M_s) f(x)dx\right] > 0\end{aligned}$$

Esto significa que el abastecimiento del sistema centralizado es mayor que el del sistema descentralizado, así el sistema centralizado puede dar una mejor ganancia que el sistema descentralizado.

Ejemplo.

Tomado de [12]. Se supone que la demanda sigue una distribución normal con media = 200 y desviación estándar = 50. Los parámetros están dados por:

Parámetro	Valor
p	10
w	6
w'	7
v	0.5
k	1
r	5
c	2
c'	2.5
b	1
α	0.6

[1]Después de haber realizado varios cálculos no ha sido posible obtener el resultado.

Los resultados del ejemplo son presentados en las siguientes tablas:

Tabla 2.1: Resultados

	Q_b	Q_j	M_s	M_j	Gan. Descentr.	Gan. Centr.
Minor.	197				611,07	486,78
Fabr.			41		814,01	984,80
Sist.		248		20	1425,08	1471,58

Tabla 2.2: Resultados

	Coor. Descu.	Incr. con descu.	Incr.[%]
Minor.	629,68	18,61	4,03
Fabr.	841,90	27,89	3,43
Sist.	1471,58	46,50	3,26

Los resultados del ejemplo muestran que la ganancia esperada del sistema centralizado (1471,58) es mayor que la del sistema descentralizado (1425,08).

2.3. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA PROPUESTO

En el problema que nos ocupa se considera una cadena de suministro conformada por un fabricante y un minorista y se trata de comparar los resultados que se obtienen con la toma de decisiones de manera individual y en conjunto.

Tradicionalmente, los minoristas deciden su pedido y los fabricantes la cantidad de producción, afrontando así algunos riesgos. El minorista asume dos riesgos, uno es el riesgo de inventario excesivo, esto se da cuando el pedido al inicio del periodo es mayor que la demanda, por lo tanto satisface la demanda incurriendo en un sobrecosto por exceso de inventario; el otro riesgo es el de no satisfacer la demanda por suministro insuficiente, ya que su pedido al inicio del periodo es menor a la demanda real. En este caso, el minorista promete a los clientes provisión adicional, con descuentos tan atractivos en el precio que algunos clientes querrán esperar por los productos provenientes de un primero y hasta de un segundo cupo de reserva. El fabricante incurre en el riesgo de demasiado suministro o de no satisfacer el pedido del minorista por falta de suministro. La situación descrita lleva a pensar que podría ser mejor para la cadena tomar las decisiones en conjunto en lugar de hacerlo de manera individual.

El modelo que nos ocupa corresponde a un ambiente de negocios donde se dan cambios vertiginosos, la interacción de los agentes (consumidores y comerciantes) es cada vez más volátil y los mercados cada día abusan más del consumismo en el que estamos inmersos. Entonces se hacen necesarios productos que son pasajeros, que no se mantienen en el medio por que sólo incorporan pequeños cambios tecnológicos o simplemente llenan las expectativas de un sector del mercado que solo quiere estar a la vanguardia del consumismo, es decir, productos que no permiten almacenamientos por largo período de tiempo.

Se considera una cadena de suministro conformada por un fabricante y un minorista, el cual decide su primera cantidad de pedido Q; si la demanda total excede Q, el minorista puede pedir otra vez, pero debe pagar un costo de reserva por hacer un segundo pedido, que puede corresponder, por ejemplo, a un descuento que reconozca a sus clientes por la espera. El fabricante además le cobrará al minorista para el segundo pedido un precio más alto que para el primero, ya que el costo de producción para el segundo pedido también es más alto que el asociado al primero. El segundo pedido del minorista es limitado por un primer cupo de reserva M que establece el fabricante. Si la demanda excede la cantidad del primer cupo de reserva, el minorista puede hacer uso de un segundo cupo de reserva N, pero debe ofrecer un descuento mayor y pagar un costo más alto que el pagado para el primer cupo, ya que el costo de producción para el segundo cupo también es más alto que el asociado al primero. Si ocurre agotamiento después de hacer uso del segundo cupo de reserva, el minorista debe pagar una penalidad por escasez por el exceso de demanda. Si al final del período quedan sobrantes, el minorista recibe un valor de salvamento por los artículos que no se vendieron.

En este modelo los dos lados de la cadena tienen unos problemas especiales para la toma de decisiones. Por un lado, debido a que el fabricante paga mayores costos en la producción y necesita pagar por la reserva de capacidad, tanto para el primero como para el segundo cupo, esperará que el primer pedido del minorista sea lo más grande posible. Por el otro lado, para evitar el riesgo de inventario excesivo, el minorista mantendrá su primer pedido en un nivel moderado y espera que el fabricante le reserve los dos cupos lo más grandes posible y obtener suficiente cantidad para su segundo pedido. Así, existe un conflicto entre el primer pedido y la reserva de capacidad, lo cual lleva a que el sistema tenga un bajo desempeño. Se analiza cómo establecer un mecanismo de coordinación entre las dos partes para mejorar el desempeño de la cadena de suministro. En muchas políticas de cadenas, la cantidad óptima sujeta a la maximización del sistema de ganancia es una variable de decisión principal, mientras que en este modelo, se usa el primer pedido óptimo del minorista y las capacidades de reserva óptimas para el primer y segundo cupos del fabricante, para coordinar la cadena de suministro.

Si se denomina $E[\Pi_b(Q,M,N)]$ a la ganancia esperada del minorista, se quiere hallar la cantidad óptima para el primer pedido denotado por Q_b. Para el fabricante se denota por $E[\Pi_s(Q,M,N)]$ la ganancia esperada y se halla la política óptima (M_s, N_s) que maximiza dicho valor, M_s es la capacidad óptima del primer cupo de reserva del fabricante para el segundo pedido y N_s es la capacidad óptima del segundo cupo de reserva del fabricante para el segundo pedido. Si se supone que el fabricante y el minorista son propiedad de una misma firma, la ganancia esperada del sistema centralizado $E[\Pi_j(Q,M,N)]$ es la suma de los valores esperados del fabricante y el minorista y el problema de optimización consiste en hallar la política óptima (Q_j, M_j, N_j) que maximiza la ganancia esperada del sistema. Lo que se quiere mostrar es que para la cadena es mejor tomar las decisiones en conjunto en vez de hacerlo de manera individual, ya que el sistema centralizado da una mejor ganancia que el sistema descentralizado.

2.4. OBJETIVOS

2.4.1. Objetivo General

En una ampliación del modelo clásico del vendedor de periódicos con dos cupos de reserva, establecer un mecanismo de coordinación entre las partes de una cadena de suministros conformada por un fabricante y un minorista, para optimizar la ganancia esperada del sistema, mejorando también las ganancias esperadas del fabricante y el minorista.

2.4.2. Objetivos Específicos

- Optimizar el valor esperado de la ganancia para el minorista.
- Optimizar el valor esperado de la ganancia para el fabricante.
- Optimizar el valor esperado de la ganancia para el sistema centralizado.
- Proponer un mecanismo de coordinación y analizar su efecto sobre las expectativas de ganancias de los agentes.

2.5. ENFOQUE METODOLÓGICO

Esta investigación tiene el objetivo de ampliar el modelo descrito por J. Li y L. Liu [12], permitiendo que el minorista tenga la posibilidad de recurrir a un segundo cupo de reserva al final del período, buscando optimizar la ganancia esperada del sistema.

Con el fin de esclarecer la metodología empleada y los instrumentos necesarios para llevar a cabo este proyecto, se desglosan a continuación los aspectos que se tienen en cuenta para el planteamiento del problema.

La primera etapa de la investigación consiste en la definición del problema de investigación. Para ello se realiza una consulta bibliográfica extensa acerca del modelo clásico del vendedor de periódicos y sus extensiones y acerca de los problemas de coordinación de una cadena de suministros. Después la consulta bibliográfica, en la siguiente etapa de la investigación, se amplía el modelo clásico del vendedor de periódicos conformando una cadena simple de suministros en la que el minorista realiza un pedido al fabricante, y si este no satisface la demanda, tiene la posibilidad de realizar un nuevo pedido dentro de dos cupos limitados y condicionados por el fabricante. Adicionalmente, se establece un mecanismo de coordinación entre las dos partes para que la ganancia esperada del sistema sea máxima.

El problema a resolver, aunque no es simple, tiene un enunciado simple de optimización estocástica.

El método de investigación utilizado es básicamente el método científico, consistente en el enunciado y prueba formal de proposiciones, como es usual en el campo de la matemática. Se da significado a los resultados y a las dificultades identificadas, dentro del contexto que provee el estado del arte.

Se adecuan metodologías conocidas para la programación estocástica a este tipo de problemas. El aporte metodológico de nuestro trabajo está en el planteamiento y solución de un problema nuevo no resuelto anteriormente y el aporte aplicativo del modelo corresponde a situaciones que se presentan en la vida real.

Capítulo 3

MODELO CON DOS CUPOS DE RESERVA

3.1. DESCRIPCIÓN DEL MODELO PROPUESTO

Basados en los aspectos mencionados anteriormente, se plantea como problema de investigación, ampliar el modelo descrito que comprende dos pedidos y un cupo de reserva, permitiendo que el minorista tenga la posibilidad de recurrir a un segundo cupo de reserva, buscando mejorar la ganancia esperada del sistema.

La notación del modelo propuesto es la siguiente:

X: Demanda aleatoria con función de distribución $F(x)$, función de densidad $f(x)$ y media finita μ. Claramente $X \geq 0$. Se supone que $F(X)$ es estrictamente creciente en su soporte.
p: Precio de venta unitario del minorista.
w: Precio de venta al por mayor para el primer pedido del minorista.
w', w'': Precio de venta al por mayor para el primer y segundo cupos de reserva.
k, k': Costo unitario para el minorista por la reserva del primer y segundo cupos, respectivamente. Puede ser, por ejemplo, un descuento ofrecido a los clientes por la espera en la entrega del producto en cada uno de los cupos.
v: Valor unitario de salvamento.

r: Costo unitario de escasez para el minorista. Es una penalidad que refleja la pérdida de imagen y la disminución de la utilidad marginal por ventas.
c: Costo unitario de producción del fabricante para el primer pedido del minorista.
c', c'': Costo unitario de producción del fabricante para el primer y segundo cupos de reserva, respectivamente.
b: Costo unitario por la reserva de capacidad para el fabricante, si se hace necesario la producción del primer cupo de reserva.
b': Costo unitario por la reserva de capacidad para el fabricante, si se hace necesario la producción del segundo cupo de reserva.
Q: Primera cantidad de pedido del minorista.
M: Capacidad de reserva del productor para el primer cupo.
N: Capacidad de reserva del productor para el segundo cupo.

Se asume, sin pérdida de generalidad, que los parámetros anteriores son positivos. Los parámetros w'', c'', k' y N son propios del modelo con dos cupos de reserva.

Es sabido que el precio de venta unitario del minorista es mayor que el precio de venta al por mayor para el primer pedido y los dos cupos de reserva, y éstos a su vez son mayores que el valor unitario de salvamento. Así: $p > w'' > w' > w > c'' > c' > c > v \geq 0$. También es natural suponer que el costo de reserva para el minorista es mayor para el segundo cupo que para el primero, es decir, $k' > k$.

El minorista hará un segundo pedido dentro del primer cupo de reserva si la ganancia marginal es positiva, es decir, si $p - w' - k + r > 0$ y hará un segundo pedido dentro del segundo cupo de reserva si su margen de ganancia es mayor a cero, es decir, el minorista hará uso del segundo cupo de reserva si $p - w'' - k' + r > 0$.

En principio, el fabricante reservará capacidad, y tendrá producción para el segundo pedido del minorista dentro del primer cupo si $w' - b - c' > 0$ y reservará capacidad y tendrá producción para el segundo pedido del minorista dentro del segundo cupo si su margen de ganancia es mayor a cero, esto es cuando $w'' - b' - c'' > 0$.

La validez del modelo con dos cupos de reserva, por supuesto, depende de que existan diferencias entre los costos de producción, los costos de reserva de capacidad para el fabricante, los costos de reserva para el minorista o los precios al por mayor, entre el primero y el segundo cupo de reserva. El incremento de costos de producción del fabricante puede ser ocasionado por realizar la producción en un lapso de tiempo más corto, estos costos se pueden ver reflejados en el pago de horas extras o en extracosto de insumos, lo cual normalmente conducirá a un aumento en los precios al por mayor. También es natural que el costo de reserva para el minorista se incremente, por ejemplo, por la necesidad de ofrecer un mayor descuento vinculado a un mayor tiempo de espera para la entrega del producto al consumidor. El costo de reservar capacidad por parte del fabricante podría ser mayor o inclusive igual, pero es posible que para el fabricante reservar segundo cupo le sea de mayor facilidad ya que puede tener la maquinaria y los insumos requeridos para sacar la producción más rápido, debido a que se hizo uso del primer cupo de reserva. De todas formas, la estructura matemática del problema conduce a la necesidad de que tales costos disminuyan para que exista una solución, como se verá posteriormente.

El modelo de dos cupos, como lo hacen el de un cupo y el modelo clásico del Newsvendor, supone que los precios del fabricante y del minorista son preestablecidos. El considerar que esos precios forman parte de la política de optimización conduce, naturalmente, a un problema de mayor complejidad. El supuesto de que los precios sean determinados previamente o por un agente externo no es carente de realismo. Por ejemplo, en muchos mercados, no tendría sentido que se cambiaran los precios cada vez que un minorista quisiera realizar un pedido. Similarmente, la estabilidad de precios al consumidor puede ser bienvenida en muchos mercados.

La secuencia de decisiones entre las dos partes es de la siguiente manera: el fabricante le anuncia al minorista que le da la posibilidad de hacer uso de dos cupos de reserva (M y N) para el segundo pedido y le da los precios al por mayor para el primer pedido y los dos cupos de reserva (w, w' y w''). El minorista decide entonces la primera cantidad de pedido basado en su estructura de costos y en un pronóstico de la demanda. Finalmente, el fabricante basado en la primera cantidad de pedido del minorista, decide su capacidad de reserva.

Ahora se analizan los modelos de ganancia del minorista y el productor, respectivamente. Se analiza primero el problema del minorista.

