

Universidad EAFIT
Departamento de Ciencias Básicas

MODELO DE INVENTARIO AHM UTILIZANDO CVaR

Tesis presentada por David Alberto García Arango para optar al título de Magíster en
Matemáticas Aplicadas

Director:
Dr. Gerardo Arango Ospina
2012

Agradezco inicialmente al ser de infinita caridad, al ser supremo que me ha brindado la posibilidad de conocer las distintas personas para llevar a cabo esta labor.

Al Dr. Gerardo Arango por su ayuda incondicional y por todos los valores y conocimientos que durante este tiempo de aprendizaje compartió conmigo; sin él hubiese sido sumamente complejo superar las dificultades propias de un trabajo como este, me siento orgulloso de haber sido su discípulo, y al Dr. César Escalante por sus valiosos aportes en las observaciones de corrección de éste trabajo.

A mis padres y familiares, quienes me han apoyado siempre desde mi concepción y también a Andrea mi compañera de lucha ante las situaciones más adversas.

Sería muy numerosa la lista de personas a quien debo agradecer; y como sé que quedan muchos más por mencionar no dudo en agradecer de antemano a todo aquel que de una u otra forma fue partícipe de la realización de este gran proyecto en mi vida.

En memoria póstuma al maestro que me guió durante todo este trabajo, inspirador de vidas y mentes; Maestro como muy pocos, hombre de bien que me alentaba a seguir adelante con ésta y muchas otras empresas a pesar de las múltiples dificultades que se nos me presentaron. Es principalmente dedicado a él éste trabajo. Que Dios en su infinita bondad y benevolencia lo acoja. Doctor Gerardo Arango es usted un maestro de maestros, realmente usted es de las personas que con seguridad marcan la diferencia y dejan una huella perdurable a través de los tiempos.

Índice general

1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	7
1.1. Control de Inventarios	7
1.2. Optimización Bajo Incertidumbre	9
1.3. Medidas de Riesgo	11
1.4. Órdenes Estocásticos	13
1.5. Origen y Estado Actual del Modelo Clásico AHM	14
1.5.1. Origen	14
1.5.2. Estado Actual	15
2. PLANTEAMIENTO DEL PROYECTO	21
2.1. Justificación	21
2.2. Objetivos	23
2.2.1. Objetivo General	23
2.2.2. Objetivos específicos	23
2.3. Enfoque Metodológico	23
3. MODELO AHM CON RESERVA DE PEDIDOS	25
3.1. Descripción del Modelo Propuesto	25
3.2. Política Óptima	28
3.3. Comparaciones Estocásticas	32
4. MODELO SIN RESERVA DE PEDIDOS	41
5. PROPUESTAS DE INVESTIGACIÓN Y CONCLUSIONES	45
5.1. Propuestas de Investigación	45
5.2. Conclusiones	45
Bibliografía	47

INTRODUCCIÓN

El problema de optimización consiste básicamente en minimizar o maximizar una determinada cantidad que depende de varias variables en un contexto determinado y bajo diversas restricciones que delimitan las variables. Se sabe además que si bien es cierto que en algunas ocasiones se puede tomar una decisión inmediata en cuanto al valor óptimo de la cantidad, dentro de las soluciones factibles según las restricciones del problema (optimización determinística), también es cierto que en otras ocasiones ese valor óptimo no puede ser determinado inmediatamente porque simplemente la región factible es de carácter aleatorio y dependerá del curso de determinados eventos (optimización bajo incertidumbre).

La optimización es una disciplina que ha aportado considerablemente en muy diversos campos del conocimiento; en particular, el simple hecho de considerar el proceso de crecimiento, guardado y decrecimiento de inventarios es en sí mismo un problema económico de importancia significativa. Él manifiesta elementos que podrían asociarse a una de las grandes preocupaciones de la vida: El hecho de considerar la presencia de la incertidumbre y la necesidad de flexibilidad al momento de enfrentarse a un futuro incierto. Un ejemplo lo constituye la incertidumbre manifestada en la demanda, como aquella que determina los niveles de abastecimiento de un producto determinado.

A este respecto, Rockafellar (2001) [18] señala los problemas de optimización bajo incertidumbre como aquellos que se caracterizan por la necesidad de tomar decisiones sobre las cuales no se sabe qué efectos podrían causar en el futuro, lo cual implica enfrentarse a lo desconocido y las consecuencias de tales decisiones no se sabrán sino en una etapa posterior. La optimización bajo incertidumbre y, más concretamente, la modelación bajo incertidumbre permiten la representación de lo incierto de tal manera que los efectos futuros de tal decisión se tendrán en cuenta desde el principio del análisis y por ende desde el principio de la toma de decisiones.

Sería erróneo pensar que existe una única forma de plantear la problemática de la optimización de una determinada variable, ya que todo varía dependiendo de las características del problema a tratar, de las variables que se pongan en consideración y del medio o entorno sobre el cual se trabaje. No obstante, se pueden identificar diversos modelos que podrían

ofrecer una luz en cuanto a la técnica de optimización; se trata de identificar y analizar determinada función objetivo y de acuerdo con una región factible, observar si el problema tiene solución o no y en caso de que la tenga, especificar cuál es; diversos modelos se han pensado de esta manera. En particular, para este trabajo se analizará uno: El modelo AHM (de Arrow, Harrish y Marshack). Este modelo, en cuanto a los valores que pueden adoptar algunas variables, constituye también un caso especial del manejo de riesgo o toma de decisiones bajo incertidumbre.

El problema de control de inventario está íntimamente relacionado con el problema de minimizar costos y está implícito en casi todas las actividades comerciales. No sería conveniente hablar del modelo AHM, sin antes presentar una conceptualización adecuada de la teoría de inventarios y presentar algunos modelos de inventarios. El inventario representa las existencias de mercancía que se tiene en un período determinado. El objetivo más corriente es determinar cuántas unidades y cuándo se debe pedir para lograr minimizar costos y por ende maximizar ganancias.

Existen tres objetivos fundamentales en el control de inventarios:

1. Satisfacer la demanda de los clientes.
2. Obtener eficiencia en los costos de las operaciones.
3. Minimizar los costos del inventario.

Hay dos decisiones básicas que deben hacerse para cada producto que se mantiene en inventario: Estas decisiones tienen que ver con el momento cuando se debe ordenar y el número de productos que debe ordenarse; en pocas palabras, se debe decir cuándo y cuánto ordenar. Adicionalmente, existen cuatro tipos de costos relevantes para el manejo de inventarios, que son:

1. Costo del producto que se debe adquirir para nutrir el inventario.
2. Costo de guardado del inventario, que lleva relacionado el costo por mantener los productos del inventario en algún lugar para su posterior venta.
3. Costo de orden, que comprende lo concerniente a la gestión del pedido.
4. Costo por defecto, que constituye el costo o penalización por no tener suficiente inventario para satisfacer la demanda, en este sentido, se podría pensar más que en una penalización, en una pérdida por dejar de vender.

Cuando se busca medir la efectividad de una política de inventario, resulta necesaria la medición de los costos totales de inventarios en los que se incurrirá durante algún período de tiempo, durante el cual habrán ciertas necesidades, demandas o requerimientos para cada producto del inventario, que deberán suplirse en la medida de lo posible para minimizar los costos. Según las variables de decisión utilizadas existen diversos tipos de inventario como: EOQ, EPQ, (Q, r) , (S, s) y AHM.

La toma de decisiones bajo incertidumbre inevitablemente involucra el hecho de enfrentarse al riesgo. Las decisiones a menudo necesitan tomarse antes de que ocurran los eventos y eso implica enfrentarse a dos posibilidades: Recurrir a datos determinados por la experiencia para tomar las decisiones o asumir el hecho como algo que tiene cierto grado de probabilidad de ocurrencia en cuyo caso debe asignársele una función de densidad de probabilidad, es decir, tomar las variables en cuestión como variables de tipo aleatorio. El problema básico radica pues en que entonces ya no se cuenta con un valor único posible para una variable, sino con un conjunto (posiblemente infinito), de valores posibles para dicha variable.

Cualquiera que sea la ruta elegida, siempre se estará avocando al riesgo, a la imposibilidad de predecir futuras pérdidas, siempre cabrá la posibilidad de equivocarse y es aquí donde la palabra riesgo cobra un valor fundamental, tomado desde dos perspectivas diferentes:

1. Concebir el riesgo como el nivel de posibilidad que tiene una decisión de generar pérdidas (o ganancias ya que se puede asumir desde el punto de vista de riesgo de ganar).
2. Concebir el riesgo de una decisión como la medida de su nivel de incertidumbre, es decir, una decisión tendrá mayor riesgo que otra siempre que su nivel de incertidumbre sea mayor.

Sea cual sea la perspectiva, cabe la idea de la posibilidad de medir el riesgo de una forma adecuada, utilizando una herramienta denominada medida de riesgo. Para el presente trabajo, se asumirá la primera perspectiva y se tomará como medida coherente del riesgo el CVaR y en cierto sentido la esperanza. En este punto vale la pena aclarar lo que se entiende por medida coherente de riesgo: Medir riesgo es equivalente a establecer una aplicación ρ entre un espacio χ de variables aleatorias esencialmente acotadas, $\chi \subseteq L^\infty(\Omega, \Sigma, P)$, y los reales, es decir, $\rho : \chi \rightarrow \mathbb{R}$. Las medidas de riesgo permiten por ejemplo ordenar y comparar inversiones de acuerdo con su respectivo valor de riesgo. A estas aplicaciones es necesario imponerles condiciones con el propósito de obtener definiciones con significado. Si una medida de riesgo carece de algunas de esas condiciones, ello puede conducir a dificultades mayores en su manejo matemático. Artzner y otros, (1997) [4] plantearon un conjunto de condiciones deseables para una medida de riesgo. Si una medida de riesgo cumple con tales condiciones es llamada coherente.

Existen varias medidas de riesgo tales como Valor condicional bajo riesgo (Conditional

Value-at-Risk) (CVaR), valor de déficit esperado (Expected Shortfall) (ES), costo de oportunidad esperado (Expected Regret) (ER) y la esperanza (E) que cumplen con los requisitos básicos de medida de riesgo coherente, ver por ejemplo Romero (2005) [22]. Otras como el VaR, no cumplen con todas las propiedades de medida coherente de riesgo. Se justifica trabajar con las medidas coherentes de riesgo debido a la conveniencia de una mayor tratabilidad del problema, o sea una mayor facilidad en los cálculos (convexidad y homogeneidad positiva).

Karlin (1960) [11], en su artículo acerca del modelo AHM, toma la esperanza como una medida de riesgo útil para formular el problema de optimización que es de múltiples períodos. No obstante, esto puede generar dificultades, ya que la esperanza como medida de riesgo permite controlar resultados promedios a largo plazo, pero podría ocurrir en alguno de los períodos una gran pérdida, equiparable con la suma de las ganancias en períodos anteriores, lo cual llevaría a una catástrofe en caso de que no se tengan las reservas suficientes. Ver Rockafellar (2007) [20].

La utilidad de las medidas de riesgo, es que informan las pérdidas esperadas a través de reportes financieros, de tal forma que accionistas y administradores pueden decidir si tal nivel de riesgo es aceptable o bien es necesario reducirlo. Además del uso de medidas de riesgo en reportes financieros, éstas pueden ser usadas con una variedad de propósitos, tales como establecimiento de límites en las posiciones para los operadores, medición de retornos sobre una base ajustada por riesgo y evaluación de modelos.

El CVaR cumple con las propiedades de coherencia, por lo cual es convexa, lo que facilita el uso de algoritmos de optimización. El CVaR constituirá el centro de estudio en este trabajo ya que será la medida de riesgo que se aplicará al modelo porque además de analizar en cierta medida un promedio o esperanza, al mismo tiempo analiza el nivel de dispersión de los datos respecto de esa esperanza lo cual da un grado de confiabilidad más alto. No obstante esa dispersión sólo es útil analizarla en el primer período del modelo, por tanto, se utilizará una combinación de medidas de riesgo, a saber: El CVaR como medida de riesgo para el primer período y la esperanza como medida de riesgo para los períodos subsiguientes, determinados por la recursividad dinámica del modelo.

Teniendo en cuenta la medida coherente de riesgo con la cual se trabaje, es posible establecer relaciones entre óptimos utilizando diferentes funciones de densidad de probabilidad de las demandas (para nuestro caso); a este respecto, Karlin (1960) [11] estudia relaciones entre dos números críticos (óptimos) que corresponden a sucesiones distintas de densidades de probabilidad asociadas a los períodos, partiendo de que las respectivas demandas aleatorias estén estocásticamente ordenadas. Un resultado importante en este sentido es que si $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ y $\bar{x}(\psi_1, \psi_2, \dots)$ son óptimos para dos sucesiones de funciones de densidad de

probabilidad diferentes y si además $\varphi_i \leq_{st} \psi_i$ (ver sección 1.4) entonces

$$\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \leq \bar{x}(\psi_1, \psi_2, \dots),$$

donde $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ es el nivel óptimo del inventario inicial mínimo en el período correspondiente.

