

PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DE UN
SISTEMA DE ECUACIONES INTEGRALES
QUE MODELAN LA DISPONIBILIDAD DE UN
SISTEMA EN SERIE REPARABLE.

LILIANA RODRÍGUEZ FIGUEREDO

CÓDIGO: 201328301016



UNIVERSIDAD DE EAFIT
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
MEDELLÍN
2016

PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DE UN
SISTEMA DE ECUACIONES INTEGRALES
QUE MODELAN LA DISPONIBILIDAD DE UN
SISTEMA EN SERIE REPARABLE.

LILIANA RODRÍGUEZ FIGUEREDO

CÓDIGO: 201328301016

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGÍSTER EN MATEMÁTICA APLICADA

DIRECTOR

ÁLVARO CALVACHE ARCHILA

DOCTOR EN MATEMÁTICA

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN

PROCESOS ESTOCÁSTICOS



UNIVERSIDAD DE EAFIT
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
MEDELLÍN
2016

Título en español

Planteamiento y solución de un sistema de ecuaciones integrales que modelan la disponibilidad de un sistema en serie reparable.

Title in English

Formulation and solution of integral equations system that model the availability of a repairable series system.

Resumen: El presente trabajo considera un sistema reparable en el que se consideran dos estados: up (el sistema trabaja) y down (el sistema no trabaja). El modelamiento de la función de distribución del tiempo operacional acumulativo en un período de tiempo $[0, t]$ es realizado mediante la disponibilidad del tiempo en una misión (WMA por sus siglas en inglés work-mission-availability) y ecuaciones integrales tipo convolución. Mediante un modelo semimarkoviano, se estudia numéricamente un sistema en serie de dos unidades, en el modelo se plantea y desarrolla el sistema de ecuaciones integrales para la disponibilidad de dicho sistema; además, se utiliza un método numérico específico para resolver el sistema de ecuaciones integrales.

Abstract: This study takes into account a repairable system in which two states: up (the system works) and down (the system does not work) are considered. The modeling function of the distribution of the accumulative operational time in a length of time $[0, t]$ is carried out by means of the availability of time in a mission (WMA, work-mission-availability) and integral equations convolution type. Using a semi-Markov model, it is possible to study, numerically a serial system of two units, as shown on the model the system of integral equations is stated and developed for the availability of the mentioned system. Besides, an specific numeric method is used to solve the system of integral equations

Palabras clave: Disponibilidad del tiempo en una misión, modelo semimarkoviano, procesos de Markov, sistema de ecuaciones integrales.

Keywords: Work-mission-availability, semi-Markov model, Markov processes, integral equations system.

Nota de aceptación

Trabajo de grado

Aprobado

Jurado

José E. Valdés Castro

Director

Álvaro Calvache Archila

Medellín, Julio de 2016

Dedicado a

Las personas importantes en mi vida, que siempre estuvieron listas para brindarme todo su apoyo y ayuda. Por la paciencia, comprensión prefirieron sacrificar su tiempo para que yo pudiera cumplir con mi sueño y hacerlo realidad. Con todo mi amor esta tesis se la dedico a ustedes:

 Mi madre: Carmenza.

 Mis hijos: Andrés Felipe y Mario Alejandro.

 Mi hermano: Ariel

 Mi sobrino: Julián Esteban

 Mi abuelita: Eva

Agradecimientos

Me gustaría que estas líneas sirvieran para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización de este sueño, en especial a:

Álvaro Calvache Archila, director de esta investigación, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continua de la misma; pero sobre todo por la paciencia, motivación y el apoyo recibido durante este tiempo.

Mis amigos Nelsy Rocío Gonzáles y Pedro Nel Maluendas Pardo por su apoyo incondicional en este proceso de superación.

Al profesor Luis Alfonso Salcedo Plazas director de la escuela de Matemáticas y Estadística de la Uptc, quien apoyo continuamente mi proceso de formación.

A mis queridos profesores de la Universidad Eafit, en especial a Freddy Marín y Jairo Villegas quienes me apoyaron en momentos muy difíciles.

Y todas aquellas personas que de una u otra manera formaron parte de este proceso de superación.

Un agradecimiento muy especial merece la comprensión, paciencia y el ánimo recibido de mi familia.

A todos ustedes, muchas gracias.

Índice general

Índice general	I
Índice de tablas	III
Índice de figuras	IV
Introducción	V
1. Procesos markovianos	1
1.1. Cadenas de Markov	1
1.1.1. Probabilidades de Transición	1
1.1.2. Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov	2
1.2. Procesos semimarkovianos	3
1.2.1. Núcleo de un proceso semimarkoviano	4
2. Disponibilidad del tiempo en una misión	6
2.1. Preliminaries	6
2.2. Ecuaciones integrales para la disponibilidad del tiempo en una misión	8
3. Disponibilidad en un sistema en serie	12
3.1. Introducción	12
3.2. Modelo	12
3.2.1. Descripción del modelo	12
3.2.2. Espacio de estados	13
3.2.3. Supuestos	14
3.2.4. Probabilidades de transición del modelo	14
4. Ejemplo numérico	21

Índice general

Conclusión	25
Trabajo futuro	26
Bibliografía	27

Índice de tablas

3.1. Distribución de tiempos de vida, de reparación y de mantenimiento utilizados en el modelo para un sistema en serie reparable.	13
4.1. Valores asumidos por el modelo para un sistema en serie reparable con dos unidades.	22
4.2. Valores de la función de distribución del tiempo operacional acumulativo, cuando el tiempo de misión es de 120 horas.	22
4.3. Valores asumidos por el modelo para tres situaciones de un sistema en serie reparable con dos unidades.	23
4.4. Valores de la función de distribución del tiempo operacional acumulativo para tres tiempos de misión 80, 100 y 60 horas.	23

Índice de figuras

3.1. Sistema en serie con dos unidades.	12
3.2. Transiciones del proceso $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$; donde A y B son las unidades, T hace referencia que la unidad trabaja, MP hace referencia que la unidad entra a mantenimiento preventivo y NT hace referencia que la unidad está en reparación porque ha presentado alguna falla.	15
4.1. Función de distribución del tiempo operacional acumulativo para un tiempo de misión igual a 120 horas.	22
4.2. Función de distribución del tiempo operacional acumulativo, cuando el tiempo de misión es igual a 80, 100 y 60 horas.	24

Introducción

En muchos estudios las variables aleatorias se han trabajado de tal manera que las características aleatorias del fenómeno permanecen constantes a través del tiempo. Al incluir en el estudio la presencia de la variable determinística tiempo se está considerando que, de alguna forma, la variable aleatoria depende del tiempo. En otras palabras, la variable aleatoria dependerá del fenómeno probabilístico y del tiempo. En consecuencia, cualquier función que se establezca en términos de la variable aleatoria, como lo son la función de distribución o la función de densidad, serán también dependientes del tiempo.

Algunos ejemplos de variable aleatorias observadas puede ser: económica (índice de precios al consumidor, demanda de un producto, existencias en un determinado almacén), física (temperatura de un proceso, velocidad del viento en una central eólica, concentración en la atmósfera de un contaminante) o social (número de nacimientos, votos de un determinado partido), entre otros. Se supone que los datos se obtienen en intervalos regulares de tiempo (horas, días, años) con el fin prever su evolución futura. Así, una serie temporal será una sucesión de valores de una variable obtenidos de manera secuencial durante el tiempo. Por tanto, para cada instante t tendremos una variable aleatoria distinta representada por X_t , con lo que un proceso estocástico puede interpretarse como una colección de variables aleatorias cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo.

Un caso puntual de la aplicación de los procesos estocásticos en ingeniería, se encuentra en el campo de fiabilidad más exactamente en sistemas reparables (se dice que un sistema es reparable, si el sistema al momento de fallar puede ser reparado y ser puesto nuevamente en funcionamiento). Los sistemas reparables han sido motivo de muchas investigaciones, y una de sus temáticas es el estudio de la estimación de las características del tiempo operativo del sistema; por ejemplo, la función de distribución (cdf) del tiempo operacional acumulativo en un intervalo finito $[0, t]$ es representado en términos de disponibilidad de trabajo.

Antecedentes de la teoría de disponibilidad

El concepto de disponibilidad se desarrolló originalmente para sistemas reparables que requerían operar continuamente, y que en cualquier instante o estaban operando o estaban fuera de operación debido a una falla sobre la cual se está trabajando para restaurar la operación en un tiempo mínimo. La disponibilidad es una medida importante y útil, es el porcentaje de tiempo que un sistema se encuentra disponible para realizar sus

funciones correctamente. La disponibilidad está basada únicamente en la distribución de fallas y la distribución de tiempo de reparación.

Muchos autores han hecho un aporte científico al concepto de disponibilidad, entre muchos investigadores se puede mencionar los de: Donatiello y Lyer [9], muestran una solución de forma cerrada para la distribución de la disponibilidad del sistema; Rubino y Sericola [11], exponen sus ideas sobre el intervalo de cálculo de distribución de la disponibilidad; Csenki [5] da a conocer su trabajo titulado disponibilidad conjunta de los sistemas modelados por procesos semimarkovianos finitos y posteriormente presenta sus trabajos: disponibilidad de misión de sistemas de Markov semi-reparable [6], análisis transitorio de la disponibilidad de intervalo para sistemas reparables modelados por procesos semimarkovianos finitos [7] y una nueva aproximación del tiempo operacional acumulativo para modelos de sistemas reparables [8].

