

**2008-2**

EAFIT

J SEBASTIAN PALACIO MONTOYA

Asesor:

FREDDY H. MARÍN

# **ESTUDIO DE PROCESOS DE REVERSIÓN A LA MEDIA**

PRÁCTICA INVESTIGATIVA II

Existen diversos procesos estocásticos adaptados para modelar comportamientos naturales, tales como biológicos, sociales, financieros, económicos... en adelante se centrará la atención en presentar una descripción de un proceso particular, el de los procesos estocásticos con reversión a la media, los cuales han sido utilizados, por ejemplo, para representar el comportamiento de algunos mercados, como es el caso del mercado energético.

El principal objetivo cuando se modela el comportamiento de alguna variable como un proceso con reversión a la media, consiste en determinar los parámetros presentes en el modelo, los cuales pueden o no tener algún significado “realista” o pueden representar simplemente algunos valores particulares.

En el presente trabajo se mostrará una metodología en la estimación de parámetros en procesos con reversión a la media a partir de una revisión bibliográfica e implementación de algoritmos en MATLAB abarcando una amplia gama de situaciones con las cuales se hace evidente la importancia de la estimación de parámetros es la modelación de dichos procesos.

### **Procesos estocásticos con reversión a la media**

Existen diferentes maneras de definir a un proceso con reversión a la media, unas basadas en ideas más cualitativas que cuantitativas y otras, en sentido contrario, dando mucho peso a conceptos matemáticos introduciendo algo de rigurosidad en la clasificación de los procesos con reversión a la media.

Una primera definición está de acuerdo con la idea de que un proceso con reversión a la media tiende a cambiar su comportamiento de crecimiento o decrecimiento en el momento en que se alcanzan extremos (históricos). Esta definición es una de las más ampliamente aceptadas.

Adicional a la definición anterior se ha planteado la idea de un proceso con reversión a la media como aquel en el cual los retornos tienen una autocorrelación negativa. Esta definición permitiría inducir un procedimiento para contrastar la hipótesis de si un proceso revierte a la media o no lo hace.

La forma más habitual de representar a un proceso con reversión a la media está dada por la ecuación diferencial estocástica siguiente:

$$dS_t = \alpha(\mu - S_t)dt + \sigma \cdot S_t^r dB_t \quad (1)$$

Donde el parámetro constante  $\alpha$  es llamado velocidad de la reversión,  $\mu$  es la *media de largo plazo*,  $\sigma$  la volatilidad del proceso y  $B_t$  un movimiento Browniano. Además, dado que

generalmente muchos de los procesos son lineales,  $r$  toma los valores de 1 o 0 (uno o cero), en cuyos casos se obtiene un proceso con ruido proporcional (Ecuación de Pilipovic) o uno con ruido aditivo (Ecuación de Hull & White), respectivamente. Cada uno de los procesos anteriores es utilizado para modelar diferentes situaciones de los mercados de tasas de interés y mercados energéticos.

Un problema bastante importante consiste en determinar los parámetros presentes en la ecuación (1) dados los datos históricos de un proceso que se supone revierte a la media. Este procedimiento presupone el uso de metodologías como la maximización de la verosimilitud o la minimización de varianza.

Adicionalmente a la ecuación (1) se plantean ecuaciones más generales para modelar los procesos con reversión a la media, como es el caso de las ecuaciones (2) y (3), en las cuales la media de largo plazo exhibe un comportamiento dependiente del tiempo, bien como una función determinística o como un proceso estocástico por sí misma. Las Figuras 1, 2 y 3 muestran cual es el comportamiento del proceso en cada una de las situaciones, en todas suponiendo ruido proporcional. En el caso que la media siga también un proceso estocástico se tiene de nuevo la posibilidad de que el ruido presente en el proceso sea proporcional o aditivo. En este caso la función  $\beta(t)$  puede corresponder a una función del tiempo o en el caso más simple a una constante y adicionalmente, los movimientos Brownianos presentes en sus ecuaciones pueden estar correlacionados con un factor de correlación  $\rho$ , aunque en los casos presentados en este informe se supongan independientes ( $\rho=0$ ).

$$dS_t = \alpha(\mu(t) - S_t)dt + \sigma \cdot S_t^r dB_t \quad (2)$$

$$\begin{aligned} dS_t &= \alpha(\mu_t - S_t)dt + \sigma \cdot S_t^r dB_t \\ d\mu_t &= \beta(t)\mu_t dt + \tau\mu_t^q dW_t \end{aligned} \quad (3)$$

