



**OPTIMIZACIÓN BAJO INCERTIDUMBRE APLICADA AL
SECTOR ELÉCTRICO COLOMBIANO**

Por
Julián Alberto Alvarez Tamayo

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

2014

**OPTIMIZACIÓN BAJO INCERTIDUMBRE APLICADA AL SECTOR
ELÉCTRICO COLOMBIANO**

**Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de
Magíster en Matemáticas Aplicadas**

Julián Alberto Alvarez Tamayo

Directora

María Eugenia Puerta Yepes

Doctora en Ciencias Matemáticas

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

Mayo 2014

Nota de aceptación

Coordinador de la Maestría

Director del proyecto

Ciudad y fecha (día, mes, año):

Agradecimientos

El autor expresa sus agradecimientos a las siguientes personas:

A la docente y tutora de mi tesis, Doctora María Eugenia Puerta Yepes por su acompañamiento constante, orientación y consejos pertinentes en la dirección de este proyecto de investigación.

A la docente e investigadora, Doctora Olga Lucia Quintero Montoya por abrirme las puertas en el proyecto de investigación de mercados de sectores estratégicos y su apoyo durante el mismo.

En especial, a mi esposa e hijas por su apoyo incondicional.

Resumen

El objetivo de esta tesis es construir un modelo de optimización que permita maximizar los beneficios de un agente del mercado del sector eléctrico colombiano, teniendo en cuenta la incertidumbre de algunas de las variables que lo describen y utilizar una nueva metodología para optimización estocástica.

El modelo propuesto está definido por una función objetivo que relaciona los ingresos y los costos de las centrales hidroeléctricas y termoeléctricas bajo un parámetro estocástico como es el precio de la electricidad, las condiciones del sistema están ligadas a la parte operativa y técnica de las centrales eléctricas, dando un énfasis a un conjunto de restricciones que están relacionadas con la demanda de energía eléctrica y donde se le asigna un nivel de probabilidad, es decir, se trata de un modelo de optimización que tiene en cuenta la incertidumbre.

Para ello se indaga en el sector eléctrico colombiano, desde los procesos de generación de energía eléctrica que utilizan tecnologías como la hidráulica y la térmica las cuales predominan en Colombia y su marco regulatorio regido por la CREG(Comisión de Regulación de Energía y Gas). Para dar solución a este modelo se compararon la metodología clásica basada en las funciones de distribución de probabilidad y una metodología reciente (2012) basada en el reconocimiento de patrones, donde ambas convierten un problema de programación estocástico en un problema equivalente determinístico.

Para la implementación del modelo se escogió un agente del sector eléctrico colombiano con 2 centrales termoeléctricas de 450 MW y 160 MW y 2 centrales hidroeléctricas de 19.9 MW de capacidad neta instalada. Los datos de los precios de la electricidad, la demanda y otros parámetros del sistema se consultaron de la pagina web de XM (sitio oficial del sector eléctrico colombiano). Para la simulación se empleó el programa WinQSB y sus resultados condujeron a la elaboración de tablas y figuras comparativas donde se concentran los resultados de ambas metodologías como por ejemplo los beneficios esperados, las producciones de energía eléctrica que debe generar cada central, además de algunos supuestos escenarios.

Los resultados condujeron a que se encuentra una metodología novedosa como alternativa a la metodología clásica, basada en el reconocimiento de patrones cuya ventaja principal radica en poder escoger una pequeña muestra de datos alrededor del 30 % en el vector aleatorio de las restricciones probabilísticas y obtener resultados elevadamente confiables de hasta un 99 % en comparación de la metodología clásica. Además, los problemas equivalentes determinísticos después de haber utilizado ambas metodologías y calcularlos a través del programa WinQSB emplearon un tiempo menor a 600 milisegundos con una diferencia promedio del 45 % la cual no influye en la eficiencia de las metodologías.

Índice general

Introducción	1
1. Estado del arte y objetivos	4
1.1. Estado del arte	4
1.2. Objetivos	8
1.2.1. Objetivo general	8
1.2.2. Objetivos específicos	8
2. Temas y conceptos preliminares	9
2.1. Sector eléctrico colombiano	9
2.2. Optimización estocástica	19
2.2.1. Programación lineal estocástica	20
2.3. Metodología clásica para un resolver un problema estocástico	23
2.4. Reconocimiento de patrones	26
3. Reconocimiento de patrones en la optimización estocástica	30
3.1. Formulación teórica	30
3.1.1. Estructura del modelo de optimización estocástica a resolver	31
3.1.2. Definiciones básicas	32
3.1.3. Conjunto de escenarios relavantes	34
3.2. Problema lineal equivalente determinístico	37
4. Implementación numérica y comparaciones	40
4.1. Modelo de maximización de beneficio para un agente del sector eléctrico	40
4.2. Implementación y análisis de resultados	47
Conclusiones y futuras investigaciones	71
Bibliografía	73

Introducción

Colombia es un país con una gran diversidad en recursos naturales y geográficos, puede contar con un mercado de energía eléctrica muy extenso cuyas tecnologías como la hidráulica y la térmica predominan; Colombia dispone de centrales hidráulicas que utilizan el agua como fuente para generar energía y centrales térmicas que utilizan la energía no renovable (petróleo, carbón y gas natural) como combustible de generación. Éstas dos grandes fortalezas la han aprovechado empresas como Celsia-EPSA, Empresas Públicas de Medellín-EPM, EMGESA, ISAGEN, entre otros para la generación de energía eléctrica.

En el lenguaje cotidiano, la energía eléctrica sirve para mover aparatos que funcionan con motores y otros que producen calor como la plancha o los bombillos. A nivel eléctrico es el movimiento de electrones a causa de una fuerza determinada durante una hora y su unidad de medida es el kilovatio-hora KWh. Por ejemplo la demanda que tuvo Colombia en 2012 de energía alcanzó los 59,370.1 GWh, con un crecimiento del 3.8 por ciento con relación al año 2011; ver en [28].

El proceso de la energía eléctrica como se emplea en [29] está conformado básicamente por cuatro etapas: generación, transmisión, distribución y comercialización.

En Colombia la Comisión de Regulación de Energía y Gas-CREG es la encargada de reglamentar mediante normas jurídicas el comportamiento de los usuarios y las empresas (denominadas agentes). En este orden de ideas se establecieron dos mercados: el mayorista y el minorista.

En el mercado mayorista de electricidad en Colombia-MEM se negocia toda la energía producida por las empresas generadoras que están conectadas a la red (Sistema Interconectado Nacional - SIN); y que atenderá la demanda de todos los usuarios finales. Estos últimos hacen sus transacciones por medio de empresas comercializadoras de energía eléctrica. Cada empresa de generación tiene la obligación de presentar diariamente al Centro Nacional de Despacho-CND una oferta que consiste en la disponibilidad de capacidad para cada hora del día siguiente y un precio único al cual está dispuesto a vender su energía durante todo ese día, para cada uno de sus recursos de generación.

En cada una de las etapas del proceso de la energía eléctrica mencionadas anteriormente, nos podemos encontrar con diferentes situaciones de optimización. Por ejemplo en la etapa de generación, [5] muestra que el objetivo de la programación horaria de una central térmica es minimizar los costos totales como de arranque, parada, fijos y variables asociados a la generación de potencia. En la etapa de transmisión, [21] y [22] se explica un problema de optimización (minimización de costos) a través del *Flujo Óptimo de Potencia -OPF* para determinar los valores de potencia activa y reactiva de un generador, en corriente directa (DC) y/o corriente alterna (AC).

En la etapa de generación y comercialización para el caso de una central hidroeléctrica de bombeo, en [7] se muestra que la programación óptima de dicha central considera la maximización del beneficio del agente que lo opera, haciendo un uso más racional de los recursos hídricos de un país. También puede verse en [9], que el objetivo de una central hidroeléctrica es el de maximizar el valor de la producción en todo su periodo de planeación, dependiendo directamente de los precios de la electricidad.

También se puede ver otros casos en [1], [10], [14]; en los cuales se encuentra el beneficio asociado a la operación coordinada de los cuartos de máquina de las hidroeléctricas, el despacho hidrotérmico a medio plazo y el despacho en unidades generadoras hidráulicas.

La mayoría de los problemas mencionados anteriormente están relacionados mediante restricciones que involucran parámetros determinísticos como la potencia máxima y mínima de una central eléctrica, generación de potencia térmica e hidráulica, reservas hídricas, volúmenes máximos y mínimos de los embalses, entre otros. Por ende, estos problemas se convierten en problemas determinísticos que son abordados con técnicas de programación matemática tradicional como la programación lineal, entera-mixta, no lineal, entre otros.

Por otro lado en este tipo de problemas de optimización también pueden intervenir parámetros que varían aleatoriamente en el transcurso de horas, días y años, como son la demanda de electricidad comercial y residencial, los precios de oferta de la electricidad, los costos marginales, entre otros. Esto hace que este tipo de problemas estén bajo incertidumbre, la cual se tratará en la presente propuesta de tesis.

Para la tesis se propone un modelo de optimización que permita maximizar los beneficios de un agente del mercado del sector eléctrico colombiano, teniendo en cuenta la incertidumbre de algunas de las variables que lo describen, y para dar solución a este tipo de problema se abordará las metodologías tradicionales y algunas recientes que utilizan el reconocimiento de patrones como en [13] donde se logra definir un conjunto factible que cumple con las condiciones mínimas que verifican las restricciones probabilísticas, con lo cual el valor máximo no necesariamente es el mismo que el obtenido considerando todo el conjunto factible inicial, pero que tiene, en este caso, la propiedad de corresponder a un criterio menos optimista para un decisor. Para dar mayor aplicabilidad al modelo se consultaron datos a partir del portal de XM-Compañía de expertos en mercados del grupo ISA y es la encargada de ejercer las funciones de administración y operación del mercado de energía colombiano.

La tesis está dividida en cuatro capítulos. El primer capítulo, **Estado del arte y objetivos** se expone la búsqueda y recopilación de información de los diferentes artículos y los objetivos que se pretenden alcanzar en el desarrollo del trabajo. En el capítulo 2, **Temas y conceptos preliminares** se sintetizan los tópicos necesarios teóricos para el desarrollo y comprensión del trabajo, está dividido en cuatro secciones fundamentales: la primera habla del *Sector energético*, enfocado en el entorno colombiano. En la siguiente sección, se habla de la *Optimización estocástica* como referente matemático; luego la *Metodología clásica para resolver un problema estocástico*, para problemas de programación donde la función objetivo y/o restricciones se encuentran bajo incertidumbre, y finalmente se da una descripción de la teoría del *Reconocimiento de patrones*. El capítulo 3 corresponde al **Reconocimiento de patrones en la optimización estocástica**, muestra una forma novedosa de resolver problemas de programación estocástica en el marco de la

teoría de patrones combinatorios. El último capítulo relaciona **La implementación numérica y comparaciones** para el modelo propuesto de maximización de beneficios de un agente del mercado eléctrico colombiano.

Capítulo 1

Estado del arte y objetivos

1.1. Estado del arte

Con el fin de construir un modelo matemático de maximización de beneficios de un agente del sector eléctrico colombiano, se inicia esta investigación con una búsqueda de información sobre los temas relacionados con optimización estocástica en el sector eléctrico, normatividad en el mercado energético y metodologías para resolver problemas de optimización estocástica.

Por ejemplo, en [10] se calcula el mínimo costo en el despacho hidrotérmico, considerando las curvas de costo de las plantas térmicas, las restricciones en la red de transmisión, la incertidumbre en el pronóstico de la demanda y la aleatoriedad en el recurso hídrico. El modelo matemático del problema del despacho hidrotérmico propuesto por [10] es resuelto mediante la técnica de puntos interiores.

En [5] se muestra que el objetivo de la programación horaria de una central térmica es minimizar los costos totales como de arranque, parada, fijos y variables asociados a la generación de potencia. Allí la demanda se debe satisfacer en cada periodo de tiempo y debe ser menor o igual a la suma de las producciones de potencia de las centrales. Además se muestran las restricciones relacionadas con la potencia cuando se pasa de un periodo a otro con las denominadas rampas máximas de subida y bajada. El modelo matemático propuesto por [5] para la programación horaria de una central térmica es un modelo lineal entero-mixto que se resolvió con el programa de simulación GAMS.

En [21] y [22] se explica un problema de optimización (minimización de costos) a través del *Flujo Óptimo de Potencia -OPF* para determinar los valores de potencia activa y reactiva de un generador, en corriente directa (DC) y/o corriente alterna (AC). Sujetos a un conjunto de restricciones, por ejemplo límites de potencia activa, límites de cargabilidad en los elementos de transmisión, voltajes, entre otros. En los artículos además se especifica que para resolver este tipo de problemas se puede utilizar *MATPOWER*, que es un paquete de *MATLAB* y sirve de herramienta de simulación para los investigadores y educadores que quieren incursionar en este tema.