Aportes recientes sobre disponibilidad, son hechos por Bednara [1] que muestra una forma explícita para funciones de disponibilidad cuando el comportamiento de permanencia en cada uno de los estados pertenece a una clase restringida de distribuciones Gamma, Calvache [4] comparte su trabajo aproximaciones de las funciones de renovación y de disponibilidad, con aplicaciones en el área administrativa.

Objetivos

El objetivo central de esta trabajo de maestría es plantear y solucionar un sistema de ecuaciones integrales que modelan la disponibilidad de un sistema reparable en serie.

Este objetivo puede ser desglosado en los siguientes objetivos secundarios:

1. Revisar y demostrar conceptos de procesos markovianos en particular (Cadenas de Markov y procesos semimarkovianos).
2. Modelar la disponibilidad de un sistema reparable en serie de dos unidades mediante un sistema de ecuaciones integrales.
3. Resolver numéricamente el sistema de ecuaciones integrales para la disponibilidad del tiempo en una misión.

Organización de la tesis

La tesis está estructurada de la siguiente manera:

- En el Capítulo 1 se presentan conceptos básicos de las temáticas sobre cadenas de Markov y procesos semimarkovianos.
- En el Capítulo 2 se realiza un análisis detallado de las ecuaciones integrales para la disponibilidad del tiempo en una misión.
- En el Capítulo 3 se expone el modelo a trabajar con sus respectivos supuestos, se hace la deducción de las probabilidades de transición del proceso $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$

y se plantea el sistema de ecuaciones integrales para la disponibilidad de un sistema en serie reparable con dos unidades.

- En el Capítulo 5 se presentan los resultados de la función de distribución del tiempo operacional acumulativo para un sistema reparable en serie con dos unidades para diferentes tiempos de misión.

Una vez realizada la exposición de todos los capítulos se presentarán unas conclusiones finales de los mismos. Se dedicará un apartado a presentar una futura investigación a la que puede dar este trabajo. Por último, se relaciona la bibliografía que se consultó para el desarrollo de este trabajo.

Espero que la mencionada información sea del agrado del lector y, en un futuro, sea útil de alguna manera, para la academia y sectores en los que se aplique los conceptos de procesos industriales más específicamente en disponibilidad de un sistema.

CAPÍTULO 1

Procesos markovianos

En el presente capítulo se abordan conceptos de procesos estocásticos markovianos: un primer concepto es Cadenas de Markov, se exponen conceptos de probabilidades de transición, Cadenas de Markov homogéneas, ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, entre otros; y un segundo concepto es Procesos semimarkovianos, se presentan los conceptos de tiempo de espera en un estado, tiempo de retención, distribución de probabilidad del tiempo de retención, núcleo de un proceso semimarkoviano, entre otros. Estos conceptos se pueden encontrar en Liliana et al. [2] y Howard [10].

1.1. Cadenas de Markov

Un tipo especial de proceso estocástico es el que posee la propiedad que “dado el presente, el futuro es independiente del pasado”. Un caso particular de procesos estocásticos que poseen esta propiedad es el que tiene espacio de estado discreto y espacio de parámetro discreto, llamado “Cadena de Markov”.

Definición 1. Un proceso estocástico $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ con espacio de estados S discreto, es una Cadena de Markov si:

$$P(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}),$$

para todo $x_1, \dots, x_n \in S$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.1.1. Probabilidades de Transición

Definición 2. Sea $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ una Cadena de Markov, la probabilidad de transición en el tiempo n , simbolizada por $p_{ij}(n)$, representa la probabilidad que el sistema se encuentre en el estado j en el tiempo $n + 1$, dado que se encontraba en el estado i en el tiempo n .

$$p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad \text{para todo } i, j \in S.$$

Definición 3. Una Cadena de Markov $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ es homogénea si la probabilidad de transición $p_{ij}(n)$ es independiente de n , es decir:

$$p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_{n+m+1} = j \mid X_{n+m} = i) = p_{ij}(n+m),$$

para todo $i, j \in S$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$. En tal caso se escribe p_{ij} en lugar de $p_{ij}(n)$.

Definición 4. Sean $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ una cadena homogénea de Markov y $m \in \mathbb{N}$, la probabilidad de transición en m pasos simbolizada por $p_{ij}^{(m)}$, representa la probabilidad de cambio del estado i al estado j en m pasos, esto es,

$$p_{ij}^{(m)} = P(X_m = j \mid X_0 = i), \quad \text{para todo } i, j \in S.$$

Notése que $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$.

Definición 5. La matriz de transición (en un paso) de una cadena homogénea de Markov $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ es:

$$P = (p_{ij})_{i,j \in S}.$$

Observación 1. Las probabilidades de transición cumplen las siguientes propiedades:

1. $0 \leq p_{ij} \leq 1$, para cada $i, j \in S$ y cada $t \geq 0$, debido a los axiomas de probabilidad.
2. $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$; en efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} p_{ij} &= \sum_{j \in S} P(X_1 = j \mid X_0 = i) \\ &= P\left(X_1 \in \bigcup_{j \in S} j \mid X_0 = i\right) \\ &= \frac{P(X_1 \in S, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \frac{P(X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = 1. \end{aligned}$$

Definición 6. La matriz de transición en m pasos de una cadena homogénea de Markov $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ es:

$$P^{(m)} = (p_{ij}^{(m)})_{i,j \in S}.$$

1.1.2. Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Teorema 1. Sea $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov homogénea, entonces para todo $i, j \in S$ se tiene que:

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}, \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Demostración.

Sean $i, j \in S$, y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}
 p_{ij}^{(m+n)} &= P\{X_{m+n} = j \mid X_0 = i\} \\
 &= \sum_{k \in S} P\{X_{m+n} = j, X_m = k \mid X_0 = i\} \\
 &= \sum_{k \in S} \frac{P\{X_0 = i, X_m = k, X_{m+n} = j\}}{P\{X_0 = i\}} \\
 &= \sum_{k \in S} \frac{P\{X_{m+n} = j \mid X_m = k, X_0 = i\} P\{X_m = k \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\}}{P\{X_0 = i\}} \\
 &= \sum_{k \in S} P\{X_{m+n} = j \mid X_m = k, X_0 = i\} P\{X_m = k \mid X_0 = i\} \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

Como el proceso $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ es una cadena de Markov homogénea, entonces:

$$\begin{aligned}
 P\{X_{m+n} = j \mid X_m = k, X_0 = i\} &= P\{X(m+n) = j \mid X_m = k\} \\
 &= P\{X(n) = j \mid X_0 = k\} = p_{kj}^{(n)}.
 \end{aligned}$$

Reemplazando la expresión anterior en (1.2) se tiene que:

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{kj}^{(n)} p_{ik}^{(m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}.$$

□

Las ecuaciones (1.1) son llamadas “*Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov*”, y en forma matricial se pueden escribir como:

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)} = P^{(m)} P^{(n)}, \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Además, se observa que $P^{(m)} = P^m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

1.2. Procesos semimarkovianos

Definición 7. Tiempo de espera en un estado i . Sea $\{Y_t; t \geq 0\}$ un proceso estocástico con espacio de estado S discreto. El tiempo de espera o permanencia del proceso en un estado $i \in S$, es un tiempo aleatorio τ_i , que corresponde al tiempo en que el proceso $\{Y_t, t \geq 0\}$ permanece en el estado i . Es decir, para algún $t_0 \geq 0$, $Y(t_0^-) \neq i$, $Y(t) = i$, para $t \in [t_0, t_0 + \tau_i)$ y $Y(t_0 + \tau_i) \neq i$.

Definición 8. Proceso semimarkoviano. Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ una cadena homogénea de Markov con espacio de estados S y con matriz de transición P . Sea $\{Y_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico con espacio de estados S . Se dice que el proceso $\{Y_t; t \geq 0\}$ es semimarkoviano si es homogéneo y

$$P[Y(t_0 + \tau_i) = j \mid Y(t_0^-) \neq i, Y(t) = i \quad \text{para } t \in [t_0, t_0 + \tau_i)] = p_{ij}, \tag{1.3}$$

para todo $i, j \in S, i \neq j$. Como el proceso $\{Y_t; t \geq 0\}$ es homogéneo, (1.3) se puede escribir como:

$$P[Y(\tau_i) = j \mid Y(t) = i \text{ para } t \in [0, \tau_i]] = p_{ij}, \quad \text{para todo } i, j \in S, i \neq j.$$

Definición 9. Tiempo de retención. El tiempo de retención de un estado i a un estado j del proceso semimarkoviano $\{Y_t; t \geq 0\}$ es una variable aleatoria denotada por τ_{ij} , que corresponde al tiempo en que una vez el proceso $\{Y_t; t \geq 0\}$ alcanza el estado i , permanece allí hasta que cambia al estado j .