3.2. SOLUCIÓN DEL MODELO

3.2.1. Minorista

Dado que M y N son fijados por el fabricante. El minorista debe determinar la cantidad del primer pedido Q que maximice el valor esperado de sus ganancias $\Pi_b\left(Q, M, N\right)$. De acuerdo al tamaño de la demanda, el valor de las ganancias se calcula de la siguiente manera:

1. Si $X \leq Q$, el minorista todavía tiene inventario al final del período, entonces no hay segundo pedido, por lo tanto la ganancia como funcion de la cantidad a pedir Q está dada por:

$$\Pi_b\left(Q|X \leq Q\right) = pX - wQ + v(Q - X) \tag{3.1}$$

2. Si $Q < X \leq Q + M$, el minorista hace un segundo pedido dentro del primer cupo de reserva, la cantidad a pedir es $(X-Q)$ unidades y debe pagar $(w' + k)(X - Q)$ adicionales, así su ganancia en este caso está dada por:

$$\Pi_b\left(Q|Q < X \leq Q + M\right) = pX - wQ - (w' + k)(X - Q) \tag{3.2}$$

Si $Q + M < X$ el minorista recurre al segundo cupo de reserva y,

3. Si $Q+M < X \leq Q+M+N$, el minorista pide $(X-(Q+M))$ unidades y debe pagar $(w'' + k')(X - (Q + M))$ adicionales, así la ganancia del minorista en este caso es:

$$\begin{aligned} \Pi_b\left(Q|Q + M < X \leq Q + M + N\right) \;=\; & pX - wQ - (w' + k)M \\ & -(w'' + k')(X - (Q + M)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

4. Si $Q + M + N < X$ el minorista puede pedir como máximo $M + N$ unidades y la demanda insatisfecha $(X - (Q + M + N))$ incurre en

costo por escasez, por lo tanto la ganancia del minorista en este caso está dada por:

$$\begin{aligned}\Pi_b\left(Q|Q+M+N<X\right) &= p(Q+M+N)-wQ \\ &\quad -(w'+k)M-(w''+k')N \\ &\quad -r(X-(Q+M+N)) \qquad (3.4)\end{aligned}$$

De las cuatro situaciones anteriores se tiene que la función de ganancia del minorista $\Pi_b\left(Q,M,N\right)$ está dada por:

$$\Pi_b(Q,M,N)=\begin{cases} pX-wQ+v(Q-X); & X\leq Q \\ pX-wQ-(w'+k)(X-Q); & Q<X\leq Q+M \\ pX-wQ-(w'+k)M-(w''+k')(X-(Q+M)); & \\ & Q+M<X\leq Q+M+N \\ p(Q+M+N)-wQ-(w'+k)M-(w''+k')N & \\ -r(X-(Q+M+N)); & Q+M+N<X \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Pi_b(Q,M,N) &= px-wQ+ \qquad (3.5)\\ &\quad \begin{cases} v(Q-x); & X\leq Q \\ -(w'+k)(X-Q); & Q<X\leq Q+M \\ -(w'+k)M-(w''+k')(X-(Q+M)); & \\ & Q+M<X\leq Q+M+N \\ -(w'+k)M-(w''+k')N & \\ -(p+r)(X-(Q+M+N)); & Q+M+N<X \end{cases}\end{aligned}$$

La ganancia esperada del minorista $E[\Pi_b(Q,M,N)]$ es la suma de los valores esperados de las cuatro ganacias dadas por (3.1)-(3.4).

Usando $\int_0^\infty xf(x)dx = \mu$ y $\int_0^\infty f(x)dx = 1$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
E[\Pi_b(Q,M,N)] &= p\mu - wQ + v\int_0^Q (Q-x)f(x)dx \\
&-(w'+k)\int_Q^{Q+M} (x-Q)f(x)dx \\
&-(w'+k)M\int_{Q+M}^{Q+M+N} f(x)dx \\
&-(w''+k')\int_{Q+M}^{Q+M+N} (x-(Q+M))f(x)dx \\
&-[(w'-k)M+(w''-k')N]\int_{Q+M+N}^{\infty} f(x)dx \\
&-(p+r)\int_{Q+M+N}^{\infty} (x-(Q+M+N))f(x)dx
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E[\Pi_b(Q,M,N)]}{\partial^2 Q} &= -(w'+k-v)f(Q) \\
&-[(w''+k')-(w'+k)]f(Q+M) \\
&-(p+r-(w''+k'))f(Q+M+N)
\end{aligned}
$$

Como $\frac{\partial^2}{\partial^2 Q}E[\Pi_b(Q,M,N)] < 0$, entonces $E[\Pi_b(Q,M,N)]$ es una función cóncava en Q, por lo tanto la ganancia esperada del minorista se maximiza en términos de Q cuando M y N son conocidos.

$\frac{\partial}{\partial Q}E[\Pi_b(Q,M,N)]$ está dada por:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E[\Pi_b(Q,M,N)]}{\partial Q} &= -w + v\int_0^Q f(x)dx \\
&\quad -(w'+k)Mf(Q+M) + (w'+k)\int_Q^{Q+M} f(x)dx \\
&\quad -(w'+k)M[f(Q+M+N) - f(Q+M))] \\
&\quad -(w''+k')Nf(Q+M+N) \\
&\quad +(w''+k')\int_{Q+M}^{Q+M+N} f(x)dx \\
&\quad +[(w'+k)M + (w''+k')N]f(Q+M+N) \\
&\quad +(p+r)\int_{Q+M+N}^{\infty} f(x)dx \\
&= (p+r-w) + (v-(w'+k))F(Q) \\
&\quad -[(w''+k') - (w'+k)]F(Q+M) \\
&\quad -(p+r-(w''+k'))F(Q+M+N)
\end{aligned}
$$

Tomando $\frac{\partial}{\partial Q}E[\Pi_b(Q,M,N)] = 0$ y despejando $F(Q_b)$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1 *Para el minorista la cantidad óptima para el primer pedido denotado por Q_b, está dada por:*

$$
\begin{aligned}
F(Q_b) &= 1 - \frac{w-v}{w'+k-v} + \frac{(w''+k')-(w'+k)}{w'+k-v}[1-F(Q_b+M_s)] \\
&\quad + \frac{p+r-(w''+k')}{w'+k-v}[1-F(Q_b+M_s+N_s)] \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Cuando $N = 0$ se tiene (2.1), la que es la solución dada en el articulo de Li. Liu. Si se hace $M = 0$ y $N = 0$ se tiene (1.3), que es la solución del problema clásico del vendedor de periódicos.

Ahora se analiza el problema para el fabricante.

3.2.2. Fabricante

Denotando por $\Pi_s(Q, M, N)$ la función de ganancia, y por $E[\Pi_s(Q, M, N)]$ la ganancia esperada a optimizar. M y N son las variables de decisión y Q es fijado por el minorista. La función de ganancia del fabricante se calcula así:

1. Si $X \leq Q$, el minorista todavía tiene inventario al final del período, entonces el fabricante no recibe segundo pedido, por lo tanto la ganancia como funcion de las cantidades a reservar M y N está dada por:

$$\Pi_s\left(Q|X \leq Q\right) = (w - c)Q - bM - b'N \tag{3.8}$$

2. Si $Q < X \leq Q + M$, el fabricante recibe un segundo pedido dentro del primer cupo de reserva. Se pide $(X - Q)$ unidades, así su ganancia en este caso está dada por:

$$\Pi_s\left(Q|Q < X \leq Q + M\right) = (w-c)Q+(w'-c')(X-Q)-bM-b'N \tag{3.9}$$

3. Si $Q + M < X \leq Q + M + N$, el fabricante recibe un segundo pedido dentro del segundo cupo de reserva. Se pide $(X - (Q + M))$ unidades, así la ganancia del fabricante en este caso es:

$$\begin{aligned}\Pi_s\left(Q|Q + M < X \leq Q + M + N\right) &= (w - c)Q + (w' - c')M \\ &\quad +(w'' - c'')(X - (Q + M)) \\ &\quad -bM - b'N \end{aligned} \tag{3.10}$$

4. Si $Q + M + N < X$, el fabricante recibe un segundo pedido dentro del segundo cupo de reserva. Pero máximo se venden N unidades, por lo tanto la ganancia del fabricante en este caso está dada por:

$$\begin{aligned}\Pi_s\left(Q|Q + M + N < X\right) &= (w - c)Q + (w' - c')M + (w'' - c'')N \\ &\quad -bM - b'N \end{aligned} \tag{3.11}$$

De las cuatro situaciones anteriores se tiene que la función de ganancia del fabricante $\Pi_s\,(Q, M, N)$ está dada por:

$$\Pi_s(Q,M,N) = \begin{cases} (w-c)Q - bM - b'N; \qquad X \leq Q \\ (w-c)Q + (w'-c')(X-Q) - bM - b'N; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad Q < X \leq Q+M \\ (w-c)Q + (w'-c')M + (w''-c'')(X-(Q+M)) \\ -bM - b'N; \qquad\qquad Q+M < X \leq Q+M+N \\ (w-c)Q + (w'-c')M + (w''-c'')N - bM - b'N; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad Q+M+N < X \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Pi_b(Q,M,N) &= (w-c)Q - bM - b'N + \\ &\begin{cases} 0; & X \leq Q \\ (w'-c')(X-Q); & Q < X \leq Q+M \\ (w'-c')M + (w''-c'')(X-(Q+M)); & \\ & Q+M < X \leq Q+M+N \\ (w'-c')M + (w''-c'')N; & \\ & Q+M+N < X \end{cases} \end{aligned} \tag{3.12}$$

La ganancia esperada del fabricante $E[\Pi_s(Q,M,N)]$ es la suma de los valores esperados de las cuatro ganacias dadas por(3.8)-(3.11).

Usando $\int\limits_0^\infty xf(x)dx = \mu$ y $\int\limits_0^\infty f(x)dx = 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
E[\Pi_s(Q,M,N)] &= (w-c)Q - bM - b'N + (w'-c')\int\limits_Q^{Q+M}(x-Q)f(x)dx \\
&+ (w'-c')M\int\limits_{Q+M}^{Q+M+N} f(x)dx \\
&+ (w''-c'')\int\limits_{Q+M}^{Q+M+N}(x-(Q+M))f(x)dx \\
&+ (w'-c')M\int\limits_{Q+M+N}^{\infty} f(x)dx \\
&+ (w''-c'')N\int\limits_{Q+M+N}^{\infty} f(x)dx \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Teorema 2 *Para el fabricante la política óptima* (M_s, N_s) *que maximiza* $E[\Pi_s(Q,M,N)]$ *está dada por:*

$$F(Q+M_s) = 1 - \frac{b-b'}{(w'-c')-(w''-c'')} \qquad (3.14)$$

$$F(Q+M_s+N_s) = 1 - \frac{b'}{w''-c''} \qquad (3.15)$$

Las condiciones

$$w'-c' > w''-c'' \qquad (3.16)$$

$$b > b' \qquad (3.17)$$

$$w''-c''-b' < w'-c'-b \qquad (3.18)$$

son necesarias para que exista una solución.

Prueba: Se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E[\Pi_s(Q,M,N)]}{\partial^2 M} &= -(w''-c'')f(Q+M+N)\\ &\quad -[(w'-c')-(w''-c'')]f(Q+M)<0,\end{aligned}$$

donde $w'-c' > w''-c''$ es una condición suficiente para que se cumpla la desigualdad anterior.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E[\Pi_s(Q,M,N)]}{\partial^2 N} &= -(w''-c'')f(Q+M+N)<0\\ \frac{\partial^2 E[\Pi_s(Q,M,N)]}{\partial M\partial N} &= -(w''-c'')f(Q+M+N)<0\\ \frac{\partial^2 E[\Pi_s(Q,M,N)]}{\partial N\partial M} &= -(w''-c'')f(Q+M+N)<0\end{aligned}$$

Se obtiene entonces la matriz:

$$\nabla^2 E[\Pi_s(Q,M,N)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial^2 M}E[\Pi_s(Q,M,N)] & \frac{\partial^2}{\partial M\partial N}E[\Pi_s(Q,M,N)] \\ \frac{\partial^2}{\partial N\partial M}E[\Pi_s(Q,M,N)] & \frac{\partial^2}{\partial^2 N}E[\Pi_s(Q,M,N)] \end{bmatrix}$$

Ya que la matriz Hessiana $\nabla^2 E[\Pi_s(Q,M,N)]$ es una matriz definida negativa, entonces $E[\Pi_s(Q,M,N)]$ es una función concava. Por lo tanto existe una política óptima (M_s,N_s) que maximiza la ganancia esperada del fabricante, M_s para el segundo pedido dentro del primer cupo y N_s para el segundo pedido dentro del segundo cupo. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial M}E[\Pi_s(Q,M,N)] &= -b+(w'-c')-[(w'-c')-(w''-c'')]F(Q+M)\\ &\quad -(w''-c'')F(Q+M+N),\end{aligned}$$

si $\frac{\partial}{\partial M}E[\Pi_s(Q,M,N)]=0$ se tiene que:

$$F(Q+M_s) = 1 - \frac{b-(w''-c'')}{(w'-c')-(w''-c'')} - \frac{w''-c''}{(w'-c')-(w''-c'')}F(Q+M_s+N) \tag{3.19}$$

Ahora, como

$$\frac{\partial}{\partial N}E[\Pi_s(Q,M,N)] \;\; = \;\; -b' + (w''-c'') - (w''-c'')F(Q+M+N),$$

si $\frac{\partial}{\partial N}E[\Pi_s(Q,M,N)] = 0$ se tiene la capacidad óptima del segundo cupo de reserva del fabricante para el segundo pedido, denotada por N_s:

$$F(Q+M_s+N_s) = 1 - \frac{b'}{w''-c''} \tag{3.20}$$

Reemplazando (3.20) en (3.19) se tiene la capacidad óptima del primer cupo de reserva del fabricante para el segundo pedido, denotada por M_s:

$$\begin{aligned} F(Q+M_s) &= 1 - \frac{b-(w''-c'')}{(w'-c')-(w''-c'')} - \frac{(w''-c'')\left[\frac{(w''-c'')-b'}{w''-c''}\right]}{(w'-c')-(w''-c'')} \\ &= 1 - \frac{b-(w''-c'')+(w''-c'')-b'}{(w'-c')-(w''-c'')} \\ &= 1 - \frac{b-b'}{(w'-c')-(w''-c'')} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Debido a las características de una función de distribución, la expresión (3.21), debe ser positiva y además menor que 1. En vista que se ha supuesto (3.16) es válida, se tiene que las condiciones (3.17) y (3.18) son necesarias y suficientes para que el modelo tenga solución.