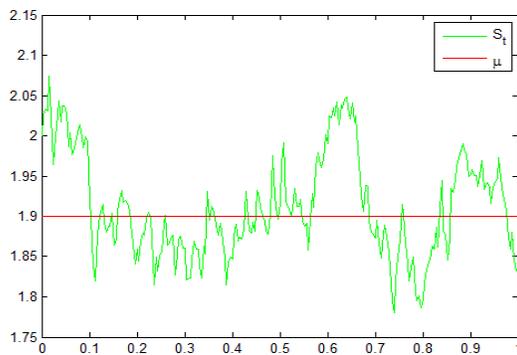


Fig. 1: Media constante

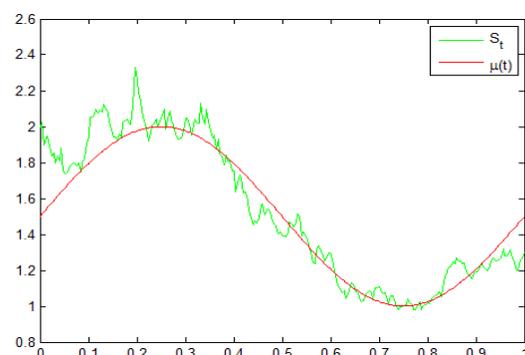


Fig. 2: Media como función determinística

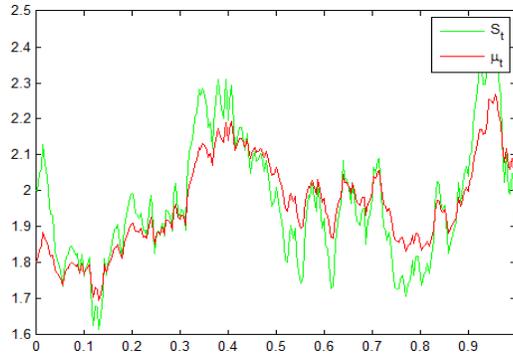


Fig. 3: Media modelada como un proceso estocástico

En adelante se explica cómo pueden ser determinados cada uno de los parámetros presentes en los modelos, comenzando por el caso más sencillo (media constante) y avanzando en determinar el caso más general (media como proceso estocástico).

### 1. Proceso con reversión a la media: *Media constante*

Como se ha mencionado con anterioridad, existen variantes de este modelo para el caso en que el ruido sea proporcional o aditivo. En ambos casos lo más determinante es que cada uno de los parámetros presentes son constantes, lo cual permite plantear el método de máxima verosimilitud para encontrar los parámetros e intentar “reproducir” el comportamiento del proceso en el tiempo.

Una alternativa para estimar los parámetros consiste en discretizar la ecuación diferencial estocástica (1), obteniendo el modelo discreto equivalente (4), modelo con el cual es posible dotar de una función de densidad de probabilidad a las variables  $X_i$  y con ello determinar la función de verosimilitud.

$$S_{i+1} = S_i + \alpha(\mu - S_i)\Delta t + \sigma \cdot S_i^r \Delta B_i \quad (4)$$

$$X_i = (S_{i+1} - S_i - \alpha(\mu - S_i)\Delta t)(S_i^r)^{-1} = \sigma \cdot \Delta B_i \sim N(0, \sigma^2 \Delta t)$$

En este primer caso en que la media es constante no existe mayor dificultad para determinar explícitamente un procedimiento con el cual determinar estimadores para los parámetros del modelo.

El procedimiento de máxima verosimilitud es como sigue. Dado que cada  $\Delta B_i$  tiene asociada una distribución normal, entonces cada  $X_i$  sigue también una distribución normal, esto es

$$f.d.p \quad f(X_i; \mu, \alpha, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp\left(-\frac{X_i^2}{2\sigma^2\Delta t}\right)$$

Como todas las  $X_i$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces la función de densidad conjunta está dada como sigue

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n; \mu, \alpha, \sigma) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2\Delta t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\Delta t} \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$$

De esta forma, el logaritmo natural de la función de verosimilitud queda determinada por

$$\ln(L(\mu, \alpha, \sigma; X)) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2\Delta t) - \frac{1}{2\sigma^2\Delta t} \sum_{i=1}^n \left(\frac{S_i - S_{i-1} - \alpha(\mu - S_{i-1})\Delta t}{S_{i-1}^r}\right)^2$$