Definición 10. Dado un proceso semimarkoviano $\{Y_t; t \geq 0\}$ la distribución de probabilidad de τ_{ij} , se define por:

$$F_{ij}(t) = P(\tau_{ij} \leq t) \quad \text{para todo } i, j \in S. \quad (1.4)$$

1.2.1. Núcleo de un proceso semimarkoviano

Teorema 2. Sea $\{Y_t; t \geq 0\}$ un proceso semimarkoviano proveniente de una cadena de Markov $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, con matriz de transición $P = (p_{ij})$ con $i, j \in S$, entonces la función de distribución de la variable aleatoria τ_i con $i \in S$, satisface:

$$P(\tau_i \leq t) = \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} F_{ij}(t) p_{ij} \quad (1.5)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} P(\tau_i \leq t) &= P(\tau_i \leq t; X_0 = i) \\ &= P(\tau_i \leq t; X_0 = i; X_1 \neq i) \\ &= \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} P(\tau_{ij} \leq t; X_0 = i; X_1 = j) \\ &= \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} P(\tau_{ij} \leq t) P(X_1 = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} P(\tau_{ij} \leq t) p_{ij} \\ &= \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} F_{ij}(t) p_{ij}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3. El núcleo de la matriz del proceso semimarkoviano $\{Y_t; t \geq 0\}$ es definido como $Q(t) = (q_{ij}(t))_{i, j \in S}$, para $t \geq 0$, donde:

$$q_{ij}(t) = \begin{cases} P(\tau_i \leq t, Y(\tau_i) = j), & \text{si } i \neq j, \\ 0, & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (1.6)$$

En este caso obsérvese que:

$$q_{ij}(t) = P(\tau_{ij} \leq t) p_{ij} = p_{ij} F_{ij}(t), \quad \text{con } t \geq 0.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} P(\tau_i \leq t, Y(\tau_i) = j) &= P(\tau_i \leq t | Y(\tau_i) = j) P(Y(\tau_i) = j) \\ &= P(\tau_{ij} \leq t) P(X_{n+1} = j | X_n = i) \\ &= F_{ij}(t) p_{ij} \\ &= p_{ij} F_{ij}(t). \end{aligned}$$

□

Disponibilidad del tiempo en una misión

Cuando un sistema es puesto en funcionamiento está sujeto a que la utilidad del sistema se vea afectada por causas externas al sistema; es decir, a fallas (fallas que pueden ser reparadas y el sistema vuelve a su funcionamiento). Una medida para evaluar el sistema en cuanto a su rendimiento es mediante el modelado de la disponibilidad del sistema, ya que la disponibilidad de un sistema se ve afectada por la distribución del tiempo de vida útil y de la capacidad de recuperación del sistema.

2.1. Preliminaries

1. $\mathbf{0}$, \mathbf{I} y $\mathbf{1}$ son la matriz nula, la matriz identidad y el vector columna de unos, respectivamente.
2. $Y = \{Y_t \mid t \geq 0\}$ es la evolución temporal del sistema. Y se asume como un proceso semimarkoviano proveniente de una cadena de Markov con matriz de transición P , en donde $p_{ii} = 0$ para toda $i \in S$.
3. $S = U \cup D$ es el espacio de estados del proceso Y , donde U y D indican el conjunto de estados de trabajo del sistema (funciona) y el conjunto de estados de reparación del sistema (no funciona), respectivamente.
4. El tiempo de acumulación operativo C_t es el tiempo total en el cual el proceso Y permanece en uno de los estados que funciona (trabaja) U , durante el intervalo de tiempo $[0, t]$. Esto es, si denotamos $\{Y \in U\} = \{t \geq 0 \mid Y_t \in U\}$, entonces $C_t = \int_0^t I_{\{Y \in U\}}(v) dv$, donde I_A representa la función característica sobre el evento A . También, $C = \{C_t \mid t \geq 0\}$ es el *proceso de tiempo de acumulación operativo*.
5. $M_v = \inf\{t \in [0, \infty) \mid C_t \geq v\}$ es el tiempo de la misión, que es, el menor tiempo requerido para que el tiempo de acumulación operativo, alcance un tiempo predeterminado v . En este contexto M_v es el menor tiempo en el que una misión que requiere v unidades de tiempo de operación acumulativo se complete, si el sistema es iniciado en el tiempo 0, v es llamada la *duración de la misión*. También, $M = \{M_v \mid v \geq 0\}$ es el *proceso del tiempo de la misión*.
6. $M_v - v$ es el *tiempo total en reparación asociado con una duración de misión v* .

7. La relación entre C y M . Para $t, v \geq 0$:

$$C_t \geq v \iff M_v \leq t. \quad (2.1)$$

A continuación se analiza la anterior expresión:

\Rightarrow Supóngase que $C_t \geq v$.

Sea $A = \{w \in [0, \infty) / C_w \geq v\}$ y $M_v = \min A$ como $t \in A$ entonces $M_v \leq t$.

\Leftarrow Supóngase que $M_v \leq t$.

Sea $A = \{w \in [0, \infty) / C_w \geq v\}$, por hipótesis $M_v \leq t$ y por ser C un proceso no decreciente se tiene que:

$$C_{M_v} \leq C_t. \quad (2.2)$$

Pero, $M_v = \min A$ luego $M_v \in A$ por lo tanto

$$C_{M_v} \geq v. \quad (2.3)$$

por transitividad de 2.2 y 2.3 se tiene $v \leq C_t$.

8. La disponibilidad del tiempo en una misión (WMA), denotada por $W(t_1, t_2)$ es la probabilidad que en total, no haya más de t_2 unidades de tiempo total en reparación asociada con una duración de misión t_1 .

$$W(t_1, t_2) = P(M_{t_1} - t_1 \leq t_2). \quad (2.4)$$

Note que si $0 \leq t_2 \leq t_1 < \infty$,

$$\begin{aligned} W(t_2, t_1 - t_2) &= P(M_{t_2} - t_2 \leq t_1 - t_2) \\ &= P(M_{t_2} \leq t_1) \\ &= P(C_{t_1} \geq t_2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

9. La función de distribución acumulativa de C_{t_1} es definida por:

$$P(C_{t_1} \leq t_2) = \begin{cases} 1 - W(t_2, t_1 - t_2), & \text{si } 0 \leq t_2 \leq t_1, \\ 1, & \text{si } 0 \leq t_1 \leq t_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

10. La notación con subíndices en matrices, se usa para denotar sub-matrices o sub-vectores, por ejemplo, $\mathbf{Q}_{D,U}(t) = (q_{d,u})_{d \in D, u \in U}$.

11. La notación con subíndices en probabilidades, se usa para denotar probabilidades con una condición inicial de la siguiente manera:

$$P_s(A) = P(A \mid Y(0) = s), \quad \text{para todo } s \in S \text{ y para todo evento } A.$$

Por ejemplo, $W_s(t_1, t_2) = P(M_{t_1} - t_1 \leq t_2 \mid Y(0) = s)$.

12. $\mathbf{W}(t_1, t_2)$ es el vector $(W_s(t_1, t_2))_{s \in S}$.

13. Si $B = U$ ó $B = D$, τ_B es el primer tiempo de permanencia de Y en B , esto es el tiempo gastado por Y en B durante esta primera visita a B . Así que, si $Y(0) \in U$

entonces τ_U es el lapso del primer período de trabajo, y si $Y(0) \in D$, entonces τ_D es el lapso del primer período de reparación.

14. Si $b \in B$, donde $B = U$ o $B = D$, los eventos $E(b)$ se definen por:

$$\begin{aligned} E(b) &= \{ \text{La primera entrada de } Y \text{ a } B \text{ es a través de } b, Y \text{ comienza cuando } t = 0 \\ &\quad \text{en } S - B \} \\ &= \{ Y_{\tau_{S-B}} = b, Y(0) \in S - B \}. \end{aligned}$$

Se va a asumir que los caminos muestrales de Y son continuos por derecha, $E(b)$ puede ser pensado como el evento “el primer arribo de Y a B es b ” y $Y(0) \notin B$.

15. Si $u \in U$, $d \in D$, se define:

$$\begin{aligned} k_{u,d}(t) &= P_u(\tau_U \leq t \cap E(d)) \\ &= P(\tau_U \leq t \cap E(d) \mid Y(0) = u), \end{aligned} \quad (2.7)$$

y,

$$\begin{aligned} k_{d,u}(t) &= P_d(\tau_D \leq t \cap E(u)) \\ &= P(\tau_D \leq t \cap E(u) \mid Y(0) = d). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Así, $k_{u,d}(t)$ es la probabilidad de que si el proceso inicia en el estado u , el tiempo de permanencia de Y en U es menor o igual que t y la primera entrada a D es a través de d . Similarmente $k_{d,u}(t)$ es interpretada.