Si éstas condiciones se cumplen, entonces la política óptima que maximiza $E[\Pi_s(Q,M,N)]$ está dada por (3.21) y (3.20). $\square$

La condición (3.16) significa que la ganancia marginal del fabricante para la segunda reserva sería inferior a la de la primera reserva, supuesto que tiene sentido. Desde los puntos de vista matemático y de significado del modelo, podría aceptarse el supuesto contrario. Bajo ese supuesto, la concavidad de la función objetivo condicionaría la función de densidad en términos de los parámetros, alternativa que se quiso evitar para mantener la generalidad de los supuestos del modelo.

Se puede ver que aunque el minorista preferiría que la capacidad de reserva del productor fuera lo mas grande posible, el productor tiene sus condiciones para reservar capacidad tanto para el primero como para el segundo cupo de reserva. Se tiene el siguiente teorema acerca de dichas condiciones:

Corolario 3 *En el sistema descentralizado, el fabricante reserva al minorista primero y segundo cupo si se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} b - b' &< \left[1 - \frac{p+r-w}{p+r-v}\right] [(w'-c') - (w''-c'')] \\ &\quad + \frac{p+r-(w''+k')}{p+r-v} \left[\frac{b}{w'-c'} - \frac{b'}{w''-c''}\right] (w'-c') \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$b' < \frac{b-b'}{(w'-c')-(w''-c'')}(w''-c'') \tag{3.23}$$

Las desigualdades anteriores son equivalentes a las siguientes:

$$\begin{aligned} b' &> \frac{((w''+k')-v)(w''-c'')}{(p+r-v)(w''-c'')-(p+r-(w''+k'))(w'-c')}\, b \\ &\quad - \frac{(w-v)((w'-c')-(w''-c''))(w''-c'')}{(p+r-v)(w''-c'')-(p+r-(w''+k'))(w'-c')} \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$b' < \frac{w''-c''}{w'-c'}\, b. \tag{3.25}$$

Una condición necesaria para que el fabricante reserve los dos cupos es que

$$(p+r-v)(w''-c'') > (p+r-(w''+k'))(w'-c').$$

Prueba: El minorista y el fabricante tienen políticas como se muestran en (3.7), (3.21) y (3.20), respectivamente, así como sus soluciones óptimas. El hecho de que el fabricante reserve capacidad para el segundo pedido del minorista tanto dentro del primero como del segundo cupo significa que $M_s > 0$ y $N_s > 0$, esto quiere decir que

$$F(Q_b) < F(Q_b + M_s) < F(Q_b + M_s + N_s) \tag{3.26}$$

Si se toma la primera desigualdad de (3.26), $F(Q_b + M_s) > F(Q_b)$, se tiene:

$$\begin{aligned} F(Q_b + M_s) &> 1 - \frac{w - v}{w' + k - v} + \frac{(w'' + k') - (w' + k)}{w' + k - v}[1 - F(Q_b + M_s)] \\ &\quad + \frac{p + r - (w'' + k')}{w' + k - v}[1 - F(Q_b + M_s + N_s)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (w' + k - v)(1 - F(Q_b + M_s)) &< (w - v) - \\ &\quad [(w'' + k') - (w' + k)][1 - F(Q_b + M_s)] - \\ &\quad [p + r - (w'' + k')][1 - F(Q_b + M_s + N_s)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (w'' + k' - v)(1 - F(Q_b + M_s)) &< (w - v) \\ &\quad -[p + r - (w'' + k')][1 - F(Q_b + M_s + N_s)] \\ &\quad +[p + r - (w'' + k')][1 - F(Q_b + M_s)] \\ &\quad -[p + r - (w'' + k')][1 - F(Q_b + M_s)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p + r - v)(1 - F(Q_b + M_s)) &< [p + r - (w'' + k')][F(Q_b + M_s + N_s) - F(Q_b + M_s)] \\ &\quad +(w - v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p + r - w &< (p + r - v)F(Q_b + M_s) \\ &\quad +[p + r - (w'' + k')][F(Q_b + M_s + N_s) - F(Q_b + M_s)] \end{aligned}$$

$$\frac{p + r - w}{p + r - v} < F(Q_b + M_s) + \frac{p + r - (w'' + k')}{p + r - v}[F(Q_b + M_s + N_s) - F(Q_b + M_s)]$$

$$\begin{aligned} 1-\frac{p+r-w}{p+r-v} &> 1-F(Q_b+M_s) \\ &\quad -\frac{p+r-(w''+k')}{p+r-v}[F(Q_b+M_s+N_s)-F(Q_b+M_s)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-F(Q_b+M_s) &< 1-\frac{p+r-w}{p+r-v} \qquad (3.27) \\ &\quad +\frac{p+r-(w''+k')}{p+r-v}[F(Q_b+M_s+N_s)+F(Q_b+M_s)] \qquad (3.28) \end{aligned}$$

Calculando por aparte $F(Q_b+M_s+N_s)-F(Q_b+M_s)$, se tiene:

$$\begin{aligned} F(Q_b+M_s+N_s)-F(Q_b+M_s) &= \frac{b-b'}{(w'-c')-(w''-c'')}-\frac{b'}{w''-c''} \qquad (3.29) \\ &= \frac{b}{(w'-c')-(w''-c'')} \\ &\quad -\frac{b'}{(w'-c')-(w''-c'')}-\frac{b'}{w''-c''} \\ &= \frac{w'-c'}{(w'-c')-(w''-c'')}\left[\frac{b}{w'-c'}-\frac{b'}{w''-c''}\right] \qquad (3.30) \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.14) y la ecuación anterior en la desigualdad (3.27) se obtene:

$$\begin{aligned} \frac{b-b'}{(w'-c')-(w''-c'')} &< 1-\frac{p+r-w}{p+r-v} \\ &\quad +\frac{[p+r-(w''+k')](w'-c')}{(p+r-v)[(w'-c')-(w''-c'')]}\left[\frac{b}{w'-c'}-\frac{b'}{w''-c''}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b-b' &< \left[1-\frac{p+r-w}{p+r-v}\right][(w'-c')-(w''-c'')] \qquad (3.31) \\ &\quad +\frac{p+r-(w''+k')}{p+r-v}\left[\frac{b}{w'-c'}-\frac{b'}{w''-c''}\right](w'-c') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b\left[1-\frac{p+r-(w''+k')}{p+r-v}\right] &< \left[1-\frac{p+r-w}{p+r-v}\right][(w'-c')-(w''-c'')] \\ &\quad +\left[1-\frac{[p+r-(w''+k')](w'-c')}{(p+r-v)(w''-c'')}\right]b' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((w''+k')-v)b &< (w-v)[(w'-c')-(w''-c'')] \\ &\quad +\frac{(p+r-v)(w''-c'')-[p+r-(w''+k')](w'-c')}{w''-c''}\,b' \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} \frac{(p+r-v)(w''-c'')-[p+r-(w''+k')](w'-c')}{w''-c''}\,b' &> ((w''+k')-v)b \\ &\quad -(w-v)[(w'-c')-(w''-c'')] \end{aligned}$$

De donde b' se puede acotar con una función lineal de b así:

$$b' > m_{1s}b + t_s \tag{3.33}$$

donde,

$$m_{1s} = \frac{((w''+k')-v)(w''-c'')}{(p+r-v)(w''-c'')-[p+r-(w''+k')](w'-c')}$$

es la pendiente de la recta y

$$t_s = -\frac{(w-v)[(w'-c')-(w''-c'')](w''-c'')}{(p+r-v)(w''-c'')-[p+r-(w''+k')](w'-c')}$$

es el intercepto con el eje b'.

Ahora si se toma la segunda parte de la desigualdad (3.26), según la ecuación (3.29), se tiene que:

$$b' < \frac{b-b'}{(w'-c')-(w''-c'')}(w''-c'') \tag{3.34}$$

y según la ecuación (3.30) se tiene:

$$\frac{w'-c'}{(w'-c')-(w''-c'')}\left[\frac{b}{w'-c'}-\frac{b'}{w''-c''}\right]>0$$

Como $w'-c'>0$ y $(w'-c')-(w''-c'')>0$, la desigualdad anterior implica que:

$$\frac{b}{w'-c'}>\frac{b'}{w''-c''} \tag{3.35}$$

De (3.35), b' se puede acotar linealmente con b así:

$$b'<m_{2s}b, \tag{3.36}$$

donde

$$m_{2s}=\frac{w''-c''}{w'-c'}$$

es la pendiente la recta con intercepto en el origen.

Si (3.35) no se cumple entonces el fabricante no reserva segundo cupo para el segundo pedido del minorista, en este caso se recurre al modelo de un cupo.

En conclusión, el fabricante reserva cupos al minorista para el segundo pedido si se cumplen (3.31) y (3.34).

En las desigualdades (3.33) y (3.36), se tiene que $m_{2s}<1$ y $m_{1s}>1$. En efecto, como $w'-c'>w''-c''$, m_{1s} cumple la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
m_{1s} &= \frac{((w''+k')-v)(w''-c'')}{(p+r-v)(w''-c'')-(p+r-(w''+k'))(w'-c')}\\
&> \frac{((w''+k')-v)(w''-c'')}{(p+r-v)(w''-c'')-(p+r-(w''+k'))(w''-c'')}\\
&= \frac{w''+k'-v}{w''+k'-v}=1.
\end{aligned}$$

Entonces las rectas $b' = m_{1s}b + t_s$ y $b' = m_{2s}b$ se intersectan, por lo tanto los valores que pueden tomar b y b' quedan acotados por dos rectas que forman un triángulo con el eje b'.

El intercepto de las dos rectas está dado por el punto de coordenadas (Ver Apéndice A):

$$\left(\frac{w-v}{p+r-v}(w'-c'), \frac{w-v}{p+r-v}(w''-c'')\right)$$

Para demostrar la última afirmación del corolario 3, en el Apéndice B se obtiene la siguiente cota para b:

$$b < \frac{w-v}{p+r-v}(w'-c') \tag{3.37}$$

O sea que b está acotada superiormente por la abscisa del punto de intersección de las rectas $b' = m_{1s}b + s$ y $b' = m_{2s}b$, lo que implica que $m_{1s} > 0$ y por lo tanto, se tiene que: $(p+r-v)(w''-c'') > (p+r-(w''+k'))(w'-c')$, como condición necesaria para que el fabricante reserve los dos cupos.

En rigor, para concluir la prueba, se afirma que las desigualdades (3.17) y (3.18) no inciden en la asignación de cupos. En efecto, como $w'-c' > w''-c''$, (3.17) es implicada por la desigualdad (3.35).

De otra parte, la intersección con el eje b de la recta

$$b' = b - [(w'-c') - (w''-c'')], \tag{3.38}$$

asociada con la desigualdad (3.18), es $(w'-c') - (w''-c'')$, valor mayor que $\frac{w-v}{w''+k'-v}[(w'-c') - (w''-c'')]$, que es la intersección de la recta $b' = m_{1s} + t_s$ con el eje b, por lo cual esa intersección no cumple con las condiciones de reserva.

Además, considerando que la intersección de las rectas $b' = m_{1s} + t_s$ y $b' = m_{2s}b$ es el punto $(\frac{w-v}{p+r-v}(w'-c'), \frac{w-v}{p+r-v}(w''-c''))$, la intersección de (3.38) con la recta $b' = m_{2s}b$ (ver (3.36)), que es el punto de coordenadas $(w'-c', w''-c'')$, no cumple con las condiciones de reserva, ya que $\frac{w-v}{p+r-v} < 1$. Éstos argumentos sustentan la afirmación hecha anteriormente y concluyen la prueba del teorema. □

Es sabido que los precios al por mayor w' y w'' del fabricante para el segundo pedido tanto para el primero como para el segundo cupo de reserva, están basados en el pensamiento de que su margen de ganancia sea mayor a cero, $w' > b + c'$ para el primer cupo de reserva y $w'' > b' + c''$ para el segundo cupo. Sin embargo no se puede garantizar que el minorista haga un uso de los cupos al final del período, ya que $\frac{b-b'}{(w'-c')-(w''-c'')}$ es la probabilidad de que $X > Q + M$, es decir, la probabilidad de que el minorista haga uso del segundo cupo de reserva.

Así, no es seguro obtener una ganancia al final del período para los costos de capacidad de reserva gastado por el fabricante. La probabilidad de que el fabricante obtenga ganancia $w'' - c''$ para cada b' gastado es $\frac{b-b'}{(w'-c')-(w''-c'')}$. Por lo tanto (3.23) implica que el fabricante reservará la capacidad y tendrá producción para el segundo pedido del minorista dentro del segundo cupo sólo si los costos de la capacidad reservada gastada puede ser cubierta por sus ganancias obtenidas dentro del segundo cupo.

Aunque el minorista espera que la capacidad del productor sea la mayor posible, él debe equilibrar los pedidos ya que habrá mayores precios al por mayor y mayores costos. De igual manera el productor espera que el primer pedido del minorista sea lo más grande posible, pero también le gustaría reservar los cupos para maximizar su ganancia esperada. Así se puede ver que en el sistema descentralizado, donde cada parte quiere tomar decisiones independientemente para maximizar sus ganancias, una decisión óptima de un lado no maximiza las ganancias del otro lado. Por consiguiente, puede ser posible designar algún mecanismo para coordinar los comportamientos de las tomas de decisiones para que ambas partes obtengan los mejores resultados. Se discutirán tal mecanismo a continuación.

3.2.3. Sistema Centralizado

Si se supone que el fabricante y el minorista son propiedad de una misma firma en un sistema centralizado, el dueño de la firma deseará maximizar la ganancia esperada eligiendo el primer pedido Q y los dos cupos de reserva M y N. El sistema hará uso, reservará capacidad y tendrá producción para el segundo pedido dentro del primer cupo si $p + r - c' - k - b > 0$ y hará uso, reservará capacidad y tendrá producción para el segundo pedido dentro del segundo cupo si su margen de ganancia es mayor a cero, esto es cuando $p + r - c'' - k' - b' > 0$.