Resultados como éste ofrecen un amplio campo acerca de la posibilidad de toma de decisiones referentes a distintos mercados. De esta manera, las comparaciones estocásticas posibilitan el análisis de óptimos y de cotas para ellos, en lo cual la medida de riesgo utilizada es importante. Los órdenes estocásticos permiten relacionar entre sí variables aleatorias y sus respectivas distribuciones así como los resultados de su aplicación a determinados modelos.

En principio, y con el fin de tener un soporte teórico adecuado, en el capítulo 1, se presenta la teoría de inventarios, la optimización bajo incertidumbre, las medidas de riesgo (especialmente el CVaR), los órdenes estocásticos desde su concepción básica y el estado actual del modelo A.H.M desde el trabajo de Karlin ver [11] (1960) .

Con esta base bien delimitada, se procede a describir el proyecto en el capítulo 2, desde su justificación, lo cual lleva lógicamente al planteamiento de los objetivos y al enfoque metodológico.

Posteriormente, en el capítulo 3 se describe el modelo propuesto que implica básicamente la adopción de la medida CVaR, para tomar en cuenta la aversión al riesgo del decisor con la construcción teórica que ello conlleva. Se desarrolla entonces el proyecto con el estudio de la política óptima del modelo y su comportamiento a la luz de la estabilidad de los órdenes estocásticos, lo cual constituye la parte principal del trabajo.

En el capítulo 4 se presentan resultados y análisis del modelo propuesto sin reserva de pedidos, con la conjetura del cumplimiento de los teoremas principales sobre política de pedidos y estabilidad de órdenes estocásticos, el cual no fue posible probar; sin embargo se consideró de valor presentar el intento que se hizo de modificar la hipótesis, dentro de limitaciones razonables.

Finalmente, en el capítulo 5, se proponen otras líneas de investigación y se presentan las conclusiones del estudio.

Capítulo 1

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

1.1. Control de Inventarios

En el contexto de los negocios, el modelo de inventarios consiste en una formulación matemática que ayuda a una compañía a determinar la cantidad que se debe ordenar de un producto y la frecuencia de ordenamiento (política), para mantener un flujo de bienes hacia el cliente sin interrupción o retrasos y minimizar los costos de satisfacción de dicha demanda para la empresa. El lapso en el cual se hace el pedido y éste es llevado al cliente se conoce como período y los momentos en los cuales se toman las decisiones se conocen como etapas ver Wallace (2005) [27].

Hay diferencia entre etapas y períodos, por ejemplo, un problema de dos etapas implica dos momentos en los cuales se deben tomar distintas decisiones, a saber, en una primera etapa se decide qué vender y en una segunda etapa cuánto vender. El número de períodos es el número de veces que se realizan las etapas; en este sentido, un problema de dos etapas, podría tener varios períodos; Birge (1997) [5] en el capítulo 1 hace referencia a tal distinción.

Claramente, por las características aquí mencionadas, en cada período hay un costo adicional por almacenar los productos y una penalización por incumplirle al cliente traducida en términos de pérdidas, ya que el hecho de no abastecer demanda implica menor ganancia. En este punto vale la pena aclarar dos tipos de modelos:

1. Modelo sin acumulación de pedido (non-backlog).
2. Modelos con acumulación de pedido (backlog).

En el primer caso, no se tiene en cuenta la demanda sin satisfacer para el período siguiente, en el segundo se lleva un registro de la demanda que no se suple, para poderla satisfacer

en los períodos subsiguientes, ver Karlin (1960) [11], pg. 235. El problema consiste pues en determinar la política óptima (ver Rockafellar (2001) [18], pg. 28) que permita abastecer el mercado.

Dada una política óptima fija, diversas variables de estado describen la evolución del sistema a través del tiempo, ver Zipkin (2000) [28]. Para cada tiempo $t \geq 0$, se tienen las siguientes variables de estado:

$I(t)$ = Inventario disponible.

$B(t)$ = Pedidos pendientes de entrega al consumidor.

$IN(t)$ = Inventario neto = $I(t) - B(t)$.

$A(t)$ = Indicador de falta de inventario = $\mathbf{1}_{\{IN(t) \leq 0\}}$.

$IO(t)$ = Inventario pedido, pendiente de recibo.

$IP(t)$ = Posición del inventario = $IN(t) + IO(t)$.

Existen diversos modelos de inventario, entre los cuales se destaca el modelo clásico de cantidad de pedido económica (**EOQ**, Economic Order Quantity). El modelo EOQ sirve para determinar las mejores respuestas a la pregunta de cuánto y cuándo ordenar, cuando todas las variables son deterministas y se basa en la premisa de que existe un tamaño de orden óptimo con el cual se obtendrá el valor más bajo posible del costo total del inventario. Tiene diversas condiciones dependiendo del comportamiento del producto en el inventario, el cual es central en el desarrollo del modelo.

Premisas o condiciones del EOQ:

1. La demanda por el producto por unidad de tiempo, λ , es conocida y constante.
2. El tiempo de entrega (lead time), L , que es el tiempo total desde el proceso de la orden hasta su entrega, es conocido y constante.
3. El costo unitario de las unidades ordenadas, c , es el mismo, sin importar la cantidad ordenada (no hay descuentos por cantidad).
4. Los costos de ordenar, k , son conocidos y constantes.
5. Cuando una orden es recibida, llegan todos los productos incluidos en esa orden y no

hay demora.

Ya que hay certidumbre en el comportamiento de la demanda y el tiempo de entrega, el momento para hacer cada orden puede ser calculado para que quede el tiempo justo para que el agotamiento del inventario coincida con el arribo de la orden. Consecuentemente se puede suponer entrega inmediata al cliente y ausencia de penalidad por defecto. La política de minimización de costos en este caso comprende únicamente la cantidad de unidades q que se ordena en cada pedido, la cual resulta ser constante.

Considerando el mismo sistema EOQ, pero quitando el requerimiento de atención inmediata de demanda, lo cual implica un retraso en el que el cliente debe esperar cierto tiempo, se tienen políticas diferentes con punto de reorden o más conocidas como políticas de punto de reorden y cantidad de orden, (ver Zipkin (2000) [28]). Esas políticas comprenden el monitoreo de la posición del inventario constantemente. Cuando la posición del inventario sea igual a un valor r , conocido como punto de reorden, entonces se hace un nuevo pedido de tamaño Q en ese instante. Ésta política corresponde a un modelo de la forma (Q, r) . La política del modelo EOQ es un caso especial de ésta en el cual r no es más que la demanda generada durante el tiempo de entrega ($r = \lambda L$).

Si se tiene en cuenta que la demanda es una variable aleatoria, la política (Q, r) , funciona y se puede adaptar de diversas maneras, en las cuales se tiene en cuenta el punto de reorden r , pero las cantidades a ordenar son diferentes. Entre esas políticas destacamos la política (S, s) , donde s es el punto de reorden y S representa el nivel de reabastecimiento objetivo. En esta política el tamaño de la orden puede ser variable ya que se ordena siempre que la posición de inventario sea menor o igual a s y se ordena una cantidad equivalente a la diferencia entre S y la posición del inventario, de tal forma que éste llegue a S . En el caso de un inventario con revisión continua y cantidad de orden variable, la política (S, s) se transforma en la política (Q, r) con r como punto de orden y Q como tamaño de la orden (ver Zipkin (2000) [28], pg. 227).

Para el caso del modelo **AHM**, el monitoreo de inventario se realiza periódicamente y la política se puede considerar como (S, s) , con $S = s$, es decir, con un punto de reorden igual al nivel de reabastecimiento objetivo, que es fijo para todos los períodos.

1.2. Optimización Bajo Incertidumbre

Optimizar consiste básicamente en minimizar o maximizar determinado valor, sean costos, ganancias, tiempos, entre otros, teniendo en cuenta ciertas relaciones entre las variables que conforman la función que representa aquello que se desea optimizar. A esa función se le conoce como función objetivo y a las relaciones se les llama restricciones.

Para poder resolver el problema de optimización, éste debe estar bien planteado. A este respecto, Rockafellar (2001) [18], en sus notas ‘Optimization under uncertainty’, describe lo siguiente: Para plantear bien un problema, se debe tener en cuenta el tipo de variable con la que se trabaja. En caso de que la variable sea determinista el problema se plantea de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c_0(x) \text{ sobre todo } x \in S \\ & \text{sujeto a } c_i(x) \leq 0 \text{ para } i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

$c_0(x)$ corresponde a la función objetivo y las diferentes desigualdades $c_i(x) \leq 0$ representan las restricciones bajo las cuales se debe enmarcar la solución óptima para que sea factible. S es un conjunto de R^n compuesto de vectores de la forma $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y cada c_i es una función de S en R .

Pero ¿qué sucedería si al momento de resolver el problema y tomar decisiones, se contara con información incompleta?, por ejemplo si no se supiera la demanda en un momento determinado?. Aquí ya el modelo debe ser cambiado porque se cuenta con el riesgo en la toma de las decisiones, se cuenta con una optimización bajo incertidumbre y la forma de responder a ésto es más compleja. Para formular la situación que se presenta, se deberá entonces introducir una variable adicional que represente la incertidumbre correspondiente al nivel de aleatoriedad que tiene la variable en cuestión. Entonces $c_i(x)$, se reemplaza por $c_i(x, w)$, donde w pertenece a un conjunto Ω que representa los futuros estados de la variable. De ésta manera sea

$$\underline{c}_i(x) : w \rightarrow c_i(x, w)$$

una función que toma elementos del espacio aleatorio para definir ecuaciones con variables aleatorias para $i = 1, \dots, m$.

Ya con esta redefinición de las variables y las ecuaciones vale la pena preguntarse por la formulación del problema en éstos términos; pues bien, no será sino reemplazar en la formulación inicial $c_i(x)$ y $c_0(x)$ por $\underline{c}_i(x)$ y $\underline{c}_0(x)$, sin embargo, aquí solamente se está representando el problema en términos de la incertidumbre y de la multiplicidad de valores que podría tomar la variable aleatoria pero no se está teniendo en cuenta el riesgo de tomar decisiones bajo incertidumbre. A este respecto, Rockafellar (2007) [20], ilustra varios enfoques para resolver el modelo:

1. Confiar en la experiencia y convertir el problema de incertidumbre en un problema determinístico, suponiendo un valor determinado \bar{w} para la variable aleatoria y reemplazando $c_0(x, w)$ por $c_0(x, \bar{w})$ y $c_i(x, w)$ por $c_i(x, \bar{w})$, que es, por ejemplo, lo que hace un vendedor al pronosticar cuál será la demanda durante un período determinado. Esto sería demasiado riesgoso si se equivocaran las predicciones por un margen amplio.

2. Otra posibilidad sería considerar el peor caso y evitar que éste suceda, lo cual es difícil ya que si bien es cierto que se elimina el riesgo, también es posible que no se puedan obtener soluciones factibles.

3. También se podría tomar la esperanza como una forma de anticiparse al futuro riesgo, mirando lo que podría ocurrir en promedio, es decir, plantear:

$$\text{Minimizar } E[\underline{c}_0(x)] \text{ sobre todo } x \in S$$

$$\text{sujeto a } E\underline{c}_i(x) \leq 0 \text{ para } i = 1, \dots, m$$

lo cual sólo es bueno si no se tienen valores demasiado extremos en las colas de las distribuciones, ya que si esto sucede, en caso de no tener una reserva adecuada, se puede llegar a incurrir en costos muy grandes. El problema de la esperanza es que equilibra costos con ganancias para estimar el riesgo y no considera la dispersión de valores de las variables aleatorias.

4. Se podría utilizar la desviación estándar σ de las variables aleatorias, de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } \mu(\underline{c}_0(x)) + \lambda_0\sigma(\underline{c}_0(x)) \text{ sobre todo } x \in S$$

$$\text{sujeto a } \mu(\underline{c}_i(x)) + \lambda_i\sigma(\underline{c}_i(x)) \text{ para } i = 1, \dots, m,$$

donde μ es el valor esperado y los $\lambda_i \in R^+$; $i = 0, 1, \dots, m$ son números de ponderación.

Esta idea, denominada *media-riesgo*, es interesante porque toma las variaciones de los datos en un intervalo determinado; no obstante su utilidad es limitada desde el punto de vista de su tratabilidad, por el hecho de que utiliza la desviación estándar.