2.2. Ecuaciones integrales para la disponibilidad del tiempo en una misión

Ahora, el principal resultado para determinar la disponibilidad del tiempo en una misión, el cual será usado en nuestra aplicación es presentado a continuación:

Teorema 4. *La matriz de valores de las funciones \mathbf{K}_{UD} y \mathbf{K}_{DU} sobre $[0, \infty)$ son respectivamente definidas como las soluciones de:*

$$\mathbf{K}_{UD}(t) = \mathbf{Q}_{UD}(t) + \int_0^t \mathbf{Q}_{UU}(dw) \mathbf{K}_{UD}(t-w), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{K}_{DU}(t) = \mathbf{Q}_{DU}(t) + \int_0^t \mathbf{Q}_{DD}(dw) \mathbf{K}_{DU}(t-w). \quad (2.10)$$

Si $\mathbf{W}_U(t_1, t_2)$ y $\mathbf{W}_D(t_1, t_2)$ son vectores cuyas componentes son las disponibilidades de tiempo para una misión cuando el sistema inicia en los diferentes estados de U y D respectivamente, entonces estos satisfacen las ecuaciones integrales:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_U(t_1, t_2) &= \mathbf{1} - \mathbf{K}_{UD}(t_1) \cdot \mathbf{1} \\ &\quad + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \mathbf{G}_{UU}(dw_1, dw_2) \mathbf{W}_U(t_1 - w_1, t_2 - w_2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_D(t_1, t_2) &= \mathbf{K}_{DU}(t_2) \cdot \mathbf{1} - \mathbf{G}_{DD}(t_1, t_2) \cdot \mathbf{1} \\ &\quad + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \mathbf{G}_{DD}(dw_1, dw_2) \mathbf{W}_D(t_1 - w_1, t_2 - w_2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde los valores de la matriz de las funciones \mathbf{G}_{UU} y \mathbf{G}_{DD} sobre $[0, \infty)^2$ son definidas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{UU}(t_1, t_2) &= \mathbf{K}_{UD}(t_1) \mathbf{K}_{DU}(t_2), \\ \mathbf{G}_{DD}(t_1, t_2) &= \mathbf{K}_{DU}(t_2) \mathbf{K}_{UD}(t_1). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Además, los dos subvectores W_U y W_D del vector WMA se pueden expresar uno términos del otro como:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_U(t_1, t_2) &= \mathbf{1} - \mathbf{K}_{UD}(t_1) \cdot \mathbf{1} \\ &\quad + \int_0^{t_1} \mathbf{K}_{UD}(dw) \mathbf{W}_D(t_1 - w, t_2), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{W}_D(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} \mathbf{K}_{DU}(dw) \mathbf{W}_U(t_1, t_2 - w). \quad (2.15)$$

Demostración. La matriz $(k_{ud})_{u \in U, d \in D}$, donde k_{ud} es definida como en (2.7), es una solución de la ecuación integral (2.9), de hecho:

Sea $X = \{X_n \mid n = 0, 1, \dots\}$ presenta la cadena de Markov incorporada de Y ; las entradas fuera de la diagonal de la matriz de probabilidad de transición son $p_{s,s'}$, $s, s' \in S$, y $s \neq s'$. Para $u \in U$, $d \in D$ y $t \geq 0$ lo siguiente se sostiene por los argumentos de renovación.

$$\begin{aligned} k_{ud} &= P_u(\{\tau_U \leq t\} \cap E(d)) \\ &= P(\{\tau_U \leq t\} \cap E(d) \mid X_0 = u) \\ &= \frac{P(\{\tau_U \leq t\} \cap E(d), X_0 = u)}{P(X_0 = u)} \\ &= \sum_{s \in S, s \neq u} \frac{P(\{\tau_U \leq t\} \cap E(d), X_0 = u, X_1 = s)}{P(X_0 = u)} \\ &= \sum_{s \in S, s \neq u} P(\{\tau_U \leq t\} \cap E(d) \mid X_0 = u, X_1 = s) P(X_1 = s \mid X_0 = u) \\ &= \sum_{s \in U, s \neq u} P(\{\tau_U \leq t\} \cap E(d) \mid X_0 = u, X_1 = s) p_{u,s} \\ &\quad + P(\{\tau_U \leq t\} \cap E(d) \mid X_0 = u, X_1 = d) p_{u,d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s \in U, s \neq u} p_{u,s} \int_0^t P_s(\{\tau \leq t - w\} \cap E(d)) F_{u,s}(dw) + F_{u,d}(t) p_{u,d} \\
&= \sum_{s \in U, s \neq u} \int_0^t k_{s,d}(t - w) [p_{u,s} F_{u,s}(dw)] + F_{u,d}(t) p_{u,d} \\
&= \sum_{s \in U, s \neq u} \int_0^t k_{s,d}(t - w) q_{u,s}(dw) + q_{u,d}(t).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha demostrado que $(k_{ud})_{u \in U, d \in D}$ satisfacen (2.9). Similarmente esto puede ser provado que $(k_{du})_{d \in D, u \in U}$ satisface (2.10).

Ahora, si $w_1, w_2 \geq 0$, $u \in U$, haciendo $v_2 = w_1$ y $v_1 = w_1 + w_2$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
W_u(w_1, w_2) &= W_u(v_2, v_1 - v_2) \\
&= P_u(C_{v_1} \geq v_2), \quad \text{by (2.5)} \\
&= P_u(C_{w_1+w_2} \geq w_1) \\
&= P_u(C_{w_1+w_2} \geq w_1, \tau_U \leq w_1) + P_u(C_{w_1+w_2} \geq w_1, \tau_U > w_1).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
&P_u(C_{w_1+w_2} \geq w_1, \tau_U \leq w_1) \\
&= \sum_{d \in D} P_u(\{C_{w_1+w_2} \geq w_1, \tau_U \leq w_1\} \cap E(d)) \\
&= \sum_{d \in D} \int_0^{w_1} P_d(\{C_{w_1+w_2-w} \geq w_1 - w, \tau_U \leq dw\} \cap E(d)) \\
&\stackrel{(2.1)}{=} \sum_{d \in D} \int_0^{w_1} P_d(M_{w_1-w} \leq w_1 + w_2 - w, k_{u,d}(dw)) \\
&= \sum_{d \in D} \int_0^{w_1} P_d(M_{w_1-w} - (w_1 - w) \leq w_2, k_{u,d}(dw)) \\
&= \sum_{d \in D} \int_0^{w_1} W_d(w_1 - w, w_2) k_{u,d}(dw).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

También,

$$\begin{aligned}
P_u(C_{w_1+w_2} \geq w_1, \tau_U > w_1) &= P_u(\tau_U > w_1) \\
&= 1 - P_u(\tau_U \leq w_1) \\
&= 1 - \sum_{d \in D} k_{u,d}(w_1).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Reemplazando (2.17) y (2.18) en (2.16), se obtiene que para todo $u \in U$ y $d \in D$:

$$W_u(w_1, w_2) = 1 - \sum_{d \in D} k_{u,d}(w_1) + \sum_{d \in D} \int_0^{w_1} W_d(w_1 - w, w_2) k_{u,d}(dw),$$

así, se ha obtenido (2.14). Ahora,

$$\begin{aligned} W_d(v_1, v_2) &= P_d(M_{v_1} - v_1 \leq v_2) \quad (\text{by (2.4)}) \\ &= \sum_{u \in U} P_d(\{M_{v_1} - v_1 \leq v_2, \tau_D \leq v_2\} \cap E(u)) \\ &= \sum_{u \in U} \int_0^{v_2} P_d(\{\tau_D \leq dw\} \cap E(u)) P_u(M_{v_1} - v_1 \leq v_2 - w) \\ &= \sum_{u \in U} \int_0^{v_2} k_{d,u}(dw) W_u(v_1, v_2 - w). \end{aligned} \tag{2.19}$$

De este modo se ha demostrado (2.15). Ahora, sustituyendo (2.15) en (2.14), entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_U(t_1, t_2) &= \mathbf{1} - \mathbf{K}_{UD}(t_1) \cdot \mathbf{1} + \int_0^{t_1} \mathbf{K}_{UD}(dw_1) \mathbf{W}_D(t_1 - w_1, t_2) \\ &= \mathbf{1} - \mathbf{K}_{UD}(t_1) \cdot \mathbf{1} + \int_0^{t_1} \mathbf{K}_{UD}(dw_1) \int_0^{t_2} \mathbf{K}_{DU}(dw_2) \mathbf{W}_U(t_1 - w_1, t_2 - w_2) \\ &= \mathbf{1} - \mathbf{K}_{UD}(t_1) \cdot \mathbf{1} + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \mathbf{K}_{UD}(dw_1) \mathbf{K}_{DU}(dw_2) \mathbf{W}_U(t_1 - w_1, t_2 - w_2) \\ &= \mathbf{1} - \mathbf{K}_{UD}(t_1) \cdot \mathbf{1} + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \mathbf{K}_{UD}(dw_1) \mathbf{K}_{DU}(dw_2) \mathbf{W}_U(t_1 - w_1, t_2 - w_2) \\ &= \mathbf{1} - \mathbf{K}_{UD}(t_1) \cdot \mathbf{1} + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \mathbf{G}_{UU}(dw_1, dw_2) \mathbf{W}_U(t_1 - w_1, t_2 - w_2), \end{aligned}$$

quedando así demostrado (2.11). Similarmente se puede probar (2.12). \square

Disponibilidad en un sistema en serie

3.1. Introducción

En los procesos industriales es muy común encontrar sistemas en serie; y es de gran interés aquellos sistemas que son reparables (se presentan fallas, estas se corrigen y vuelve el sistema a entrar en funcionamiento). La disponibilidad da una medida del tiempo que el sistema se encuentra disponible para que cumpla su misión. En el presente Capítulo se estudia un sistema en serie reparable con dos unidades, a este sistema se le describe: su modelo, espacio de estados, supuestos, probabilidades de transición y se plantea el sistema de ecuaciones integrales para la disponibilidad del tiempo en una misión.