La función de ganancia del sistema $\Pi_j(Q, M, N)$ está dada por la suma de las funciones de ganancia del fabricante y el minorista. De (3.39) y (3.13) se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\Pi_j(Q,M,N) \;&=\; px - wQ + (w-c)Q - bM - b'N + \\
&\begin{cases}
v(Q-x); & X \leq Q \\
(w'-c')(X-Q) - (w'+k)(X-Q); & \\
 & Q < X \leq Q+M \\
(w'-c')M + (w''-c'')(X-(Q+M) - (w'+k)M & \\
-(w''+k')(X-(Q+M)); & \\
 & Q+M < X \leq Q+M+N \\
(w'-c')M + (w''-c'')N - (w'+k)M - (w''+k')N & \\
-(p+r)(X-(Q+M+N)); & Q+M+N < X
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\Pi_j(Q,M,N) \;&=\; px - cQ - bM - b'N + \\
&\begin{cases}
v(Q-x); & X \leq Q \\
-(c'+k)(X-Q); & Q < X \leq Q+M \\
-(c'+k)M - (c''+k')(X-(Q+M)); & \\
 & Q+M < X \leq Q+M+N \\
-(c'+k)M - (c''+k')N & \\
-(p+r)(X-(Q+M+N)); & Q+M+N < X
\end{cases}
\end{aligned}
$$

La ganancia esperada del sistema $E[\Pi_j(Q, M, N)]$ del sistema está dada por:

$$
\begin{aligned}
E[\Pi_j(Q,M,N)] &= p\mu - cQ - bM - b'N \\
&\quad + v\int_0^Q (Q-x)f(x)dx \\
&\quad - (c'+k)\int_Q^{Q+M} (x-Q)f(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(c'+k)M\int_{Q+M}^{Q+M+N} f(x)dx \\
&-(c''+k')\int_{Q+M}^{Q+M+N} (x-(Q+M))f(x)dx \\
&-[(c'+k)M+(c''+k')N]\int_{Q+M+N}^{\infty} f(x)dx \\
&-(p+r)\int_{Q+M+N}^{\infty} (x-(Q+M+N))f(x)dx
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Teorema 4 *En el sistema centralizado la política óptima* (Q_j, M_j, N_j) *que maximiza* $E[\Pi_j(Q,M,N)]$ *está dada por:*

$$F(Q_j) = 1 - \frac{c-v-b}{c'+k-v}$$

$$F(Q_j+M_j) = 1 - \frac{b-b'}{(c''+k')-(c'+k)}$$

$$F(Q_j+M_j+N_j) = 1 - \frac{b'}{p+r-(c''+k')}$$

La condición

$$c - v > b \tag{3.40}$$

es necesaria para que haya solución.

Prueba: Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial^2 Q} &= -(c' + k - v)f(Q) - [(c'' + k') - (c' + k)]f(Q + M) \\
&\quad -(p + r - c'' - k')f(Q + M + N) \\
&= A + B + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial^2 M} &= -[(c'' + k') - (c' + k)]f(Q + M) \\
&\quad -(p + r - c'' - k')f(Q + M + N) \\
&= B + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial^2 N} &= -(p + r - c'' - k')f(Q + M + N) \\
&= C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial Q \partial M} &= -[(c'' + k') - (c' + k)]f(Q + M) \\
&\quad -(p + r - c'' - k')f(Q + M + N) \\
&= B + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial Q \partial N} &= -(p + r - c'' - k')f(Q + M + N) \\
&= C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial M \partial Q} &= -[(c'' + k') - (c' + k)]f(Q + M) \\
&\quad -(p + r - c'' - k')f(Q + M + N) \\
&= B + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial M \partial N} &= -(p+r-c''-k')f(Q+M+N) \\
&= C \\
\frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial N \partial Q} &= -(p+r-c''-k')f(Q+M+N) \\
&= C \\
\frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial N \partial M} &= -(p+r-c''-k')f(Q+M+N) \\
&= C
\end{aligned}$$

Note que si la condición $c''+k' > c'+k$ se cumple, cada una de las expresiones anteriores es negativa. Además que el cumplimiento de las condiciones $w''+k' > w'+k$ y $w'-c' > w''-c''$, que son suficientes para que el valor esperado de las ganancias del minorista y del fabricante sean funciones concavas, implica dicha condición.

Se tiene la matriz:

$$\nabla^2 E[\Pi_j(Q,M,N) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial^2 Q} & \frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial Q \partial M} & \frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial Q \partial N} \\ \frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial M \partial Q} & \frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial^2 M} & \frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial M \partial N} \\ \frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial N \partial Q} & \frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial N \partial M} & \frac{\partial^2 E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial^2 N} \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 E[\Pi_j(Q,M,N) = \begin{bmatrix} A+B+C & B+C & C \\ B+C & B+C & C \\ C & C & C \end{bmatrix}$$

Primer Bloque: A+B+C. Es negativo.

Segundo Bloque:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} (A+B+C) & (B+C) \\ (B+C) & (B+C) \end{bmatrix} &= (A+B+C)(B+C) - (B+C)(B+C) \\
&= A(B+C) + (B+C)(B+C) \\
&\quad -(B+C)(B+C) \\
&= A(B+C)
\end{aligned}$$

Por lo tanto el segundo bloque es positivo

Tercer Bloque:

$$\begin{bmatrix} A+B+C & B+C & C \\ B+C & B+C & C \\ C & C & C \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (A+B+C)[(B+C)C - C^2] - (B+C)[(B+C)C - C^2] \\
&\quad +C[(B+C)C - (B+C)C] \\
&= (A+B+C)(B+C)C - (A+B+C)C^2 - (B+C)^2C \\
&\quad +(B+C)C^2 \\
&= A(B+C)C + (B+C)^2C - AC^2 - (B+C)C^2 - (B+C)^2C \\
&\quad +(B+C)C^2 \\
&= A(B+C)C - AC^2 \\
&= ABC + AC^2 - AC^2 \\
&= ABC
\end{aligned}$$

El tercer bloque es negativo

Ahora se tiene que por el criterio de los menores principales $\nabla^2 E[\Pi_j(Q,M,N)$ es una matriz definida negativa, entonces $E[\Pi_j(Q,M,N)]$ es una función concava.

Por lo tanto existen unas políticas óptimas (Q_j, M_j, N_j) que maximizan la ganancia esperada. Entonces se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial Q} &= -c + v\int_0^Q f(x)dx \\
&\quad -(c'+k)Mf(Q+M) + (c'+k)\int_Q^{Q+M} f(x)dx \\
&\quad -(c'+k)M[f(Q+M+N) - f(Q+M))] \\
&\quad -(c''+k')Nf(Q+M+N) \\
&\quad +(c''+k')\int_{Q+M}^{Q+M+N} f(x)dx \\
&\quad +[(c'+k)M + (c''+k')N]f(Q+M+N) \\
&\quad +(p+r)\int_{Q+M+N}^{\infty} f(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial Q} &= p + r - c + (v - (c'+k))F(Q) \\
&\quad -[(c''+k') - (c'+k)]F(Q+M) \\
&\quad -(p + r - (c''+k'))F(Q+M+N)
\end{aligned}
$$

Si $\frac{\partial}{\partial Q}E[\Pi_j(Q,M,N)] = 0$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
F(Q_j) &= \frac{p+r-c}{c'+k-v} - \frac{(c''+k') - (c'+k)}{c'+k-v}F(Q+M) \\
&\quad -\frac{p+r-(c''+k')}{c'+k-v}F(Q+M+N)
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial M} &= -b-(c'+k)Mf(Q+M)-(c'+k)\int\limits_{Q+M}^{Q+M+N} f(x)dx \\
&\quad -(c'+k)M[f(Q+M+N)-f(Q+M)] \\
&\quad -(c''+k')Nf(Q+M+N)+(c''+k')\int\limits_{Q+M}^{Q+M+N} f(x)dx \\
&\quad -(c'+k)\int\limits_{Q+M+N}^{\infty} f(x)dx+(c'+k)Mf(Q+M+N) \\
&\quad +(c''+k')Nf(Q+M+N) \\
&\quad +(p+r)[1-F(Q+M+N)] \\
&= -b-(c'+k)[F(Q+M+N)-F(Q+M)] \\
&\quad +(c''+k')[F(Q+M+N)-F(Q+M)]-(c'+k) \\
&\quad +(c'+k)F(Q+M+N)+(p+r) \\
&\quad -(p+r)F(Q+M+N)] \\
&= p+r-(c'+k)-b-[(c''+k')-(c'+k)]F(Q+M) \\
&\quad -(p+r-(c''+k'))F(Q+M+N)]
\end{aligned}
$$

Si $\frac{\partial}{\partial M}E[\Pi_j(Q,M,N)]=0$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
F(Q_j+M_j) &= \frac{p+r-(c'+k)-b}{(c''+k')-(c'+k)} \\
&\quad -\frac{p+r-(c''+k')}{(c''+k')-(c'+k)}F(Q+M+N)
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E[\Pi_j(Q,M,N)]}{\partial N} &= -(c'+k)Mf(Q+M+N)-(c''+k')Nf(Q+M+N) \\
&\quad +(c'+k)Mf(Q+M+N)-(c''+k')\int\limits_{Q+M+N}^{\infty} f(x)dx \\
&\quad +(c''+k')Nf(Q+M+N)+(p+r)[1-F(Q+M+N)]-b' \\
&= p+r-c''-k'-(p+r-c''-k')F(Q+M+N)-b'
\end{aligned}$$

Si $\frac{\partial}{\partial N}E[\Pi_j(Q,M,N)] = 0$ entonces,

$$\begin{aligned}
F(Q_j+M_j+N_j) &= \frac{p+r-(c''+k')-b'}{p+r-(c''+k')} \\
&= 1-\frac{b'}{p+r-(c''+k')} \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

Reemplazando (3.43) en (3.42):

$$\begin{aligned}
F(Q_j+M_j) &= \frac{p+r-(c'+k)-b-(p+r-(c''+k'))\left[1-\frac{b'}{(p+r-c''-k')}\right]}{(c''+k')-(c'+k)} \\
&= \frac{p+r-(c'+k)-b-(p+r-c''-k')\left[\frac{p+r-c''-k'-b'}{(p+r-c''-k')}\right]}{(c''+k')-(c'+k)} \\
&= \frac{p+r-(c'+k)-b-(p+r-(c''+k')-b')}{(c''+k')-(c'+k)} \\
&= \frac{(c''+k')-(c'+k)+b'-b}{(c''+k')-(c'+k)} \\
&= 1-\frac{b-b'}{(c''+k')-(c'+k)} \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Reemplazando (3.43) y (3.44) en (3.41) se tiene que:

$$\begin{aligned} F(Q_j) &= \frac{p+r-c}{c'+k-v} - \frac{[(c''+k')-(c'+k)]\left[\frac{(c''+k')-(c'+k)+b'-b}{(c''+k')-(c'+k)}\right]}{c'+k-v} \\ &\quad - \frac{(p+r-(c''+k'))\left[\frac{p+r-(c''+k')-b'}{p+r-(c''+k')}\right]}{c'+k-v} \\ &= \frac{p+r-c-[(c''+k')-(c'+k)+b'-b)]-(p+r-(c''+k')-b')}{c'+k-v} \\ &= \frac{c'+k-c+b}{c'+k-v} \\ &= 1-\frac{c-v-b}{c'+k-v} \end{aligned} \tag{3.45}$$

Debido a las características de una función de distribución, la expresión (3.45), debe ser positiva y además menor que 1, de donde se tiene que $c-v > b$ es condición necesaria para que el modelo tenga solución.

Por lo tanto, si se cumple que $c - v > b$, la política óptima que maximiza $E[\Pi_j(Q, M, N)]$ está dada por (3.45), (3.44) y (3.43). $\square$

Se tiene el siguiente corolario del Teorema 2:

Corolario 5 *En el sistema centralizado, se reserva cupo para el segundo pedido si:*

$$b' > \frac{(c''+k')-v}{c'+k-v}b - \frac{(c-v)[(c''+k')-(c'+k)]}{c'+k-v} \tag{3.46}$$

$$b' < \frac{p+r-(c''+k')}{p+r-(c'+k)}\ b \tag{3.47}$$

Prueba: Similar a la prueba del Corolario 3. El hecho de que el sistema centralizado reserve capacidad para el segundo pedido tanto dentro del primero como del segundo cupo significa que $M_j > 0$ y $N_j > 0$, esto es:

$$F(Q_j) < F(Q_j + M_j) < F(Q_j + M_j + N_j) \tag{3.48}$$

Si se toma la primera desigualdad de (3.48), sustituyendo (3.41) y (3.42) se tiene la condición para que el sistema reserve primer cupo para el segundo pedido, así:

$$1-\frac{b-b'}{(c''+k')-(c'+k)} > 1-\frac{c-v-b}{c'+k-v}$$

$$\frac{b-b'}{(c''+k')-(c'+k)} < \frac{c-v-b}{c'+k-v}$$

$$(b-b')(c'+k-v) < (c-v-b)[(c''+k')-(c'+k)]$$

$$\begin{aligned} b(c'+k-v)-b'(c'+k-v) \quad < \quad & (c-v)[(c''+k')-(c'+k)] \\ & -b[(c''+k')-(c'+k)] \end{aligned}$$

$$b[(c''+k')-v] < (c-v)[(c''+k')-(c'+k)]+b'(c'+k-v)$$

De donde b' queda acotada linealmente por una función de b así:

$$b' > m_{1j}+t_j \tag{3.49}$$

donde

$$m_{1j}=\frac{c''+k'-v}{c'+k-v}$$

es la pendiente de la recta y

$$t_j=-\frac{(c-v)[(c''+k')-(c'+k)]}{c'+k-v}$$

es el intercepto con el eje b'.