5. Utilizar restricciones de tipo probabilista tales como $\text{prob}\{\underline{c}_i(x) \leq 0\} \geq \alpha_i$ para $i = 1, \dots, m$.

1.3. Medidas de Riesgo

Se podría tener una aproximación general a la incertidumbre, de la siguiente manera: Para cada $i = 0, 1, \dots, m$, seleccione una medida de riesgo, $\rho_i : L^2(\Omega, \Sigma, P) \rightarrow (-\infty, \infty]$ que cuantifique el riesgo de pérdida. Se reemplazan las variables aleatorias $\underline{c}_i(x)$ por las funciones $\bar{c}_i(x) = \rho_i(\underline{c}_i(x))$ y el problema se transforma entonces en:

$$\text{Minimizar } \bar{c}_0(x) \text{ sobre todo } x \in S$$

$$\text{sujeto a } \bar{c}_i(x) \leq 0 \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

Desde el punto de vista de costos, una medida de riesgo $\rho : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ para ser coherente debe satisfacer las siguientes propiedades:

a. Homogeneidad positiva: $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ para todas las variables aleatorias X en χ y todos los números positivos λ . Esto implica que si se cambia la unidad de medida de la variable aleatoria, el valor resultante de la medida con la nueva unidad no es mayor que la medida anterior multiplicada por el factor de conversión de la unidad.

b. Subaditividad: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ para todas las variables X e Y en χ . Esto refleja la propiedad de dispersión del riesgo: Es mejor o a lo sumo igual asumir el riesgo de todas las variables al mismo tiempo que asumir cada riesgo por separado.

c. Monotonicidad: $X \leq Y$ implica $\rho(X) \leq \rho(Y)$ para todas las variables X e Y en χ . De aquí se infieren resultados importantes como si $X \leq 0$ entonces $\rho(X) \leq 0$.

d. Invarianza translacional: $\rho(X + C) = \rho(X) + C$ para todas las variables aleatorias $X \in \chi$ y números reales C .

La condición

e. $\rho(C) = C$ se puede deducir de a y d.

Si se cumple a., la subaditividad es equivalente a

f. Convexidad $\rho(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1 - \alpha)\rho(Y)$ para todas las variables X y Y en χ y $\alpha \in [0, 1]$.

Algunas medidas de riesgo son la esperanza, el VaR (Value at Risk) y el CVaR (Conditional Value at Risk). El VaR se define de la siguiente forma:

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{z \mid F_X(z) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha),$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ y F_X^{-1} es la función inversa generalizada de F_X .

Si F_X es diferenciable y estrictamente creciente en su soporte, el CVaR es definido de la siguiente manera:

$$CVaR_\alpha(X) = E[\xi \mid \xi > VaR_\alpha(X)] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{VaR_\alpha(X)}^{\infty} \xi dF_X(\xi),$$

que expresa el valor esperado de la variable condicionada a la cola α , que toma en cuenta la dispersión de la variable a partir de $VaR_\alpha(X)$. En caso de que F_X no cumpla con las condiciones anteriormente descritas, puede consultarse cómo tratar dicha problemática en

el artículo ‘Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions’, de Rockafellar y Uryasev (2001) [19] .

1.4. Órdenes Estocásticos

Los órdenes estocásticos son relaciones de orden parcial entre distribuciones de probabilidad. Ellos son ampliamente utilizados en probabilidad, estadística y procesos estocásticos y en aplicaciones a la investigación de operaciones, economía, finanzas, física matemática y otras disciplinas (ver Müller y Stoyan (2002) [16], Mosler y Scarsini (1991)[15] o Shaked y Shantikumar (1994) [24]). El estudio sistemático de los órdenes estocásticos es una actividad relativamente joven, intensificada en las últimas tres décadas, no obstante que algunos resultados datan de casi un siglo atrás. Se pueden mencionar los documentos de Lorenz (1905) [14], Hardy (1929) [9] y Karamata (1932) [10].

Los primeros tratamientos comprehensivos de los órdenes estocásticos fueron dados por Stoyan (1973) [25] y (1983) [26]. Para ver citas a estas referencias ver Bulinskaya (2004) [7]. Los órdenes estocásticos permiten, entre otras aplicaciones, realizar comparaciones entre óptimos que corresponden a diferentes distribuciones de demanda:

Si $\bar{x}(\psi_1, \psi_2 \dots)$ y $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2 \dots)$ son dos valores óptimos para el modelo con distribuciones de demandas φ_i y ψ_i diferentes, normalmente no se pueden hacer comparaciones entre ellos. Sin embargo, bajo el supuesto de que las respectivas distribuciones estén estocásticamente ordenadas, se pueden establecer ciertas relaciones entre los óptimos. Vale la pena mencionar tres órdenes estocásticos:

1. Orden estocástico usual (st): Se dice que la variable aleatoria X es menor respecto a la variable aleatoria Y con respecto al orden estocástico usual ($X \leq_{st} Y$) si $F_X(t) \geq F_Y(t)$. En particular, ello significa que demandas basadas en la función de distribución F_X tienen una mayor probabilidad de tomar valores pequeños que aquellos basados en la función de distribución F_Y , ver Karlin (1960) [11].

2. Orden convexo (cx): $X \leq_{cx} Y$, si $Ef(X) \leq Ef(Y)$ para todas las funciones convexas f para las que la esperanza exista.

3. Orden convexo creciente (icx): $X \leq_{icx} Y$, si $Ef(X) \leq Ef(Y)$ para todas las funciones convexas crecientes f para las que la esperanza exista.

1.5. Origen y Estado Actual del Modelo Clásico AHM

1.5.1. Origen

El modelo AHM se creó a partir de la necesidad de numerosas empresas en la postguerra de controlar sus inventarios mediante el uso de modelos, así como del creciente interés de la armada naval de Estados Unidos en la minimización de costos de inventario antes de y durante la postguerra.

En atención a esas necesidades, Arrow, Harris y Marschak plantean en 1951 [2] una primera versión del modelo que se publica en la revista *Econométrica*, bajo el título ‘Optimal inventory policy’. Un recuento de la forma cómo surgió y se desarrolló inicialmente la idea del modelo AHM puede hallarse en el artículo ‘The genesis of Optimal inventory policy’, escrito por Arrow en 2002 [1], en el cual se aprecia cómo el artículo plantea por primera vez un modelo comprensivo en el cual se conjugan un enfoque integral de costos de inventario, su respuesta a la dinámica de los inventarios al considerar un proceso secuencial a lo largo de un número indefinido de períodos y la incorporación de la incertidumbre en la demanda, que conduciría a la programación estocástica. El modelo logrado es básicamente un caso particular del tipo (S, s) . La política óptima lograda es válida para modelos de ese tipo. Dvoretzky et al. (1953) [8] mostraron la existencia de distribuciones para las cuales las políticas óptimas diferían de las del modelo (S, s) . El asunto, según la narración de Arrow, quedó zanjado en un brillante artículo de Herbert Scarf en 1960 [23], donde él demostró que, bajo un supuesto amplio sobre la función de costos, la política (S, s) también resulta óptima.

A raíz del libro seminal de Arrow, Harris y Marschak surgen otros estudios que amplían el modelo, entre los cuales se destacan los siguientes:

Arrow, Karlin y Scarf en 1958 [3], publican un libro titulado ‘Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production’, el cual presenta aspectos generales y aplicaciones del modelo. Ese libro es el primero en explorar y formular los conceptos matemáticos generales que se hallan detrás del control del inventario; en éste texto, se estudian las políticas de inventario bajo una amplia variedad de hipótesis y se hace un rastreo histórico del modelo.

Karlin y Scarf en 1958 [12], en el capítulo 9 del libro ‘Inventory Models of the Arrow-Harris- Marschak Type with Time Lag’ presentan una nueva ampliación del modelo, que comprende demoras en la entrega.

Samuel Karlin en 1960 [11] publica el artículo ‘Dynamic inventory policy with varying stochastic demands’, en el cual no sólo se trabaja el modelo, sino que se comparan los resultados óptimos obtenidos con diferentes distribuciones de demanda, relacionadas entre ellas por ordenaciones estocásticas.

Desde entonces han aparecido innumerables artículos alrededor del tema de inventarios. Un trabajo importante al respecto lo constituye el libro 'Foundations of Inventory Management' escrito por Zipkin (2000) [28], que compendia en forma amplia y rigurosa una parte significativa del estado del arte, con proyección aplicativa.

De los trabajos más recientes se destaca el de Bulinskaya et al. (2004) [7] porque hace referencia al modelo de Karlin, desde la perspectiva de los órdenes estocásticos y distribuciones de demanda no estacionarias, es decir, no necesariamente constantes a lo largo de todos los períodos. Es notable que desde la publicación del libro de Karlin exista un vacío tan grande en la consideración de comparaciones estocásticas, vacío que se extiende hasta principios de los años noventa cuando cobra fuerza el estudio de ellas, motivado por su gama amplia de aplicaciones a innumerables campos de la Teoría de Riesgos.

1.5.2. Estado Actual

El modelo adoptado como punto de partida para la investigación es el propuesto por Karlin (1960) [11]. Él se centra en el análisis de una función de costos correspondiente a un inventario de un solo producto que se aprovisiona al principio de cada período a lo largo de un número infinito de períodos. En cada uno de ellos se presenta una demanda aleatoria con densidad $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ respectivamente, que puede variar de un período a otro, es decir, la demanda no es estacionaria. Los períodos son de igual duración y se supone que la atención de las órdenes es inmediata.

Se desea saber qué cantidad se debe pedir al principio de cada período para minimizar el costo total de todos los períodos, actualizado al período inicial. La toma de decisiones en el modelo se hace como una adaptación del modelo (S, s) , según el cual, la política se resuelve con un único valor \bar{x} que define un nivel mínimo de inventario que al principio del período se debe completar con una orden, si es necesario, hasta reaprovisionar la cantidad \bar{x} .

Las variables del modelo son, según Arrow (1958) [3]:

- z : Cantidad ordenada en un período en número de unidades.
- x : Inventario inicial del período en número de unidades, antes de ordenar.
- y : Inventario disponible al inicio del período, después de ordenar, $y = x + z$.
- c : Costo de orden de pedido en pesos, como función del número de unidades.
- p : Costo de penalización en pesos, como función del número de unidades.
- h : Costo de almacenaje, como función del número de unidades.
- r : Precio unitario de venta.
- D_i : Variable aleatoria de demanda en el período i .
- Φ_i : Función de distribución de demanda en el período i .

φ_i : Densidad de demanda en el período i .

β : Factor de descuento, para los costos de períodos subsiguientes, $\beta \in (0, 1)$.

Se trabaja bajo las siguientes condiciones:

1. El costo de compra es lineal y se denota como cz , donde c es el costo unitario.
2. Los costos de almacenaje, h , y de penalización, p , son funciones continuas, crecientes y convexas que se anulan en el origen.
3. Hay un precio unitario de venta, r , constante.
4. No hay retrasos en los envíos.
5. La incertidumbre en las demandas en períodos sucesivos es descrita por la sucesión de funciones de densidad $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, que se suponen independientes, estrictamente positivas y continuas.
6. El exceso de demanda no se satisface en el período siguiente (non-backlog).
7. $L'(0; \varphi) + c < 0$.
8. $h'(0) + p'(0) + r - \beta c < 0$.

Donde L es el valor esperado de la función de costos para el primer período, que está definida por

$$L(y; \varphi_1) = \int_0^y [h(y - \xi) - r\xi] \varphi_1(\xi) d\xi + \int_y^\infty [p(\xi - y) - ry] \varphi_1(\xi) d\xi,$$

es decir, como el valor esperado de los costos de almacenaje y escasez menos la ganancia para el período, cuando y unidades de inventario están disponibles.

Las dos últimas hipótesis se satisfacen si, por ejemplo, la retribución marginal es mayor que el costo marginal de ordenar. La hipótesis 7 será también satisfecha si el costo marginal esperado de escasez excede el costo marginal de ordenar.

La función $f(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ denota el costo esperado descontado en el cual se incurrirá durante una sucesión infinita de períodos de tiempo, si una regla de pedido óptimo se usa en cada oportunidad de compra; ésta función se puede plantear tanto cuando se vende con retraso como cuando no.