3.2. Modelo

Un **sistema en serie** de dos unidades (ver Figura 3.1) es aquel sistema en donde las componentes se conectan una tras otra, en el cual existe sólo una trayectoria para completar una misión; para el funcionamiento del sistema las dos componentes deben funcionar correctamente y dichas unidades funcionan de manera independiente una de la otra.

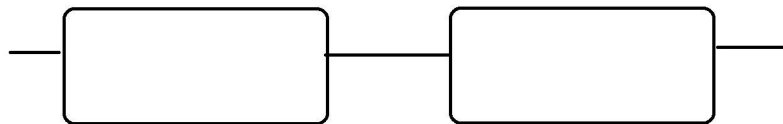


FIGURA 3.1. Sistema en serie con dos unidades.

3.2.1. Descripción del modelo

Se considera un sistema en serie cuyas componentes son dos unidades A y B , que en general presentan diferentes características técnicas. Se asume que cuando una de las unidades falla la otra unidad no falla e inmediatamente entra a reparación; igualmente,

cuando transcurra un tiempo especificado sin que ninguna unidad falle se hará un mantenimiento preventivo, de manera alternativa: inicialmente se realiza sobre una unidad, la siguiente ocasión se hará sobre la otra unidad; y así sucesivamente. Una vez se haga reparación o mantenimiento preventivo a una unidad, ésta se considera “en excelentes condiciones para realizar su trabajo”. Pero si una unidad fue reparada últimamente, el siguiente mantenimiento preventivo se hará sobre la otra unidad.

Para cada una de las unidades se manejan tres tiempos: de vida, reparación y mantenimiento. Cada uno de ellos es independiente con los otros y con comportamiento exponencial. En la Tabla 3.1 se muestra la notación y la distribución de cada uno de estos tiempos.

Unidad	Tiempo de vida	Tiempo de reparación	Tiempo de mantenimiento
A	$V_A \sim \exp(\lambda_A)$	$R_A \sim \exp(\psi_A)$	$M_A \sim \exp(\alpha_A)$
B	$V_B \sim \exp(\lambda_B)$	$R_B \sim \exp(\psi_B)$	$M_B \sim \exp(\alpha_B)$

TABLA 3.1. Distribución de tiempos de vida, de reparación y de mantenimiento utilizados en el modelo para un sistema en serie reparable.

Así el modelo a estudiar en este capítulo, será el proceso que describe si el sistema está o no funcionando en un tiempo t , después de haber sido puesto en funcionamiento. Este es denota por $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ y es semimarkoviano.

3.2.2. Espacio de estados

En concordancia con la descripción del modelo descrito en la sección 3.2.1, y teniendo en cuenta que cada una de las unidades del sistema puede estar funcionando o, en caso contrario, estar siendo reparada o estar en mantenimiento preventivo entonces, el espacio de estados S del proceso Y constará de seis elementos. Así, $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ y el significado de cada uno de estados es el siguiente:

- Los estados 1 y 3 representan aquellos estados en que tanto la unidad A como la unidad B están funcionando. Al estado 1 se accede en el caso en que en el estado anterior del proceso, la unidad A no esté funcionando y la unidad B no presenta falla; mientras que al estado 3 se accede en caso en que en el estado anterior la unidad A funciona y la unidad B no esté funcionando.
- El estado 2 representa aquel en que la unidad A funciona y la unidad B entra a mantenimiento preventivo.
- El estado 4 representa aquel en que la unidad A entra a mantenimiento preventivo y la unidad B funciona.
- El estado 5 representa aquel en que la unidad A está en reparación y la unidad B funciona.
- El estado 6 representa aquel en que la unidad A funciona y la unidad B está en reparación.

Estos estados pueden subdividirse en:

$$U = \{1, 3\} \qquad \text{y} \qquad D = \{2, 4, 5, 6\},$$

donde cada uno de los estados del conjunto U , indican que el sistema está funcionando-trabajando y los estados del conjunto D , indica que el sistema no está funcionando-no trabaja.

3.2.3. Supuestos

1. Bajo la no ocurrencia de fallas los estados 1, 2, 3 y 4 son visitados en este orden cíclico.
2. La primera unidad en entrar a mantenimiento preventivo es la unidad B , después de estar en funcionamiento el sistema durante un tiempo C_B . Si después de haber sido reparada la unidad B ó después de habersele hecho mantenimiento preventivo, el sistema no falla durante un tiempo C_A ; se realiza mantenimiento preventivo a la unidad A y de esta manera alternativa se realizan los siguientes mantenimientos preventivos.
3. El modelo no contempla el caso en que las dos unidades fallen simultáneamente, debido a que la probabilidad que las dos unidades fallen al mismo tiempo es cero.
4. Este sistema solo cuenta con un espacio para mantenimiento o arreglo de una unidad.

3.2.4. Probabilidades de transición del modelo

Dado que el proceso Y es semi-markoviano, entonces todos los resultados del Capítulo 3 son válidos para el modelo a plantearse; en particular el proceso tiene matriz de transición $Q(t)$ la cual se calcula según (1.6), mediante:

$$q_{ij}(t) = \begin{cases} P(\tau_i \leq t, Y(\tau_i) = j), & \text{si } i \neq j, \\ 0, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que si Z es una variable aleatoria continua, sus funciones de distribución y densidad se representan por F_z y f_z respectivamente, a continuación se presentan las probabilidades del sistema a modelar dado por la Figura 3.2.

$$\begin{aligned} q_{12}(t) &= P(\tau_1 \leq t, Y(\tau_1) = 2), \\ &= \begin{cases} P(V_A \geq C_B; V_B \geq C_B), & t \geq C_B, \\ 0, & t < C_B, \end{cases} \\ &= \begin{cases} P(V_A \geq C_B)P(V_B \geq C_B), & t \geq C_B, \\ 0, & t < C_B, \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-(\lambda_A C_B)} e^{-(\lambda_B C_B)}, & t \geq C_B, \\ 0, & t < C_B, \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-(\lambda_A + \lambda_B) C_B}, & t \geq C_B, \\ 0, & t < C_B. \end{cases} \end{aligned}$$

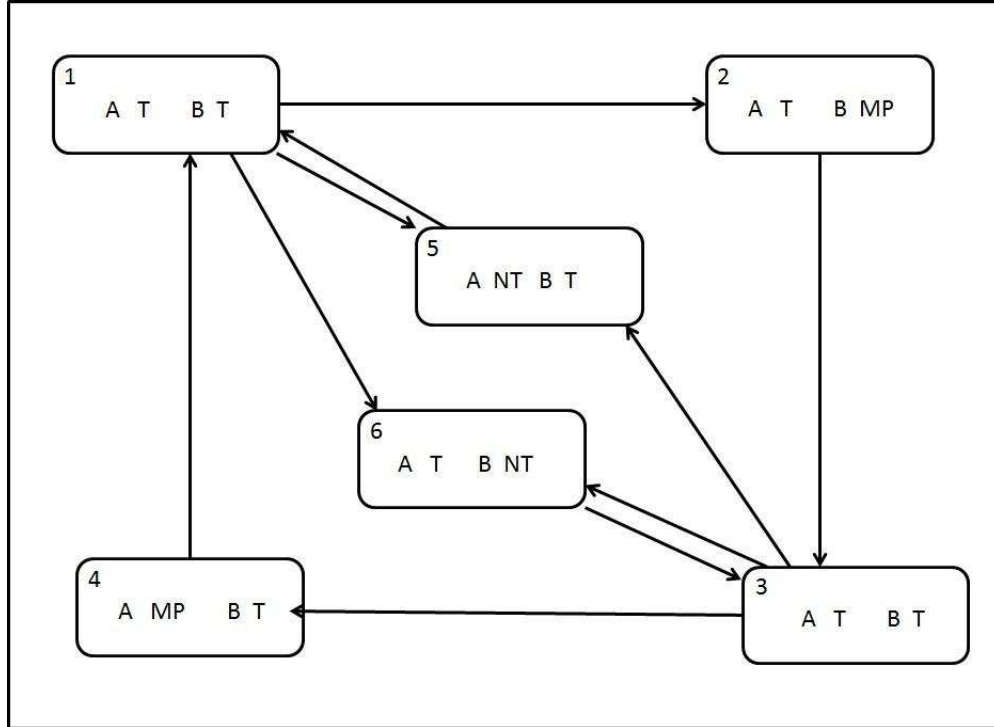


FIGURA 3.2. Transiciones del proceso $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$; donde A y B son las unidades, T hace referencia que la unidad trabaja, MP hace referencia que la unidad entra a mantenimiento preventivo y NT hace referencia que la unidad está en reparación porque ha presentado alguna falla.