En [7] se considera un problema de coordinación a corto plazo o despacho hidrotérmico, donde se calcula el máximo beneficio del agente a través de las operaciones que realiza un operario

encargado de una central hidroeléctrica de bombeo. El modelo propuesto por [7] es un modelo bi-etapa, donde la primera etapa relaciona el máximo beneficio de la central hidroeléctrica y en la segunda etapa relaciona el mínimo costo de producción térmica; para dar solución a este problema lineal se utiliza la programación dinámica y el método branch and bound.

En [9] el objetivo de un agente eléctrico es determinar la producción máxima que debe generar en un periodo de planeación de 14 semanas para 14 centrales hidroeléctricas. La función objetivo depende directamente de los precios de la electricidad y de una probabilidad de ocurrencia de los mismos. El modelo de optimización se calcula mediante el algoritmo simplex dual.

Por otro lado, hay artículos como en [14] que muestran técnicas como los *Algoritmos genéticos* para dar solución a modelos de despacho de centrales hidroeléctricas que adoptan como criterios de desempeño el caudal turbinado hora a hora, el número de arranques y paradas de centrales térmicas, el volumen de agua ahorrado y la combinación de los criterios anteriores.

En [16] se da una visión general del empleo de la programación estocástica para la toma de decisión a medio plazo (un año) por parte de un productor en un mercado de energía eléctrico. El productor tiene acceso a dos mercados, el mercado diario y el mercado a plazo. La incertidumbre asociada a los precios del mercado se modela mediante un conjunto de escenarios y tiene asociada una probabilidad de ocurrencia. El modelo de optimización busca determinar la máxima cantidad de energía a producir durante un periodo para vender en un contrato determinado y se calcula mediante estrategias de descomposición como la de Benders, relajación lagrangiana y programación dinámica dual estocástica.

En [15] se presenta una herramienta informática diseñada para definir la oferta óptima de la energía que deben presentar los agentes generadores en los mercados mayoristas de la electricidad. Esta aplicación informática denominada *OPTIOFER* utiliza los programas de GAMS, MATLAB y EXCEL para la optimización de modelos donde intervienen centrales hidroeléctricas y termoeléctricas.

Algunos modelos de optimización utilizados en los artículos anteriores se pueden resumir a continuación en un modelo de minimización de costos para centrales termoeléctricas y un modelo de maximización de beneficios para un agente comercial de la siguiente forma:

$$\text{mín} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J [A_j v_{jt} + B_j p_{jt} + C_j y_{jt} + E_j z_{jt}]$$

sujeto a

$$\begin{aligned} P_{\min(j)} v_{jt} &\leq p_{jt} \leq P_{\max(j)} v_{jt}, \forall j, t \\ p_{jt+1} - p_{jt} &\leq S_j, \forall j, t = 1, \dots, T-1 \\ p_{jt} - p_{jt+1} &\leq T_j, \forall j, t = 1, \dots, T-1 \\ y_{jt} - z_{jt} &= v_{jt} - v_{jt-1}, \forall j, t = 1, \dots, T \\ \sum_{j=1}^J p_{jt} &= D_j, \forall t \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^J P_{max(j)} v_{jt} \geq D_j + R_j, \forall t$$

$$v_{jt}, y_{jt}, z_{jt}, \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T$$

$$p_{jt} \geq 0$$

Conjuntos e índices

T, t : Conjunto e índice de los periodos en los que se divide el horizonte temporal de planificación, respectivamente.

J, j : Conjunto e índice de las centrales termoeléctricas del sistema, respectivamente.

Variables

p_{jt} : producción de la central j durante el periodo t .

v_{jt} : variable binaria que toma el valor 1, si la central j está en funcionamiento durante el periodo t y 0 en otro caso.

y_{jt} : variable binaria que toma el valor 1, si la central j se arranca al comienzo del periodo j y 0 en otro caso.

z_{jt} : variable binaria que toma el valor 1, si la central j se para al comienzo del periodo j y 0 en otro caso.

Datos

A_j : costo fijo de la central j .

B_j : costo variable de la central j .

C_j : costo de arranque de la central j .

E_j : costo de parada de la central j .

$P_{min(j)}$: producción mínima de la central j .

$P_{max(j)}$: producción máxima de la central j .

S_j : rampa máxima de subida de carga de la central j .

T_j : rampa máxima de bajada de carga de la central j .

D_j : demanda en el periodo t .

R_j : reserva requerida en el periodo t .

Un modelo de maximización de beneficios simplificado para centrales hidroeléctricas de generación puede ser representado por:

$$\text{máx} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \lambda^t P_{it}$$

s.a.

$$P_{min(it)} \leq P_{it} \leq P_{max(it)}$$

$$V_{min(it)} \leq V_{it} \leq V_{max(it)}$$

$$Q_{min(it)} \leq Q_{it} \leq Q_{max(it)}$$
$$P_{it} \geq 0$$

Conjuntos e índices

T, t : Conjunto e índice de los periodos en los que se divide el horizonte temporal de planificación, respectivamente.

I, i : Conjunto e índice de las centrales hidroeléctricas del sistema, respectivamente.

Variables

P_{jt} : producción de la central i durante el periodo t .

Datos

λ^t : coeficiente del precio de la electricidad para el intervalo t .

V_{jt} : volumen del embalse i al final del periodo t .

Q_{jt} : representa el caudal que es utilizado por la central i en el periodo t .

Una de las técnicas para dar solución a modelos de optimización estocástica es la propuesta por [13]. Este habla de un modelo basado en reconocimientos de patrones aplicado a la programación estocástica, mostrando una mayor eficiencia que algunas metodologías clásicas como por ejemplo al tomar un número menor de muestras de datos en el vector aleatorio relacionado con las restricciones probabilísticas y obtener resultados muy confiables. Esta metodología relaciona la binarización de la función de distribución de probabilidad y la generación de una función Booleana; al final la solución de un problema de programación estocástico lo convierte en su equivalente determinístico, el cual se puede resolver mediante técnicas tradicionales de programación lineal, entera-mixta, no lineal, entre otras y en programas de simulación como GAMS, MATLAB, Solver, WinQSB, CPLEX, entre otros. Este trabajo de tesis se desarrollará en esta dirección.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Construir un modelo de optimización que permita maximizar los beneficios de un agente del mercado del sector eléctrico colombiano, teniendo en cuenta la incertidumbre de algunas de las variables que lo describen y utilizar una nueva metodología para optimización estocástica con base en el reconocimiento de patrones.

1.2.2. Objetivos específicos

1. Llevar a cabo un análisis del estado de arte sobre el sector energético enfocado en los problemas de maximización de beneficios de los agentes.
2. Estudiar e implementar la teoría de reconocimiento de patrones en [13] para resolver un problema de programación lineal estocástico con restricciones probabilísticas.
3. Formular un modelo matemático aproximado de optimización de maximización de beneficios para un agente del sector eléctrico.
4. Comparar los resultados que provienen de las metodologías clásicas y la de reconocimiento de patrones en el problema de maximización de beneficios para un agente del mercado eléctrico colombiano teniendo en cuenta la incertidumbre.

Capítulo 2

Temas y conceptos preliminares

Se comienza con la primera sección haciendo una descripción general sobre el sector energético colombiano, donde prevalecen para la generación de energía eléctrica la tecnología hidráulica y térmica. Al igual que el marco regulatorio, el mercado energético mayorista-MEM y el ente oficial que suministra todos los datos pasados y actuales de las variables que intervienen en el sector eléctrico colombiano.

En la sección 2.2 se mostrarán algunos tópicos de la teoría de optimización estocástica.

En la sección 2.3 se describirá la metodología clásica para resolver un problema estocástico como por ejemplo el criterio del valor esperado y la metodología para llevar una restricción probabilística conjunta a su equivalente determinística mediante la funciones de distribución de probabilidad. Y finalmente en la última sección se dará una descripción general de la teoría del reconocimiento de patrones.

2.1. Sector eléctrico colombiano

Colombia un estado democrático con alrededor de 47 millones de habitantes, cuenta con una gran diversidad en recursos naturales y geográficos. Le permite contar con un mercado de energía hídrico y térmico que predomina; lo que le permite disponer de centrales hidráulicas que utilizan el agua como fuente para generar energía y centrales térmicas que utilizan la energía no renovable (petróleo, carbón y gas natural) como combustible de generación.

Durante la década de 1980, el Sector Eléctrico Colombiano sufrió una crisis, como que el resto de países latinoamericanos. La crisis fue resultado de las tarifas subsidiadas, la influencia política en las compañías estatales, y las demoras y sobrecostos de grandes proyectos de generación. Luego a comienzos de la década de 1990, el gobierno del presidente Cesar Gaviria avanzó en la modernización del sector eléctrico, abriéndolo a la participación privada. Esto llevó al nacimiento en 1994 de la Comisión de Regulación de Energía y Gas- CREG, mediante las leyes 142 y 143. La CREG es una entidad eminentemente técnica y cuyo objetivo es lograr que los servicios de energía eléctrica, gas natural y gas licuado de petróleo se presten al mayor número posible de personas, al menor costo posible para los usuarios y con una remuneración adecuada para las empresas que permita garantizar calidad, cobertura y expansión. De allí que sea la encargada de reglamentar el comportamiento de los usuarios y las empresas denominadas agentes. En este

orden de ideas se establecieron dos mercados: el mayorista y el minorista.

En el mercado mayorista de electricidad en Colombia-MEM se negocia toda la energía producida por las empresas generadoras que están conectadas a la red (Sistema Interconectado Nacional - SIN); y que atenderá la demanda de todos los usuarios finales. Éstos últimos hacen sus transacciones a través de empresas comercializadoras de energía eléctrica. Cada empresa de generación tiene la obligación de presentar diariamente al Centro Nacional de Despacho-CND una oferta que consiste en la disponibilidad de capacidad para cada hora del día siguiente y un precio único al cual está dispuesto a vender su energía durante todo ese día, para cada uno de sus recursos de generación.

Dos conceptos importantes al hablar del sector eléctrico es la energía eléctrica y la potencia eléctrica. La energía eléctrica es el movimiento de electrones con una fuerza eléctrica determinada y se mide dependiendo del trabajo que hace durante un tiempo determinado. Su unidad de medida son los kilovatios-hora kWh. Por ejemplo la demanda que tuvo Colombia en 2012 de energía alcanzó los 59,370.1 GWh, con un crecimiento del 3.8 por ciento con relación al año 2011; ver en [28]. La potencia eléctrica es la relación entre la energía eléctrica entregada o absorbida por un elemento en un determinado tiempo, su unidad de medida es el vatio o el watt (W). Por ejemplo la capacidad efectiva neta instalada en el sistema de interconexión nacional al finalizar 2012 fue 14,361 MW, según [28].

El proceso de la energía eléctrica está conformado básicamente por cuatro etapas:

- Generación: es la producción de la energía eléctrica.
- Transmisión: es el transporte de la energía eléctrica desde las centrales de generación hasta los grandes centros de consumo, a través de cables que son sostenidos por torres muy altas. Generalmente se denomina Sistema de Transmisión Nacional-STN.
- Distribución: es el transporte de energía eléctrica desde el punto donde el Sistema de Transmisión Nacional-STN la entrega hasta el punto de entrada a las instalaciones del consumidor final.
- Comercialización: es la actividad de comprar grandes cantidades de energía a los productores para venderlas a los usuarios o a empresas del sector, las relacionadas con la lectura de los medidores, la facturación del servicio y en general, las involucradas con la atención a los usuarios. Las cuatro etapas se pueden ver en la figura 2.1.

El mercado del sector eléctrico colombiano está compuesto por los usuarios que se clasifican en regulados y no regulados, y los agentes. Los Regulados son personas naturales o jurídicas cuyas compras de electricidad están sujetas a tarifas establecidas por la Comisión de Regulación de Energía y Gas-CREG. Aquí está la mayoría de usuarios comerciales, algunos industriales, oficiales y los residenciales clasificados por estratos socioeconómicos. Los No Regulados son personas naturales o jurídicas que realizan una demanda de energía superior a 2 MW. Ellos pueden negociar libremente los costos de las actividades relacionadas con la generación y comercialización de energía. En este nivel de consumo están industriales y comerciales que son grandes consumidores. Y los Agentes son los que hacen posible llevar la energía al usuario final (generadores, transportadores, distribuidores, comercializadores y administradores). Este mercado está operado por El Centro Nacional de Despacho-CND, quien planea, supervisa y controla la operación



Figura 2.1: Etapas del proceso de energía eléctrica.

FUENTE: CREG Regulador Colombiano-2013. <http://www.creg.gov.co>
[Consultado 20 noviembre 2013]

de los recursos de generación, transmisión e interconexión para garantizar una operación segura, confiable y económica.

La generación de energía eléctrica tradicional y la que predomina en Colombia son las centrales hidráulicas y las térmicas. Las centrales hidráulicas aprovechan la energía potencial a causa de una caída la cual mueve una turbina acoplada a un generador; mientras las térmicas se aprovechan del calor que se le inyecta a una caldera alimentada ya sea por gas, carbón, petróleo, entre otros, para generar gases a alta presión que mueven los rotores de las máquinas térmicas. Pero también dentro de la diversidad colombiana hay una central eólica (generación de energía a partir del viento) con una capacidad efectiva de 18,4 MW, llamada planta Jeperachi de Empresas Públicas de Medellín, ver en [28].