Ahora si se toma la segunda parte de la desigualdad (3.48), sustituyendo (3.42) y (3.43), respectivamente, se tiene:

$$1-\frac{b-b'}{(c''+k')-(c'+k)} < 1-\frac{b'}{p+r-(c''+k')}$$

$$\frac{b-b'}{(c''+k')-(c'+k)} > \frac{b'}{p+r-(c''+k')}$$
$$\frac{b}{(c''+k')-(c'+k)} > \frac{b'}{p+r-(c''+k')} + \frac{b'}{(c''+k')-(c'+k)}$$
$$\frac{b}{(c''+k')-(c'+k)} > \frac{b'[(c''+k')-(c'+k)]+b'[p+r-(c''+k')]}{(p+r-(c''+k'))[(c''+k')-(c'+k)]}$$
$$b > \frac{p+r-(c'+k)}{p+r-(c''+k')}b'$$
$$\frac{b}{p+r-(c'+k)} > \frac{b'}{p+r-(c''+k')} \tag{3.50}$$

De (3.50), b' se puede acotar linealmente con b así:

$$b' < m_{2j}b \tag{3.51}$$

Donde
$$m_{2j} = \frac{p+r-c''-k'}{p+r-c'-k}$$
es la pendiente la recta con intercepto en el origen.

Si (3.50) no se cumple entonces el sistema no reserva segundo cupo para el segundo pedido, en este caso se considera el modelo de un cupo.

Ahora, en las desigualdades (3.49) y (3.51), se tiene que $m_{1j} > 1$ y $m_{2j} < 1$, entonces las rectas $b' = m_{1j}b + t_j$ y $b' = m_{2j}b$ tienen un punto de intersección, por lo tanto los valores que pueden tomar b y b' quedan acotados por dos rectas que forman un triángulo con el eje b'.

El intercepto de las dos rectas está dado por $m_{1j}b + t_j = m_{2j}b$, así:

$$\frac{(c''+k')-v}{(c'+k)-v}b - \frac{(c-v)[(c''+k')-(c'+k)]}{(c'+k)-v} = \frac{p+r-(c''+k')}{p+r-(c'+k)}b$$

$$\left[\frac{(c''+k')-v}{(c'+k)-v} - \frac{p+r-(c''+k')}{p+r-(c'+k)}\right]b = \frac{(c-v)[(c''+k')-(c'+k)]}{(c'+k)-v}$$

$$\begin{aligned}
\frac{((c''+k')-v)(p+r-(c'+k))-(p+r-(c''+k'))((c'+k)-v)}{((c'+k)-v)(p+r-(c'+k))}\,b &= \\
\frac{(c-v)[(c''+k')-(c'+k)]}{(c'+k)-v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(c''+k')(p+r)+v(c'+k)-(p+r)(c'+k)-v(c''+k')}{p+r-(c'+k)}\,b &= \\
(c-v)[(c''+k')-(c'+k)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(p+r)[(c''+k')-(c'+k)]-v[(c''+k')-(c'+k)]}{p+r-(c'+k)}\,b &= \\
(c-v)[(c''+k')-(c'+k)]
\end{aligned}$$

$$\frac{p+r-v}{p+r-(c'+k)}\,b = (c-v)$$

$$b = \frac{c-v}{p+r-v}(p+r-(c'+k)) \tag{3.52}$$

Ahora si se reemplaza (3.52) en $b' = m_{2j}b$, se tiene:

$$b' = \frac{p+r-(c''+k')}{p+r-(c'+k)}\left[\frac{c-v}{p+r-v}(p+r-(c'+k))\right]$$

$$b' = \frac{c-v}{p+r-v}(p+r-(c''+k'))$$

Por lo tanto el intercepto de las rectas está dado por el punto de coordenadas

$$\left(\frac{c-v}{p+r-v}(p+r-(c'+k)), \frac{c-v}{p+r-v}(p+r-(c''+k'))\right)$$

En conclusión, el sistema reserva cupos al minorista para el segundo pedido si se cumplen (3.49) y (3.51).

Para concluir la prueba, se afirma que la desigualdad (3.40) no incide en la asignación de cupos. En efecto, $c-v$ es mayor que $\frac{c-v}{p+r-v}(p+r-(c'+k))$ que es la abscisa del punto de intersección de las rectas $b' = m_{1j}+t_j$ y $b' = m_{2j}$.$\square$

3.3. MECANISMO DE COORDINACIÓN

3.3.1. Región Válida para la Coordinación: b vs b'

Según los corolarios 3 y 5, dados los demás parámetros con valores consistentes, solamente algunas parejas de valores (b, b') motivan al fabricante o al sistema centralizado para reservar los dos cupos. Para que la coordinación de canales tenga sentido en un punto (b, b'), se requiere que allí se cumplan simultáneamente las condiciones expresadas en los corolarios mencionados. Entonces, una consecuencia directa de ellos es el siguiente teorema.

Teorema 6 *La región en el plano $b\,b'$, válida para la coordinación de canales está determinada por la intersección del triángulo ABC, con el triángulo ADE, donde:*
$A : (0, 0)$
$B : (\frac{w-v}{p+r-v}(w' - c'), \frac{w-v}{p+r-v}(w'' - c''))$
$C : (\frac{w-v}{w''+k'-v}[(w' - c') - (w'' - c'')], 0)$
$D : (\frac{c-v}{p+r-v}(p + r - (c' + k)), \frac{c-v}{p+r-v}(p + r - (c'' + k'))$
$E : (\frac{c-v}{c''+k'-v}[(c'' + k') - (c' + k)], 0)$.

Figura 1. Región válida para la coordinación

3.3.2. Ganancia Esperada Incrementada

Si se compara $F(Q_j + M_j + N_j)$ con $F(Q_b + M_s + N_s)$,

$$F(Q_b + M_s + N_s) = 1 - \frac{b'}{w'' - c''}$$

$$F(Q_j + M_j + N_j) = 1 - \frac{b'}{p + r - c'' - k'}$$

se tiene que $F(Q_j + M_j + N_j) > F(Q_b + M_s + N_s)$ porque $p + r - k' > w''$. Como $F(.)$ es creciente entonces se tiene que $Q_j + M_j + N_j > Q_s + M_s + N_s$. Esto significa que el abastecimiento del sistema centralizado es mayor que el del sistema descentralizado, así el sistema centralizado puede dar una mejor ganancia que el sistema descentralizado.

Si existe algún mecanismo de coordinación que lleve a las partes del sistema descentralizado a tomar decisiones similares a las del sistema centralizado, ambas partes pueden obtener mejores resultados. Para diseñar tal mecanismo, se debe examinar primero la relación entre la ganancia esperada del sistema centralizado y la suma de las ganancias bajo un sistema descentralizado.

Teorema 7 *La ganancia esperada incrementada debido a decisiones con el sistema centralizado está dada por:*

$$\begin{aligned}\Delta\Pi(Q_j, M_j, N_j) &= E[\Pi_j(Q_j, M_j, N_j)] - [E[\Pi_b(Q_b, M_s, N_s)] \\ &\quad + E[\Pi_s(M_j, N_s, Q_b)]] > 0\end{aligned}$$

y se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi(Q_j, M_j, N_j) &= (c' + k - v)\left[\int_{Q_b}^{Q_j}(x - Q_b)f(x)dx\right] \\ &\quad +(c'' + k' - c' - k)\left[\int_{Q_b+M_s}^{Q_j+M_j}(x - Q_b - M_s)f(x)dx\right] \\ &\quad +(p + r)\left[\int_{Q_b+M_s+N_s}^{Q_j+M_j+N_j}(x - Q_b - M_s - N_s)f(x)dx\right] \\ &\quad -(c'' + k')\left[\int_{Q_b+M_s+N_s}^{Q_j+M_j+N_j}(x - Q_b - M_s - N_s)f(x)dx\right] > 0 \qquad (3.53)\end{aligned}$$

Prueba:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi(Q_j, M_j, N_j) &= E[\Pi_j(Q_j, M_j, N_j)] - [E[\Pi_b(Q_b, M_s, N_s)] \\ &\quad +E[\Pi_s(M_j, N_s, Q_b)]] > 0\end{aligned}$$

$\Delta\Pi(Q_j, M_j, N_j) > 0$, debido a que la suma de los valores óptimos de los valores esperados de las ganancias de fabricante y minorista, $E\Pi_b(Q_b, M_s, N_s) + E\Pi_s(Q_b, M_s, N_s)$, es un caso particular con valores específicos Q_b, M_s y N_s de la función objetivo que maximiza el sistema centralizado que es $E\Pi_j(Q, M, N)$, entonces se tiene que:

$$E\Pi_b(Q_b, M_s, N_s) + E\Pi_s(Q_b, M_s, N_s) \leq E\Pi_j(Q_j, M_j, N_j)$$

Si se sustituye (3.6), (3.13) y (3.39) en $\Delta(Q_j, M_j, N_j)$, se tiene (3.53) (Ver Apéndice C).

3.3.3. Mecanismo de Coordinación

Ahora se desarrolla un mecanismo de coordinación para que los resultados del desempeño del sistema centralizado puedan ser alcanzados cuando el sistema es descentralizado.

El mecanismo consiste en hacer que el minorista y el productor compartan la ganancia esperada incrementada del sistema centralizado. Se espera que las ganancias tanto del fabricante como del minorista, después de usar este mecanismo, sean mejores que bajo el sistema descentralizado, el mecanismo de coordinación se alcanza solo si ambas partes deciden aceptarlo.

Se asume que el productor actúa como líder y provee algunos incentivos en el precio al minorista, es decir, el productor introduce el precio de descuento al precio de venta al por mayor w para el primer pedido del minorista para ordenar la cantidad optima Q_j. El productor espera obtener $\alpha * 100\,\%$ de la ganancia esperada incrementada, donde α es el factor de ganania ($0 \leq \alpha \leq 1$).

Sea w_j el nuevo precio de descuento y $\Pi_s(M_j, N_j, w_j, Q_j)$ la ganancia esperada del productor bajo las soluciones de (M_j, N_j, Q_j); se tiene:

$$\Pi_s(M_j, N_j, w_j, Q_j) = E[\Pi_s(Q_b, M_s, N_s)] + \alpha * \Delta\Pi(Q_j, M_j, N_j) \quad (3.54)$$

Donde $E[\Pi_s(Q,M,N)]$ y $\Delta\Pi(Q_j,M_j,N_j)$ estan dados por (3.13) y (3.53), respectivamente. Por lo tanto (3.54) puede ser escrita así:

$$\begin{aligned}
w_j \; = \; & \frac{1}{Q_j}[E[\Pi_s(Q_b,M_s,N_s)] + \alpha * \Delta\Pi(Q_j,M_j,N_j) \\
& + cQ_j + bM_j + b'N_j - (w'-c') \int\limits_{Q}^{Q_j+M_j} (x-Q_j)f(x)dx \\
& -(w'-c')M_j \int\limits_{Q_j+M_j}^{Q_j+M_j+N_j} f(x)dx \\
& -(w''-c'') \int\limits_{Q_j+M_j}^{Q_j+M_j+N_j} (x-(Q_j+M_j))f(x)dx \\
& -(w'-c')M_j \int\limits_{Q_j+M_j+N_j}^{\infty} f(x)dx \\
& -(w''-c'')N_j \int\limits_{Q_j+M_j+N_j}^{\infty} f(x)dxf(x)dx] \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

Usando la política del precio de descuento w_j dado en (3.55), el minorista puede compartir $(1-\alpha) * 100\,\%$ de la ganancia esperada incrementada, y ahora su ganancia esperada denotada por $\Pi_b(Q_j,w_j,M_j,N_j)$, está dada por:

$$\Pi_b(Q_j,w_j,M_j,N_j) = E[\Pi_b(Q_b,M_s,N_s)] + (1-\alpha) * \Delta\Pi(Q_j,M_j,N_j) \qquad (3.56)$$

Se puede ver que la cantidad de ganancia extra obtenida a través del mecanismo de coordinación, tanto para el fabricante como para el minorista, depende del factor de ganancia asignado *alpha*. Así, este factor provee promedios convenientes para dividir la ganancia esperada incrementada del sistema entre las dos partes. En el mundo real, este factor puede determinarse por la parte que tenga mayor poder en el sistema. Debe mencionarse que los precios de venta al por mayor w' y w'' para el segundo pedido dentro del primer y segundo cupo pueden también ser usados para coordinar el sistema, la forma de hacerlo es similar que el hecho para w.

3.4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

A continuación se muestran ejemplos numéricos para examinar el modelo. Se hacen tres ejemplos donde se toman puntos por fuera de la región válida para la coordinación de canales, P_1, P_2 y P_3, y se hace un ejemplo donde se toma un punto P_4 dentro de la región. Se analiza cuales de las condiciones planteadas en la sección 5.2 se cumplen y cuales fallan con cada uno de los puntos tomados. El código para evaluar los ejemplos numéricos se hace en R [17], ver Apéndice D.

Se supone que la demanda sigue una distribución normal con media = 200 y desviación estándar = 50. Los parámetros están dados por:

Tabla 3.1: Parámetros

Parámetro	Valor
p	10
w	6
w'	7
w''	7.5
v	0.5
k	1
k'	1.5
r	5
c	2
c'	2.5
c''	4
α	0.6

3.4.1. Ejemplo 1.

Si se toma $b = 0.6$, entonces se tiene el punto P_1 =(0.6 , 0.7). Debido a que P_1 = no satisface dos de las desigualdades para la factibilidad de cupos, entonces no se arrojan resultados numéricos. Éste punto verifica las siguientes desigualdades:

Tabla 3.2: Verificación de desigualdades

	Desigualdad	Verificación
Buen.Planteam.Modelo	1	TRUE
Minorista.1er.Cupo	2	TRUE
Fabricante.1er.Cupo	4	TRUE
Fabricante.2do.Cupo	5	TRUE
Concavidad.Minorista	6	TRUE
Concavidad.Fabricante	7	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Desc.	8	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Desc.	9	FALSE
Factib.Cupos.Sist.Cent.	10	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Cent.	11	FALSE

3.4.2. Ejemplo 2.

Si se toma $b = 1.10$, entonces se tiene el punto P_2 =(1.10 , 0.89), éste punto verifica las siguientes desigualdades:

Tabla 3.3: Verificación de desigualdades

	Desigualdad	Verificación
Buen.Planteam.Modelo	1	TRUE
Minorista.1er.Cupo	2	TRUE
Fabricante.1er.Cupo	4	TRUE
Fabricante.2do.Cupo	5	TRUE
Concavidad.Minorista	6	TRUE
Concavidad.Fabricante	7	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Desc.	8	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Desc.	9	FALSE
Factib.Cupos.Sist.Cent.	10	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Cent.	11	TRUE

Y se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 3.4: Resultados

	Q_b	Q_j	M_s	N_s	M_j	N_j	Gan. Descentr.	Gan. Centr.
Minor.	199,8						614,19	455,95
Fabr.			40,6	$-7{,}3$			818,56	1048,74
Sist.		255,5			7,1	3,2	1432,75	1504,69

Tabla 3.5: Resultados

	Coor. Descu.	Incr. con descu.	Incr.[%]
Minor.	635,15	20,96	3,41
Fabr.	850,00	31,44	3,84
Sist.	1485,14	52,39	3,66

Debido a que el punto P_2 no satisface la segunda desigualdad para la asignación de cupos del sistema descentralizado, entonces en el cálculo numérico se puede notar que P_2 arroja un valor negativo para N_s.