$$q_{23}(t) = P(\tau_2 \leq t, Y(\tau_2) = 3) = P(M_B \leq t) = 1 - e^{-\alpha_B t}, \quad t \geq 0.$$

$$\begin{aligned} q_{34}(t) &= P(\tau_3 \leq t, Y(\tau_3) = 4) \\ &= \begin{cases} P(V_A \geq C_A; V_B \geq C_A), & t \geq C_A, \\ 0, & t < C_A, \end{cases} \\ &= \begin{cases} P(V_A \geq C_A)P(V_B \geq C_A), & t \geq C_A, \\ 0, & t < C_A, \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-(\lambda_A C_A)} e^{-(\lambda_B C_A)}, & t \geq C_A, \\ 0, & t < C_A, \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-(\lambda_A + \lambda_B) C_A}, & t \geq C_A, \\ 0, & t < C_A. \end{cases} \end{aligned}$$

$$q_{41}(t) = P(\tau_4 \leq t, Y(\tau_4) = 1) = P(M_A \leq t) = 1 - e^{-\alpha_A t}, \quad t \geq 0.$$

$$q_{51}(t) = P(\tau_5 \leq t, Y(\tau_5) = 1) = P(R_A \leq t) = 1 - e^{-\psi_A t}, \quad t \geq 0.$$

$$q_{63}(t) = P(\tau_6 \leq t, Y(\tau_6) = 3) = P(R_B \leq t) = 1 - e^{-\psi_B t}, \quad t \geq 0.$$

$$\begin{aligned}
 q_{15}(t) &= q_{35}(t) = P(\tau_1 \leq t, Y(\tau_1) = 5) \\
 &= P(V_A < t, V_B > V_A) \\
 &= \int_0^t \lim_{dz \rightarrow 0^+} (P(V_B > z, z \leq V_A < z + dz)) \\
 &= \int_0^t P(V_B > z) \left[\lim_{dz \rightarrow 0^+} P(z \leq V_A < z + dz) \right] \\
 &= \int_0^t P(V_B > z) \left[\lim_{dz \rightarrow 0^+} \frac{F_{V_A}(z + dz) - F_{V_A}(z)}{dz} \right] dz \\
 &= \int_0^t P(V_B > z) F'_{V_A}(z) dz \\
 &= \int_0^t P(V_B > z) f_{V_A}(z) dz \\
 &= \int_0^t e^{-(\lambda_B z)} \lambda_A e^{-(\lambda_A z)} dz \\
 &= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}), \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{16}(t) &= q_{36}(t) = P(\tau_1 \leq t, Y(\tau_1) = 6) \\
 &= P(V_B < t, V_A > V_B) \\
 &= \int_0^t \lim_{dz \rightarrow 0^+} (P(V_A > z, z \leq V_B < z + dz)) \\
 &= \int_0^t P(V_A > z) \left[\lim_{dz \rightarrow 0^+} P(z \leq V_B < z + dz) \right] \\
 &= \int_0^t P(V_A > z) \left[\lim_{dz \rightarrow 0^+} \frac{F_{V_B}(z + dz) - F_{V_B}(z)}{dz} \right] dz \\
 &= \int_0^t P(V_A > z) F'_{V_B}(z) dz \\
 &= \int_0^t P(V_A > z) f_{V_B}(z) dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^t e^{-(\lambda_A z)} \lambda_B e^{-(\lambda_B z)} dz \\
 &= \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}), \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$

El núcleo de la matriz del proceso semi-Markov para nuestro proceso es:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & q_{12}(t) & 0 & 0 & q_{15}(t) & q_{16}(t) \\ 0 & 0 & q_{23}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{34}(t) & q_{35}(t) & q_{36}(t) \\ q_{41}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{51}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{63}(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que las matrices $Q_{UU}(t)$, $Q_{DD}(t)$ son matrices nulas, mientras que:

$$Q_{DU}(t) = \begin{bmatrix} 0 & q_{23}(t) \\ q_{41}(t) & 0 \\ q_{51}(t) & 0 \\ 0 & q_{63}(t) \end{bmatrix},$$

la matriz Q_{UD} tiene tres formas en el presente modelo, a continuación se muestran:

- Si $t < C_B$

$$Q_{UD}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{15}(t) & q_{16}(t) \\ 0 & 0 & q_{35}(t) & q_{36}(t) \end{bmatrix}$$

- Si $C_B \leq t < C_A$

$$Q_{UD}(t) = \begin{bmatrix} q_{12}(t) & 0 & q_{15}(t) & q_{16}(t) \\ 0 & 0 & q_{35}(t) & q_{36}(t) \end{bmatrix}$$

- Si $t > C_A$

$$Q_{UD}(t) = \begin{bmatrix} q_{12}(t) & 0 & q_{15}(t) & q_{16}(t) \\ 0 & q_{34}(t) & q_{35}(t) & q_{36}(t) \end{bmatrix}.$$

Recordando (2.9) y (2.10)

$$\mathbf{K}_{UD}(t) = \mathbf{Q}_{UD}(t) + \int_0^t \mathbf{Q}_{UU}(dw) \mathbf{K}_{UD}(t-w).$$

$$\mathbf{K}_{DU}(t) = \mathbf{Q}_{DU}(t) + \int_0^t \mathbf{Q}_{DD}(dw) \mathbf{K}_{DU}(t-w).$$

Con los resultados anteriormente obtenidos se concluye que:

$$\mathbf{K}_{UD}(t) = \mathbf{Q}_{UD}(t).$$

$$\mathbf{K}_{DU}(t) = \mathbf{Q}_{DU}(t).$$

Ahora, mediante la expresión (2.13) se obtienen las matrices $\mathbf{G}_{UU}(t_1, t_2)$ y $\mathbf{G}_{DD}(t_1, t_2)$:

$$\mathbf{G}_{UU}(t_1, t_2) = \mathbf{K}_{UD}(t_1) \mathbf{K}_{DU}(t_2).$$

Para las tres situaciones se tienen las componentes de la matriz $\mathbf{G}_{UU}(t_1, t_2)$:

- Si $t_1 < C_B$ y $t_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} g_{11}(t_1, t_2) &= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} (e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} - 1)(e^{-\psi_A t_2} - 1), \\ g_{13}(t_1, t_2) &= \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} (e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} - 1)(e^{-\psi_B t_2} - 1), \\ g_{31}(t_1, t_2) &= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} (e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} - 1)(e^{-\psi_A t_2} - 1), \\ g_{33}(t_1, t_2) &= \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} (e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} - 1)(e^{-\psi_B t_2} - 1). \end{aligned}$$

- Si $C_B \leq t_1 < C_A$ y $t_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} g_{11}(t_1, t_2) &= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} (e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} - 1)(e^{-\psi_A t_2} - 1), \\ g_{13}(t_1, t_2) &= \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} (e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} - 1)(e^{-\psi_B t_2} - 1) - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)C_B} (e^{-\alpha_B t_2} - 1), \\ g_{31}(t_1, t_2) &= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} (e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} - 1)(e^{-\psi_A t_2} - 1), \\ g_{33}(t_1, t_2) &= \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} (e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} - 1)(e^{-\psi_B t_2} - 1). \end{aligned}$$

- Si $t_1 > C_A$ y $t_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} g_{11}(t_1, t_2) &= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} (e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} - 1)(e^{-\psi_A t_2} - 1), \\ g_{13}(t_1, t_2) &= \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} (e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} - 1)(e^{-\psi_B t_2} - 1) - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)C_B} (e^{-\alpha_B t_2} - 1), \\ g_{31}(t_1, t_2) &= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} (e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} - 1)(e^{-\psi_A t_2} - 1) - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)C_A} (e^{-\alpha_A t_2} - 1), \\ g_{33}(t_1, t_2) &= \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} (e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} - 1)(e^{-\psi_B t_2} - 1). \end{aligned}$$

Por tanto, si $t_1, t_2 \geq 0$ entonces:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}_{UU}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \begin{bmatrix} \lambda_A \psi_A e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1 + \psi_A t_2} & \lambda_B \psi_B e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1 + \psi_B t_2} \\ \lambda_A \psi_A e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1 + \psi_A t_2} & \lambda_B \psi_B e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1 + \psi_B t_2} \end{bmatrix}.$$

Para encontrar $W_U(t_1, t_2)$ del anterior modelo nos apoyamos en la ecuación integral dada

en (2.11), y conociendo que la función exponencial es derivable, dicha ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{W}_U(t_1, t_2) = \mathbf{1} - \mathbf{K}_{UD}(t_1) \cdot \mathbf{1} + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \mathbf{W}_U(t_1 - w_1, t_2 - w_2) \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{UU}(w_1, w_2) dw_2 dw_1}{\partial w_1 \partial w_2}.$$

Las componentes de $W_U(t_1, t_2)$ para el modelo se presenta en tres casos:

- Caso 1. Si $t_1 < C_B$ y $t_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} W_1(t_1, t_2) = & 1 - \left[\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1}) + \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1}) \right] \\ & + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \lambda_A \psi_A e^{-[(\lambda_A + \lambda_B)w_1 + \psi_A w_2]} W_1(t_1 - w_1, t_2 - w_2) \\ & + \lambda_B \psi_B e^{-[(\lambda_A + \lambda_B)w_1 + \psi_B w_2]} W_3(t_1 - w_1, t_2 - w_2) dw_2 dw_1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} W_3(t_1, t_2) = & 1 - \left[\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1}) + \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1}) \right] \\ & + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \lambda_A \psi_A e^{-[(\lambda_A + \lambda_B)w_1 + \psi_A w_2]} W_1(t_1 - w_1, t_2 - w_2) \\ & + \lambda_B \psi_B e^{-[(\lambda_A + \lambda_B)w_1 + \psi_B w_2]} W_3(t_1 - w_1, t_2 - w_2) dw_2 dw_1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

- Caso 2. Si $C_B \leq t_1 < C_A$ y $t_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} W_1(t_1, t_2) = & 1 - \left[e^{-(\lambda_A + \lambda_B)C_B} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1}) \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1}) \right] \\ & + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \lambda_A \psi_A e^{-[(\lambda_A + \lambda_B)w_1 + \psi_A w_2]} W_1(t_1 - w_1, t_2 - w_2) \\ & + \lambda_B \psi_B e^{-[(\lambda_A + \lambda_B)w_1 + \psi_B w_2]} W_3(t_1 - w_1, t_2 - w_2) dw_2 dw_1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} W_3(t_1, t_2) = & 1 - \left[\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1}) + \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1}) \right] \\ & + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \lambda_A \psi_A e^{-[(\lambda_A + \lambda_B)w_1 + \psi_A w_2]} W_1(t_1 - w_1, t_2 - w_2) \\ & + \lambda_B \psi_B e^{-[(\lambda_A + \lambda_B)w_1 + \psi_B w_2]} W_3(t_1 - w_1, t_2 - w_2) dw_2 dw_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

- Caso 3. Si $t_1 > C_A$ y $t_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 W_1(t_1, t_2) = & 1 - [e^{-(\lambda_A + \lambda_B)C_B} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}(1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1}) \\
 & + \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}(1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1})] \\
 & + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \lambda_A \psi_A e^{-[(\lambda_A + \lambda_B)w_1 + \psi_A w_2]} W_1(t_1 - w_1, t_2 - w_2) \\
 & + \lambda_B \psi_B e^{-[(\lambda_A + \lambda_B)w_1 + \psi_B w_2]} W_3(t_1 - w_1, t_2 - w_2) dw_2 dw_1, \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_3(t_1, t_2) = & 1 - [e^{-(\lambda_A + \lambda_B)C_A} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}(1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1}) \\
 & + \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}(1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1})] \\
 & + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \lambda_A \psi_A e^{-[(\lambda_A + \lambda_B)w_1 + \psi_A w_2]} W_1(t_1 - w_1, t_2 - w_2) \\
 & + \lambda_B \psi_B e^{-[(\lambda_A + \lambda_B)w_1 + \psi_B w_2]} W_3(t_1 - w_1, t_2 - w_2) dw_2 dw_1. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Los sistemas de ecuaciones integrales (3.1)-(3.2), (3.3)-(3.4) y (3.5)-(3.6) son casos particulares del sistema:

$$H(t) = \int_{[0, t_1] \times [0, t_2]} J(dw)H(t-w) + V(t), \quad (3.7)$$

donde:

$$H(t) = H(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} W_1(t_1, t_2) \\ W_3(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad J(w) = \begin{bmatrix} G_{11}(w_1, w_2) \\ G_{33}(w_1, w_2) \end{bmatrix},$$

$$H(t-w) = \begin{bmatrix} W_1(t_1 - w_1, t_2 - w_2) \\ W_3(t_1 - w_1, t_2 - w_2) \end{bmatrix}, \quad V(t) = \begin{bmatrix} 1 - K_{1D}(t_1) \\ 1 - K_{3D}(t_1) \end{bmatrix},$$

los vectores $V(t)$, $J(dw)$ son conocidos y H es desconocido.

Boehme [3] presenta un método para encontrar una aproximación numérica a (3.7), Csenki [8] retoma esta solución y lo aplica a los sistemas de ecuaciones integrales dados por (3.1)-(3.2), (3.3)-(3.4) y (3.5)-(3.6). Para poder resolver numéricamente este sistema, es necesario tomar casos particulares de este modelo y aplicarle este método; en la siguiente sección se plantearán algunos ejercicios dándoles su respectiva solución.

Ejemplo numérico

Un proceso industrial es comprendido como todo desarrollo sistemático que implica una serie de pasos ordenados y organizados, que suceden de forma alternativa o simultánea, los cuales se encuentran estrechamente relacionados entre sí y cuyo propósito es llegar a un resultado preciso. Una forma de medir este proceso es mediante la función de distribución acumulativa (Cdf) del tiempo operacional acumulativo en un intervalo de tiempo finito $[0, t]$, que se representa en términos de disponibilidad.

Recordando que la disponibilidad del tiempo en una misión (WMA), denotada por $W(t_1; t_2)$ y dada por (2.4) es la probabilidad que en total, no haya más de t_2 unidades de tiempo total en reparación asociada con una duración de misión t_1 , es:

$$W(t_1, t_2) = P(M_{t_1} - t_1 \leq t_2).$$

Ahora, fijando un tiempo t_1 y variando un tiempo t_2 se encuentran los sistemas de ecuaciones integrales indicadas por (3.1)-(3.2), (3.3)-(3.4) y (3.5)-(3.6), la solución es dada por (3.7), por medio de ésta se halla las aproximaciones para $H(t_1, t_2) = [W_1(t_1, t_2), W_3(t_1, t_2)]^T$. El objetivo es encontrar la función de distribución de C_{t_1} , en el caso que el sistema empiece en el estado 1, es decir si $Y = 1$ y para esto se utilizan los resultados de $W_1(t_1, t_2)$ mediante:

$$P_1(C_{t_1} \leq t_2) = \begin{cases} 1 - W_1(t_1, t_2), & \text{si } 0 \leq t_2 \leq t_1, \\ 1, & \text{si } 0 \leq t_1 \leq t_2. \end{cases}$$

El ejemplo que a continuación se presenta cuenta con dos unidades A y B , se asume que las dos unidades no presentan ninguna falla al iniciar el proceso. Los valores supuestos de los parámetros del modelo para la unidad A son de la siguiente manera: $\lambda_A = \frac{1}{100h}$, $\psi_A = \frac{1}{5h}$, $\alpha_A = \frac{1}{10h}$, el tiempo de funcionamiento antes de entrar a mantenimiento preventivo es $C_A = 90h$; para la unidad B son: $\lambda_B = \frac{1}{120h}$, $\psi = \frac{1}{3h}$, $\alpha = \frac{1}{15h}$, el tiempo de funcionamiento antes de entrar a mantenimiento preventivo es $C_B = 65h$ y un tiempo de misión del sistema $t_m = 120$. En la Tabla 4.1 se muestran los valores asumidos por el modelo dados en horas, tanto para la unidad A como para la unidad B .

$E[V_A]$	$E[V_B]$	$E[R_A]$	$E[R_B]$	$E[M_A]$	$E[M_B]$	C_A	C_B	t_m
100	120	5	3	10	15	90	65	120

TABLA 4.1. Valores asumidos por el modelo para un sistema en serie reparable con dos unidades.

Los valores de la Cdf del tiempo operacional acumulativo para el sistema reparable en serie con dos unidades son mostrados en la Tabla 4.2 y Figura 4.1.

t_2	$Pr(C_{120} < t_2)$	t_2	$Pr(C_{120} < t_2)$	t_2	$Pr(C_{120} < t_2)$
0	0.0000	44	0.0000	88	0.0729
4	0.0000	48	0.0000	92	0.1087
8	0.0000	52	0.0000	96	0.1631
12	0.0000	56	0.0000	100	0.2444
16	0.0000	60	0.0001	104	0.3626
20	0.0000	64	0.0001	108	0.5269
24	0.0000	68	0.0102	112	0.7391
28	0.0000	72	0.0148	116	0.9808
32	0.0000	76	0.0215	120	1.0000
36	0.0000	80	0.0314		
40	0.0000	84	0.0463		

TABLA 4.2. Valores de la función de distribución del tiempo operacional acumulativo, cuando el tiempo de misión es de 120 horas.