En el 2012 la capacidad efectiva neta del Sistema Interconectado Nacional -SIN colombiano alcanzó un valor de 14,361 MW. Donde la capacidad hidráulica fue de 9,185, la térmica 4,426 MW, menores 693 MW y cogeneradores 57 MW. La relación en porcentajes se puede observar en la figura 2.2.

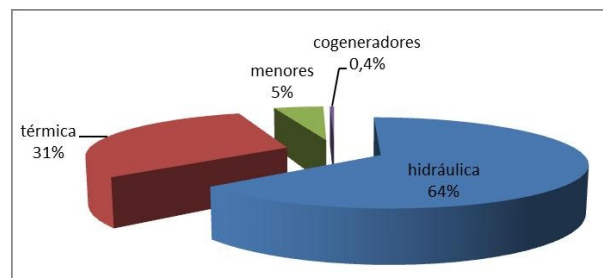


Figura 2.2: Tipos de generación en Colombia a 2012.

FUENTE: XM Filial de ISA-2013. <http://www.xm.com.co>
[Consultado 20 noviembre 2013]

En el cuadro 2.1 se puede ver los agentes para el sistema hidrológico del sistema de interconexión nacional-SIN, cuya capacidad neta efectiva está dada por encima de los 20 MW de potencia. En [28] se puede ver los datos para pequeñas centrales eléctricas, es decir, las menores de 20 MW, tanto para hidráulicas, térmicas y eólicas.

OPERADOR	CENTRAL	EMBALSE	RÍO
EPSA	ALBAN	ALTOANCHICAYA	ALTOANCHICAYA
			DIGUA
	CALIMA	CALIMA1	CALIMA
	SALVAJINA	SALVAJINA	CAUCA SALVAJINA
	PRADO	PRADO	PRADO
EMGESA	BETANIA	BETANIA	MAGDALENA BETANIA
	GUAVIO	GUAVIO	GUAVIO
	PAGUA	AGREGADO BOGOTA (SISGA-NEUSA-TOMINE)	BOGOTA N.R.
			BLANCO
	MUNA		
	CHUZA	CHUZA	
CHIVOR	CHIVOR	ESMERALDA	BATA
EPM	GUATAPE	PENOL	NARE
	GUATRON	TRONERAS	CONCEPCIÓN
			DESVIACIONES EEPPM (NEC,PAJ,DOL)
			GUADALUPE
		MIRAFLORES	TENCHE
	LA TASAJERA	RIOGRANDE2	GRANDE
	PLAYAS	PLAYAS	GUATAPE
	PORCE II	PORCE II	PORCE II
PORCE III	PORCE III	PORCE III	
ISAGEN	JAGUAS	SAN LORENZO	A. SAN LORENZO
	MIEL II	MIEL I	MIEL I, DESVIACION GUARINO
	SAN CARLOS	PUNCHINA	SAN CARLOS
URRA	URRA	URRA1	SINU URRA

Cuadro 2.1: Agentes del sector eléctrico colombiano para mayores de 20 MW.

FUENTE: XM Filial de ISA-2013. <http://www.xm.com.co>
[Consultado 21 noviembre 2013]

El sector temoeléctrico colombiano genera el 31 por ciento de la energía eléctrica de país y cuenta con alrededor de 30 centrales. En la figura 2.3 se muestran las centrales hidroeléctricas y termoeléctricas del país, identificadas con el color azul y rojo respectivamente.

El cuadro 2.2 muestra las capacidades netas con sus respectivos agentes comerciales que componen el sistema de interconexión nacional-SIN en relación con la generación térmica.

Finalmente, hay una empresa que hace parte de ISA (empresa colombiana) denominada **XM**, especializada en la Gestión de Sistemas de Tiempo Real. Actualmente se especializa en los sectores financiero, transporte-tránsito y eléctrico. Este último es su principal negocio y se basa en la operación del Sistema Interconectado Nacional-SIN colombiano y la administración del mercado de energía en Colombia, incluyendo las transacciones internacionales de electricidad con Ecuador. Y gracias a sus diferentes bases de datos como NEON, Paratec, Portal BI, entre otros; se pueden consultar datos reales de las variables involucradas en el sector eléctrico colombiano, los cuales serán utilizados en esta tesis.



Figura 2.3: Centrales hidroeléctricas y termoeléctricas Colombianas.

FUENTE: XM Filial de ISA-2012. <http://www.xm.com.co>
 [Consultado 07 febrero 2014]

EMPRESA ADMINISTRADORA	CAPACIDAD NETA (MW)
CELSIA S.A. E.S.P.	167.0
CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE CALDAS S.A. E.S.P.	46.0
EMGESA S.A. E.S.P.	412.0
EMPRESAS PÚBLICAS DE MEDELLÍN E.S.P.	460.0
GENERADORA Y COMERCIALIZADORA DE ENERGÍA DEL CARIBE S.A. ESP	1,207.0
GESTIÓN ENERGÉTICA S.A. E.S.P.	327.0
ISAGEN S.A. E.S.P.	276.0
PROELECTRICA & CIA S.C.A. E.S.P.	90.0
TERMOCANDELARIA S.C.A. E.S.P.	314.0
TERMOEMCALI S.A. E.S.P.	229.0
TERMOTASAJERO S.A. E.S.P.	155.0
TERMOVALLE S.C.A. E.S.P.	205.0
TERMOYOPAL GENERACION 2 S.A.S E.S.P.	30.0
ZONA FRANCA CELSIA S.A. E.S.P.	603.0
TOTAL SIN	4,521.0

Cuadro 2.2: Unidades Térmicas Totales SIN.

FUENTE: XM Filial de ISA-2014. <http://www.xm.com.co>
 [Consultado 19 febrero 2014]

Energía hidráulica y térmica

Energía hidráulica

El origen de la energía hidráulica está relacionado con el ciclo hidrológico de las lluvias. Esto hace que sea significativa en regiones donde existe una combinación adecuada de lluvias, desniveles

geológicos y orografía favorable para la construcción de presas.

El proceso de la energía hidráulica es debida a la energía potencial contenida en las masas de agua que transportan los ríos, provenientes de la lluvia y del deshielo. Puede ser utilizada para producir energía eléctrica mediante una caída de agua.

Para obtener energía eléctrica debemos partir de alguna otra forma de energía y realizar un proceso de transformación, de allí el dicho que “ la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma ”.

Alguna de las ventajas de este tipo de energía es que es renovable, limpia y de alto rendimiento energético. Pero la constitución de un embalse que supone la inundación de importantes extensiones de terreno, involucrando a veces áreas fértiles o de gran valor ecológico, genera una desventaja social como el abandono de pueblos y el desplazamiento de las poblaciones.

Centrales hidroeléctricas

Una central hidroeléctrica es aquella que se utiliza para la generación de energía eléctrica mediante el aprovechamiento de la energía hidráulica. Concentrando grandes cantidades de agua en un embalse se obtiene inicialmente energía potencial. Por la acción de la gravedad, el agua adquiere energía cinética o de movimiento: pasa de un nivel superior a otro muy bajo, a través de los tuneles u obras de conducción. A la energía desarrollada por el agua al caer se le denomina energía hidráulica.

Por su masa y velocidad, el agua produce un empuje que se aplica a las turbinas, las cuales transforman la energía hidráulica en energía mecánica. Esta se propaga en los generadores acoplados en las turbinas. Los generadores producen energía eléctrica, la cual pasa a la subestación contigua o cerca de la planta. La subestación eleva la tensión o voltaje para que la energía llegue a los centros de consumo con la debida calidad. Todo el proceso es conducido desde la Sala de Control de la casa de Máquinas.

Las partes constitutivas del complejo hidroeléctrico son:

- Fuente de abastecimiento: embalse
- Obras de conducción
- Casa de Máquinas
- Estación elevadora
- Red de transporte
- Subestación
- Estación transformadora y red de distribución
- Distribución industrial
- Distribución poblacional

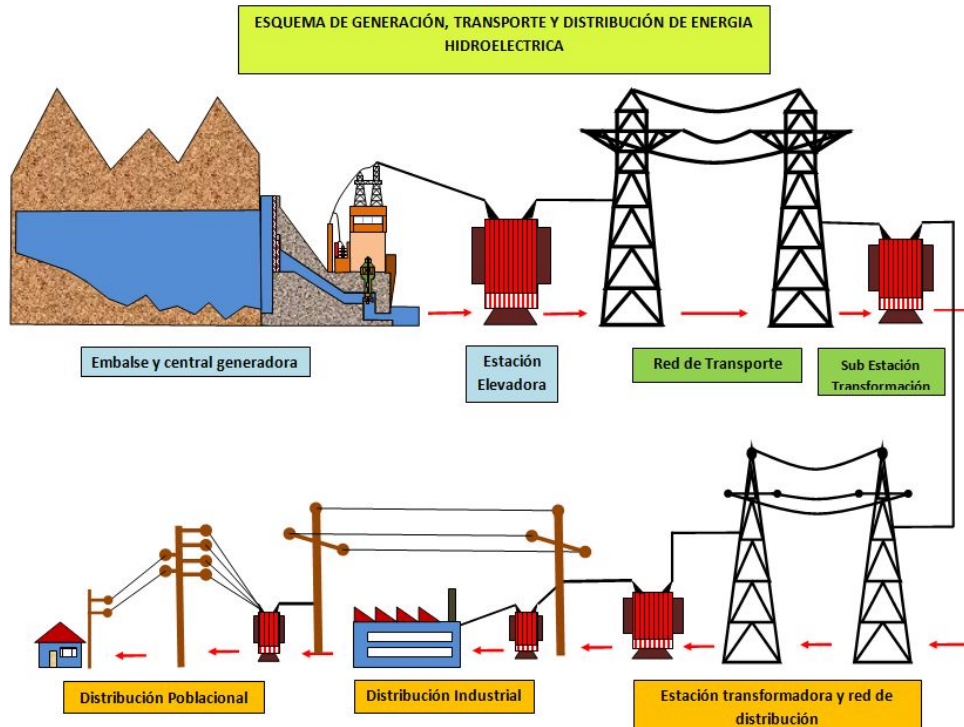


Figura 2.4: Partes de una central hidroeléctrica.

FUENTE: Isagen-2013. <http://www.isagen.com.co>
 [Consultado 22 noviembre 2013]

En la figura 2.3 se pueden ver las partes de una central hidroeléctrica.

Una de las características principales de una central hidroeléctrica, desde el punto de vista de su capacidad de generación de electricidad es **la potencia**. La cual está en función del desnivel existente entre el nivel medio del embalse y el nivel medio de las aguas debajo de la usina, y del caudal máximo turbinable, además de las características de la turbina y del generador. Matemáticamente se puede expresar como

$$P = g \cdot \rho \cdot \eta_T \cdot \eta_G \cdot h_l \cdot q_t$$

Donde

- P: potencia generada en la máquina, en (MW)
- g: aceleración de la gravedad, en (m/s^2)
- ρ : peso específico del agua, en (Kg/m^3)
- η_T : rendimiento de la turbina, en (%)
- η_G : rendimiento del generador, en (%)
- h_l : altura del salto líquido, en (m)

- q_t : caudal turbinado por unidad de tiempo, en (m^3/s)

Las variables de rendimiento de la turbina η_T y del generador η_G indican el grado de eficiencia del proceso de transformación de la energía potencial del agua en energía mecánica y la energía mecánica en energía eléctrica, respectivamente.

Tipos de centrales hidroeléctricas

Centrales a filo de agua: También denominadas centrales de agua fluyente o de pasada, utilizan parte del flujo de un río para generar energía eléctrica. Operan en forma continua porque no tienen capacidad para almacenar agua, no disponen de embalse; como la Central Amoyá [30], la cual aprovecha las aguas del río Amoyá y Davis en el departamento del Tolima. Turbinan el agua disponible en el momento, limitadamente a la capacidad instalada. En estos casos las turbinas pueden ser de eje vertical, cuando el río tiene una pendiente fuerte u horizontal cuando la pendiente del río es baja.

Centrales acopladas a uno o más embalses: Son las que poseen capacidad de regulación. Entre ellas están aquellas con gran capacidad de regulación, caracterizada por una elevada relación entre el volumen útil y el valor del caudal promedio afluente. Este tipo de centrales son las responsables de regular el caudal, permitiendo la transferencia del recurso hídrico de los períodos húmedos a los períodos secos. Como ejemplo de este tipo de centrales se puede mencionar a la central hidroeléctrica de Guatapé cuyo embalse es el Peñol [28].

Centrales reversibles o de bombeo: Las centrales reversibles o de bombeo son aprovechamientos hidroeléctricos con dos embalses. El embalse superior puede ser natural o artificial. La máquina eléctrica suele ser única: máquina síncrona, que funciona como alternador cuando se está turbinando y como motor síncrono cuando se está bombeando al embalse superior. La tubería forzada es también única con flujo en ambos sentidos.