3.4.3. Ejemplo 3.

Si se toma $b = 1.3$, entonces se tiene el punto P_3 =(1.3 , 0.9), éste punto verifica las siguientes desigualdades:

Tabla 3.6: Verificación de desigualdades

	Desigualdad	Verificación
Buen.Planteam.Modelo	1	TRUE
Minorista.1er.Cupo	2	TRUE
Fabricante.1er.Cupo	4	TRUE
Fabricante.2do.Cupo	5	TRUE
Concavidad.Minorista	6	TRUE
Concavidad.Fabricante	7	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Desc.	8	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Desc.	9	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Cent.	10	FALSE
Factib.Cupos.Sist.Cent.	11	TRUE

Y se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 3.7: Resultados

	Q_b	Q_j	M_s	N_s	M_j	N_j	Gan. Descentr.	Gan. Centr.
Minor.	203,2						603,98	357,78
Fabr.			9,4	19,9			824,03	1142,36
Sist.		275,1			-33	23,5	1428,01	1500,15

Tabla 3.8: Resultados

	Coor. Descu.	Incr. con descu.	Incr.[%]
Minor.	629,87	25,88	4,29
Fabr.	862,86	38,83	4,71
Sist.	1492,72	64,71	4,53

Debido a que el punto P_3 no satisface la primera desigualdad para la asignación de cupos del sistema centralizado, entonces en el cálculo numérico se puede notar que P_3 arroja un valor negativo para M_j.

3.4.4. Ejemplo 4.

Si se toma $b = 1$, entonces se tiene el punto $P_4 =(1 , 0.75)$, éste punto verifica todas las desigualdades como lo muestra la siguiente Tabla:

Tabla 3.9: Verificación de desigualdades

	Desigualdad	Verificación
Buen.Planteam.Modelo	1	TRUE
Minorista.1er.Cupo	2	TRUE
Fabricante.1er.Cupo	4	TRUE
Fabricante.2do.Cupo	5	TRUE
Concavidad.Minorista	6	TRUE
Concavidad.Fabricante	7	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Desc.	8	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Desc.	9	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Cent.	10	TRUE
Factib.Cupos.Sist.Cent.	11	TRUE

Con el punto P_4 se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 3.10: Resultados

	Q_b	Q_j	M_s	N_s	M_j	N_j	Gan. Descentr.	Gan. Centr.
Minor.	196,4						631,98	491,46
Fabr.			37,3	5,9			813,21	1001,22
Sist.		248,4			9,1	13,1	1445,19	1492,68

Tabla 3.11: Resultados

	Gan. con Coor. Descu.	Incr. con descu.	Incr.[%]
Minor.	650,62	18,63	2,95
Fabr.	842,06	27,95	3,44
Sist.	1492,68	46,58	3,22

Se puede ver que la ganancia esperada del sistema centralizado (1492,68) es mejor que en el sistema descentralizado (1445,19). Sin embargo, de la Tabla (3.11), se puede observar que si se usa el mecanismo de coordinación, es decir, la política del precio de descuento al por mayor w_j, el sistema descentralizado puede alcanzar desempeño similar al del sistema centralizado.

Capítulo 4

RESERVA DE n CUPOS

El análisis de n cupos de reserva no forma parte del temario oficialmente aprobado y comprometido en este trabajo, sin embargo, se consideró pertinente explorar la generalización de los resultados obtenidos para dos cupos. Aunque se logró un avance significativo en esa dirección, hasta el punto de calcular las políticas óptimas de los sistemas centralizado y descentralizado, se detectó un punto de dificultad mayor en el establecimiento de condiciones para las reservas de cupos. Ello se debe básicamente a que es difícil encontrar pautas recurrentes que sustenten hipótesis inductivas, debido a la naturaleza geométrica del problema planteado (ver sección 3.3.1).

4.1. GANANCIAS DEL MINORISTA

Notación $\bar{w}^{(j)} := w^{(j)} + k^{(j-1)}$; $S_j := \sum_{i=0}^{j} M_i$; $C_j := \sum_{i=0}^{j} \bar{w}^{(i)} M_i$, donde $M_0 := 0$, $\bar{w}^{(0)} := 0$ y $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Por simplicidad se denota $\Pi_b := \Pi_b(Q, M_1, ..., M_n)$.

$$\Pi_b = pX - wQ + \begin{cases} +v(Q - X); & X \leq Q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -C_{j-1} - \bar{w}^{(j)}[X - (Q + S_{j-1})]; & Q + S_{j-1} < X \leq Q + S_j \\ & j \in \{1, \ldots, n\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -(p + r)[X - (Q + S_n)] - C_n; & Q + S_n < X. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\ \Pi_b &= p\mu - wQ + v\int_0^Q (Q-x)f(x)dx \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\left[C_{j-1}\int_{Q+S_{j-1}}^{Q+S_j} f(x)dx + \bar{w}^{(j)}\int_{Q+S_{j-1}}^{Q+S_j}[x-(Q+S_{j-1})]f(x)dx\right] \\
&\quad -(p+r)\int_{Q+S_n}^{\infty}[x-(Q+S_n)]f(x)dx - C_n\int_{Q+S_n}^{\infty} f(x)dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{E}\ \Pi_b}{\partial Q} &= -w + v\int_0^Q f(x)dx - \sum_{j=1}^{n} C_{j-1}[f(Q+S_j) - f(Q+S_{j-1})] \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\bar{w}^{(j)}M_j f(Q+S_j) + \sum_{j=1}^{n}\bar{w}^{(j)}\int_{Q+S_{j-1}}^{Q+S_j} f(x)dx \\
&\quad +(p+r)\int_{Q+S_n}^{\infty} f(x)dx + C_n f(Q+S_n).
\end{aligned}$$

Considerando que $C_0 = 0$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^{n} C_{j-1}[f(Q+S_j) - f(Q+S_{j-1})] \\
&= -\sum_{j=1}^{n} C_{j-1}f(Q+S_j) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k f(Q+S_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n}[C_j - C_{j-1}]f(Q+S_j) - C_n f(Q+S_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\bar{w}^{(j)}M_j f(Q+S_j) - C_n f(Q+S_n).
\end{aligned}$$

y además, como $S_0 = 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \bar{w}^{(j)} \int\limits_{Q+S_{j-1}}^{Q+S_j} f(x)dx &= \sum_{j=1}^{n} \bar{w}^{(j)}[F(Q+S_j) - F(Q+S_{j-1})] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \bar{w}^{(j)} F(Q+S_j) - \sum_{k=0}^{n-1} \bar{w}^{(k+1)} F(Q+S_k) \\
&= -\sum_{j=1}^{n-1} (\bar{w}^{(j+1)} - \bar{w}^{(j)}) F(Q+S_j) \\
&\quad + \bar{w}^{(n)} F(Q+S_n) - \bar{w}^{(1)} F(Q).
\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{E}\ \Pi_b}{\partial Q} &= -w + v \int\limits_{0}^{Q} f(x)dx - \sum_{j=1}^{n-1} (\bar{w}^{(j+1)} - \bar{w}^{(j)}) F(Q+S_j) \\
&\quad + \bar{w}^{(n)} F(Q+S_n) - \bar{w}^{(1)} F(Q) + (p+r) \int\limits_{Q+S_n}^{\infty} f(x)dx \\
&= \bar{w}^{(n)} - w + (v - \bar{w}^{(1)}) F(Q) - \sum_{j=1}^{n-1} (\bar{w}^{(j+1)} - \bar{w}^{(j)}) F(Q+S_j) \\
&\quad + (p + r - \bar{w}^{(n)})(1 - F(Q+S_n)) \\
&= p + r - w + (v - \bar{w}^{(1)}) F(Q) - \sum_{j=1}^{n-1} (\bar{w}^{(j+1)} - \bar{w}^{(j)}) F(Q+S_j) \\
&\quad - (p + r - \bar{w}^{(n)}) F(Q+S_n).
\end{aligned}$$

La segunda derivada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbb{E}\ \Pi_b}{\partial Q^2} &= -(\bar{w}^{(1)} - v) f(Q) - \sum_{j=1}^{n-1} (\bar{w}^{(j+1)} - \bar{w}^{(j)}) f(Q+S_j) \\
&\quad - (p + r - \bar{w}^{(n)}) f(Q+S_n) < 0.
\end{aligned}$$

Entonces $\mathbb{E}\ \Pi_b$ es cóncava en Q. El valor de Q que anula la primera derivada es el valor del pedido óptimo Q^b. Despejando $F(Q^b)$ se obtiene

$$\begin{aligned} F(Q^b) &= \frac{p+r-w}{\bar{w}^{(1)}-v} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\bar{w}^{(j+1)}-\bar{w}^{(j)})}{\bar{w}^{(1)}-v} F(Q+S_j) \\ &\quad - \frac{(p+r-\bar{w}^{(n)})}{\bar{w}^{(1)}-v} F(Q+S_n). \end{aligned}$$

4.2. GANANCIAS DEL FABRICANTE

Notación $\hat{w}^{(j)} := w^{(j)} - c^{(j)}$; $S_j := \sum_{i=0}^{j} M_i$; $G_j := \sum_{i=0}^{j} \hat{w}^{(i)} M_i$; $A_j := \sum_{i=0}^{j}; b^{i-1} M_i$, donde $M_0 := 0$, $\hat{w}^{(0)} := w - c$ y $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Por simplicidad se denota $\Pi_s := \Pi_s(Q, M_1, ..., M_n)$.

$$\begin{aligned} \Pi_s &= (w-c)Q - A_n + \\ &\quad \begin{cases} 0; & X \leq Q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ G_{j-1} + \hat{w}^{(j)}[X - (Q+S_{j-1})]; & Q + S_{j-1} < X \leq Q + S_j \\ & j \in \{1, \ldots, n\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ G_n; & Q + S_n < X \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\ \Pi_s &= (w-c)Q - A_n + G_n \int_{Q+S_n}^{\infty} f(x)dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \left[G_{j-1} \int_{Q+S_{j-1}}^{Q+S_j} f(x)dx + \hat{w}^{(j)} \int_{Q+S_{j-1}}^{Q+S_j} [x - (Q+S_{j-1})] f(x)dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{E}\ \Pi_s}{\partial M_i} &= -b^{(i-1)} + \hat{w}^{(i)} \int\limits_{Q+S_n}^{\infty} f(x)dx - G_n f(Q+S_n) \\
&+ \sum_{j=i+1}^{n} \hat{w}^{(i)} \int\limits_{Q+S_{j-1}}^{Q+S_j} f(x)dx + \sum_{j=i}^{n} G_{j-1} f(Q+S_j) \\
&- \sum_{j=i+1}^{n} G_{j-1} f(Q+S_{j-1}) + \sum_{j=i}^{n} \hat{w}^{(j)} [S_j - S_{j-1}] f(Q+S_j) \\
&- \sum_{j=i+1}^{n} \hat{w}^{(j)} \int\limits_{Q+S_{j-1}}^{Q+S_j} f(x)dx
\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=i}^{n} G_{j-1} f(Q+S_j) - \sum_{j=i+1}^{n} G_{j-1} f(Q+S_{j-1}) + \sum_{j=i}^{n} \hat{w}^{(j)} [S_j - S_{j-1}] f(Q+S_j) \\
= & \sum_{j=i}^{n} G_{j-1} f(Q+S_j) - \sum_{k=i}^{n-1} G_k f(Q+S_k) + \sum_{j=i}^{n} \hat{w}^{(j)} M_j f(Q+S_j) \\
= & \ G_n f(Q+S_n) - \sum_{j=i}^{n} (G_j - G_{j-1}) f(Q+S_j) + \sum_{j=i}^{n} \hat{w}^{(j)} M_j f(Q+S_j) \\
= & \ G_n f(Q+S_n)
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=i+1}^{n} \hat{w}^{(i)} \int\limits_{Q+S_{j-1}}^{Q+S_j} f(x)dx - \sum_{j=i+1}^{n} \hat{w}^{(j)} \int\limits_{Q+S_{j-1}}^{Q+S_j} f(x)dx \\
= & \sum_{j=i+1}^{n} [\hat{w}^{(i)} - \hat{w}^{(j)}][F(Q+S_j) - F(Q+S_{j-1})] \\
= & \sum_{j=i+1}^{n} [\hat{w}^{(i)} - \hat{w}^{(j)}] F(Q+S_j) - \sum_{k=i}^{n-1} [\hat{w}^{(i)} - \hat{w}^{(k+1)}] F(Q+S_k) \\
= & \sum_{j=i}^{n-1} [\hat{w}^{(j+1)} - \hat{w}^{(j)}] F(Q+S_j) + [\hat{w}^{(i)} - \hat{w}^{(n)}] F(Q+S_n)
\end{aligned}$$

Entonces, para $1 \leq i \leq n$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{E}\ \Pi_s}{\partial M_i} &= -b^{(i-1)} + \hat{w}^{(i)}(1 - F(Q+S_n)) + \sum_{j=i}^{n-1}[\hat{w}^{(j+1)} - \hat{w}^{(j)}]F(Q+S_j) \\
&\quad +[\hat{w}^{(i)} - \hat{w}^{(n)}]F(Q+S_n) \\
&= -b^{(i-1)} + \hat{w}^{(i)} + \sum_{j=i}^{n-1}[\hat{w}^{(j+1)} - \hat{w}^{(j)}]F(Q+S_j) - \hat{w}^{(n)}F(Q+S_n)
\end{aligned}
$$