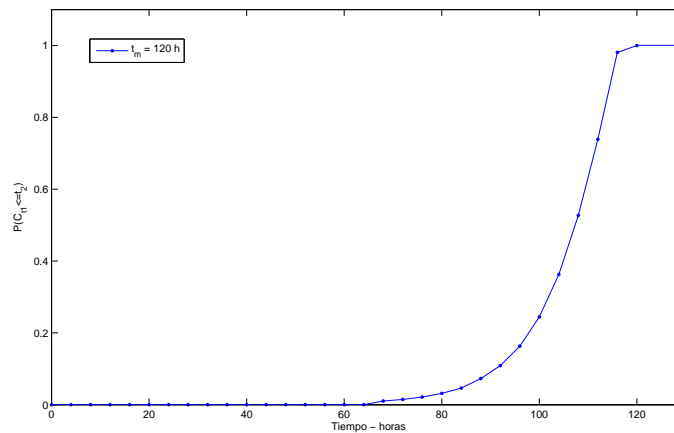


FIGURA 4.1. Función de distribución del tiempo operacional acumulativo para un tiempo de misión igual a 120 horas.

Con las especificaciones que se dieron para el sistema en serie con dos unidades se pueden hacer los siguientes comentarios: las probabilidades bajas indican que es poco probable que el tiempo acumulado del sistema funcione menos de t_2 horas; la probabilidad que el tiempo acumulado de funcionamiento del proceso sea menor a 92 horas es de 0.1087; la probabilidad que el tiempo acumulado de funcionamiento del proceso sea menor

a 108 horas es de 0.5269.

En la Tabla 4.3 se presentan tres ejemplos, en cada uno de ellos se asumen dos unidades A y B que se encuentran en perfectas condiciones. Los tiempos esperados de vida, reparación, mantenimiento se mantienen fijos, se varía el tiempo de funcionamiento de cada unidad antes de entrar a mantenimiento preventivo y el tiempo de misión.

$E[V_A]$	$E[V_B]$	$E[R_A]$	$E[R_B]$	$E[M_A]$	$E[M_B]$	C_A	C_B	t_m
100	120	5	3	10	15	70	50	80
100	120	5	3	10	15	60	30	100
100	120	5	3	10	15	50	35	60

TABLA 4.3. Valores asumidos por el modelo para tres situaciones de un sistema en serie reparable con dos unidades.

Los valores de la función de distribución acumulativa (Cdf) del tiempo operacional acumulativo para un tiempo de misión de 80, 100 y 60 horas son presentados en la Tabla 4.4 y la Figura 4.2).

t_2	$Pr(C_{80} < t_2)$	t_2	$Pr(C_{100} < t_2)$	t_2	$Pr(C_{60} < t_2)$
0	0.0000	0	0.0000	0	0.0000
4	0.0000	5	0.0000	3	0.0000
8	0.0000	10	0.0000	6	0.0000
12	0.0000	15	0.0000	9	0.0000
16	0.0000	20	0.0000	12	0.0000
20	0.0000	25	0.0000	15	0.0000
24	0.0000	30	0.0057	18	0.0001
28	0.0000	35	0.0088	21	0.0002
32	0.0001	40	0.0136	24	0.0004
36	0.0003	45	0.0209	27	0.0009
40	0.0006	50	0.0321	30	0.0019
44	0.0015	55	0.0493	33	0.0039
48	0.0035	60	0.0766	36	0.1171
52	0.0724	65	0.1215	39	0.1559
56	0.1082	70	0.1909	42	0.2087
60	0.1635	75	0.2945	45	0.2806
64	0.2486	80	0.4447	48	0.3783
68	0.3781	85	0.6528	51	0.5125
72	0.5710	90	0.9488	54	0.6935
76	0.8406	95	1.0000	57	0.9235
80	1.0000	100	1.0000	60	1.0000

TABLA 4.4. Valores de la función de distribución del tiempo operacional acumulativo para tres tiempos de misión 80, 100 y 60 horas.

De los tres tiempos de misión se pueden hacer los siguientes comentarios: para un $t_m = 100 h$ se observa que con una probabilidad de 1, el tiempo acumulado de funcionamiento del proceso se termina en menos de 95 horas; para un $t_m = 80 h$ la

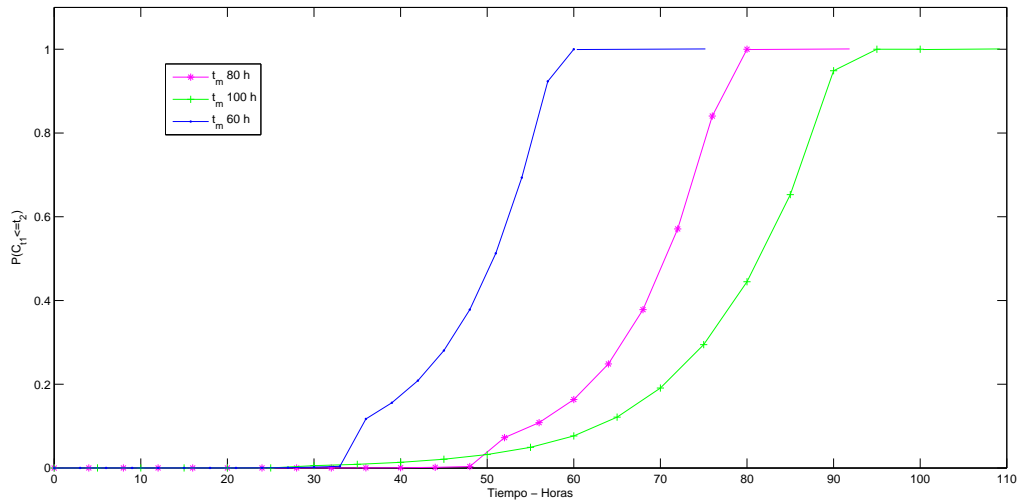


FIGURA 4.2. Función de distribución del tiempo operacional acumulativo, cuando el tiempo de misión es igual a 80, 100 y 60 horas.

probabilidad que el tiempo acumulado de funcionamiento del proceso sea menor a 76 horas es de 0.8406 y para un $t_m = 60$ h la probabilidad que el tiempo acumulado de funcionamiento del proceso sea menor a 57 horas es de 0.9235.

En un $t_m = 60$ h se observa que entre los tiempos $t_2 = 33$ y $t_2 = 36$ horas el sistema puede presentar alguna alteración; dicha anomalía se puede ver por el valor de las probabilidades de 0.0039 pasa a 0.1171; para el $t_m = 100$ h el sistema puede presentar anomalía entre los tiempos $t_2 = 65$ y $t_2 = 70$ horas se observa que de 0.1215 pasa a 0.1909 y para un $t_m = 80$ h el sistema puede presentar anomalía entre los tiempos $t_2 = 56$ y $t_2 = 60$ horas se observa que de 0.1082 pasa a 0.1635.

Conclusión

El desarrollo de este trabajo permite deduce:

- La función de disponibilidad de un sistema en serie reparable con dos unidades, se puede modelar a través de un sistema de ecuaciones integrales. Esta función de disponibilidad está enlazada con la función de distribución del tiempo de acumulación operativo, a partir de un tiempo de misión del sistema.
- La solución del sistema de ecuaciones integrales se puede aproximar, por medio de un método numérico específico para este tipo de sistemas, el cual se realiza siguiendo un proceso reiterativo, a partir de una aproximación inicial.

Trabajo futuro

Una vez estudiado el problema de modelamiento de un proceso de disponibilidad en un sistema en serie con dos unidades de funcionamiento, es natural preguntar qué sucede si hay más de dos unidades en los que solamente haya un sitio para reparación o mantenimiento?. Esta pregunta sugiere un desarrollo similar y un trabajo para continuar en esta misma línea en el futuro.

Bibliografía

- [1] L. Bednara, *Methods for approximating the availability functions.*, Master's thesis, Delft University of Technology, Netherlands, 2008.
- [2] Liliana Blanco, Viswanathan Arunachalam, and Selvamuthu Dharmaraja, *Introduction to probability theory*, Jhon Wiley & Sons, 2012.
- [3] TK Boehme, W Preuss, and V Wall, *On a simple numerical method for computing stieltjes integrals in reliability theory*, Probability in the Engineering and Informational Sciences **5** (1991), no. 01, 113–128.
- [4] Alvaro Calvache, *Aproximaciones de las funciones de renovación y de disponibilidad, con aplicaciones en el área administrativa*, XXIV Simposio Internacional de Estadística., 2014.
- [5] Attila Csenki, *Joint availability of systems modelled by finite semi-markov processes.*, Appl. Stochastic Models & Dam Analysis, **10** (1994), 279–293.
- [6] ———, *Mission availability for repairable semi-markov systems: analytical results and computational implementation*, Statistics, **26** (1995), 75–87.
- [7] ———, *Transient analysis of interval availability for repairable systems modelled by finite semi-markov processes.*, IMA J. Math. Appl. in Business and Industry **6** (1995), 267–281.
- [8] ———, *A new approach to the cumulative operational time for semi-markov models of repairable systems*, Reliability Engineering and System Safety **54** (1996), 11–21.
- [9] K. Donatiello and B.R. Iyer., *Closed-form solution for system availability distribution.*, IEEE Trans. Reliab **36** (1987), 45–47.
- [10] Ronald A. Howard, *Dynamic probabilistic systems volume*, vol. 2, Dover, 2007.
- [11] G. Rubino & B. Sericola., *Interval availability analysis using operational periods.*, Performance Evaluation **14** (1992), 257–272.