Energía térmica

Se puede decir que la energía térmica se refiere a la energía liberada en forma de calor, obtenida de la naturaleza (energía geotérmica), mediante la combustión de algún combustible fósil (petróleo, gas natural o carbón), mediante energía eléctrica por efecto Joule, por rozamiento, por un proceso de fisión nuclear o como residuo de otros procesos mecánicos o químicos.

La energía térmica también se puede aprovechar en un motor térmico; en el caso de la energía nuclear para la generación de energía eléctrica, y en el caso de la combustión, para obtener trabajo como en los motores de los automóviles o de los aviones.

La obtención de energía térmica implica un impacto ambiental. La combustión libera dióxido de carbono (CO_2) y otras emisiones contaminantes. La tecnología actual en energía nuclear da lugar a residuos radiactivos que deben ser controlados.

Además debe tenerse en cuenta la utilización de terreno de las plantas generadoras de energía y los riesgos de contaminación por accidentes en el uso de los materiales implicados, como los derrames de petróleo o de productos petroquímicos derivados.

Centrales termoeléctricas

Una central termoeléctrica es una instalación que se usa para generar energía eléctrica a partir de energía liberada en forma de calor mediante la combustión de algunos combustibles como el carbón, el gas natural y el petróleo. Este calor es utilizado por un ciclo de termodinámica para mover un alternador y generar energía eléctrica.

El alternador es una dinamo utilizado para producir energía eléctrica alterna a partir de energía mecánica y de los principios de electromagnetismo.

Este tipo de centrales que usan la combustión contribuyen al “efecto invernadero”, ya que liberan gases como el CO_2 . Sin embargo la masa de este gas no es la misma en todos los casos, ya que el carbón depende de sus diferentes componentes el cual puede ser dióxido de carbono o monóxido de carbono. En el gas natural por cada átomo de carbono hay cuatro de hidrógeno por lo que su contaminación es mucho menor en el ambiente.

Las centrales térmicas clásicas son muy rentables y económicas por lo que su uso se extiende en los países de economía avanzada y en vía de desarrollo.

Tipos de centrales termoeléctricas

Centrales de ciclo convencional: Son instalaciones industriales destinadas a la producción de energía eléctrica. Se basan en la transformación de la energía química en energía térmica (por combustión) y la energía mecánica (rotación de turbinas) en energía eléctrica (en los generadores).

Las centrales de ciclo convencional calientan agua hasta transformarla en vapor a alta presión y temperatura. Este vapor generado es transportado por tuberías hasta llegar a una batería de turbinas cuyo eje está conectado a un generador de corriente que, por el fenómeno de inducción electromagnética, transforma la energía mecánica en eléctrica.

Las centrales térmicas necesitan agua, de ahí su localización en las proximidades de ríos, mar o lagos, para refrigerar. La refrigeración es necesaria para mantener en funcionamiento el vapor que transporta la energía desde las calderas a las turbinas. Una vez utilizado en mover las turbinas y el generador, el vapor debe transformarse en un fluido de alta densidad para que pueda recibir otra vez la transferencia de calor de la caldera térmica.

En la figura 2.5 se muestran los elementos de una central térmica convencional.

Centrales de ciclo combinado: Se puede definir un ciclo combinado como el acoplamiento de dos ciclos termodinámicos individuales, uno que opera a alta temperatura y otro con menores temperaturas de trabajo. El calor residual del proceso de generación de trabajo neto en el ciclo de alta temperatura se aprovecha en su mayor parte en un intermezclador de calor para producir trabajo en un ciclo termodinámico de baja temperatura.

Una central termoeléctrica de ciclo combinado es un tipo de central que utiliza gas natural, gasóleo o incluso carbón preparado como combustible para alimentar una turbina de gas. Luego los gases de escape de la turbina de gas que todavía tienen una elevada temperatura, se utilizan para producir vapor que mueve una segunda turbina, esta vez de vapor. Cada una de estas

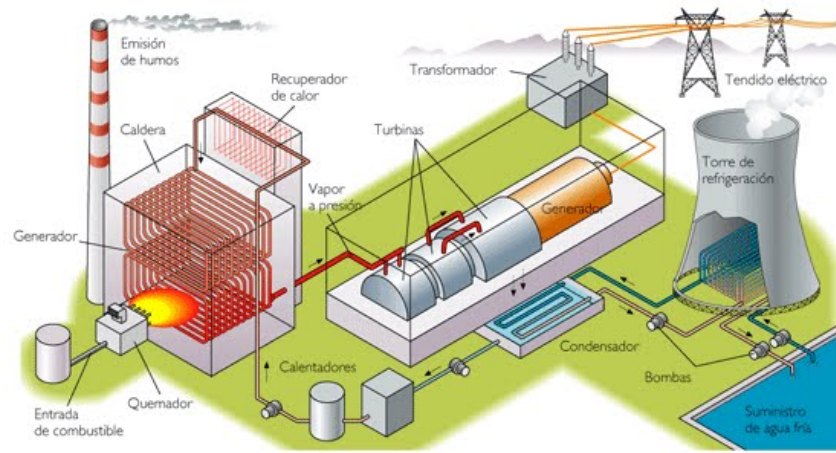


Figura 2.5: Central térmica convencional.

FUENTE: <http://luissevilla26.blogspot.com> [Consultado 19 febrero 2014]

turbinas está acoplada a su correspondiente alternador para generar la electricidad como en una central termoelectrica clásica.

En la figura 2.6 se muestran los componentes de una planta de ciclo combinado

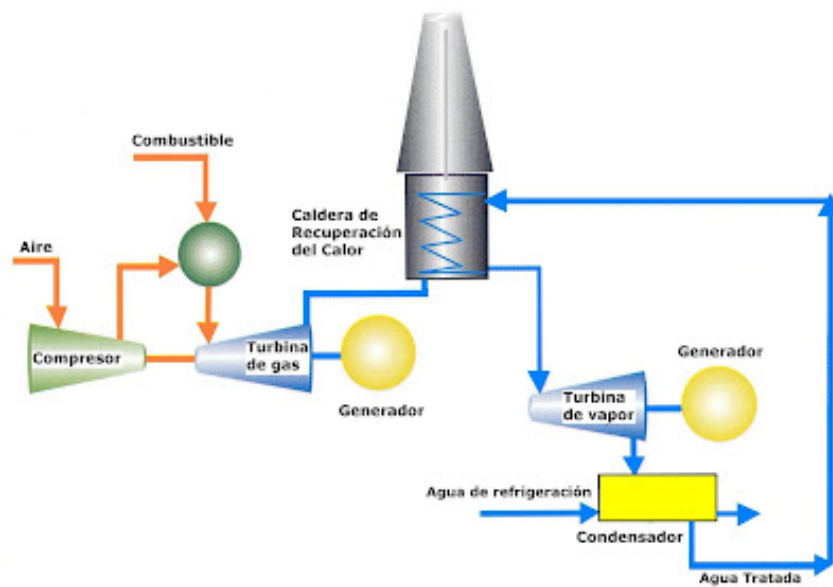


Figura 2.6: Central térmica de ciclo combinado.

FUENTE: <http://tecnologianivel2.blogspot.com.br> [Consultado 19 febrero 2014]

2.2. Optimización estocástica

La optimización estocástica es un área de estudio muy amplia. La complejidad de un problema estocástico no solo va ligado a que los parámetros presentan cierto grado de incertidumbre sino también a que las funciones objetivos sean o no lineales al igual que las restricciones. La presente tesis se enfocará en los problemas de programación lineal estocásticos.

En la mayoría de los casos un problema de optimización estocástico se resuelve mediante un modelo de optimización determinista equivalente. De allí que sea necesario revisar previamente algunos de los temas relacionados con: Programación lineal, programación entera mixta, programación no lineal, entre otros. En lo que sigue se dan los elementos básicos de algunos de estos temas.

Programación lineal

Un problema de programación lineal consiste en encontrar el mínimo o máximo de una función lineal sujeta a unas restricciones lineales del tipo de desigualdad, igualdad o ambas. De acuerdo a [2] una forma general de un problema de programación lineal es

$$\text{mín} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad (2.1)$$

sujeto a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

donde $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ es llamada función objetivo que debe minimizarse y se denotará por z . Los coeficientes c_1, \dots, c_n son los coeficientes de costo (conocidos) y x_1, \dots, x_n son las variables de decisión que deben determinarse. La desigualdad $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ denota la i -ésima restricción. Los coeficientes a_{ij} para $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ forma la matriz de restricciones A en la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El vector columna cuya i -ésima componente es b_i , representa los requerimientos mínimos que deben satisfacerse. Las restricciones $x_1, \dots, x_n \geq 0$ son las restricciones de no negatividad. El vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ que satisfacen todas las restricciones se llaman un punto factible o

vector factible. El conjunto de todos esos puntos se llama la región factible o espacio factible. La formulación en notación matricial del problema (2.1) se puede dar como

$$\begin{aligned} Z = \quad & \text{mín} \quad cx & (2.2) \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde x es un vector columna n -dimensional de decisiones de términos no negativos, c es un vector fila n -dimensional de costos, A es la matriz $m \times n$ -dimensional de restricciones y b es el vector columna m -dimensional. A , b y c son conocidos.

Para resolver problemas de programación lineal con dos variables es común utilizar el método gráfico. También, si se involucran dos o más variables se puede utilizar el método simplex. Ambos métodos se puede encontrar en [2], [19].

2.2.1. Programación lineal estocástica

Los problemas de programación lineal estocásticos, como se pueden ver en [3] y [11]; son problemas de programación lineal en que algunos o todos los coeficientes de la matriz A y/o de los vectores c y b del modelo 2.16 son variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, cuya distribución de probabilidad conjunta es conocida e independiente de la variable de decisión x . Estamos entonces en un problema de programación lineal estocástico que tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \text{máx(mín)} \quad c(\tilde{\xi})x & (2.3) \\ \text{s.a.} \quad & A(\tilde{\xi})x \leq b(\tilde{\xi}) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde $\tilde{\xi}$ es un vector aleatorio con una distribución de probabilidad.

En estos problemas no está claramente definido el concepto de óptimo (mínimo, máximo). Si por ejemplo el problema es de minimización

$$\begin{aligned} & \text{mín} \quad c(\tilde{\xi})x & (2.4) \\ \text{s.a.} \quad & A(\tilde{\xi})x \leq b(\tilde{\xi}) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

como $c(\tilde{\xi})$ es un vector aleatorio, no es posible en general hallar un vector factible x_0 tal que

$$c(\tilde{\xi})x_0 \leq c(\tilde{\xi})x$$

para cada $\tilde{\xi} \in \Omega$ y para cada x factible, ya que el valor de la función objetivo $c(\tilde{\xi})x(\tilde{\xi})$ en cualquier punto x no es un número sino un valor aleatorio.

Por lo tanto, puede ser que para algún $\tilde{\xi}_1 \in \Omega$ se verifique que

$$c(\tilde{\xi}_1)x_0 \leq c(\tilde{\xi}_1)x$$

mientras que para otro $\tilde{\xi}_2 \in \Omega$ se verifique que

$$c(\tilde{\xi}_2)x_0 \geq c(\tilde{\xi}_2)x$$

Un problema análogo se plantea en relación a las restricciones.

Es decir, en un problema del tipo 2.3, no está claramente especificado cómo tomar una decisión x antes de conocer la realización del evento aleatorio $\tilde{\xi}$. Esto hace necesario especificar los conceptos de solución que se consideran apropiados para el problema concreto descrito por ese modelo.

Problemas equivalentes deterministas

Se basan en la hipótesis de que la decisión, x , se toma antes de conocer la realización de las variables aleatorias que sin embargo, puede tener influencia en el resultado.

Este tipo de problemas se pueden resolver por varios caminos, como se menciona en [3], [11], [16]. El más usual consiste en reemplazar el problema de programación lineal estocástico por un programa determinista conveniente, denominado *Equivalente Determinista*.

Entre los diversos modos de obtener Equivalentes Deterministas están los problemas de programación lineal estocásticos con restricciones probabilísticas.

Problemas con restricciones probabilísticas

Se considera de nuevo el modelo 2.4.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c(\tilde{\xi})x & (2.5) \\ \text{s.a.} \quad & A(\tilde{\xi})x \leq b(\tilde{\xi}) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

En este tipo de aproximación no es necesario que las restricciones se satisfagan totalmente, sino que es suficiente con que se verifiquen con una cierta probabilidad dada.

Una posible formulación del problema es considerar que la decisión x quede restringida a la probabilidad

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}/A(\tilde{\xi})x \leq b(\tilde{\xi})\} \geq \alpha$$

donde α es un valor de probabilidad o confiabilidad que está en el intervalo $[0,1]$ y los valores concretos que toma, se pueden elegir de acuerdo a lo que pretenda el decisor.

Otra forma para $\mathbf{P}\{\tilde{\xi}/A(\tilde{\xi})x \leq b(\tilde{\xi})\} \geq \alpha$ es

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}/\sum_{j=1}^n a_{ij}(\tilde{\xi})x_j \geq b_i(\tilde{\xi}), \quad i=1,2,\dots,m\} \geq \alpha$$

Estas restricciones se denominan restricciones probabilísticas conjuntas.