Si se asume que la demanda en exceso no se satisface (non-backlog), se tiene:

$$f(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots) = \min_{y \geq x} \left\{ c(y - x) + L(y; \varphi_1) + \beta \left[f(0; \varphi_2, \varphi_3, \dots) \int_y^\infty \varphi_1(\xi) d\xi + \int_0^y f(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots) \varphi_1(\xi) d\xi \right] \right\}.$$

En este caso, se define

$$G(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots) = cy + L(y; \varphi_1) + \beta \left[f(0; \varphi_2, \varphi_3, \dots) \int_y^\infty \varphi_1(\xi) d\xi + \int_0^y f(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots) \varphi_1(\xi) d\xi \right].$$

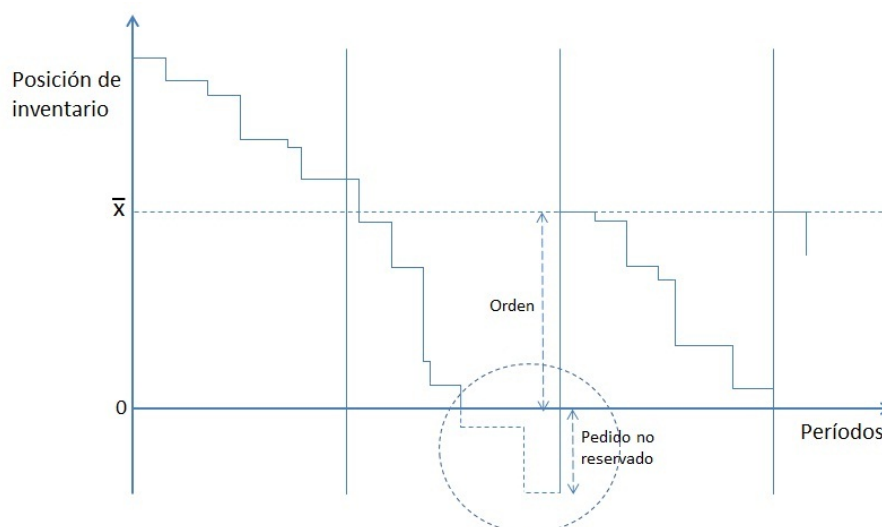


Figura 1.1: Modelo AHM sin reserva de pedidos (non backlog).

Si se permite satisfacer la demanda en exceso en el período siguiente (backlog), se tiene:

$$f(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots) = \min_{y \geq x} \left\{ c(y - x) + L(y; \varphi_1) + \beta \int_0^\infty f(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots) \varphi_1(\xi) d\xi \right\}.$$

Karlin describe cuantitativamente la variación del número crítico \bar{x} , como función de las densidades de demanda en todos los períodos futuros, es decir, investiga la relación funcional entre la política óptima y la distribución de la demanda. En cuanto a la política y la tratabilidad del problema de optimización, Karlin obtiene el siguiente resultado, bajo las condiciones expuestas:

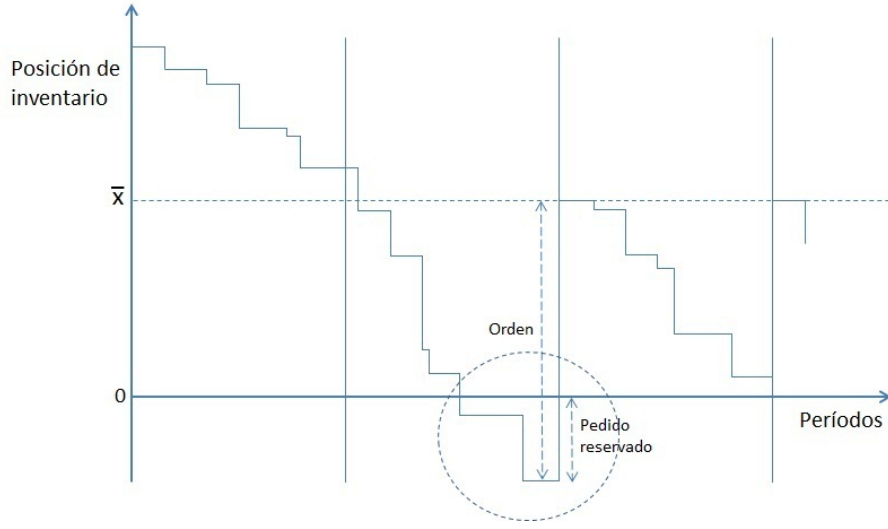


Figura 1.2: Modelo AHM con reserva de pedidos (backlog).

Teorema 1.5.1 $f(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ es una función convexa de x y la regla óptima se caracteriza por un número crítico $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$. El número crítico determina completamente la solución de la siguiente manera: Si $x < \bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$, la política óptima es ordenar hasta $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$, si $x > \bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$, la política óptima es no ordenar.

En relación con la ordenación estocástica, Karlin demuestra que:

Teorema 1.5.2 Si dos sucesiones de densidades de demanda están estocásticamente ordenadas término a término en el mismo sentido, entonces sus respectivos números críticos mantienen la ordenación en los números reales y el orden se invierte para las derivadas de las funciones de costo esperado descontado respectivas.

Como producto de los Teoremas anteriores se obtienen diversos Corolarios en los cuales se especifican los resultados del Teorema 2 en casos particulares.

El primer Corolario indica que si se tienen $n + 1$ densidades de demanda, entonces el valor crítico en el cual la demanda en el último período es cero es menor o igual que el valor crítico cuya demanda en el último período es distinta de cero. Es decir, si las funciones p y h son lineales y las densidades de demanda para los primeros $n + 1$ períodos están determinados por $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$, entonces

$$\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, 0) \leq \bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}).$$

Bajo esta misma línea, el Lema 1 propone la posibilidad de obtener dos números críticos iguales para sucesiones de densidad de demanda distintas, bajo ciertas condiciones: Si las densidades de demanda están dadas por $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ y si

$$\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \leq \bar{x}(\varphi_2, \varphi_3, \dots),$$

entonces $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) = \bar{x}(\varphi_1, \varphi_1, \varphi_1, \dots)$, donde $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_1, \varphi_1, \dots)$ se puede calcular explícitamente como la única raíz positiva de la ecuación

$$G'(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = c + \int_0^y [h'(y - \xi) - \beta c] \varphi_1(\xi) d\xi - \int_y^\infty [p'(\xi - y) + r] \varphi_1(\xi) d\xi$$

En el Corolario 2, se tiene que si hay una sucesión creciente de densidades de probabilidad en el orden \leq_{st} , entonces es posible obtener tanto la hipótesis como los resultados obtenidos en el Lema 1: si las densidades de demanda están dadas por, $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, entonces $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \leq \bar{x}(\varphi_2, \varphi_3, \dots)$, y $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) = \bar{x}(\varphi_1, \varphi_1, \varphi_1, \dots)$.

El Lema 2, indica que si se tiene un valor crítico con densidades de demanda distintas, dicho valor crítico será menor que un valor crítico para el cual la demanda es siempre la misma e igual a la demanda en el primer período del valor crítico inicial: Si las densidades de demandas futuras están dadas por $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, entonces $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \leq \bar{x}(\varphi_1, \varphi_1, \dots)$ siempre.

El Corolario 3 indica que si las densidades de demandas futuras están dadas por $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, y si $\varphi_2 \leq_{st} \varphi_1$ entonces

$$\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \geq \bar{x}(\varphi_2, \varphi_3, \dots)$$

El Corolario 4 indica que si $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) > \bar{x}(\varphi_2, \varphi_3, \dots)$, donde $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, son las densidades de demanda para el futuro y $\varphi_1 \leq_{st} \varphi_2$, entonces

$$\bar{x}(\varphi_2, \varphi_3, \dots) > \bar{x}(\varphi_3, \varphi_4, \dots)$$

Karlin obtiene los mismos resultados en los siguientes casos:

1. Satisfacción del exceso de demanda (backlog).
2. Costo de compra convexa.
3. Cuando hay retrasos en el envío con costo de compra lineal.

Capítulo 2

PLANTEAMIENTO DEL PROYECTO

2.1. Justificación

La principal justificación de este trabajo de tesis es el impacto académico tanto teórico como aplicativo del tema, primeramente para la Maestría y luego para Ingeniería Matemática de la Universidad EAFIT. Los modelos de inventarios constituyen de por si especies de ‘laboratorios’ para la investigación, ya que la variedad de situaciones que se pueden representar con ellos son utilizables en otro tipo de disciplinas como son las Finanzas, la Economía, la Ingeniería Ambiental y la ingeniería de complejos hidroeléctricos, entre otras muchas. El impacto potencial es fácil de reconocer para quienes aprecian la creciente importancia de los modelos de riesgo y el desarrollo dinámico que han cobrado recientemente disciplinas teóricas relacionadas como son las Medidas de Riesgo, los Órdenes Estocásticos y la Teoría de Cópulas; cada una de ellas abre campos amplios y fértiles para la teoría y su aplicación.

Una segunda justificación para este trabajo es que él se enmarca dentro de un esfuerzo cooperativo de investigación con la Universidad de Medellín en los temas mencionados en el párrafo anterior. El valor y la proyección de ese tipo de esfuerzos es reconocido y altamente apreciable por la comunidad académica.

A continuación se describe la justificación académica de los temas per se:

El modelo AHM es importante e interesante al interior de la teoría de inventarios ya que a diferencia de muchos otros considera diversas variables implícitas en el manejo de inventarios como son los costos de almacenaje, de pedidos sin satisfacer y de compra. El modelo es dinámico en la medida en que considera varios periodos y permite el uso no sólo de costos lineales, sino de costos convexos.

Estudios pioneros y recientes del modelo lo vinculan con los órdenes estocásticos que le aportan una herramienta teórica importante a la teoría de inventarios que permite análisis comparativos de los números y valores críticos bajo diversos escenarios de riesgo. El uso de comparaciones en modelos estocásticos se ha constituido desde hace algunos años en un campo de bastante atractivo para las comunidades académica y empresarial, debido tanto a la variedad de aplicaciones que hace posibles, como a los logros teóricos importantes que lo han consolidado como un tópico activo de investigación, en el cual se encuentran problemas abiertos de gran interés. Es por eso que el modelo en sí, se ajusta a la aplicabilidad y a la representación de situaciones propias del monitoreo y administración de inventarios donde la demanda es de tipo aleatorio período a período; es allí donde el modelo cobra importancia ya que involucra numerosas demandas aleatorias que permiten generar multiplicidad de escenarios de riesgo y, consecuentemente, de ahondar en el análisis comparativo de ellos.

Paralelamente, el estudio de las medidas de riesgo ha cobrado también gran impulso, fundamentado en la adopción de un enfoque estructural, notablemente jalonado por la introducción del concepto de medidas coherentes. Dentro de esa línea de pensamiento, más recientemente se ha desarrollado la teoría de las medidas monetarias y las medidas de desviación. Esos esfuerzos responden íntimamente a las necesidades de la administración de riesgos y la actuaría, en cuanto ellos buscan la mejor medición y modelación de las expectativas de quien asume el riesgo, según su aversión a él y las condiciones de los riesgos en sí. Se justifica un trabajo en este tema debido a que el riesgo está implícito en la toma de decisiones que se deben realizar en casi cualquier actividad.

El hecho de realizar un estudio detallado del riesgo en problemas de inventario genera modelos más sólidos y que aportan una mayor información acerca del futuro de los períodos. Adicionalmente, interrelacionar las medidas coherentes de riesgo con los órdenes estocásticos supone la estructuración de relaciones de nivel superior que permiten disponer de mejores elementos para la toma de decisiones en la administración de inventarios.

Otra perspectiva importante para los modelos financieros con incertidumbre se abre con el aporte valioso que ha traído el concepto de riesgo operativo para el sector financiero, a través de los acuerdos de Basilea. La profundización que ese proceso normativo ha logrado en el conocimiento de los riesgos empresariales de todo tipo y su administración es claramente aplicable y extensible a las empresas no financieras, en la conformación de sus esquemas de retención y su armonización con los esquemas de transferencia. Lo anterior constituye un valioso potencial para el mejoramiento y profesionalización de la administración de riesgos que no puede ser despreciado por la comunidad empresarial. Preguntas de naturaleza gerencial tales como ¿Cuánto invertir?, ¿Cuándo invertir?, ¿Cuál es el riesgo de la operación?, ¿que pasaría si en vez de una política óptima se opta por otra?, pueden plantearse y resolverse con mayor precisión, gracias a enfoques y herramientas como las propuestas.

En particular, el uso de medidas coherentes como el CVaR permite tomar en cuenta la aversión al riesgo de una forma más flexible a como se lograría con el enfoque tradicional del uso de la función de utilidad, con sus bien conocidas limitaciones. Las medidas *media-riesgo* son lo suficientemente versátiles para reflejar diferentes alternativas de aversión al riesgo, sin necesidad de cálculos dispendiosos.