Basta con tomar las derivadas parciales respecto a cada una de los parámetros e igualar a cero para encontrar el valor de cada uno de ellos y de esta forma terminar con el proceso de estimación de los parámetros. Este procedimiento lleva a que los parámetros  $\alpha$  y  $\mu$  estimados son la solución del sistema de ecuaciones:

$$A - E(1 - \alpha\Delta t) - \alpha\mu\Delta t B = 0$$

$$C - B(1 - \alpha\Delta t) - \alpha\mu\Delta t D = 0$$

Donde  $A = \sum_{i=1}^n \frac{S_i S_{i-1}}{(S_{i-1}^r)^2}$ ,  $B = \sum_{i=1}^n \frac{S_{i-1}}{(S_{i-1}^r)^2}$ ,  $C = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{(S_{i-1}^r)^2}$ ,  $D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(S_{i-1}^r)^2}$  y  $E = \sum_{i=1}^n \left(\frac{S_{i-1}}{S_{i-1}^r}\right)^2$ . De

esta forma, los parámetros estimados vienen dados por:

$$\hat{\alpha} = \frac{ED - B^2 - AD + BC}{(ED - B^2)\Delta t}$$

$$\hat{\mu} = \frac{A - E(1 - \hat{\alpha}\Delta t)}{\hat{\alpha}B\Delta t}$$

Adicionalmente, el parámetro  $\sigma$  queda determinado por una ecuación aparte del sistema de ecuaciones anterior, pero está en términos de los parámetros ya estimados, esto es:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=1}^n \left( \frac{S_i - S_{i-1} - \hat{\alpha}(\hat{\mu} - S_{i-1})\Delta t}{S_{i-1}^r} \right)^2}$$

La función `Factor1_a` muestra la implementación en MATLAB de estas ideas.

Otro procedimiento no muy fructífero consiste en resolver analíticamente la ecuación diferencial estocástica (1) y de la integral estocástica que queda sin resolver dotar de una función de densidad de probabilidad a los demás términos, de nuevo buscando poder definir la función de verosimilitud. Este procedimiento no es muy efectivo ya que para el caso de ruido aditivo es posible construir la función de verosimilitud de manera sencilla, pero para el caso del ruido proporcional no es posible hacerlo y es esta imposibilidad de generalización lo que hace de tal procedimiento poco frecuente.

En la Figura 4 se muestra el resultado de la estimación de los parámetros en un ejemplo de simulación en el cual inicialmente se habían definido los parámetros como se indican en la tabla en la cual también se presentan sus respectivas estimaciones.

	Parámetros reales	Parámetros estimados	
		ruido aditivo	ruido proporcional
$\alpha$	20	17,605	22,9815
$\mu$	1,5	1,4961	1,4962
$\sigma$	0,4	0,4112	0,4025

Claramente al ser un ejemplo de simulación la reconstrucción del proceso se realiza de manera muy acertada, esto porque se puede suponer como conocidos los números aleatorios presentes en la generación del proceso original y utilizarlos en la generación del proceso estimado.

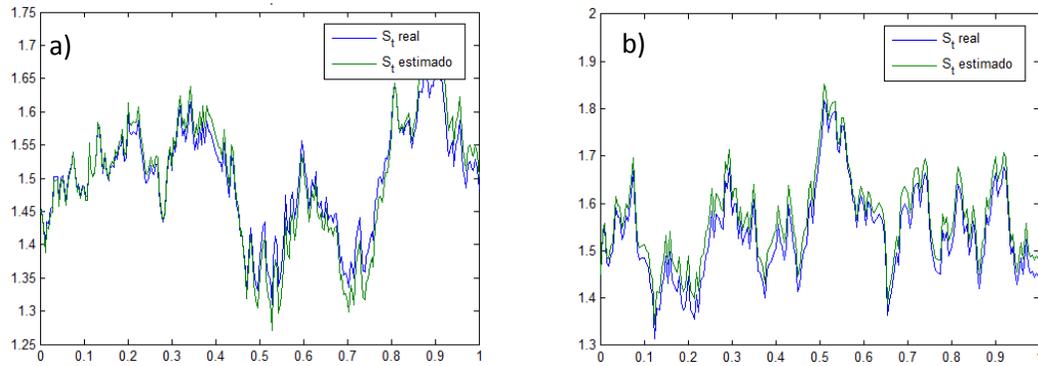


Fig. 4: Comparación entre proceso real y estimado (a) con ruido aditivo, (b) con ruido proporcional