Para la función objetivo, la cual puede tener un parámetro bajo incertidumbre se utiliza generalmente la esperanza matemática para $c(\tilde{\xi})x$ (tema que se abordará en la siguiente sección).

Por lo tanto, el modelo 2.5 se puede transformar en un problema determinístico, considerando la esperanza matemática en la función objetivo y considerando una probabilidad en las restricciones:

$$\text{mín} \quad \mathbf{E}[c(\tilde{\xi})x] \quad (2.6)$$

$$s.a. \quad \mathbf{P}\left\{\tilde{\xi}/\sum_{j=1}^n a_{ij}(\tilde{\xi})x_j \geq b_i(\tilde{\xi}), \quad i=1,2,\dots,m\right\} \geq \alpha$$

$$x \geq 0, \alpha \in [0, 1]$$

Las restricciones probabilísticas también se pueden considerar como un conjunto de restricciones individuales, en lugar de una única restricción conjunta; éstas restricciones se denominan restricciones probabilísticas separadas o individuales. De nuevo el modelo 2.5 se puede transformar en:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{E}[c(\tilde{\xi})x] & (2.7) \\ s.a. \quad & \mathbf{P}\left\{\tilde{\xi}/\sum_{j=1}^n a_{ij}(\tilde{\xi})x_j \geq b_i(\tilde{\xi})\right\} \geq \alpha_i \\ & i=1,2,\dots,m, \quad x \geq 0, \quad \alpha_i \in [0, 1] \end{aligned}$$

Una pregunta que surge es si los problemas 2.6 y 2.7 son convexos, de la misma forma que son los problemas de programación lineal. Dado que $\mathbf{E}[c(\tilde{\xi})x]$ es lineal solo resta ver que

$$X(\alpha) = \{x/\mathbf{P}\left[\left\{\tilde{\xi}/\sum_{j=1}^n a_{ij}(\tilde{\xi})x_j \geq b_i(\tilde{\xi})\right\}\right] \geq \alpha\}$$

ó

$$X_i(\alpha_i) = \{x/\mathbf{P}\left[\left\{\tilde{\xi}/\sum_{j=1}^n a_{ij}(\tilde{\xi})x_j \geq b_i(\tilde{\xi})\right\}\right] \geq \alpha_i\}$$

son convexos, ya que se pueden encontrar casos en los cuales no lo son.

Ejemplo con una solución de cuidado

El siguiente ejemplo tomado de [11], muestra como los problemas de programación lineal estocásticos se han resuelto sustituyendo las variables aleatorias por sus valores esperados quedando un problema de programación lineal común, pero su resultado nos muestra que se debe ser muy cuidadoso al elegir este procedimiento.

Resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ s.a \quad & \xi x_1 + x_2 \geq 7 \\ & \eta x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde (ξ, η) es un vector aleatorio con una distribución de probabilidad uniforme en el rectángulo

$$\left\{(1 \leq \xi \leq 4), \left(\frac{1}{3} \leq \eta \leq 1\right)\right\}$$

El valor esperado de una distribución de probabilidad uniforme se define como $(a + b)/2$, siendo a y b los límites inferiores y superiores de ξ y η , por lo tanto el valor esperado de (ξ, η) es:

$$\mathbf{E}[(\xi, \eta)] = \left(\frac{5}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

El problema de programación lineal es:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & \frac{5}{2}x_1 + x_2 \geq 7 \\ & \frac{2}{3}x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se utiliza uno de los métodos conocidos para resolver éstos problemas lineales determinísticos, y se encuentra que:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{18}{11}, \frac{32}{11}\right)$$

Pero la probabilidad del suceso consiste en que esta solución sea factible en

$$\mathbf{P}\{(\xi, \eta)/\xi x_1 + x_2 \geq 7, \eta x_1 + x_2 \geq 4\}$$

$$\mathbf{P}\left\{(\xi, \eta)/\xi \geq \frac{5}{2}, \eta \geq \frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{4}$$

Donde $1/4$ es la región del rectángulo $\{(1 \leq \xi \leq 4), (\frac{1}{3} \leq \eta \leq 1)\}$ con distribución de probabilidad uniforme cuya intersección viene dada por $\xi \geq \frac{5}{2}$ y $\eta \geq \frac{2}{3}$.

Por lo tanto, la solución obtenida no es factible en $1 - \frac{1}{4}$, es decir, $\frac{3}{4}$

Se debe ser muy cuidadoso cuando se resuelva un problema del tipo 2.3 con esta técnica, pues se pueden encontrar soluciones que no sean factibles con respecto a una probabilidad dada.

Al intentar mejorar este procedimiento de solución para problemas de programación lineal estocástico, hay técnicas, entre otras como la denominado aquí y ahora (“here and now”) que dan lugar a los Problemas Equivalentes Deterministas. En la siguiente sección se dan las ideas básicas de una de las metodologías más usadas para resolver problemas de optimización estocástica, con la cual se harán las comparaciones de la metodología para resolver este mismo tipo de problemas, basada en la teoría de patrones.

2.3. Metodología clásica para un resolver un problema estocástico

En esta sección se abordará la resolución de problemas de programación lineal estocástico mediante restricciones probabilísticas conjuntas, donde se centrará en restricciones estocásticas lineales y funciones objetivo de tipo lineal con un parámetro bajo incertidumbre. Para ello se considerarán algunos criterios de transformación definidos en la literatura clásica como la utilización de la función de distribución acumulada para las restricciones y la esperanza matemática para la función objetivo, que se pueden encontrar en [3], [11], [16].

Éste análisis permitirá obtener, a partir de un problema de programación estocástico, su determinista equivalente, problema cuya solución es considerada óptima para el problema inicial.

Trasformación de las restricciones estocásticas lineales en su equivalente determinístico

Se considera el modelo de [3], con restricciones probabilísticas conjuntas.

$$\begin{aligned} & \text{mín} && q^T x && (2.8) \\ & s.a. && Ax \geq b \\ & \mathbf{P}(hx \geq \xi_j, \xi_j \in J) \geq \alpha; j = 1, \dots, |J| \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

donde

ξ_j es un vector aleatorio, que tiene una distribución de probabilidad y dimensión $|J|$. J es el conjunto de los vectores aleatorios en las restricciones probabilísticas. La matriz A y h y los vectores q y b son determinísticos; α es la probabilidad fijada a priori o nivel de viabilidad, α varía entre 0 y 1.

Entonces el equivalente determinístico para las restricciones probabilísticas conjuntas es

$$\mathbf{P}(hx \geq \xi_j) \geq \alpha \Leftrightarrow \int_J dF(\xi) \geq \alpha \quad (2.9)$$

donde

$F(\xi)$ es la función de distribución de probabilidad acumulada de la variable aleatoria ξ .

La equivalencia 2.9 se reemplaza en el problema de programación lineal estocástico 2.8, quedando su equivalente determinístico de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{mín} && q^T x && (2.10) \\ & s.a. && Ax \geq b \\ & && \int_J dF(\xi) \geq \alpha \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

Trasformación del objetivo lineal estocástico en su equivalente determinístico

Se considera el modelo estocástico de [3], en el que todas las restricciones son determinísticas o se transformaron en su equivalente determinístico por algún método como el descrito anteriormente o el descrito en el capítulo 4 y la función objetivo se encuentra bajo un parámetro de incertidumbre.

$$\begin{aligned} & \text{mín} && z(x, \xi) && (2.11) \\ & s.a. && && \\ & && x \in X \end{aligned}$$

donde

$X \subset \mathbb{R}^n$ está compuesto por restricciones determinísticas.

Uno de los criterios para transformar una función objetivo con parámetro estocástico y que es utilizado en la tesis es el **criterio de la esperanza matemática**.

Este consiste en convertir la variable aleatoria de $z(x, \xi)$ en una función determinística tomando la esperanza matemática

$$\mathbf{E} [z(x, \xi)] \quad (2.12)$$

Por lo tanto, el problema determinista equivalente del problema estocástico 2.5 es

$$\text{mín } \mathbf{E} [z(x, \xi)] \quad (2.13)$$

s.a.

$$x \in X$$

Para resolver el problema de programación estocástica siguiendo este criterio citado por [3], [8] y [11], basta con conocer el valor esperado de la función objetivo estocástica, por ejemplo:

Se considera el problema de programación lineal estocástico

$$\text{mín } z(x, \xi) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Donde $\xi_1 = [2, 4, 6, 8, 10]$ y $\xi_2 = [1, 2, 3, 4, 5]$, luego $z(x, \xi)$ tiene un valor esperado $z(x, \xi) = 6x_1 + 3x_2$, por lo tanto el problema determinista equivalente es:

$$\text{mín } 6x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución para la función objetivo es $z(x, \xi) = 3$.

Para terminar, según [16] este criterio se debe considerar las siguientes condiciones:

- El evento aleatorio debe repetirse un gran número de veces para asegurar que la media de los resultados sea bastante próxima al valor esperado.
- La magnitud de la variación del resultado alrededor del valor esperado debe ser pequeña. En otro caso el criterio de valor esperado puede no ser acertado.

2.4. Reconocimiento de patrones

De manera intuitiva [4] establece que el reconocimiento de patrones es como la forma de interpretar al mundo, por ejemplo, un niño desde bebé aprende a reconocer su entorno distinguiendo patrones visuales (formas-colores), auditivos (sonidos-música), sensitivos (calor-frío), entre otros. Conforme un niño crece va refinando su capacidad de reconocimiento de patrones, de manera que puede distinguir una melodía de otra, diferentes variaciones de temperatura, diferentes tonalidades de un mismo color. Posteriormente aprende a hablar, a reconocer letras, a formar y entender palabras. En fin, podemos decir que el reconocimiento de patrones es el mecanismo con el que contamos para distinguir unas cosas de otras, relacionar cosas semejantes, formar grupos de cosas, describir objetos, tomar y explicar decisiones, entre otras.

Una forma más técnica, como la expone [18] dice que es una rama del conocimiento científico, de carácter multidisciplinario (ingeniería, matemática, computación, biología, entre otras), cuyo objeto de estudio son los procesos de identificación, caracterización, clasificación y reconstrucción, sobre conjuntos de fenómenos o entes, tanto físicos como abstractos, así como el desarrollo de teorías, metodologías y tecnologías relacionadas a dichos procesos.

El Reconocimiento de Patrones aborda principalmente cuatro grupos de problemas [4]:

1. Selección de rasgos o características.
2. Clasificación con aprendizaje (supervisado) y donde el diagnóstico y pronóstico pueden modelarse como una clasificación supervisada.
3. Clasificación sin aprendizaje (no supervisado).
4. Clasificación con aprendizaje parcial (parcialmente supervisado).

Para resolver problemas de reconocimiento de patrones se han seguido diferentes enfoques, entre los cuales encontramos:

- Estadístico
- Lógico-Combinatorio
- Redes Neuronales
- Sintáctico-estructural

De acuerdo a la metodología propuesta por [13], donde relaciona la programación estocástica con el campo del reconocimiento de patrones, específicamente con los enfoques Lógico-Combinatorio y Estadístico; se presenta, a continuación una breve caracterización de cada uno de ellos en términos de sus fundamentos teóricos y herramientas distintivas.

Enfoque lógico-combinatorio

La Lógica Matemática, la Teoría de Testores, la Teoría Clásica de Conjuntos, la Teoría de los Subconjuntos Difusos, la Teoría Combinatoria, la Matemática Discreta en general, constituyen la base teórico matemático en el que se desarrolla el denominado *Enfoque Lógico-Combinatorio* en

Reconocimiento de Patrones. Según [18], las ideas centrales de este enfoque consisten en suponer que los objetos se describen por medio de una combinación de rasgos numéricos y no numéricos, y los distintos valores pueden ser procesados por funciones numéricas.

Este enfoque se basa en la idea de que la modelación del problema debe ser lo más cercana posible a la realidad del mismo, sin hacer suposiciones que no estén fundamentadas. Uno de los aspectos esenciales del enfoque es que las características utilizadas para describir a los objetos de estudio deben ser tratadas adecuadamente.

El enfoque lógico combinatorio, además aborda problemas de selección de variables (determinación de síndromes de enfermedades, determinación de la relevancia de síntomas, signos de enfermedades, o del estado de una red de computadoras, entre otros.) y de clasificación supervisada (con aprendizaje: diagnóstico y pronóstico médicos, pronóstico de fenómenos naturales o sociales, pronóstico de perspectiva de recursos minerales, entre otros.); a partir del enfoque lógico combinatorio en los llamados dominios poco estructurados, tal como lo menciona [18].

En la metodología propuesta, este enfoque se verá muy relacionado por medio de la lógica matemática y la teoría de conjuntos al incluir tablas de verdad, formas normales disyuntivas y funciones Booleanas definidas parcialmente; que serán expuestas en las siguientes secciones.