2.2. Objetivos

2.2.1. Objetivo General

Estudiar el Modelo de optimización AHM desde la perspectiva de un agente adverso al riesgo que recurre a la medida de Valor Condicional en Riesgo, $CVaR_\alpha$.

2.2.2. Objetivos específicos

3.1. Utilizar la medida CVaR para replantear el modelo AHM.

3.2. Obtener un resultado análogo al de Karlin (1960) [11] respecto a la política óptima y a la tratabilidad del modelo propuesto usando la medida CVaR como un método de refinación.

3.3. Seleccionar y utilizar los órdenes estocásticos adecuados para comparar los números críticos de la optimización.

2.3. Enfoque Metodológico

Inicialmente se hace una descripción del proceso mediante el cual se planteó el tema de investigación; las acciones realizadas a este respecto, por ser parte de una fase preinvestigativa, son difíciles de ubicar claramente dentro de una metodología. Es aquí donde prima la experiencia y el conocimiento de los investigadores.

La investigación surgió a raíz del trabajo con el documento de Bulinskaya 2004 [7]. Fue a raíz del artículo que se vió por primera vez el modelo y la forma en que se trabaja con la esperanza como una medida de riesgo y con la utilización de órdenes estocásticos.

Entrando más en el tema se acudió al libro de Arrow (1958) [3], en el cual se expone de manera más concisa el modelo. Debido a las dificultades para comprenderlo en su totalidad se recurrió a su análisis desde la perspectiva de dos períodos con el fin de simplificarlo. En búsqueda de tal situación se halló el artículo de Karlin en el cual se expone de manera clara el modelo para n períodos y se establecen las relaciones con órdenes estocásticos. En el trabajo para dos períodos se distinguieron dos conceptos semejantes: períodos y etapas; tal

diferencia amplió más el panorama de trabajo en el modelo y permitió un enfoque mejor de lo que se busca: análisis período a período.

Se planteó luego la alternativa de trabajar para más de dos períodos identificando la función de costos y su comportamiento frente a los órdenes estocásticos y las medidas de riesgo diferentes a la esperanza. Con el fin de comprender mejor la política óptima del modelo, en el estudio surgió la necesidad de conocer los modelos de inventario anteriores al AHM ya que así se identificarán claramente las características fundamentales y criterios de aplicabilidad del modelo en el entorno de la toma de decisiones en cuanto al cuándo y cuánto pedir en cada período.

Finalmente, se adoptó el CVaR como la medida de riesgo a utilizar en vez del valor esperado. Se trata entonces de estudiar los resultados que se puedan obtener que, de alguna manera, se espera que sean análogos a los logrados por Karlin para el caso de la esperanza.

Con el fin de esclarecer la metodología empleada y los instrumentos necesarios para llevar a cabo este proyecto, una vez definido el problema, la primera etapa consistió en una consulta bibliográfica exhaustiva acerca del modelo.

En la siguiente etapa de la investigación, se buscó delimitar el modelo utilizando la medida CVaR. El problema a resolver, aunque no es simple, tiene un enunciado simple de optimización estocástica.

El método de investigación utilizado en la última etapa de planteamiento y solución de modelos fue básicamente el método científico, consistente en el enunciado y prueba formal de proposiciones, usual en el campo de la matemática. Se buscó dar significado a los resultados que se obtenían y a las dificultades identificadas, dentro del contexto que provee el estado del arte. El aporte metodológico de este trabajo está en la aplicación de metodologías conocidas a un tipo de problema de modelación. El aporte teórico y práctico está en la utilización del CVaR como medida de riesgo en la optimización, el uso de comparaciones estocásticas y las derivaciones que de allí puedan resultar. Se mantiene una revisión permanente de los avances, dificultades, logros y fuentes bibliográficas, con el propósito de aprovechar temáticas de investigación relacionadas que estén en estudio.

Las técnicas utilizadas fueron las provistas por los Órdenes Estocásticos, Medidas de riesgo y Espacios de Probabilidad. La recolección de información se realizó accediendo a la bibliografía adecuada, en su mayor parte ya disponible. Para el acceso a fuentes de información especializada se contó con las bases de datos y el sistema Celsius de la Biblioteca EAFIT.

Capítulo 3

MODELO DE OPTIMIZACIÓN AHM CON RESERVA DE PEDIDOS, UTILIZANDO CVaR COMO MEDIDA DE RIESGO

3.1. Descripción del Modelo Propuesto

En forma resumida: el modelo propuesto es el mismo modelo AHM de Karlin (1960) (descrito en la sección 1.5.2), donde se cambia la medida de riesgo utilizada en el primer período utilizando $CVaR_\alpha$, con un nivel de confianza $\alpha \in [0, 1)$, en vez del valor esperado. Para los períodos subsiguientes se conserva el valor esperado del costo descontado como medida de riesgo, siguiendo el modelo de Karlin.

El propósito con este modelo es tener en cuenta la aversión al riesgo del tomador (quien decide), utilizando para ello una medida sensible a resultados adversos severos, como lo es $CVaR_\alpha$. El uso de esa medida para los períodos subsiguientes es cuestionable por cuanto se trata de un costo que compromete varios períodos, de forma tal que un resultado desfavorable y severo en uno de ellos, tiende a ser compensado por los de otros períodos, proporcionando así una respuesta satisfactoria para el decisor adverso al riesgo. Un subproducto, no despreciable, de la forma escogida para medir el riesgo, es que el modelo resultante es más sencillo de analizar.

Las variables del modelo son las siguientes:

- z : Cantidad ordenada en un período en número de unidades.
- x : Inventario inicial del período en número de unidades, antes de ordenar.

- y : Inventario disponible al inicio del período, después de ordenar, $y = x + z$.
 c : Costo de orden de pedido en pesos, como función del número de unidades.
 p : Costo de penalización en pesos, como función del número de unidades.
 h : Costo de almacenaje, como función del número de unidades.
 r : Ingreso unitario, producto de las ventas.
 D_i : Variable aleatoria de demanda en el período i .
 Φ_i : Función de distribución de demanda en el período i .
 φ_i : Función de densidad de demanda en el período i .
 α : Nivel de confianza escogido por el tomador en el período 1; $\alpha \in [0, 1)$.
 β : Factor de descuento, para los costos de períodos subsiguientes; $\beta \in (0, 1)$.

La función de costos de almacenamiento y penalización, netos de ingresos por ventas en el período 1, es dada para cada valor de y por:

$$\Pi(y; \varphi) =: \begin{cases} \hat{h}(D) := h(y - D) - rD; & 0 \leq D \leq y \\ \hat{p}(D) := p(D - y) - ry; & y < D < \infty. \end{cases} \quad (3.1)$$

Es oportuno advertir que los costos de pedido no están incluidos en esta formulación. Para simplificar la notación, D_i , Φ_i y Π_i se escribirán sin subíndice cuando se refieran al primer período. Esa misma notación se utilizará con φ_i , cuando la expresión se refiera al período uno exclusivamente. La función de distribución de la v. a. Π en el período 1 se denota por F_Π .

El valor en riesgo al nivel de confianza α , VaR_α , para la función de costos neta, $\Pi(y; \varphi)$, en el período 1 es

$$\rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) := VaR_\alpha(\Pi(y; \varphi)) = F_\Pi^{-1}(\alpha) \quad (3.2)$$

y, según como se describe en Pflug (2000) [17], el $CVaR_\alpha$ de esa función puede calcularse con la fórmula

$$\begin{aligned} \varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) &:= CVaR_\alpha(\Pi(y; \varphi)) \\ &= \rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) + \frac{1}{1 - \alpha} E[(h(y - D) - rD - \rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi))^+ \\ &\quad + (p(D - y) - ry - \rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi))^+]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La notación utilizada para las variables que se acaban de definir, utilizan la variable φ , sin subíndice, lo cual es consistente con la convención adoptada para denotar las variables aleatorias y sus distribuciones en el primer período.

Nota 3.1.1 En la definición (3.1), note que $\hat{h}(\xi)$ es convexa, continua y decreciente para $\xi \geq 0$, $\hat{h}(0) = h(y)$ y $\hat{h}(y) = -ry$ y $\hat{p}(\xi)$ es convexa, creciente para $\xi \geq 0$ y $\hat{p}(y) = -ry$. También, para $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} \hat{h}(y) = -ry \leq 0 \leq \rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) &\implies y \geq \hat{h}^{-1}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)); \\ \hat{p}(y) = -ry \leq 0 \leq \rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) &\implies y \leq \hat{p}^{-1}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)). \end{aligned}$$

Condiciones del modelo:

1. El costo de compra es lineal y se denota como cz , donde c es el costo unitario.
2. Los costos de almacenaje, h , y de escasez, p , son funciones continuas, crecientes y convexas que se anulan en el origen.
3. Hay un precio unitario de venta, r , constante.
4. No hay retrasos en los envíos.
5. La incertidumbre en las demandas en períodos sucesivos es descrita por la sucesión de funciones de densidad $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, que se suponen independientes, estrictamente positivas y continuas.
6. El exceso de demanda se satisface en el período siguiente (backlog).
7. $r > c$.

La condición 7 es natural, pues de lo contrario los solos precios de compra unitaria excederían los correspondientes precios de venta.

La función $f(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ denota la suma del valor condicional en riesgo de los costos netos en el primer período más el costo neto esperado con descuento en los períodos siguientes, en la cual se incurrirá durante una sucesión infinita de períodos de tiempo, si una regla de pedido óptimo se usa en cada oportunidad de compra; ésta función se puede plantear tanto cuando se vende con retraso como cuando no.

El modelo propuesto permite satisfacer la demanda en exceso en el período siguiente (backlog), por lo tanto se tiene que

$$f(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots) = \min_{y \geq x} \left\{ c(y - x) + \varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) + \beta \int_0^{\infty} f(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots) \varphi_1(\xi) d\xi \right\}.$$

Para efectos de facilidad en los cálculos, se tomará

$$G_{\alpha}(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots) := cy + \varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) + \beta \int_0^{\infty} f(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots) \varphi_1(\xi) d\xi, \quad (3.4)$$

es decir,

$$f(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots) = \min_{y \geq x} \{-cx + G_{\alpha}(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots)\}.$$

3.2. Política Óptima

Previo al Teorema de Política Óptima, se hace necesario formular la función de distribución de los costos netos de ingresos en el período 1, $F_{\Pi}(y; \varphi)$, en términos de la función de distribución Φ de la demanda. Esa formulación la provee la siguiente

Proposición 3.2.1

$$F_{\Pi}(w; \varphi) = \Phi[\hat{p}^{-1}(w)] - \Phi[\hat{h}^{-1}(w)]. \quad (3.5)$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\Pi}(w; \varphi) = P[\Pi(y; \varphi) > w] &= P[h(y - D) - rD > w; D \leq y] \\ &+ P[p(D - y) - ry > w; D > y]. \end{aligned}$$

Se probará que $h(y - D) - rD > w$ implica $D \leq y$ y que $p(D - y) - ry > w$ implica $D > y$:

Teniendo en cuenta que $w \geq -ry$, si $h(y - D) - rD > w$ entonces $h(y - D) - rD > -ry$, luego $h(y - D) + r(y - D) > 0$. Sea $g(x) = h(x) + rx$, dicha función es convexa, creciente para $x \geq 0$ y $g(0) = 0$; entonces, como $g(y - D) > 0$, se concluye que $y - D \geq 0$, o sea que $y \geq D$ se cumple.

De forma análoga, si $p(D - y) - ry > w$, teniendo en cuenta que $w \geq -ry$, se llega a que $p(D - y) - ry > -ry$, y por tanto $p(D - y) > 0$. Como $p(x)$ es creciente para $x \geq 0$ y $p(0) = 0$ entonces, $D - y > 0$ y por tanto $D > y$.