Si se considera una aproximación más realista del proceso de estimación, en la cual se consideren unos nuevos números aleatorios para generar el nuevo proceso a partir de los parámetros estimados, se obtienen trayectorias bastante diversas de lo cual sería natural tomar la trayectoria promedio de ellas. En la Figura 5 se muestra esta aproximación para el caso de un proceso con ruido proporcional.

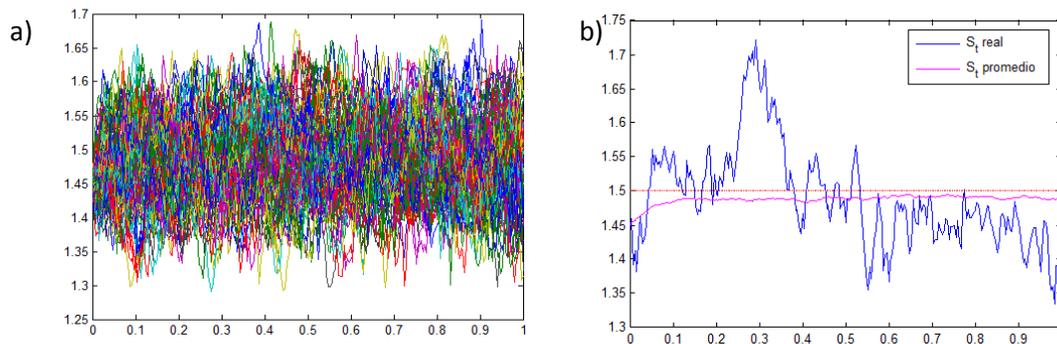


Fig. 5: Trayectorias simuladas con números aleatorios diferentes al proceso original. a) 100 trayectorias diferentes, b) Trayectoria real y trayectoria promedio de 1000 trayectorias.

De la Figura 5 se puede observar como las múltiples trayectorias no definen una tendencia similar a la original, además (y lo más importante), se observa como la trayectoria media de múltiples trayectorias pierde por completo la información de la volatilidad del proceso, así como también la información de la velocidad de la reversión y sólo da idea de la media del proceso original, esto es, queda claro que la trayectoria promedio de múltiples trayectorias no tiende a parecerse al proceso original sino que tiende a ajustarse al valor de su media de largo plazo, siendo esta situación una de las razones por las cuales recibe dicho nombre.

El resultado anterior lleva a que el procedimiento de la estimación de parámetros quede obsoleto para hacer análisis de predicción de valores futuros del proceso, ya que en realidad la única información que se podría obtener con cierto grado de certidumbre sería información relacionada con la tendencia media del proceso. Adicionalmente, dicho resultado justifica el uso de nuevas metodologías que permitan estimar, además de los parámetros del proceso, información que sirva para determinar trayectorias promedio que sean más fieles al comportamiento volátil del proceso.

## 2. Proceso con reversión a la media: *Media dada por una función determinística*

Como ha quedado claro de la sección previa, el primer modelo presentado tiene la capacidad de obtener buenos estimadores para el caso de los parámetros, pero se queda corto cuando se refiere a la capacidad de establecer una mejor tendencia promedio. En el caso que se presenta en esta sección, se analiza un modelo en el cual la tendencia media no es un valor constante sino que sigue una cierta trayectoria intrínseca (lo cual no implica que sea conocida). Esta tendencia de largo plazo en general es desconocida ya que ella debe capturar la esencia de la tendencia del proceso, lo cual para el caso de activos financieros representaría determinar el comportamiento de la tendencia de la economía en el mercado, lo que evidentemente no puede ser determinado de una manera determinística.

En este caso el valor esperado de largo plazo del proceso tiende a seguir la trayectoria determinística implícita en el modelo, como se muestra en la figura 6.