Enfoque estadístico

Históricamente como lo relacionan [18] y [20], una de las primeras herramientas empleadas en la solución de problemas de Reconocimiento de Patrones es la Estadística; utiliza el Análisis Discriminante, la Teoría Bayesiana de la Decisión, la Teoría de la Probabilidad y el Análisis de Agrupamientos (cluster). El enfoque estadístico consiste en representar cada patrón mediante un vector de números resultantes del muestreo y cuantificación de las señales externas, y cada clase por uno o varios patrones prototipo. Un patrón no es más que un punto del espacio de representación de los patrones, que es un espacio de dimensionalidad determinada por el número de variables consideradas.

El estudio del conjunto apropiado de variables, la variabilidad de los patrones de una clase, las medidas de semejanza entre patrones, así como la relación entre patrones y clases, constituye el *Reconocimiento Estadístico de Patrones* cuyas principales características son:

- Se basa en descripciones de objetos en términos de mediciones, es decir, variables numéricas.
- A dichas variables se le presuponen propiedades tales como las de estar definidas sobre un espacio métrico o normado, o incluso en ocasiones se asume un tipo particular de métrica.
- Es muy frecuente el uso de probabilidades, en particular cuando se considera la presencia de elementos con incertidumbre o subjetividad; pero también en estos casos es frecuente el asumir un determinado comportamiento de dichas probabilidades y con ello aparece la suposición de ajustarse a distribuciones normales.

Este enfoque ha sido aplicado en muchos problemas concretos, en particular los relacionados con imágenes y señales; donde coinciden [4], [18] y [20].

Un ejemplo tomado de [18], dice que en un proceso de generación de patrones se tiene en cuenta las siguientes características:

- Los patrones de la misma clase presentan variaciones aleatorias como el ruido, deformaciones, variabilidad biológica, entre otras.
- El proceso de generación de patrones se describe mediante un modelo probabilístico.
- Cada patrón es un vector aleatorio n -dimensional perteneciente a una de m clases $\omega_i = 1, \dots, m$

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

- Cada clase ω_i tiene una probabilidad a priori $P(\omega_i)$.
- La distribución de X en la clase ω_i se caracteriza por la probabilidad condicional de clase $p(X|\omega_i)$
- Las probabilidades a priori suman uno

$$\sum_{i=1}^m P(\omega_i) = 1$$

- La densidad de probabilidad conjunta $p(X)$ es

$$p(X) = \sum_{i=1}^m p(X|\omega_i)P(\omega_i)$$

- En ciertos momentos interesa la probabilidad a posteriori para cada ω_i , usando la fórmula de Bayes.

$$P(\omega_i|X) = p(X|\omega_i)P(\omega_i)/p(X)$$

Se retoma el ejemplo con el reconocimiento de caracteres, donde los parámetros involucrados son:

- $m = 26$ número de caracteres(clases).
- $n = 8$ número de medidas.
- x_i con $i = 1, \dots, n$ distancia entre el centro de gravedad y el punto de intersección más lejano en la semirecta formado por $(i - 1)\pi/4$ con el origen.
- $P(\omega_i)$ probabilidad a priori de ocurrencia del i -ésimo caracter.

En la figura 2.7, se observa para los dos primeros caracteres, es decir, A y B con las 8 medidas denotadas con x_i y las semirectas separadas $7\pi/4$.

En la metodología propuesta, este enfoque se verá muy relacionado por medio de la teoría de probabilidad al considerar la presencia de variables bajo incertidumbre, además de funciones de distribución de probabilidad; que serán descritas en el marco general de la metodología en las siguientes secciones.

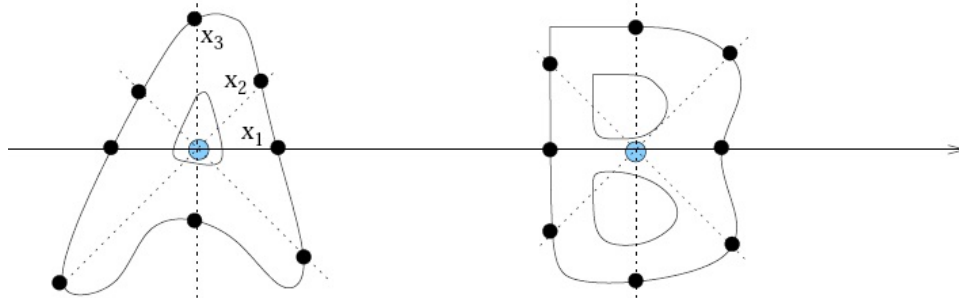


Figura 2.7: Atributo en reconocimiento de caracteres.

Capítulo 3

Reconocimiento de patrones en la optimización estocástica

En este capítulo se muestra la teoría de la metodología basada en el reconocimiento de patrones propuesta por [13], que consiste en la transformación de un problema de programación estocástico con restricciones probabilísticas en su determinista equivalente, mediante la integración de la programación estocástica y el campo de reconocimiento de patrones.

Para ello, se desarrollan 2 secciones. En la primera se detalla la estructura de la metodología basada en reconocimiento de patrones para resolver problemas de optimización estocástica, definiciones, lemas y proposiciones. La segunda sección muestra el teorema que transforma un problema de programación estocástico en su determinista equivalente, con su respectiva demostración.

3.1. Formulación teórica

Algunas de las características generales de la metodología son las siguientes:

- Es basada en la integración de la programación estocástica y el reconocimiento de patrones.
- Involucra la binarización de funciones de distribución de probabilidad y la generación de una función Booleana definida parcialmente (**pdBf**) que representa la combinación (\mathbf{F}, α) de la distribución \mathbf{F} binarizada y el nivel de probabilidad α .
- Muestra que la **pdBf** puede ser extendida como una forma normal disyuntiva **DNF**.
- La **DNF** es una colección combinatoria de p-patrones que definen las condiciones suficientes para que las restricciones probabilísticas se mantengan.
- Transforma un problema de programación lineal con restricciones probabilísticas *PLERP* en su equivalente determinístico.

Un esquema general de la metodología se representa en la figura 3.1.

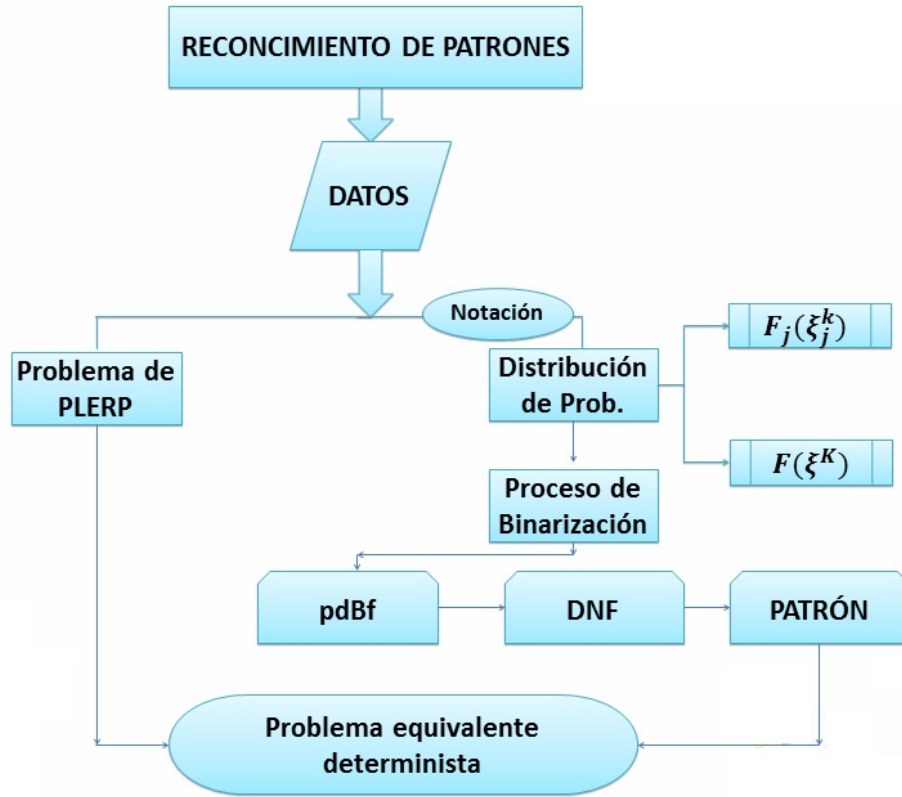


Figura 3.1: Estructura general de la metodología basada en patrones

3.1.1. Estructura del modelo de optimización estocástica a resolver

Se abordará un problema de programación lineal con restricciones probabilísticas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín} \quad q^T x & (3.1) \\
 & \text{s.a.} \quad Ax \geq b \\
 & \mathbf{P}(hx \geq \xi_j, \xi_j \in J) \geq \alpha; j = 1, \dots, |J| \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

donde,

J : Es el conjunto de los vectores aleatorios en las restricciones probabilísticas

$|J|$: Es la cardinalidad del conjunto J .

j : Subíndice que indica la posición del vector aleatorio ξ en el conjunto de las restricciones probabilísticas y varía de $j = 1, \dots, |J|$.

ξ_j : Vector aleatorio que pertenece a J y de dimensión $|J|$; tiene una distribución de probabilidad.

\mathbf{x} : Vector columna m dimensional de las variables de decisión.

\mathbf{q} : Vector de coeficientes de la función objetivo, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$

\mathbf{b} : Vector de parámetros con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

\mathbf{A} : Matriz de coeficientes de orden $n \times m$

\mathbf{h} : Matriz de coeficientes de orden $|J| \times m$

\mathbf{q} , \mathbf{b} , \mathbf{A} , \mathbf{h} Son parámetros determinísticos.

α : Probabilidad o nivel de viabilidad, α varía entre 0 y 1

\mathbf{P} : Medida de probabilidad.

3.1.2. Definiciones básicas

A continuación se mostrarán algunas definiciones básicas y lemas para la binarización de distribuciones de probabilidad.

Inicialmente, se denota a Ω como el conjunto de escenarios del vector aleatorio ξ y con función de distribución acumulada \mathbf{F} .

Una muestra de datos pertenecientes a Ω se denota con K y cada uno de sus escenarios se representa como k .

Cada escenario k está representado por un vector determinístico de dimensión $|J|$ y está dado como $\omega^k = [\omega_1^k, \dots, \omega_{|J|}^k] : \mathbf{P}(\xi \leq \omega^k) = \mathbf{F}(\omega^k)$.

Las distribuciones de probabilidad marginales son denotados por $\mathbf{P}(\xi_j \leq \omega_j^k) = \mathbf{F}_j(\omega_j^k)$, con $j = 1, \dots, |J|$.

Observación. De la teoría de probabilidad se tiene que una distribución marginal y una conjunta para 2 variables discretas se representan respectivamente como $\mathbf{F}(x) = \sum_{x \leq X} \mathbf{P}(x)$ y $\mathbf{F}_{XY}(x, y) = \sum_{x \leq X} \sum_{y \leq Y} \mathbf{P}_{XY}(x, y)$.

Para el caso de variables continuas una distribución marginal y una conjunta para 2 variables continuas se representan respectivamente como $\mathbf{F}(x) = \int_a^b f(x)dx$ y $\mathbf{F}_{XY}(x, y) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x, y)dx dy$, siendo f la función de densidad.

Definición 3.1.1. Un escenario k es llamado p – suficiente si y solo si $\mathbf{F}(\omega^k) \geq \alpha$ y k es p – insuficiente si y solo si $\mathbf{F}(\omega^k) < \alpha$.

Observación. El conjunto Ω de escenarios se particiona en dos conjuntos disyuntos así:

$$\begin{aligned} \Omega^+ & \text{ para los } p\text{-suficientes} \\ \Omega^- & \text{ para los } p\text{-insuficientes} \end{aligned}$$

donde, $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ con $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$

Antes de mostrar como se realiza el *proceso de binarización* para las distribuciones de probabilidad, se dirá que un *punto de corte* es aquel valor que está en el escenario k de los p -suficientes y en el vector ω_j^k ; denotado como c_{ij} .

Definición 3.1.2. *El proceso de binarización es el mapeo de $\mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \{0, 1\}^n$ de ω^k de un vector n -binario*

$$\beta^k = [\beta_{11}^k, \dots, \beta_{n_1 1}^k, \dots, \beta_{ij}^k, \dots, \beta_{n_j j}^k, \dots] \quad (3.2)$$

Tal que el valor de cada componente β_{ij}^k es definida con respecto a un *punto de corte* c_{ij} , así:

$$\beta_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_j^k \geq c_{ij} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.3)$$

donde c_{ij} denota el i -ésimo *punto de corte* asociado con la componente ξ_j , y además

$$i' < i \quad \text{entonces} \quad c_{i'j} < c_{ij}, \quad i = 1, \dots, n_j, j = 1, \dots, |J|. \quad (3.4)$$

La notación β_{ij} se refiere al i -ésimo atributo binario asociado con la componente ξ_j . El conjunto de puntos de corte es usado para generar una imagen binaria β^k de cada escenario, inicialmente representado por el vector numérico ω^k .

Cada punto β^k es un vértice de un cubo unitario de dimensión n $\{0, 1\}^n$ y su componente β_{ij}^k toma el valor de 1 (respectivamente 0) si el vector ω_j^k en el escenario k es mayor o igual que (respectivamente menor) el punto de corte c_{ij} .