De lo anterior se deduce que:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\Pi}(w; \varphi) &= P[h(y - D) - rD > w] + P[p(D - y) - ry > w] \\ &= P[\hat{h}(D) > w] + P[\hat{p}(D) > w] \\ &= P[D \leq \hat{h}^{-1}(w)] + P[D \geq \hat{p}^{-1}(w)] \\ &= \Phi[\hat{h}^{-1}(w)] + 1 - \Phi[\hat{p}^{-1}(w)], \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado anunciado. \square

Por facilidad de notación en la prueba del Teorema, se definen las siguientes cotas de costos

$$\underline{y}_{\alpha} := \hat{h}^{-1}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)) \quad \text{y} \quad \bar{y}_{\alpha} := \hat{p}^{-1}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)). \quad (3.6)$$

Por la nota 3.1.1, $\underline{y}_\alpha \leq y$ y $\bar{y}_\alpha \geq y$. Con esa notación, a partir de (3.3), $\varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)$ se puede escribir en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) &= \rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) + \frac{1}{1 - \alpha} \left[\int_0^{\underline{y}_\alpha} (h(y - \xi) - r\xi - \rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi))\varphi(\xi)d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\bar{y}_\alpha}^{\infty} (p(\xi - y) - ry - \rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi))\varphi(\xi)d\xi \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} &= \rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) + \frac{1}{1 - \alpha} \left[\int_0^{\underline{y}_\alpha} (\hat{h}(\xi) - \rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi))\varphi(\xi)d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\bar{y}_\alpha}^{\infty} (\hat{p}(\xi) - \rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi))\varphi(\xi)d\xi \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

De la ecuación (3.7) se logra una versión simplificada de la derivada de $\varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)$

$$\begin{aligned} \varrho'_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) &= \rho'_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) + \frac{1}{1 - \alpha} \left[\rho'_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)[\Phi(\bar{y}_\alpha) - \Phi(\underline{y}_\alpha) - 1] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\underline{y}_\alpha} h'(y - \xi)\varphi(\xi)d\xi - \int_{\bar{y}_\alpha}^{\infty} (p'(\xi - y) + r)\varphi(\xi)d\xi \right] \\ &= \rho'_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) + \frac{1}{1 - \alpha} \left[\rho'_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)(\alpha - 1) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\underline{y}_\alpha} h'(y - \xi)\varphi(\xi)d\xi - \int_{\bar{y}_\alpha}^{\infty} (p'(\xi - y) + r)\varphi(\xi)d\xi \right] \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \left[\int_0^{\underline{y}_\alpha} h'(y - \xi)\varphi(\xi)d\xi - \int_{\bar{y}_\alpha}^{\infty} (p'(\xi - y) + r)\varphi(\xi)d\xi \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde la segunda ecuación proviene de la identidad

$$\begin{aligned} F_{\Pi}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi); \varphi) &= \Phi[\hat{p}^{-1}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi))] - \Phi[\hat{h}^{-1}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi))] \\ &= \Phi[\bar{y}_\alpha] - \Phi[\underline{y}_\alpha] = \alpha, \end{aligned} \quad (3.10)$$

cuya validez estriba en la definición de $\rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)$.

Lema 3.2.2 Si $r > c$, entonces $G'_\alpha(0; \varphi_1) < 0$.

Prueba: Primero se probará que si $y = 0$, entonces $\rho_{(\alpha, \Pi)}(0; \varphi) = p(\text{VaR}_\alpha(\Phi))$ y $\bar{y}_\alpha = \text{VaR}_\alpha(\Phi)$ son afirmaciones ciertas:

Según la definición (3.1), para $y = 0$, $P[h(-D) - rD > w; D \leq 0] = 0$, debido a que $P[D \leq 0] = 0$. De esta manera, de acuerdo con (3.5), $F_{\Pi}(w; \varphi) = \Phi[\hat{p}^{-1}(w)]$ y por tanto, $F_{\Pi}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(0; \varphi); \varphi) = \alpha = \Phi[\hat{p}^{-1}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(0; \varphi))]$ luego $\hat{p}^{-1}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(0; \varphi)) = \Phi^{-1}(\alpha) = VaR_{\alpha}(\Phi)$.

Observe que para $y = 0$, $\hat{p}^{-1}(w) = p^{-1}(w)$ y de esta manera, $p^{-1}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(0; \varphi)) = VaR_{\alpha}(\Phi)$, lo cual implica que $\rho_{(\alpha, \Pi)}(0; \varphi) = p(VaR_{\alpha}(\Phi))$. Además, para $y = 0$,

$$\bar{y}_{\alpha} = \hat{p}^{-1}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(0; \varphi)) = p^{-1}(\rho_{(\alpha, \Pi)}(0; \varphi)) = p^{-1}(p(VaR_{\alpha}(\Phi))) = VaR_{\alpha}(\Phi).$$

Esto culmina la prueba de las dos afirmaciones anteriores.

Para $y = 0$, recurriendo a (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned} G'_{\alpha}(0; \varphi) &= c + \varrho'_{(\alpha, \Pi)}(0; \varphi) < c + \frac{1}{1 - \alpha} \left[- \int_{\bar{y}_{\alpha}}^{\infty} (p'(\xi) + r)\varphi(\xi) d\xi \right] \\ &= c - \frac{1}{1 - \alpha} \left[\int_{VaR_{\alpha}(\Phi)}^{\infty} p'(\xi)\varphi(\xi) d\xi + r \int_{VaR_{\alpha}(\Phi)}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \right] \\ &\leq c - r < 0, \end{aligned}$$

ya que h' es positiva. \square

Note que entonces la condición 7 del modelo implica que $G'_{\alpha}(0; \varphi) < 0$.

Lema 3.2.3 $G_{\alpha}(y; \varphi)$ es convexa.

Prueba: Como $G_{\alpha}(y; \varphi) = cy + \varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)$, basta probar que $\varrho''_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) > 0$. A partir de (3.9) se logra la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \varrho''_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) &= \frac{1}{1 - \alpha} \left[\int_0^{\underline{y}_{\alpha}} h''(y - \xi)\varphi(\xi) d\xi + \int_{\bar{y}_{\alpha}}^{\infty} p''(\xi - y)\varphi(\xi) d\xi \right] \\ &\quad + h'(y - \underline{y}_{\alpha})\varphi(\underline{y}_{\alpha}) + [p'(\bar{y}_{\alpha} - y) + r]\varphi(\bar{y}_{\alpha}). \end{aligned}$$

Esta expresión es positiva, ya que h y p son convexas, crecientes y adicionalmente, según la nota 3.1.1, $\bar{y}_{\alpha} - y$ y $y - \underline{y}_{\alpha}$ son ambos positivos, por tanto $G_{\alpha}(y; \varphi)$ es convexa. \square

Con las definiciones y resultados desarrollados hasta acá en esta sección, es posible formular ahora uno de los aportes centrales del presente trabajo:

Teorema 3.2.4 *Bajo las condiciones 1-7 del modelo, las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *La regla óptima de orden está caracterizada por un solo número crítico $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$.*

El número crítico determina completamente la solución de la siguiente manera: Si $x < \bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$, la política óptima es ordenar hasta $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$; si $x > \bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ la política óptima es no ordenar.

2. *$f(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ es una función convexa de x .*

Prueba: La prueba se realiza por inducción en el número de períodos n en el modelo de inventario. Específicamente, se truncará el modelo a n períodos y subsecuentemente se tomará $n \rightarrow \infty$. El modelo para un período toma la forma:

$$\begin{aligned} f(x; \varphi) &= \min_{y \geq x} [c(y - x) + \varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)] \quad y \\ G_\alpha(y; \varphi) &= cy + \varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Según el Lema 3.2.3, $G_\alpha(y; \varphi)$ es convexa en y por lo cual existe un valor $\bar{x}(\varphi)$, definido como el valor más pequeño de y para el cual

$$G_\alpha(\bar{x}(\varphi); \varphi) = \min_{y \geq 0} [G_\alpha(y; \varphi)].$$

La convexidad de $G_\alpha(y; \varphi)$ también puede deducirse del Corolario 11 de Rockafellar y Uryasev (2001) [19], pero se prefiere conservar la prueba del Lema 3.2.3 que exhibe en forma explícita el cálculo de la primera y segunda derivadas de $\varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)$.

Teniendo en cuenta que, según la condición 7 del modelo (ver Lema 3.2.2), $G'_\alpha(0; \varphi) < 0$ y que $\lim_{y \rightarrow \infty} G_\alpha(y; \varphi) = \infty$, se puede afirmar que $0 < \bar{x}(\varphi) < \infty$. Así mismo es cierto que el valor de y que minimiza $G_\alpha(y; \varphi)$ también minimiza $c(y - x) + \varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)$ con respecto a y . Entonces $\bar{x}(\varphi)$ se puede tomar como la raíz más pequeña de la ecuación $G'_\alpha(y; \varphi) = 0$.

De lo anterior se sigue que si $x < \bar{x}(\varphi)$, la política óptima es ordenar hasta $\bar{x}(\varphi)$; si $x > \bar{x}(\varphi)$, la política óptima es no ordenar.

De esta manera, se tiene que:

$$f(x; \varphi) = \begin{cases} -cx + G_\alpha(\bar{x}(\varphi); \varphi); & x \leq \bar{x}(\varphi) \\ -cx + G_\alpha(x; \varphi); & x > \bar{x}(\varphi), \end{cases}$$

cuya derivada con respecto a x es la siguiente:

$$f'(x; \varphi) = \begin{cases} -c; & x \leq \bar{x}(\varphi) \\ -c + G'_\alpha(x; \varphi); & x > \bar{x}(\varphi). \end{cases} \quad (3.12)$$

Note que $f'(x; \varphi)$ es una función continua de x ya que $G'_\alpha(x; \varphi)$ es continua y $G'_\alpha(\bar{x}(\varphi); \varphi) = 0$; además $f'(x; \varphi)$ es una función no decreciente de x , ya que G es convexa. Más aún, la segunda derivada de $f(x; \varphi)$ existe en todo punto excepto posiblemente en el punto $x = \bar{x}(\varphi)$ en el cual, de todas maneras, las derivadas a izquierda y derecha existen. Por tanto $f''(x; \varphi) \geq 0$, excepto a lo sumo en el punto $x = \bar{x}(\varphi)$, lo cual es suficiente para mostrar que $f(x; \varphi)$ es convexa y culminar la prueba del Teorema para el primer período.

Asumiendo ahora que el Teorema ha sido probado para $n - 1$ períodos, se probará para n períodos:

A partir de la definición de $G_\alpha(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ para n períodos (ver (3.4)), se calcula su segunda derivada respecto de y

$$G''_\alpha(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) := \varrho''_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) + \beta \int_0^\infty f''(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \varphi_1(\xi) d\xi.$$

Por la hipótesis de inducción, que afirma la convexidad de $f(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n)$, se tiene que

$$\int_0^\infty f''(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \varphi_1(\xi) d\xi > 0,$$

lo cual permite concluir que $G_\alpha(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ es convexa, gracias a la convexidad de $\varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi)$.

El resto del argumento para n períodos es igual al utilizado para un período.

Para infinitos períodos: En el artículo de Karlin (1955) [13] se presenta formalmente el problema de programación dinámica no determinista y en el ejemplo 3 de esa sección se ilustra con un modelo de inventarios. Allí se describen las condiciones topológicas sobre los espacios y las condiciones de continuidad y convergencia sobre las funciones del modelo formal, necesarias para estabilizar los resultados obtenidos para el período n , cuando se toma el límite del número de períodos a infinito. Tanto el modelo de Karlin como el modelo en estudio se ajustan al modelo del ejemplo 3 y para ellos se cumplen las condiciones de estabilidad en el límite. \square

3.3. Comparaciones Estocásticas

En esta sección se modifica la condición 2 del modelo, sustituyendo la convexidad de h y p por su linealidad, conservando la hipótesis de que ambas funciones se anulan en 0. La nueva condición 2 queda así:

2. Los costos de almacenaje y de escasez son funciones lineales que se anulan en el origen.

Para el enunciado y prueba del Teorema de Comparaciones Estocásticas, resolveremos primero el modelo de optimización de un período (3.11). Ese resultado es en si mismo una contribución destacable de este trabajo.

En la ampliación del modelo que se describe, a continuación se recurrirá a la función de costos totales que incluye a $\Pi(y; \varphi)$, más los costos de pedido.

$$\Upsilon(y; \varphi) := cy + \Pi(y; \varphi) \quad (3.13)$$

para el primer período.

El proceso de optimización de (3.11) se hará siguiendo los delineamientos trazados por Rockafellar y Uryasev (2001) [19] en su Reporte de Investigacion a la Universidad de Florida. En ese informe los autores proponen una ampliación del modelo en el cual se recurre a la función $\mathfrak{F}_\alpha(y, \nu)$ definida como

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha(y, \nu) &:= \nu + \frac{1}{1-\alpha} E[\Upsilon(y; \varphi) - \nu]^+ \\ &= \nu + \frac{1}{1-\alpha} \left[\int_0^{\underline{y}_\alpha(y, \nu)} [h(y - \xi) - r\xi + cy - \nu] \varphi(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\bar{y}_\alpha(y, \nu)}^\infty [p(\xi - y) - ry + cy - \nu] \varphi(\xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde

$$\underline{y}_\alpha(y, \nu) = \frac{(h+c)y - \nu}{h+r}; \quad \bar{y}_\alpha(y, \nu) = \frac{(p+r-c)y + \nu}{p}. \quad (3.15)$$

Note que $\underline{y}_\alpha(y, \nu)$ y $\bar{y}_\alpha(y, \nu)$ no dependen de la demanda.