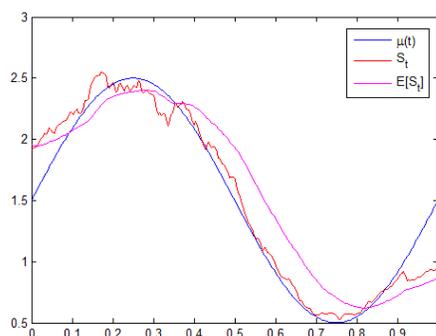


Fig. 6: El valor esperado del proceso sigue la trayectoria determinística de la media.

Debido a la importancia en el estudio de algún proceso particular, como por ejemplo en los del mercado energético, de determinar la tendencia media de largo plazo, se debe plantear un procedimiento para estimar estadísticamente dicha cantidad.

La forma más natural para estimar esta tendencia está basada en la solución de la ecuación diferencial ordinaria que se obtiene de (2) al tomar valores esperados a ambos lados de la ecuación, lo cual resulta en la ecuación (5), donde  $\varphi(t) = E[S_t]$ .

$$\dot{\varphi}(t) = \alpha(\mu(t) - \varphi(t)) \quad (5)$$

En tal situación, para determinar la trayectoria media de largo plazo sería necesario conocer el valor esperado del proceso, pero esta cantidad no es observable, pues el único valor que es conocido (observable) es el que corresponde a la evolución del proceso en el tiempo. Para poder tener información del valor esperado del proceso se debe hacer el supuesto de que dicho valor esperado puede ser aproximado por una curva de convolución del proceso.

Una convolución de una curva  $s(t)$  es otra función  $\varphi(t)$  definida por  $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(r)s(t-r)dr$ , donde  $c(t)$  es una función de convolución, esto es, es una función continua no negativa, de valores reales y que cumple  $\int_{-\infty}^{\infty} c(t)dt = 1$ .

Para el caso discreto, las funciones  $s(t)$  y  $c(t)$  son reemplazadas por secuencias de valores, mientras que las integrales son aproximadas por sumas finitas. Según esto último y lo anteriormente explicado, el valor esperado del proceso (discreto)  $s(t)$  puede ser aproximado como

$$\varphi_i = \sum_{j=-m}^m c_j s_{i-j}$$

La Figura 7 muestra las curvas que representan el valor esperado real (para un ejercicio de simulación en el cual se conocía la media como una función determinística) y el valor esperado experimental, tomado como una convolución del proceso donde  $c_j = 1/(2m+1)$ , justificando el proceso de convolución como una metodología para *encontrar* el valor esperado del proceso.

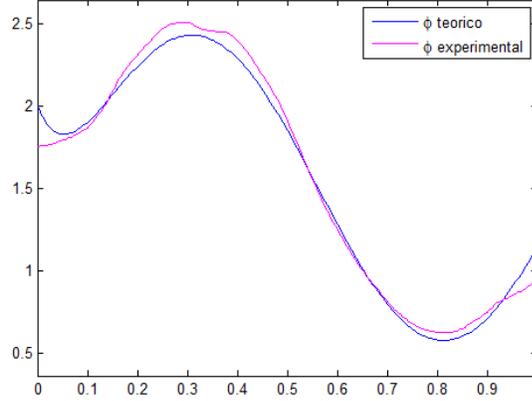


Fig. 7: Experimento para el valor esperado del proceso

Con lo anterior se ha avanzado en la solución de la ecuación (5), ahora es necesario determinar la derivada de dicho valor esperado, para lo cual se debe utilizar un procedimiento de derivación numérica. Dado estos procedimientos anteriores, es posible resolver la ecuación (5) como se muestra en la ecuación (6).

$$\mu(t) = \varphi(t) + \frac{\dot{\varphi}(t)}{\alpha} \quad (6)$$

Con los valores determinados para la media es ahora posible estimar los parámetros puntuales  $\alpha$  y  $\sigma$  a través del procedimiento de máxima verosimilitud partiendo de la ecuación (5) discretizada, esto es, conociendo la distribución de las  $X_i$  determinar la función de verosimilitud para encontrar la estimación de los respectivos parámetros.

$$S_i = S_{i-1} + \alpha(\mu_{i-1} - S_{i-1})\Delta t + \sigma \cdot S_{i-1}^r \Delta B_i \quad (7)$$

$$X_i = (S_i - S_{i-1} - \alpha(\mu_{i-1} - S_{i-1})\Delta t)(S_{i-1}^r)^{-1} = \sigma \cdot \Delta B_i$$

$$X_i = (S_i - S_{i-1} - [\alpha(\varphi_{i-1} - S_{i-1}) + \dot{\varphi}_{i-1}]\Delta t)(S_{i-1}^r)^{-1} = \sigma \cdot \Delta B_i \sim N(0, \sigma^2 \Delta t)$$