Observación. *La implicación (3.4) quiere decir que el proceso de binarización organiza los puntos de corte en orden ascendente y define un conjunto de vectores Booleanos regularizados. De allí la siguiente definición.*

Definición 3.1.3. *Un conjunto de vectores Booleanos se llama **regularizado** con respecto a un subconjunto ordenado $G_j = [\beta_{1j}^k, \dots, \beta_{n_j j}^k]$ de variables Booleanas, si cada vector β^k cumple con las siguientes condiciones:*

$$\beta_{ij}^k = 1 \Rightarrow \beta_{i'j}^k = 1, i' < i \quad (3.5)$$

$$\beta_{ij}^k = 0 \Rightarrow \beta_{i'j}^k = 0, i' > i \quad (3.6)$$

Ahora se denota a

$$n = \sum_{j=1}^{|J|} n_j$$

como la suma del número n_j de *puntos de corte* de cada componente ξ_j .

Lema 3.1.1. *El proceso de binarización descrito en la definición 3.1.2, genera un conjunto regularizado de vectores Booleanos, es decir, para cada grupo $(\beta_{11}^k, \dots, \beta_{n_j j}^k)$ de variables Booleanas, se tiene que*

$$\beta_{ij}^k \leq \beta_{i'j}^k; \quad \text{si } i' < i \quad (3.7)$$

Demostración. Supongamos que se tiene un proceso de binarización, donde

$$\beta^k = [\beta_{11}^k, \dots, \beta_{n_1 1}^k, \dots, \beta_{ij}^k, \dots, \beta_{n_j j}^k, \dots]$$

es un vector binario, tal que el valor de cada componente β_{ij}^k es definida con respecto a un *punto de corte* c_{ij} como en la ecuación (3.3). Además por la implicación 3.4 y la definición (3.1.3), se tiene que

$$i' < i \text{ implica que } c_{i'j} < c_{ij}$$

y $G_j = [\beta_{1j}^k, \dots, \beta_{n_j j}^k]$ un subconjunto regularizado de variables Booleanas de β^k , donde se cumplen las implicaciones (3.5) y (3.6), lo que implica que

$$\beta_{ij}^k \leq \beta_{i'j}$$

□

Observación. El proceso de binarización define a Ω_B como la proyección binaria de Ω tal que $\Omega : \Omega_B = \Omega_B^+ \cup \Omega_B^- \subseteq \{0, 1\}^n$, donde Ω_B^+ y Ω_B^- denotan respectivamente el conjunto de escenarios llevados a binarios de los p – suficientes y p – insuficientes.

Esto permite la representación de la combinación de la distribución de probabilidad \mathbf{F} y el nivel de probabilidad α como una función Booleana definida parcialmente (pdBf).

Definición 3.1.4. Una **función Booleana definida parcialmente** es descrita por el par de conjuntos disyuntos $\Omega_B^+, \Omega_B^- \subseteq \{0, 1\}^n$ la cual asigna a una función g un valor binario, $g : \Omega_B^+ \cup \Omega_B^- \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $g(k)=1$ si $k \in \Omega_B^+$ y $g(k)=0$ si $k \in \Omega_B^-$.

Definición 3.1.5. Un conjunto de puntos de corte es **consistente** si los conjuntos Ω_B^+ y Ω_B^- asociados con la pdBf $g(k) = g(\Omega_B^+, \Omega_B^-)$ son disyuntos. Si este es el caso, $g(\Omega_B^+, \Omega_B^-)$ es una pdBf consistente.

3.1.3. Conjunto de escenarios relevantes

El objetivo es derivar un patrón combinatorio que defina la condiciones suficientes, posiblemente las mínimas, para que las restricciones probabilísticas de (3.1) se mantengan. Para ésto no solo se consideran los escenarios hasta ahora analizados, sino que hay que considerar todos los puntos que podrían generarse como p – suficientes. Para ello,

se crea un conjunto Z_j , tal que

$$Z_j = \{\omega_j^k : \mathbf{F}_j(\omega_j^k) \geq \alpha, \quad k \in \Omega\}, \quad j = 1, \dots, |J| \quad (3.8)$$

el cual contiene los valores que deben ser considerados para identificar la condiciones suficientes de (3.1) y se mantengan. Ahora se define el producto directo como

$$Z = Z_1 \times \dots \times Z_j \times \dots \times Z_{|J|} \quad (3.9)$$

y se obtiene el **conjunto extendido** $\Omega \cup Z$ de escenarios. A este conjunto se le denomina **conjunto de escenarios relevantes** y se denota como $\bar{\Omega}_B$.

A $\bar{\Omega}_B$ se le aplica el proceso de binarización, que además permite la eliminación de un número de puntos de corte y de varios escenarios que tienen la misma imagen binaria y que solo incluye uno de ellos en $\bar{\Omega}_B$.

En lo que sigue se define el concepto de conjunto suficiente-equivalente de puntos de corte.

Definición 3.1.6. Un *conjunto suficiente-equivalente* de puntos de corte C^e comprende un punto de corte c_{ij} para cualquier valor ω_j^k tomado de alguno de los escenarios p -suficiente en cualquier componente j .

$$C^e = \bigcup_{j=1}^{|J|} C_j, \quad C_j = \{\omega_j^k : k \in \Omega^+\} \quad (3.10)$$

La *pdBf* $g(\Omega_B^+, \Omega_B^-)$ asociada con el conjunto suficiente-equivalente de puntos de corte es llamado *pdBf suficiente-equivalente* e inmediatamente genera la consecuencia que se da en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1. Un *conjunto suficiente-equivalente* de puntos de corte es consistente.

Usando la definición (3.3.1), tenemos que si

$$\mathbf{F}_j(\omega_j^k) \geq \alpha, \quad j = 1, \dots, |J| \quad (3.11)$$

se puede reescribir como

$$\omega_j^k \geq \mathbf{F}_j^{-1}(\alpha) = \min\{\omega_j^k : \omega_j^k \in C_j\} = c_{1j} \quad (3.12)$$

Del proceso de binarización se puede concluir que

$$\omega_j^k \geq c_{1j} \iff \beta_{1j}^k = 1 \quad (3.13)$$

Observación. En adelante, $k \in \bar{\Omega}_B^+$ se referirá (respectivamente, $k \in \bar{\Omega}_B^-$) como un escenario p -suficiente (respectivamente, p -insuficiente).

En las siguientes definiciones y teoremas, se continua con la formulación de la terminología para el uso en la programación matemática de la derivación de patrones.

Definición 3.1.7. Una función $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ es llamada una *extensión* de una *pdBf* $g(\bar{\Omega}_B^+, \bar{\Omega}_B^-)$ si $\bar{\Omega}_B^+ \subseteq \bar{\Omega}_B^+(f) = \{k : f(k) = 1\}$ y $\bar{\Omega}_B^- \subseteq \bar{\Omega}_B^-(f) = \{k : f(k) = 0\}$

Con la definición (3.1.7) una *pdBf* $g(\bar{\Omega}_B^+, \bar{\Omega}_B^-)$ tiene una extensión Booleana si y solo si $\bar{\Omega}_B^+ \cap \bar{\Omega}_B^- = \emptyset$, lo cual es equivalente a decir que alguna *pdBf* puede ser extendida por una función Booleana. Así, la proposición (3.1.1) implica que la *pdBf* suficiente-equivalente que representa a (\mathbf{F}, α) puede ser extendida como un función Booleana. Con la existencia de una extensión Booleana para la *pdBf*, el objetivo es encontrar una extensión f que sea definida sobre el mismo conjunto como $g(\bar{\Omega}_B^+, \bar{\Omega}_B^-)$ y que sea tan simple como sea posible. Porque cada función Booleana puede ser representada por una *Forma Normal Disyuntiva* (**DNF**), la cual es una disyunción de un número finito de *patrones combinatorios*. En general, un patrón combinatorio es una regla lógica que impone límites superiores e inferiores sobre los valores de un subconjunto de las variables de entrada.

A continuación se define la cobertura de un un término, para ello se define primero lo siguiente:

- Las variables Booleanas $\beta_{ij}, i = 1, \dots, n_j, j = 1, \dots, |J|$ y sus negaciones o complementos $\bar{\beta}_{ij}$ son llamados *literales*.
- Una conjunción de literales $t = \bigwedge_{ij \in Q} \beta_{ij} \bigwedge_{ij \in N} \bar{\beta}_{ij}, Q \cap N = \emptyset$ constituye un *término*.

- Sea Q el conjunto de los literales no complementados involucrados en la definición del término t y N el conjunto de los literales complementados.
- El número de literales en el término ($|Q| + |N| = d$), determina su *grado* d .
- Una disyunción $\bigvee_{s \in S} t_s$ de términos t_s es llamada *Forma Normal Disyuntiva*.

Definición 3.1.8. Un término t se dice **cubrir** un escenario k , la cual es denotada por $t(k) = 1$, si el producto de los valores β_{ij}^k tomados por k en los literales β_{ij} de la definición del término es igual a 1:

$$t(k) = 1 \Leftrightarrow \bigwedge_{ij \in Q} \beta_{ij} \bigwedge_{ij \in N} \bar{\beta}_{ij} \quad (3.14)$$

Entonces, la **cobertura** de un término es el número de escenarios cubiertos por él.

Observación. Se deduce que a partir de la definición (3.1.8): la DNF f extiende la pdBf $g(\bar{\Omega}_B^+, \bar{\Omega}_B^-)$ y debe ser tal que cada escenario definido como p -suficiente (p -insuficiente) por el pdBf $g(\bar{\Omega}_B^+, \bar{\Omega}_B^-)$ debe también ser considerado como p -suficiente (p -insuficiente) por la DNF f . Esto es equivalente al requerir que la DNF f cubra todos los escenarios p -suficientes y no cubra ningún escenario p -insuficiente, es decir, $f(k) = 1, k \in \bar{\Omega}_B^+$ y $f(k) = 0, k \in \bar{\Omega}_B^-$.

Se define ahora un p -patrón.

Definición 3.1.9. Un **p -patrón** es un término que cubre al menos un escenario p -suficiente y no cubre ninguna p -insuficiente

$$\bigvee_{(k \in \bar{\Omega}_B^+)} t(k) = 1 \text{ y } \bigwedge_{(k \in \bar{\Omega}_B^-)} t(k) = 0,$$

e incluye al menos un literal no complementado β_{ij} para cada componente j del vector aleatorio ξ .

A continuación se mencionan algunas de las propiedades de los p -patrones.

Definición 3.1.10. Un patrón es **principal** si al quitar uno de sus literales lo transforma en un término que no es un patrón.

Basicamente, significa que el patrón principal no incluye ningún literal redundante.

Lema 3.1.2. Consideremos un conjunto suficiente-equivalente de puntos de corte. Cualquier término $t = \bigwedge_{ij \in Q} \beta_{ij}, Q_j \neq \emptyset$ que no cubre ningún escenario p -insuficiente es un **p -patrón**.

Demostración. Sea C^e los puntos de corte de un conjunto suficiente-equivalente, donde un punto de corte c_{ij} para un valor de ω_j^k es tomado de un escenario k p -suficiente.

Sea k' un escenario de los p -suficientes, es decir, $k' \in \bar{\Omega}^+$ tal que $\omega_j^{k'} = c_{n_j j}$. Por el proceso de binarización descrito en (3.1.2) se tiene que $\beta_{ij}^{k'} = 1, i = 1 \dots n_j, j = 1, \dots, |J|$. Por lo tanto el producto de cada $\beta_{ij}^{k'}$ es uno, es decir, $\prod_{ij \in Q} \beta_{ij}^{k'} = 1$, lo que genera un término $t(k')$. Esto quiere decir que t cubre al menos un escenario k' de p -suficientes. Finalmente, por la definición (3.1.9) se deduce que t es un p -patrón. \square

Lema 3.1.3. Un p -patrón principal no contiene ningún literal complementado $\bar{\beta}_{ij}$.