La segunda derivada

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbb{E}\ \Pi_s}{\partial M_i^2} &= \sum_{j=i}^{n-1}[\hat{w}^{(j+1)} - \hat{w}^{(j)}]f(Q+S_j) - \hat{w}^{(n)}f(Q+S_n); \qquad 1 \leq i \leq n \\
&= -\sum_{j=i}^{n}\hat{w}^{(j)}[f(Q+S_j) - f(Q+S_{j-1})] - \hat{w}^{(i)}f(Q+S_{i-1}) < 0
\end{aligned}
$$

Entonces $\mathbb{E}\ \Pi_s$ es cóncava en M_i, $1 \leq i \leq n$. El valor de M_i que anula la primera derivada es el valor del cupo óptimo M_i^s. Sea S_i^s el valor correspondiente de S_i. Igualando a cero la primera derivada y despejando $F(Q+S_i^s)$

$$
\begin{aligned}
F(Q+S_i^s) &= 1 - \frac{\hat{w}^{(i+1)} - b^{(i-1)}}{\hat{w}^{(i+1)} - \hat{w}^{(i)}} - \sum_{j=i+1}^{n-1}\frac{\hat{w}^{(j+1)} - \hat{w}^{(j)}}{\hat{w}^{(i+1)} - \hat{w}^{(i)}}F(Q+S_j^s) \\
&\quad - \frac{-\hat{w}^{(n)}}{\hat{w}^{(i+1)} - \hat{w}^{(i)}}F(Q+S_n^s); \qquad 1 \leq i < n
\end{aligned}
$$

$$
F(Q+S_n^s) = 1 - \frac{b^{(n-1)}}{\hat{w}^{(n)}}; \qquad i = n
$$

4.3. GANANCIAS DEL SISTEMA

Notación $\bar{c}^{(j)} := c^{(j)} + k^{(j-1)} = \bar{w} - \hat{w}$; $H_j := \sum_{i=0}^{j} \bar{c}^{(i)} M_i$, donde $\bar{c}^{(0)} := 0$ y $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Por simplicidad se denota $\Pi_r := \Pi_r(Q, M_1, ..., M_n)$.

$$\Pi_r = pX - cQ - A_n + \begin{cases} +v(Q-X); & X \leq Q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -H_{j-1} - \bar{c}^{(j)}[X - (Q + S_{j-1})]; & \\ & Q + S_{j-1} < X \leq Q + S_j \\ & j \in \{1, \ldots, n\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -(p+r)[X - (Q + S_n)] - H_n; & Q + S_n < X \end{cases}$$

Cálculo de $\frac{\partial}{\partial Q}\mathbb{E}\ \Pi_r$. Diferencias entre Π_r y Π_b: En $0 \leq X < \infty$, c vs. w y adición de $-A_n$ que no influye; en $0 \leq X < Q$, no hay diferencia; en $Q + S_{j-1} \leq X < Q + S_j)$, H_{j-1} vs. C_{j-1} y $\bar{c}_j$ vs. $\bar{w}_j$ que influyen y en $Q + S_n \leq X < \infty$, H_n vs. G_n. Los términos C_n y H_n del tramo $Q + S_n < X < \infty$ no tienen ninguna incidencia en la derivada y el cambio C_{j-1} por H_{j-1}, en esencia equivale a sustituir $\bar{w}_j$ por $\bar{c}_j$. Las diferencias anteriores se reducen entonces a la sustitución formal de $\bar{w}_j$ por $\bar{c}_j$. En consecuencia, el cálculo de $\frac{\partial}{\partial Q}\mathbb{E}\ \Pi_r$, puede hacerse haciendo esos cambios en $\frac{\partial}{\partial Q}\mathbb{E}\ \Pi_b$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}\ \Pi_r}{\partial Q} &= \bar{c}^{(1)} - c + (v - \bar{c}^{(1)})F(Q) + \sum_{j=1}^{n-1}(\bar{c}^{(j+1)} - \bar{c}^{(j)})(1 - F(Q + S_j)) \\ &\quad +(p + r - \bar{c}^{(n)})(1 - F(Q + S_n)). \end{aligned}$$

La segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbb{E}\ \Pi_r}{\partial Q^2} &= -(\bar{c}^{(1)} - v)f(Q) - \sum_{j=1}^{n-1}(\bar{c}^{(j+1)} - \bar{c}^{(j)})f(Q + S_j) \\ &\quad -(p + r - \bar{c}^{(n)})f(Q + S_n) < 0. \end{aligned}$$

Entonces $\mathbb{E}\ \Pi_r$ es cóncava en Q. El valor de Q que anula la primera derivada es el valor del pedido óptimo Q^r. Despejando $F(Q_r)$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
F(Q^r) &= 1+\frac{v-c}{\bar{c}^{(1)}-v}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\bar{c}^{(j+1)}-\bar{c}^{(j)}}{\bar{c}^{(1)}-v}(1-F(Q^r+S_j)) \\
&\quad +\frac{p+r-\bar{c}^{(n)}}{\bar{c}^{(1)}-v}(1-F(Q^r+S_n)).
\end{aligned}
$$

Cálculo de $\frac{\partial}{\partial M_i}\mathbb{E}\ \Pi_r$. Diferencias entre Π_r y Π_s: En $0 \leq X < \infty$, PX vs. wQ que no influye; en $0 \leq X < Q$, $v(Q-X)$ adicional que no influye; en $Q+S_{j-1} \leq X < Q+S_j)$, $-H_{j-1}$ vs. G_{j-1} y $-\bar{c}_j$ vs. $\hat{w}_j$ que influyen y en $Q+S_n \leq X < \infty$, $-H_n$ vs. G_n y $-(p+r)[X-(Q+S_n)]$ adicional que influyen. Los términos G_n y $-H_n$ del tramo $Q+S_n < X < \infty$ no tienen ninguna incidencia en la derivada y el cambio G_{j-1} por $-H_{j-1}$, en esencia equivale a sustituir $\hat{w}_j$ por $-\bar{c}_j$. Las diferencias anteriores se reducen entonces a la sustitución formal de $\hat{w}_j$ por $-\bar{c}_j$ y a la adición del termino $-(p+r)[X-(Q+S_n)]$ en el intervalo superior. En consecuencia, el cálculo de $\frac{\partial}{\partial M_i}\mathbb{E}\ \Pi_r$, puede hacerse, haciendo esos mismos cambios en $\frac{\partial}{\partial M_i}\mathbb{E}\ \Pi_s$. Como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial M_i} & \mathbb{E}\ \ \{-(p+r)[X-(Q+S_n)] : Q+S_n \leq X < \infty\} \\
&= -(p+r)\frac{\partial}{\partial M_i}\int\limits_{Q+S_n}^{\infty}[x-(Q+S_n)]f(x)dx \\
&= (p+r)\int\limits_{Q+S_n}^{\infty} f(x)dx = (p+r)(1-F(Q+S_n))
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{E}\ \Pi_r}{\partial M_i} &= p+r-\bar{c}^{(i)}-b^{(i-1)}-\sum_{j=i}^{n-1}[\bar{c}^{(j+1)}-\bar{c}^{(j)}]F(Q+S_j) \\
&\quad -(p+r-\bar{c}^{(n)})F(Q+S_n)
\end{aligned}
$$

y la segunda derivada

$$
\frac{\partial^2 \mathbb{E}\ \Pi_r}{\partial M_i^2} = -\sum_{j=i}^{n-1}[\bar{c}^{(j+1)}-\bar{c}^{(j)}]f(Q+S_j)-(p+r-\bar{c}^{(n)})f(Q+S_n) < 0
$$

Entonces $\mathbb{E}\ \Pi_r$ es cóncava en M_i, $1 \leq i \leq n$. El valor de M_i que anula la primera derivada es el valor del cupo óptimo M_i^r. Sea S_i^r el valor correspondiente de S_i. Igualando a cero la primera derivada y despejando $F(Q+S_i^r)$

$$\begin{aligned} F(Q+S_i^r) &= \frac{p+r-\bar{c}^{(i)}-b^{(i-1)}}{\bar{c}^{(i+1)}-\bar{c}^{(i)}} - \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\bar{c}^{(j+1)}-\bar{c}^{(j)}}{\bar{c}^{(i+1)}-\bar{c}^{(i)}} F(Q+S_j^r) \\ & -\frac{p+r-\bar{c}^{(n)}}{\bar{c}^{(i+1)}-\bar{c}^{(i)}} F(Q+S_n^r); \qquad 1 \leq i < n \end{aligned}$$

$$F(Q+S_n^r) = \frac{p+r-\bar{c}^{(n)}-b^{(n-1)}}{p+r-\bar{c}^{(n)}}; \qquad i = n$$

Capítulo 5

CONCLUSIONES

5.1. CONCLUSIONES GENERALES

El modelo establecido con dos cupos de reserva, comparado con el modelo de un cupo, incrementa la oferta total del producto y mejora las ganancias esperadas. En efecto, comparando las Tablas (2.1) y (3.10), se puede constatar que: la oferta total del producto para el modelo tanto en el sistema descentralizado como en el centralizado se aumenta en dos unidades, y que la ganancia esperada mejora, también en ambos sistemas, en aproximadamente veinte unidades monetarias. Si bien ambos incrementos son relativamente pequeños en el ejemplo utilizado, según el valor de los parámetros ellos podrían ser mayores o incluso menores.

El establecimiento de dos cupos de reserva genera posibilidades de que el sistema centralizado incremente la oferta total del producto y mejore las ganancias esperadas con respecto al sistema descentralizado. Lo anterior hace posible una efectiva coordinación del canal. Con el punto P_4 se obtienen los resultados que muestran las Tablas 3.10 y 3.11, donde se puede ver que la ganancia esperada del sistema centralizado (1492,68) es mejor que en el sistema descentralizado (1445,19).

Los costos de almacenamiento b y b' y sus valores relativos le confieren significado al modelo, como lo muestran los siguientes hechos:

- En el caso en que $b = b'$ y $b' > 0$, las ecuaciones (3.14) y (3.44) muestran que no hay factibilidad de segundo cupo, o sea que necesariamente

$b > b'$ para que el modelo tenga sentido.

- En ambos sistemas, si se plantea el modelo sin costo de capacidad de reserva ($b = b' = 0$), entonces $F(Q + M + N) = F(Q + M) = 1$ y, la reserva óptima sería una cantidad ilimitada para el cupo con mayor ganacia marginal y cero para el otro cupo. De manera similar $b' = 0$ justificaría una reserva ilimitada para el segundo cupo.

La magnitud del margen $c - v$, entre el costo inicial de producción y el valor de salvamento, resulta ser definitiva para la existencia de posibilidades de que el sistema centralizado ofrezca los dos cupos de reserva.

Si bien se logró un avance significativo en el análisis de n cupos, se detectó un punto de dificultad mayor en el establecimiento de condiciones para las reservas de cupos. Ello se debe básicamente a que es difícil encontrar pautas recurrentes que sustenten hipótesis inductivas, debido a la complejidad del problema geométrico que se plantea.

Aunque las condiciones de carácter general impuestas sobre la demanda X permiten soluciones que no son excesivamente complejas, vale la pena considerar variables aleatorias con función de distribución que simplifiquen el problema.

Es posible ampliar el modelo haciendo variaciones de la función objetivo, utilizando para ello otras medidas de riesgos.

5.2. CONSISTENCIA DE PARAMETROS

Los parámetros del problema deben cumplir ciertas relaciones entre ellos para que el modelo tenga sentido. Las desigualdades que tienen la notación "Superflua", se pueden deducir de las demás desigualdades, o no influyen para efectos de las decisiones sobre reservas de los dos cupos en ambos sistemas.

Buen planteamiento

En primer lugar deben cumplirse unas condiciones que son prácticamente de sentido común que denominamos de buen planteamiento del modelo:

$$p > w'' > w' > w > c'' > c' > c > v \geq 0 \quad (1)$$

Costos marginales positivos

Otras condiciones surgen de la necesidad de garantizar costos marginales positivos que abran la posibilidad de que los diferentes agentes deseen utilizar los cupos adicionales:

Minorista primer cupo: $p + r - w' - k > 0$ (2)

Minorista segundo cupo: $p + r - w'' - k' > 0$ (3)

Fabricante primer cupo: $w' - c' - b > 0$ (4)

Fabricante segundo cupo: $w'' - c'' - b' > 0$ (5)

Sistema primer cupo: $p + r - c' - k - b > 0$ – Superflua

Sistema primer cupo: $p + r - c'' - k' - b' > 0$ – Superflua

Concavidad

Una tercera clase de relaciones entre parámetros están vinculadas con la tratabilidad del problema, que requiere la concavidad de las funciones de valor esperado de ganancias, respecto de las correspondientes componentes de la política:

Minorista: $w''+k' > w'+k$ (6)

Fabricante: $w'-c' > w''-c''$ (7)

Sistema: $c'' + k' > c' + k$ – Superflua

Existencia de solución

Un cuarto tipo de relaciones se hacen necesarias para garantizar la existencia de solución para los modelos descentralizado y centralizado, vale decir, para que $Q_b, M_s, N_s, Q_j, M_j, N_j$ sean positivas:

Fabricante:

$0 < F(Q + M_s) < 1 :$ $b > b'$ – Superflua

$w' - c' - b > w'' - c'' - b'$ – Superflua

Sistema Centralizado:

$0 < F(Q_j) < 1 :$ $c - b > v$ – Superflua

$c' + k < c - b$ – Superflua

$0 < F(Q_j + M_j) < 1 :$ $c' + k + b < c'' + k' + b'$ – Superflua

Factibilidad de cupos

Finalmente se requieren las condiciones para la factibilidad de cupos en los dos modelos:

Sistema Descentralizado:

$$\begin{aligned} b' \quad > \quad & \frac{((w'' + k') - v)(w'' - c'')}{(p + r - v)(w'' - c'') - (p + r - (w'' + k'))(w' - c')}\, b \\ & - \frac{(w - v)((w' - c') - (w'' - c''))(w'' - c'')}{(p + r - v)(w'' - c'') - (p + r - (w'' + k'))(w' - c')} \end{aligned} \tag{8}$$

$$b' < \frac{w'' - c''}{w' - c'}\, b \tag{9}$$

$(p + r - v)(w'' - c'') > (p + r - (w'' + k'))(w' - c')$ – Superflua

$b < \dfrac{w - v}{p + r - v}(w' - c')$ – Superflua

Sistema Centralizado:

$$b' > \frac{(c'' + k') - v}{c' + k - v}b - \frac{(c - v)[(c'' + k') - (c' + k)]}{c' + k - v} \tag{10}$$

$$b' < \frac{p + r - (c'' + k')}{p + r - (c' + k)}\, b \tag{11}$$

Apéndice A

Intercepto de $b' = m_{1s}b + t_s$ y $b' = m_{2s}b$

El intercepto de las dos rectas está dado por $m_{1s}b + t_s = m_{2s}b$, así:

$$\begin{aligned}
\frac{w'' - c''}{w' - c'}\, b &= \frac{((w'' + k') - v)(w'' - c'')}{(p + r - v)(w'' - c'') - (p + r - (w'' + k'))(w' - c')}\, b \\
&\quad - \frac{(w - v)[(w' - c') - (w'' - c'')](w'' - c'')}{(p + r - v)(w'' - c'') - (p + r - (w'' + k'))(w' - c')},
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&\frac{(w - v)[(w' - c') - (w'' - c'')](w'' - c'')}{(p + r - v)(w'' - c'') - (p + r - (w'' + k'))(w' - c')} \\
&= \left[\frac{((w'' + k') - v)(w'' - c'')}{(p + r - v)(w'' - c'') - (p + r - (w'' + k'))(w' - c')} - \frac{w'' - c''}{w' - c'}\right] b \\
&= \frac{((w'' + k') - v)(w'' - c'')(w' - c')}{(w' - c')[(p + r - v)(w'' - c'') - (p + r - (w'' + k'))(w' - c')]}\, b \\
&- \frac{(w'' - c'')[(p + r - v)(w'' - c'') - (p + r - (w'' + k'))(w' - c')]}{(w' - c')[(p + r - v)(w'' - c'') - (p + r - (w'' + k'))(w' - c')]}\, b,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&(w-v)[(w'-c')-(w''-c'')](w''-c'') \\
&\qquad = \frac{(w''+k'-v)(w''-c'')(w'-c')}{w'-c'}\ b \\
&\qquad - \frac{(w''-c'')[(p+r-v)(w''-c'')-(p+r-(w''+k'))(w'-c')]}{w'-c'}\ b \\
&\qquad = \frac{(w''-c'')(p+r-v)[(w'-c')-(w''-c'')]}{w'-c'}\ b
\end{aligned}$$

y así se obtiene

$$(w-v)(w''-c'') = \frac{(w''-c'')(p+r-v)}{w'-c'}\ b,$$

o sea que

$$b \ = \ \frac{w-v}{p+r-v}(w'-c'). \tag{A.1}$$

Ahora, si se reemplaza (A.1) en $b' = m_{2s}b$, se tiene:

$$b' = \frac{w''-c''}{w'-c'}\left[\frac{w-v}{p+r-v}(w'-c')\right] = \frac{w-v}{p+r-v}(w''-c''),$$

por lo tanto el intercepto de las rectas está dado por el punto de coordenadas

$$\left(\frac{w-v}{p+r-v}(w'-c'), \frac{w-v}{p+r-v}(w''-c'')\right).$$

Apéndice B

Cota para b del fabricante

La expresión (3.32) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} b \; &< \; \frac{[p+r-v](w''-c'')-[p+r-(w''+k')](w'-c')}{(w''+k'-v)(w''-c'')}\, b' \\ &+\frac{w-v}{w''+k'-v}[(w'-c')-(w''-c'')] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que se cumple (3.35), entonces,

$$\begin{aligned} b \; &< \; \frac{[p+r-v](w''-c'')-[p+r-(w''+k')](w'-c')}{(w''+k'-v)(w'-c')}\, b \\ &+\frac{w-v}{w''+k'-v}[(w'-c')-(w''-c'')], \end{aligned}$$

o sea que

$$\begin{aligned} \frac{w-v}{w''+k'-v}[(w'-c')-(w''-c'')] > \; b \; &\left[\frac{[p+r-v](w''-c'')}{(w''+k'-v)(w'-c')}\right. \\ &\left.-\frac{[p+r-(w''+k')](w'-c')}{(w''+k'-v)(w'-c')}-1\right] \end{aligned}$$

y

$$\frac{[p+r-v][(w'-c')-(w''-c'')]}{(w''+k'-v)(w'-c')}\, b < \frac{w-v}{w''+k'-v}[(w'-c')-(w''-c'')]$$

permite obtener

$$\frac{p+r-v}{w'-c'}\, b < (w-v),$$

de donde se obtiene la cota deseada

$$b < \frac{w - v}{p + r - v}(w' - c').$$

Apéndice C

Ganancia Esperada Incrementada

Sustituyendo (3.6), (3.13) y (3.39) en $\Delta(Q_j, M_j, N_j)$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\Delta\Pi(Q_j, M_j, N_j) \quad = \quad & -cQ_j - bM_j - b'N_j + cQ_b + bM_s + b'N_s \\
& +v\int_0^{Q_j}(Q_j - x)f(x)dx - (c'+k)\int_{Q_j}^{Q_j+M_j}(x - Q_j)f(x)dx \\
& -(c'+k)M_j\int_{Q_j+M_j}^{Q_j+M_j+N_j} f(x)dx \\
& -(c''+k')\int_{Q_j+M_j}^{Q_j+M_j+N_j}(x-(Q_j+M_j))f(x)dx \\
& -[(c'-k)M_j + (c''-k')N_j]\int_{Q_j+M_j+N_j}^{\infty} f(x)dx \\
& -(p+r)\int_{Q_j+M_j+N_j}^{\infty}(x-(Q_j+M_j+N_j))f(x)dx
\end{aligned}
$$

$$-v\int_0^{Q_b}(Q_b-x)f(x)dx+(c'+k)\int_{Q_b}^{Q_b+M_s}(x-Q_b)f(x)dx$$
$$+(c'+k)M_s\int_{Q_b+M_s}^{Q_b+M_s+N_s}f(x)dx$$
$$+(c''+k')\int_{Q_b+M_s}^{Q_b+M_s+N_s}(x-(Q_b+M_s))f(x)dx$$
$$+[(c'-k)M_s+(c''-k')N_s]\int_{Q_b+M_s+N_s}^{\infty}f(x)dx$$
$$+(p+r)\int_{Q_b+M_s+N_s}^{\infty}(x-(Q_b+M_s+N_s))f(x)dx$$

$$\begin{aligned}
\Delta\Pi(Q_j,M_j,N_j) &= -c(Q_j-Q_b)-b(M_j-M_s)-b'(N_j-N_s)\\
&+v\left[\int_0^{Q_j}(Q_j-x)f(x)dx-\int_0^{Q_b}(Q_b-x)f(x)dx\right]\\
&-(c'+k)\left[\int_{Q_j}^{Q_j+M_j}(x-Q_j)f(x)dx-\int_{Q_b}^{Q_b+M_s}(x-Q_b)f(x)dx\right]\\
&-(c'+k)\left[M_j\int_{Q_j+M_j}^{Q_j+M_j+N_j}f(x)dx-M_s\int_{Q_b+M_s}^{Q_b+M_s+N_s}f(x)dx\right]\\
&-(c''+k')\left[\int_{Q_j+M_j}^{Q_j+M_j+N_j}(x-(Q_j+M_j))f(x)dx\right]
\end{aligned}$$

$$-(c'' + k')\left[-\int_{Q_b+M_s}^{Q_b+M_s+N_s} (x - (Q_b + M_s))f(x)dx\right]$$

$$-(c' + k)\left[M_j \int_{Q_j+M_j+N_j}^{\infty} f(x)dx - M_s \int_{Q_b+M_s+N_s}^{\infty} f(x)dx\right]$$

$$-(c'' + k')\left[N_j \int_{Q_j+M_j+N_j}^{\infty} f(x)dx - N_s \int_{Q_b+M_s+N_s}^{\infty} f(x)dx\right]$$

$$-(p + r)\left[\int_{Q_j+M_j+N_j}^{\infty} (x - (Q_j + M_j + N_j))f(x)dx\right]$$

$$-(p + r)\left[-\int_{Q_b+M_s+N_s}^{\infty} (x - (Q_b + M_s + N_s))f(x)dx\right]$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\Pi(Q_j, M_j, N_j) \;=\; & -c(Q_j - Q_b) - b(M_j - M_s) - b'(N_j - N_s) \\
& +v\left[(Q_j - Q_b)\int_0^{Q_j} f(x)dx\right] \\
& +(c' + k)\left[(Q_j - Q_b)\int_{Q_j}^{Q_j+M_j} f(x)dx\right] \\
& -(c' + k)\left[(M_j - M_s)\int_{Q_j+M_j}^{\infty} f(x)dx\right] \\
& +(c'' + k')\left[[(Q_j - Q_b) + (M_j - M_s)]\int_{Q_j+M_j}^{Q_j+M_j+N_j} f(x)dx\right] \\
& -(c'' + k')\left[(N_j - N_s)\int_{Q_j+M_j+N_j}^{\infty} f(x)dx\right] \\
& +(p + r)\left[[(Q_j - Q_b) + (M_j - M_s)]\int_{Q_j+M_j+N_j}^{\infty} f(x)dx\right] \\
& +(p + r)\left[(N_j - N_s)\int_{Q_j+M_j+N_j}^{\infty} f(x)dx\right] \\
& +(c' + k - v)\left[\int_{Q_b}^{Q_j}(x - Q_b)f(x)dx\right] \\
& +[(c'' + k') - (c' + k)]\left[\int_{Q_b+M_s}^{Q_j+M_j}(x - Q_b - M_s)f(x)dx\right] \\
& +[p + r - (c'' + k')]\left[\int_{Q_b+M_s+N_s}^{Q_j+M_j+N_j}(x - (Q_b + M_s + N_s))f(x)dx\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Delta\Pi(Q_j, M_j, N_j) \quad = \quad & (c' + k - v) \left[\int\limits_{Q_b}^{Q_j} (x - Q_b) f(x) dx \right] \\
& + (c'' + k' - c' - k) \left[\int\limits_{Q_b + M_s}^{Q_j + M_j} (x - Q_b - M_s) f(x) dx \right] \\
& + (p + r) \left[\int\limits_{Q_b + M_s + N_s}^{Q_j + M_j + N_j} (x - Q_b - M_s - N_s) f(x) dx \right] \\
& - (c'' + k') \left[\int\limits_{Q_b + M_s + N_s}^{Q_j + M_j + N_j} (x - Q_b - M_s - N_s) f(x) dx \right] > 0
\end{aligned}$$

Apéndice D

Código en R para el ejemplo numérico

Bibliografía

[1] Arshinder, Kanda, A. y Deshmukh, S.G.: *Supply chain coordination: Perspectives, empirical studies and research directions*. Int. J. Production Economics, 115, p. 316-335. 2008.

[2] Ballou, Ronald H.: *Logística: Administración de la Cadena de Suministro*. 5ł Edición. Prentice Hall, Pearson Educación, México, 2004.

[3] Baruch Keren: *The single-period inventory problem: Extension to random yield from the perspective of the supply chain*. Omega, p. 1-10. 2008.

[4] Chung, Ch. y Flynn, J.: *A newsboy problem with reactive production*. Computers and Operations Research, 28, p. 751-765. 2001.

[5] Churchman, Ackoff y Arnoff: *Introducciòn a la Investigación de Operaciones*. John Wiley and Sons: New York. 1957.

[6] Gallego, G. y Moon, I.: *The distribution free newsboy problem: Review and extensions*. Journal of the Operational Research Society, 44, p. 825-834. 1993.

[7] Gómez Escobar, I.: *La aplicación de la cadena de abastecimiento*. Tomado de: http://www.conceptoslogicos.com/CadenaAbastecimiento.html.

[8] Hadley, G. y Whitin, T. M.: *Analysis of Inventory Sistem*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall. 1963.

[9] Hariga, M. A.: *Single period inventory models with two levels of storage*. Studies in Advanced Mathematics, 43. Production Planing and Control, 9, N 6, 553-560. 1998

[10] Hillier, F. S. y Lieberman G. J.: *Introduccion a la investigacion de operaciones*. McGraw-Hill. 1991.

[11] Hoffman, R. A.: *Inventories.*Ronald. 1962.

[12] Jianli Li y Liwen Liu.: *Supply chain coordination with manufacturer's limited reserve capacity: An extended newsboy problem.* Int. J. Production Economics, 112 , p. 860-868. 2008.

[13] Konstantin, K. y Sheldon, L.: *Multi-stage newsboy problem: A dynamic model.* European Journal of Operational Research, 149, p. 448-458. 2003.

[14] Lastra Álvarez, G.: *Programa de formación en gestión logística.* Escuela de Organización Industrial. Madrid-España. 1999.

[15] Morales Higuera, R.: *Administración de Operaciones. Modelos de Inventario.* Tomado de la página: http://rmorales.mayo.uson.mx. 2006.

[16] Naddor, E., A.: *Inventory System.* John Wiley Publishers. 1996

[17] R Development Core Team: *R: A language and environment for statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Australia. ISBN 3-900051-07-0, URL: http://www.R-project.org. 2009

[18] Silver, Edward A., David F., Pyke y Rein Peterson: *Inventory Management and Production Planning and Scheduling.* 3ł Edición. John Wiley and Sons, New York, 1998.

[19] Taha, Hamdy A.: *Investigación de Operaciones: Una Introducción.* 6ł Edición. Prentice Hall, México, 1998.

[20] Thomas, D. J. y Griffin, P. M.: *Coordinated supply chain management.* European Journal of Operational Research, 94, p. 1-15. 1996.

[21] Vidal, C. J.: *Fundamentos de Gestión de Inventarios.* Universidad del Valle, Facultad de Ingeniería. 2005.

[22] Weng, K. Z.: *Coordinating order quantities between the manufacturer and the buyer: A generalized newsvendor model.* European Journal of Operational Research, 156, p. 148-161. 2004.

[23] Zhang Long, Song Shiji y Wu Cheng: *Supply Chain Coordination of Loss-Averse Newsvendor with Contract.* Tsinghua Science And Technology, 10, p. 13 3-140. 2005.

[24] Zimmer, K.: *Supply chain coordination with uncertain just-in-time delivery*. European Journal of Operational Research, 77, p. 1-15. 2002.