El procedimiento así descrito da una idea de cómo estimar un proceso de reversión a la media modelado como la ecuación (2) para el cual es necesario determinar tanto los parámetros puntuales, como la media de largo plazo, la cual, después de estar estimado el parámetro  $\alpha$ , queda completamente determinada por la ecuación (6). Este modelo es por mucho más eficiente para modelar procesos reales que el primero de los modelos descritos, ya que él captura de muy buena manera la tendencia del proceso y da la posibilidad de refinar dicha tendencia a partir de un refinamiento en la curva de convolución.

A partir del procedimiento desarrollado en la sección previa se encuentra que el logaritmo natural de la función de verosimilitud para esta situación viene dado por

$$\ln(L(\alpha, \sigma; X)) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2 \Delta t) - \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{i=1}^n \left( \frac{S_i - S_{i-1} - [\alpha(\varphi_{i-1} - S_{i-1}) + \dot{\varphi}_{i-1}] \Delta t}{S_{i-1}^r} \right)^2$$

Se debe resaltar el hecho de que esta función sólo depende de los dos parámetros  $\alpha$  y  $\sigma$ . Como ya se dijo, al estimar  $\alpha$  la media de largo plazo queda completamente determinada.

De las condiciones de primer orden se sigue que los estimadores de máxima verosimilitud para este proceso están dados por:

$$\hat{\alpha} = \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{(S_i - S_{i-1} - \dot{\varphi}_{i-1} \Delta t)(\varphi_{i-1} - S_{i-1})}{S_{i-1}^{2r}} \right) \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{(\varphi_{i-1} - S_{i-1})^2 \Delta t}{S_{i-1}^{2r}} \right)^{-1}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=1}^n \left( \frac{S_i - S_{i-1} - [\hat{\alpha}(\varphi_{i-1} - S_{i-1}) + \dot{\varphi}_{i-1}] \Delta t}{S_{i-1}^r} \right)^2}$$

La función `Factor1_b` da la implementación de este procedimiento.

En la Figura 8 se muestra el caso que corresponde a varias trayectorias del proceso estimado cuando se toman aleatorios diferentes a los utilizados para generar el proceso inicial, además se muestra la trayectoria promedio, la cual se nota que captura la esencia del proceso aunque también elimine la volatilidad.

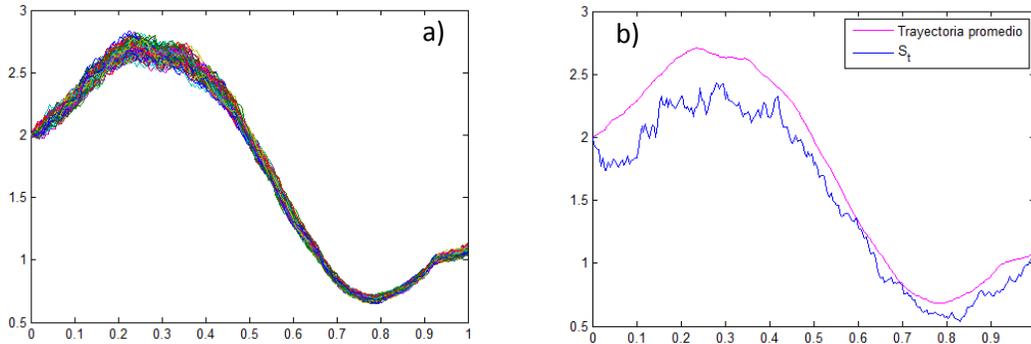


Fig. 7: Trayectorias simuladas con números aleatorios diferentes al proceso original. a) 100 trayectorias diferentes, b) Trayectoria real y trayectoria promedio de las 100 trayectorias.

Ahora se analizará el caso en el cual la media de largo plazo tiene un comportamiento estocástico.

### 3. Proceso con reversión a la media: *Media dada por un proceso estocástico*

El último de los procesos que serán considerados en este informe es el que se presenta a continuación y que está determinado por las ecuaciones (3). Este modelo es una generalización natural del proceso anterior, pues en él se presenta a la media de largo plazo como un proceso estocástico independiente.