Por las propiedades de VaR_α y $CVaR_\alpha$, (ver, por ejemplo el Corolario 12 de [19] y el Ejemplo 3 de [21]), para cada valor de y se cumple que

$$\begin{aligned} \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi) &:= VaR_\alpha(\Upsilon(y; \varphi)) = cy + \rho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi); \\ \varrho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi) &:= CVaR_\alpha(\Upsilon(y; \varphi)) = cy + \varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) = G_\alpha(y; \varphi). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Según el Teorema 10 del documento de referencia, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $\rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi)$ es el valor mínimo que pertenece a $\text{argmin}_\nu \mathfrak{F}_\alpha(y, \nu)$, que es el intervalo de valores ν que minimizan a $\mathfrak{F}_\alpha(y, \nu)$.

2. $\varrho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi) = \mathfrak{F}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi))$.
3. $\min_{y \in [x, \infty)} \varrho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi) = \min_{(y, \nu) \in [x, \infty) \times \mathbb{R}} \mathfrak{F}_\alpha(y, \nu)$.
4. $(y^*, \nu^*) \in \underset{(y, \nu) \in [x, \infty) \times \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \mathfrak{F}_\alpha(y, \nu) \iff y^* \in \underset{y \in [x, \infty)}{\operatorname{argmin}} \varrho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi); \nu^* \in \underset{\nu \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \mathfrak{F}_\alpha(y^*, \nu)$.

Teorema 3.3.1

$$\begin{aligned} \bar{x}(\varphi) = y^* &= \frac{p}{p+r+h} \Phi^{-1} \left(\frac{p+r+\alpha h - (1-\alpha)c}{p+r+h} \right) \\ &\quad + \frac{h+r}{p+r+h} \Phi^{-1} \left(\frac{(p+r-c)(1-\alpha)}{p+r+h} \right). \\ \nu^* &= \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi). \end{aligned}$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \mathfrak{F}_\alpha(y, \nu) &= \frac{1}{1-\alpha} [(h+c)\Phi(\underline{y}_\alpha(y, \nu)) + (c-(p+r))\Phi(\bar{y}_\alpha(y, \nu))]; \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \mathfrak{F}_\alpha(y, \nu) &= 1 - \frac{1}{1-\alpha} [\Phi(\underline{y}_\alpha(y, \nu)) - \Phi(\bar{y}_\alpha(y, \nu)) + 1]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Igualando a cero cada una de las ecuaciones anteriores con el fin de hallar el valor óptimo, se obtiene:

$$\begin{aligned} (h+c)\Phi(\underline{y}_\alpha(y, \nu)) + (p+r-c)\Phi(\bar{y}_\alpha(y, \nu)) &= p+r-c; \\ \Phi(\bar{y}_\alpha(y, \nu)) - \Phi(\underline{y}_\alpha(y, \nu)) &= \alpha. \end{aligned} \quad (3.18)$$

De las ecuaciones anteriores se despejan los valores de $\Phi(\underline{y}_\alpha(y, \nu))$ y $\Phi(\bar{y}_\alpha(y, \nu))$ para obtener:

$$\Phi(\underline{y}_\alpha(y, \nu)) = \frac{(p+r-c)(1-\alpha)}{p+r+h}; \quad \Phi(\bar{y}_\alpha(y, \nu)) = \frac{(p+r-c) + \alpha(h+c)}{p+r+h},$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} (h+c)y - \nu &= (h+r)\Phi^{-1} \left(\frac{(p+r-c)(1-\alpha)}{p+r+h} \right); \\ \nu + (p+r-c)y &= p\Phi^{-1} \left(\frac{p+r-c + \alpha(h+c)}{p+r+h} \right) \end{aligned}$$

y eliminando ν de de las ecuaciones anteriores, se obtiene el primer resultado.

El segundo resultado se obtiene a partir de la segunda ecuación (3.18) pues por definición $\rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi)$ la cumple. \square

Teorema 3.3.2 *Bajo las condiciones 1-7 del modelo, si se tienen dos sucesiones de densidades de demanda $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ y ψ_1, ψ_2, \dots , y si $\varphi_i \leq_{st} \psi_i$ para $i = 1, 2, \dots$, entonces*

1. $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \leq \bar{x}(\psi_1, \psi_2, \dots)$ y
2. $f'(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots) \geq f'(x; \psi_1, \psi_2, \dots)$ para todo $x \geq 0$.

Prueba: La prueba procede por inducción en el número de períodos. Para un período, se considerarán densidades de demanda φ y ψ , donde $\varphi \leq_{st} \psi$. En la prueba se requerirá realizar comparaciones entre los números críticos y las derivadas de las funciones objetivo con funciones de demanda cuyas distribuciones estén estocásticamente relacionadas.

Como $\varphi \leq_{st} \psi$ entonces $\Psi \leq \Phi$, de lo cual se concluye que $\Phi^{-1} \leq \Psi^{-1}$, ya que Ψ y Φ son funciones crecientes; por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{p}{p+r+h} \Phi^{-1} \left(\frac{p+r+\alpha h - (1-\alpha)c}{p+r+h} \right) + \frac{h+r}{p+r+h} \Phi^{-1} \left(\frac{(p+r-c)(1-\alpha)}{p+r+h} \right) \leq \\ & \frac{p}{p+r+h} \Psi^{-1} \left(\frac{p+r+\alpha h - (1-\alpha)c}{p+r+h} \right) + \frac{h+r}{p+r+h} \Psi^{-1} \left(\frac{(p+r-c)(1-\alpha)}{p+r+h} \right). \end{aligned}$$

y en consecuencia, recurriendo al Teorema 3.3.1, se deduce que

$$\bar{x}(\varphi) \leq \bar{x}(\psi). \quad (3.19)$$

Ahora bien, de la segunda ecuación en (3.18), reemplazando ν por ν^* se establece que

$$\begin{aligned} & \Phi(\bar{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi))) - \Psi(\bar{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \psi))) \\ & = \Phi(\underline{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi))) - \Psi(\underline{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \psi))). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Note que por el Teorema 10 de [19] y (3.16)

$$G_\alpha(y; \varphi) = \varrho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi) = \mathfrak{F}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi)), \quad (3.21)$$

por lo cual

$$G'_\alpha(y; \varphi) = \frac{\partial}{\partial y} \mathfrak{F}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi)). \quad (3.22)$$

Suponiendo ahora que existe algún y para el cual $G'_\alpha(y; \varphi) = G'_\alpha(y; \psi)$, ello implica, utilizando la ecuación anterior y la primera ecuación de (3.17), que

$$\begin{aligned} & (h+c)\Phi(\underline{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi))) + (c-(p+r))\bar{\Phi}(\bar{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi))) = \\ & (h+c)\Psi(\underline{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \psi))) + (c-(p+r))\bar{\Psi}(\bar{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \psi))). \end{aligned}$$

Despejando los términos respectivos y sacando factor común, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& (h + c)[\Phi(\underline{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi))) - \Psi(\underline{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \psi)))] \\
= & (p + r - c)[\bar{\Phi}(\bar{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi))) - \bar{\Psi}(\bar{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \psi)))] \\
= & -(p + r - c)[\Phi(\bar{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi))) - \Psi(\bar{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \psi)))] .
\end{aligned}$$

De la igualdad anterior y de (3.20) se deduce que:

$$\begin{aligned}
& (h + c)[\Phi(\bar{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi))) - \Psi(\bar{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \psi)))] \\
= & -(p + r - c)[\Phi(\bar{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \varphi))) - \Psi(\bar{y}_\alpha(y, \rho_{(\alpha, \Upsilon)}(y; \psi)))] ,
\end{aligned}$$

lo cual arroja como conclusión que $h \leq -(p + r)$. Teniendo en cuenta que tanto p como r son positivos, la única posibilidad para que ésto se cumpla es que $h = p = r = 0$, caso en el cual el problema pierde sentido; en consecuencia, tratándose de funciones continuas, se puede afirmar que alguna de las funciones $G'_\alpha(y; \varphi)$ y $G'_\alpha(y; \psi)$ es mayor que la otra. Ahora bien, por la convexidad de $G_\alpha(y; \varphi)$, $G'_\alpha(y; \varphi)$ es creciente y de manera análoga lo es $G'_\alpha(y; \psi)$ y además, como $\bar{x}(\varphi)$ la raíz de la primera función es menor que $\bar{x}(\psi)$ la raíz de la segunda función, se puede concluir que

$$G'_\alpha(y; \varphi) \geq G'_\alpha(y; \psi), \quad (3.23)$$

para cada y . Según la ecuación en (3.12) se obtiene que $f'(x; \varphi) \geq f'(x; \psi)$ para $x \geq 0$.

Adoptando ahora la hipótesis inductiva

$$\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) \leq \bar{x}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \text{ y } f'(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) \geq f'(x; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$$

para todo $x \geq 0$, para cualesquiera $n - 1$ parejas de densidades de demanda φ_i y ψ_i que satisfagan $\varphi_i \leq_{st} \psi_i$ $i = 1, \dots, n - 1$.

Como se sabe por (3.16) que $cy + \varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) = G_\alpha(y; \varphi)$, se puede establecer la siguiente igualdad

$$G'_\alpha(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = G'_\alpha(y; \varphi) + \beta \int_0^\infty f'(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \varphi_1(\xi) d\xi. \quad (3.24)$$

Integrando por partes el último término, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f'(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \varphi_1(\xi) d\xi &= f'(y - \infty; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \Phi(\infty) \\
&\quad + \int_0^{\infty} f''(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \Phi(\xi) d\xi \\
&= -c + \int_0^{\infty} f''(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \Phi(\xi) d\xi \\
&\geq -c + \int_0^{\infty} f''(y - \xi; \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n) \Psi(\xi) d\xi \\
&= \int_0^{\infty} f'(y - \xi; \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n) \psi_1(\xi) d\xi. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Reemplazando (3.23) y (3.25) en (3.24) se prueba que

$$\begin{aligned}
G'_\alpha(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) &\geq G'_\alpha(y; \psi) + \beta \int_0^{\infty} f'(y - \xi; \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n) \psi_1(\xi) d\xi \\
&= G'_\alpha(y; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n). \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Por el Teorema 3.2.4, $G_\alpha(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ y $G_\alpha(y; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ son convexas y entonces sus derivadas $G'_\alpha(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ y $G'_\alpha(y; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ son crecientes. En vista de (3.26) ello implica que las raíces de esas funciones guardan la relación

$$\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \leq \bar{x}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$$

y entonces

$$f'(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \leq f'(x; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n),$$

para todo $x \geq 0$. Ésto concluye la prueba del Teorema para n períodos.

Para infinitos períodos, el mismo argumento utilizado al final de la prueba del Teorema 3.2.4 garantiza la estabilidad de resultados en el paso al límite. \square

Con base en el Teorema 3.3.2, se pueden deducir varios Corolarios que describen la variación del número crítico cuando la distribución de la demanda varía siguiendo algún patrón definido. Esos Corolarios, con los respectivos Lemas, son válidos para el modelo original de Karlin y su validez se mantiene en el caso del modelo estudiado. Su enunciado y las pruebas correspondientes han sido revisadas cuidadosamente, una vez efectuados los siguientes

cambios correspondientes:

$$L'(y; \varphi_1) \text{ por } \varrho'_{(\alpha; \varphi_1)}(y; \varphi_1),$$

$$\alpha \int_0^y f'(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots) \varphi_1(\xi) d\xi \text{ por } \beta \int_0^\infty f'(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots) \varphi_1(\xi) d\xi$$

$$\text{y } \alpha c \int_0^y \varphi_1(\xi) d\xi \text{ por } \beta c \int_0^\infty \varphi_1(\xi) d\xi.$$

Salvo esos cambios las pruebas son idénticas y por eso no se incluyen, más por integridad del texto, si se incluyen los enunciados con sus correspondientes significados.

El Corolario 3.3.3 afirma que el número crítico es una función no decreciente del número de períodos.

Corolario 3.3.3 *Si las funciones p y h son lineales y las densidades de demanda para los primeros $n + 1$ períodos están determinados por $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$ entonces*

$$\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, 0) \leq \bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}).$$

Lema 3.3.4 *Si las densidades de demanda están dadas por $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ y si*

$$\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \leq \bar{x}(\varphi_2, \varphi_3, \dots),$$

Entonces $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) = \bar{x}(\varphi_1, \varphi_1, \varphi_1, \dots)$, donde $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_1, \varphi_1, \dots)$ se puede calcular explícitamente como la única raíz positiva de la ecuación

$$G'_\alpha(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = c + \varrho'_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi) - \beta c \int_0^\infty \varphi_1(\xi) d\xi.$$

El siguiente Corolario prueba que si la densidad de demanda incrementa estocásticamente en períodos sucesivos, el número óptimo crítico también incrementa, y el número crítico puede ser calculado en cada período como si la densidad de demanda en los futuros períodos fuera estacionaria.

Corolario 3.3.5 *Si $\varphi_1 \leq_{st} \varphi_2 \leq_{st} \varphi_3 \dots$ entonces:*

$$1. \bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \leq \bar{x}(\varphi_2, \varphi_3, \dots) \text{ y}$$

$$2. \bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) = \bar{x}(\varphi_1, \varphi_1, \dots).$$

En todo caso, según el Lema siguiente, el número crítico de un sistema de demandas no estacionario es a lo sumo igual al número crítico de un sistema estacionario (es decir, constante).

Lema 3.3.6 *Si las densidades de demandas futuras están dadas por $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, entonces $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \leq \bar{x}(\varphi_1, \varphi_1, \dots)$ siempre.*

Corolario 3.3.7 *Si las densidades de demandas futuras están dadas por $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, y si $\varphi_2 \leq_{st} \varphi_1$ entonces*

$$\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \geq \bar{x}(\varphi_2, \varphi_3, \dots).$$

Corolario 3.3.8 *Si $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) > \bar{x}(\varphi_2, \varphi_3, \dots)$, donde $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, son las densidades de demanda para el futuro y $\varphi_1 \leq_{st} \varphi_2$, entonces*

$$\bar{x}(\varphi_2, \varphi_3, \dots) > \bar{x}(\varphi_3, \varphi_4, \dots).$$

Capítulo 4

MODELO SIN RESERVA DE PEDIDOS

En esta sección se presenta un modelo que fue explorado con el propósito de entender mejor el modelo original de Karlin. El aporte de la sección a los objetivos del Proyecto investigativo es indirecto; de hecho la sección 3 da cumplimiento a los objetivos propuestos y, desde esa perspectiva, la presente sección podría omitirse. Esa opción cerraría la oportunidad de profundizar en el tipo de problemáticas afrontadas a lo largo del Proyecto, y ocultaría posibilidades de nuevos desarrollos y aplicaciones.

En este capítulo se busca mostrar la dificultad para obtener los resultados del modelo original sin reserva de pedidos, con la medida de riesgo CVaR para el primer pedido y el valor esperado para los períodos subsiguientes. El mínimo de la función de costos es entonces el siguiente:

$$f(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots) = \min_{y \geq x} \left\{ c(y - x) + \varrho_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi_1) + \beta \left[f(0; \varphi_2, \varphi_3, \dots) \int_y^\infty \varphi_1(\xi) d\xi + \int_0^y f(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots) \varphi_1(\xi) d\xi \right] \right\}.$$

La Conjetura que se quiere demostrar es la que se enuncia a continuación. Se resume el desarrollo de la prueba y se analiza el punto que no fue posible demostrar. La Conjetura entonces **no está demostrada** y puede no ser válida.

Conjetura 4.0.9 *Bajo las condiciones 1-5 y 7 del modelo con reserva de pedidos, las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *La regla óptima de orden está caracterizada por un solo número crítico $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$.*

El número crítico determina completamente la solución de la siguiente manera: Si $x < \bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$, la política óptima es ordenar hasta $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$; si $x > \bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ la política

óptima es no ordenar.

2. $f(x; \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ es una función convexa de x .

La prueba del cumplimiento de la Conjetura para el período 1 es idéntica a la del Teorema 3.2.4.

Para el caso de n períodos, se tiene que:

$$\begin{aligned}
G''_{\alpha}(y; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) &:= \varrho''_{(\alpha, \Pi)}(y; \varphi_1) + \beta \left[f'(0; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \varphi_1(y) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^y f''(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \varphi_1(\xi) d\xi \right] \\
&= \frac{1}{1 - \alpha} \left[\int_0^{\underline{y}_{\alpha}} h''(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_{\bar{y}_{\alpha}}^{\infty} p''(\xi - y) \varphi(\xi) d\xi \right. \\
&\quad \left. + h'(y - \underline{y}_{\alpha}) \varphi(\underline{y}_{\alpha}) + [p'(\bar{y}_{\alpha} - y) + r] \varphi(\bar{y}_{\alpha}) \right] \\
&\quad + \beta \left[-c \varphi_1(y) + \int_0^y f''(y - \xi; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \varphi_1(\xi) d\xi \right] \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Donde se ha recurrido a la igualdad $f'(0; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) = -c$, con base en la hipótesis de inducción (3.12).

En este punto se trata de lograr una condición sencilla y de fácil cumplimiento que sea suficiente para lograr la convexidad deseada. Una primera opción podría ser la condición

$$\frac{1}{1 - \alpha} [h'(y - \underline{y}_{\alpha}) \varphi(\underline{y}_{\alpha}) + p'(\bar{y}_{\alpha} - y) \varphi(\bar{y}_{\alpha}) + r \varphi(\bar{y}_{\alpha})] - \beta c \varphi(y) > 0,$$

que conduciría a un condicionamiento aún excesivamente complejo. Otra condición suficiente para el propósito es la provista por

$$\frac{1}{1 - \alpha} r \varphi(\bar{y}_{\alpha}) > \beta c \varphi(y).$$

Teniendo en cuenta que $r > c$, la condición anterior se cumple si

$$\frac{\varphi(\bar{y}_{\alpha})}{\varphi(y)} > 1 - \alpha. \quad (4.2)$$

Este tipo de condición aparece en las llamadas Clases de Envejecimiento, entre las cuales se buscó cuál sería la apropiada. De hecho, se encontró que si φ pertenece a la clase de Razón de Fallo Invertida Creciente, entonces se cumple 4.2: Dada una variable aleatoria D con

densidad φ y función de distribución Φ , su Razón de Fallo Invertida es $\lambda(t) := \varphi(t)/\Phi(t)$ y D pertenece a la familia de Razón de Fallo Invertida Creciente RFIC (IRFR en inglés) si $\lambda(t)$ es creciente.

En el caso presente, como $\bar{y}_\alpha \geq y$, si la demanda es RFIC entonces

$$\frac{\varphi(\bar{y}_\alpha)}{\Phi(\bar{y}_\alpha)} \geq \frac{\varphi(y)}{\Phi(y)} > 1 - \alpha,$$

de donde se concluye 4.2. Sin embargo, la clase RFIC está compuesta por funciones no positivas; en efecto, en Block et al. (1998) [6] se prueba que para esa clase de funciones, su intervalo de soporte debe ser $(-\infty, b)$, donde b es finita. En consecuencia las variables aleatorias no negativas no pueden ser RFIC.

El enfoque seguido en este trabajo para buscar la validez del teorema fue considerar el modelo con reserva, en el cual desaparece el término $-\beta c\varphi(y)$ en (4.1).

Capítulo 5

PROPUESTAS DE INVESTIGACIÓN Y CONCLUSIONES

5.1. Propuestas de Investigación

1. Estudiar en los modelos propuestos la ordenación de valores críticos a la luz del orden estocástico \leq_{cx} .
2. Buscar combinaciones de medidas de riesgos que, además de concentrar la respuesta a la aversión al riesgo en el primer período, compatibilice la medida de riesgo de ese período con la de los períodos siguientes, al punto de permitir replicar los resultados de los Teoremas 3.2.1 y 3.3.2 en el modelo sin reserva de pedidos (non-backlog).
3. Formular y estudiar el modelo bajo diversas medidas coherentes de riesgo en el primer período, que sean apropiadas para optimization adversa al riesgo.
4. La utilización de Clases de Envejecimiento para condicionar las demandas podría ampliar las posibilidades de análisis de los modelos. En particular, valdría la pena buscar la obtención de nuevos resultados en las comparaciones estocásticas.

5.2. Conclusiones

1. En un modelo con reserva de pedidos y medida de riesgo CVaR para el primer período, se alcanzan los mismos resultados sobre política óptima del modelo equivalente con medida de riesgo valor esperado para el primer período.

2. En el modelo con reserva de pedidos y medida de riesgo CVaR para el primer período, no parece promisorio la búsqueda de una condición razonable sobre los parámetros que permita alcanzar los resultados deseados sobre política óptima y comparaciones estocásticas.
3. Para obtener los resultados sobre órdenes estocásticos, además de mantener la condición de reserva de pedidos en el modelo, se substituyó la hipótesis de convexidad de las funciones de costo de almacenamiento y penalización por su linealidad, pues la estrategia seleccionada para la prueba exigió la solución explícita del problema de optimización. Vale la pena intentar la solución del problema de optimización bajo la hipótesis de convexidad de las funciones.

Bibliografía

- [1] Arrow, K. (2002). The genesis of Optimal inventory policy. *Operations Research*. **50**, 1, 1-2.
- [2] Arrow, K.; Harris, T.; Marschak, J. (1951). Optimal inventory policy. *Econometrica*. **19**, 3, 250-261
- [3] Arrow, K.; Karlin, S.; Scarf, H. (1958). *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*. Stanford University Press.
- [4] Artzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J.-M.; Heath, D. (1997). Thinking coherently. *Risk* **10**, 11, 33-49.
- [5] Birge, J.; Louveaux, F. (1997). *Introduction to Stochastic Programming*. Springer.
- [6] Block, H. W.; Savits, T. H. y Singh H. (1998). The Reversed Hazard Rate Function. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 12 , pp 69-90 doi:10.1017/S0269964800005064.
- [7] Bulinskaya, E. (2004). Stochastic orders and inventory problems. *International Journal of Production Economics*. 84, 125-135.
- [8] Dvoretzky, A., J.; Kiefer, J. and Wolfowitz J. (1953). On the optimal character of the (S, s) policy in inventory theory. *Econometrica* 21 4 586-596.
- [9] Hardy, G.; Littlewood, J.; Polya, G. (1929). Some simple inequalities satisfied by convex functions. *Messenger Mathematics* 58, 145-152.
- [10] Karamata, J. (1932). Sur une inégalité relative aux fonctions convexes. *Publications Mathématiques de l'Université Belgrade* 1, 145-148.
- [11] Karlin, S. (1960). Dynamic inventory policy with varying stochastic demands. *Management Science*. 3, 3, 231-258.
- [12] Karlin, S.; H. Scarf. (1958). *Inventory Models of the Arrow-Harris- Marschak Type with Time Lag*. K. J. Arrow, S. Karlin, H. Scarf, eds. *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*. Stanford University Press. Chapter 9, 155-178.

- [13] Karlin, S. (1955). The Structure of Dynamic Programming Models. *Naval Research Logistics Quarterly* II, 285-94.
- [14] Lorenz, M. (1905). Methods for measuring the concentration of wealth. *Journal of the American Statistical Association*. 9, 209-219.
- [15] Mosler, K.; Scarsini, M. (1991). *Stochastic Orders and Decision under Risk*. Lecture Notes-Monograph Series, Vol. 19. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA.
- [16] Müller, A.; Stoyan, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley.
- [17] Pflug, G. (2000). *Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk*, in *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*. (S. Uryasev ed.), Kluwer Academic Publishers.
- [18] Rockafellar, R. (2001). *Optimization under uncertainty*. Dept. of Mathematics University of Washington Seattle.
- [19] Rockafellar, R.; Uryasev, S. (2001). *Conditional Value-at-Risk for general loss distributions*. Dept. of industrial and System Engineering. Research Report.
- [20] Rockafellar, R. (2007). *Coherent approaches to risk in optimization under uncertainty*. *Tutorials in operations research*.
- [21] Rockafellar, R.; Uryasev, S.; Zabarankin, M. (2007). *Deviation measures in risk analysis and optimization*. Department of Industrial and Systems Engineering. Research Report.
- [22] Romero, R. (2005). *Medidas de riesgo financiero*. *Economía y administración*. 149, 2, 57-63.
- [23] Scarf, H. (1960). *The Optimality of (S, s) Policies in the Dynamic Inventory Problem*. K. J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes, eds. *Mathematical Methods in the Social Sciences* 1959. Stanford University Press 196-202.
- [24] Shaked, M.; Shantikumar, J. (1994). *Stochastic Orders and their Applications*. Academic Press, New York.
- [25] Stoyan, D. (1976). *Qualitative Eigenschaften und Abschätzungen Stochastischer Modelle*. Akademie Verlag, Berlin.
- [26] Stoyan, D. (1983). *Comparison Methods for Queues and other Stochastic Models*. Wiley, New York.

- [27] Wallace, S.; Ziemba, W. (2005). *Applications of Stochastic Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [28] Zipkin, P. (2000). *Foundations of Inventory Management*. Mc. Graw Hill.