Para la estimación de los parámetros presentes en este modelo se procede de manera muy similar a como se hizo en el modelo anterior, esto es, se toma valor esperado sobre ambos lados de las ecuaciones (3), con lo cual se obtienen las ecuaciones (8). Estas ecuaciones representan las ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtienen de las estocásticas cuando se eliminan los componentes estocásticos de ellas.

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= \alpha(\psi(t) - \varphi(t)) \\ \dot{\psi}(t) &= \beta(t)\psi(t)\end{aligned}\tag{8}$$

Teniendo presente que el valor esperado de un proceso estocástico es una función determinística, la primera de las ecuaciones (8) representa un caso particular del modelo anterior ya que en él no se exige que la función determinística que define a la media sea conocida, por esta razón no es necesario extender la metodología anterior para la estimación de los parámetros presentes del proceso  $S_t$ , pero deben ser formuladas nuevas técnicas para la estimación de los parámetros presentes en el modelo de la media, los cuales no son explicado en este informe.

La ventaja que presenta este modelo respecto al anterior es que permite que se piense en la media como un proceso estocástico y no como una función determinística, aunque en el modelo se haga la suposición de que el proceso original no tiene como tendencia de largo plazo la media sino su valor esperado. Adicional a lo anterior el hecho de modelar un proceso como lo indican las ecuaciones (3) permite el uso de metodologías diferentes a las presentadas en este informe, haciendo más general el proceso de estimación de los parámetros.

## TRABAJO FUTURO

Después de haber analizado diferentes estrategias de modelación de los procesos de reversión a la media quedan algunos caminos que deben ser explorados en busca de obtener una mejor comprensión del proceso y aprovechar más el conocimiento de los parámetros. Además de ellos deben ser introducidas nuevas estrategias de estimación de los parámetros para hacer de este procedimiento una metodología robusta y general.

1. Uno de los principales intereses al extender los procedimientos de estimación de parámetros es el uso de los Filtros de Kalman, ya que estos son potentes estimadores y pueden ser utilizados en condiciones de gran generalidad como es el tercero de los casos que se expusieron anteriormente.
2. Otra extensión que se propone para el estudio de los procesos de reversión a la media es definir test estadísticos que permitan determinar si un proceso debe o no ser analizado como un proceso de reversión a la media y cuál de los modelos presentados (u otros) deben ser utilizados para dicha modelación.
3. Por último, se propone el estudio de métodos numéricos para estimación de valores futuros en procesos de reversión a la media y para el caso de mercados financieros cuyos activos subyacentes puedan ser modelados como procesos de reversión a la media, determinar una estrategia de valoración de opciones.

## Bibliografía

- [1] Costa, Luis y Font V, Monserrat (1993). "COMMODITIES Mercados financieros sobre materias primas". Ed. ESIC, Madrid.
- [2] Gibson & Schwartz, "Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims", Journal of Finance, vol. 45, no 3, pp. 959-976, July 1990.

- [3] Hull, John C. (2003). "Options, futures and other derivatives". 5a edicion.Ed. Prentice Hall. Pearson Education, New Jersey.
- [4] Lucia, J. J. & Schwartz, E. S., "Electricity prices and power derivatives: Evidence from the Nordic power exchange", *Review of Derivatives Research* 5(1), 5-50, 2002.
- [5] Mao, Xuerong. (1997). "Stochastic Differential Equations & Applications". Horwood Publishing Limited. England.
- [6] Gouriéroux, C. (2001), "Financial econometrics. Problems, models and methods", Princeton University Press.
- [7] Kloeden, Peter E. and Platen Eckhard (1999). "Numerical Solution of Stochastic Differential Equations". Springer-Verlag.91-92.
- [8] Wilmott, Paul (1998). "Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering". John Wiley & Sons.
- [9] Lari-Lavassani, Ali, Sadeghi, Ware, Antony (2001). "Mean Reverting Models For Energy Option Pricing". Preprint.
- [10] Hull, John; White, Alan (1987). "The pricing of options on assets with stochastic volatilities". *The Journal of Finance*, 42(2): 281-300, Junio 1987.
- [11] Ito, K. (1944). "Stochastic Integral". *Proceedings of the Imperial Academy*, Tokyo, 20: 519-524.
- [13] MIKOSCH T. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific. Singapore, 2000.