Demostración. Supongamos que $t = \bigwedge_{ij \in Q} \beta_{ij} \bigwedge_{ij \in N} \bar{\beta}_{ij}$ es un p-patrón principal que está incluido en una forma normal disyuntiva DNF f por la definición (3.1.7). Significa que la DNF f extiende la pdBf $g(\bar{\Omega}_B^+, \bar{\Omega}_B^-)$, lo cual es equivalente a que cubra todos los escenarios p -suficiente y no cubra ningún escenario p -insuficiente, es decir, $f(k) = 1, k \in \bar{\Omega}_B^+$ y $f(k) = 0, k \in \bar{\Omega}_B^-$. Por lo tanto $N = \emptyset$, de allí que un p-patrón principal sea un término de la forma $t = \bigwedge_{ij \in Q} \beta_{ij}$, donde se concluye que un p-patrón principal no contiene ningún literal complementado. \square

Lema 3.1.4. *Un p-patrón principal que cubre los escenarios de una variable aleatoria con magnitud $|J|$ son de grado $|J|$.*

Demostración. Supongamos que $t = \bigwedge_{ij \in Q} \beta_{ij}$ es un p-patrón principal. Consideremos que t incluye dos literales β_{ij} y $\beta_{i'j}$ asociados con la misma componente j . Sea $i' < i$ que implica $c_{i'j} < c_{ij}$ por (3.4) y $\beta_{ij} \leq \beta_{i'j}$ por (3.7). Si al eliminar β_{ij} transforma a t en un término que no es un patrón entonces β_{ij} se debe mantener entre los literales incluidos en t . Esto hace que $\beta_{i'j}$ sea redundante y por la definición de p-patrón principal debe ser eliminado. Por otro lado, si al eliminar $\beta_{i'j}$ no resulta en el cubrimiento de t para algún escenario p-insuficiente, entonces β_{ij} no es necesario y debe ser eliminado, quedando $\beta_{i'j}$. Esto muestra que un p-patrón principal contiene máximo un literal por cada componente j y por tanto de grado $|J|$. \square

3.2. Problema lineal equivalente determinístico

Ahora se derivará un problema programación lineal determinístico equivalente (*PLDE*) a el problema de programación de restricciones probabilísticas (3.1). El problema *PLDE* toma la forma de un problema de programación lineal entero-mixto que incluye un número de variables igual a el número de puntos de corte usados en el proceso de binarización. La solución del problema *PLDE* permite la generación de un p-patrón principal, el cual define las condiciones mínimas que mantienen las restricciones probabilísticas en (3.1), y además la reformulación y solución del problema estocástico.

Para esto se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *El problema de programación lineal entero-mixto*

$$\begin{aligned} & \text{mín} \quad q^T x \\ & \text{s.a.} \quad Ax \geq b \\ & hx \geq \sum_{i=1}^{n_j} c_{ij} u_{ij}, j = 1, \dots, |J| \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\sum_{j=1}^{|J|} \sum_{i=1}^{n_j} \beta_{ij}^k u_{ij} \leq |J| - 1, k \in \bar{\Omega}_B^- \quad (3.16)$$

$$\sum_{i=1}^{n_j} u_{ij} = 1, j = 1, \dots, |J| \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} u_{ij} & \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n_j, j = 1, \dots, |J| \\ x & \geq 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

es un problema de programación lineal determinístico equivalente al problema probabilístico (3.1). La solución óptima (u^*, x^*) del PLDE proporciona un p-patrón principal

$$t^* = \bigwedge_{ij \in P} \beta_{ij}, Q = \{ij : u_{ij}^* = 1, j = 1, \dots, |J|, i = 1, \dots, n_j\} \quad (3.19)$$

que define las condiciones mínimas para que se cumplan las restricciones probabilísticas en (3.1).

Demostración. Se prueba inicialmente que cualquier solución factible de un problema PLDE define un p-patrón principal.

Sea $t = \bigwedge_{ij \in Q} \beta_{ij}$, un término definido por cualquier solución factible (u, x) y $Q = \{ij : u_{ij} = 1, j = 1, \dots, |J|, i = 1, \dots, n_j\}$ el conjunto de literales no complementados en t .

Por la definición de cobertura de un escenario k , decimos que si $k \in \bar{\Omega}_B$ es cubierta por t es equivalente a que $\bigwedge_{ij \in Q} \beta_{ij}^k$, lo cual es similar a que

$$\sum_{ij \in Q} \beta_{ij}^k = |Q| = |J| \quad (3.20)$$

De (3.17) y (3.18) se asegura la inclusión de exactamente un literal no complementado por cada j en t . Por lo tanto el número de literales en t es $|Q| = |J|$

Debido a que $u_{ij} = 1, ij \in Q$ y $u_{ij} = 0, ij \notin Q$, implica que $\beta_{ij}^k u_{ij} = 0, ij \notin Q$. Entonces se obtiene la siguiente igualdad.

$$\sum_{ij \in Q} \beta_{ij}^k = \sum_{ij \in Q} \beta_{ij}^k u_{ij} = \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{i=1}^{n_j} \beta_{ij}^k u_{ij} = 0 \quad (3.21)$$

de (3.20) y (3.21) se deduce que

$$\sum_{j=1}^{|J|} \sum_{i=1}^{n_j} \beta_{ij}^k u_{ij} \leq |J| - 1, k \in \bar{\Omega}_B^- \quad (3.22)$$

y esto implica que

$$\sum_{ij \in P} \beta_{ij}^k \leq |J| - 1, k \in \bar{\Omega}_B^- \quad (3.23)$$

Lo que resulta de (3.22) es que se asegura que no haya cubrimiento de algún escenario k en los p-insuficientes. Utilizando el lema (3.1.2) se muestra que t es un p-patrón y con (3.17) y (3.18) se afirma que t es un p-patrón principal de grado $|J|$, por lo tanto t^* es un p-patrón principal.

Se demuestra ahora que cualquier solución factible de un problema de PLDE es factible para (3.1), es decir,

$$hx \geq \sum_{i=1}^{n_j} c_{ij} u_{ij} \implies \mathbf{P}(hx \geq \xi_j, j = 1, \dots, |J|) \geq \alpha \quad (3.24)$$

Se mostró anteriormente que t es un p-patrón y por el proceso de binarización, se obtiene la relación

$$\beta_{ij}^k = 1, \forall ij \in Q \iff \omega_j^k \geq c_{ij}, \forall ij \in Q \quad (3.25)$$

De la construcción de un conjunto suficiente-equivalente de puntos de corte, se obtiene que

$$\omega_j^k = c_{ij}; \quad \forall ij \in Q, \quad \exists k \in \bar{\Omega}_B^+ \quad (3.26)$$

Sea $k' \in \bar{\Omega}_B^+$ cubierta por t tal que

$$\omega_j^{k'} = c_{ij}, \quad \forall ij \in Q \quad (3.27)$$

De las restricciones (3.17) y (3.18) se asegura un término $u_{ij}, ij \in Q$ en el lado izquierdo de (3.17) el cual no es cero y es igual a uno. Similarmente de la restricción (3.15), el término $c_{ij}u_{ij}, ij \in Q$ en el lado derecho no es cero y es igual a $c_{ij}, ij \in Q$. Con lo anterior se reescribe (3.21) como

$$\omega_j^{k'} = \sum_{i=1}^{n_j} c_{ij}u_{ij}, j = 1, \dots, |J| \quad (3.28)$$

y debido a que $k' \in \bar{\Omega}_B^+$, se tiene

$$hx \geq \omega_j^{k'}, j \in J \implies \mathbf{P}(hx \geq \xi_j, j = 1, \dots, |J|) \geq \alpha$$

y usando (3.28)

$$hx \geq \sum_{i=1}^{n_j} c_{ij}u_{ij} \implies \mathbf{P}(hx \geq \xi_j, j = 1, \dots, |J|) \geq \alpha$$

que es lo que se quería demostrar.

En [13] también se puede ver que cualquier solución factible para (3.1) es factible también para un problema *PLDE*.

Po lo tanto, los conjuntos factibles asociados (3.1) son equivalentes al problema de programación lineal determinístico equivalente. \square

Capítulo 4

Implementación numérica y comparaciones

En este capítulo final, se comienza con la sección 4.1 que describirá el modelo matemático aproximado que calculará el beneficio esperado para un agente del sector eléctrico colombiano, teniendo en cuenta para el modelo las características de centrales eléctricas, particularmente las de tecnologías térmica e hidráulica, como se vió en la sección 2.1. También se empleará la esperanza matemática sobre el precio de la electricidad en la función objetivo. Además, en el modelo se describirán las restricciones asociadas al funcionamiento técnico y operativo de las mismas, asignándole a la restricción relacionada con la demanda de energía eléctrica un nivel de probabilidad con el objetivo de aplicar la metodología clásica y de reconocimiento de patrones descritas en la sección 2.3 y el capítulo 3 respectivamente. Se mostrarán las características y algunas suposiciones que se necesitan para la implementación del modelo propuesto.

En la sección 4.2, se detallarán los resultados de las dos metodologías mencionadas y algunas comparaciones con casos específicos.

4.1. Modelo de maximización de beneficio para un agente del sector eléctrico

El primer paso para la descripción del modelo es decidir las variables que van a estar en la función objetivo así como en las restricciones.

Al decidir la variables y las restricciones del problema se formula un problema de programación lineal entero-mixto estocástico con restricciones determinísticas y probabilísticas conjuntas. Los precios de la electricidad serán el parámetro bajo incertidumbre dentro de la función objetivo a maximizar, sujetos a las restricciones técnicas y operacionales de las centrales termoeléctricas e hidroeléctricas.

Las restricciones técnicas y operacionales inherentes a las centrales se dividen en 4 grandes grupos:

- Las restricciones de límites de producción (potencia o energía máxima nominal y mínimo

técnico).

- Las restricciones de tiempos mínimos de funcionamiento y parada.
- Las restricciones de rampas para centrales térmicas.
- Las restricciones de volúmenes y caudales turbinados mínimos y máximos de los embalses y generadores hidráulicos respectivamente.

La demanda de energía eléctrica será el parámetro bajo incertidumbre asociado a la restricción que conecta las producciones de las centrales hidroeléctricas y termoeléctricas para todos los períodos del horizonte de planeación, además se le asigna una medida de probabilidad con el objetivo de mostrar y comparar las metodologías antes mencionadas. En adelante se designa a *COP* como la moneda o valor en pesos colombianos.

Nomenclatura

Conjuntos e índices

T, t : Conjunto e índice de los periodos en los que se divide el horizonte temporal de planificación, respectivamente.

J, j : Conjunto e índice de las centrales termoeléctricas del sistema, respectivamente.

I, i : Conjunto e índice de las centrales hidroeléctricas del sistema, respectivamente.

Datos

A_j : costos fijos de la central termoeléctrica j (COP).

B_j : costos variables de la central termoeléctrica j (COP).

C_j : costos de arranque de la central termoeléctrica j (COP).

E_j : costos de parada de la central termoeléctrica j (COP).

$P_{min(jt)}$: producción mínima de energía eléctrica de la central termoeléctrica j (GWh).

$P_{max(jt)}$: producción máxima de energía eléctrica de la central termoeléctrica j (GWh).

$Q_{min(it)}$: producción mínima de energía eléctrica de la central hidroeléctrica i (GWh).

$Q_{max(it)}$: producción máxima de energía eléctrica de la central hidroeléctrica i (GWh).

W_j : rampa máxima de subida de carga de la central termoeléctrica j (GWh).

X_j : rampa máxima de bajada de carga de la central termoeléctrica j (GWh).

λ^t : coeficiente del precio de la electricidad para el intervalo t (\$COP/GWh).

$V_{min(it)}$: volumen mínimo de agua en el embalse del generador hidroeléctrico i en el periodo t (Hm^3).

$V_{max(it)}$: volumen máximo de agua en el embalse del generador hidroeléctrico i en el periodo t (Hm^3).

V_{i0} : volumen de agua al inicio en el embalse del generador hidroeléctrico i en el periodo t (Hm^3).

V_{it} : volumen de agua en el embalse del generador hidroeléctrico i en el periodo t (Hm^3).

$K_{min(it)}$: caudal mínimo que es utilizado por la central hidroeléctrica i en el periodo t (Hm^3/s).

$K_{max(it)}$: caudal máximo que es utilizado por la central hidroeléctrica i en el periodo t (Hm^3/s).

S_{it} : flujo de agua que es vertido por los embalses en el periodo t , es un excedente que no es aprovechado para la generación de energía eléctrica (Hm^3).

$D_{Total(t)}$: demanda total de ambos grupos generadores de energía eléctrica en el periodo t (GWh).

α : nivel de probabilidad o confiabilidad que se debe satisfacer en las restricciones probabilísticas,

$\alpha \in [0, 1]$.

Variables

p_{jt} : cantidad de energía eléctrica que debe producir la central termoeléctrica j durante el periodo t (GWh).

q_{it} : cantidad de energía eléctrica que debe producir la central hidroeléctrica i durante el periodo t (GWh).

k_{it} : caudal utilizado por la central hidroeléctrica i en el periodo t (Hm^3/s).

r_{it} : las aportaciones externas al embalse i en el periodo t (Hm^3).

v_{jt} : variable binaria que toma el valor 1, si la central termoeléctrica j está en funcionamiento durante el periodo t y 0 en otro caso.

y_{jt} : variable binaria que toma el valor 1, si la central termoeléctrica j se arranca al comienzo del periodo j y 0 en otro caso.

z_{jt} : variable binaria que toma el valor 1, si la central termoeléctrica j se para al comienzo del periodo j y 0 en otro caso.

La función objetivo está en relación con las centrales térmicas, ya sean de ciclo simple o combinado y centrales hidráulicas que bien pueden ser de embalses, filo de agua o de bombeo. Además en la función están relacionados los precios de la electricidad como parámetro estocástico, los costos y la producción de energía eléctrica. Es un problema lineal entero-mixto donde la utilidad será la suma de los beneficios de ambos grupos (ingresos menos los costos). Matemáticamente viene dada por:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \mathbf{E}(\lambda^t) q_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \mathbf{E}(\lambda^t) p_{jt} - (A_j v_{jt} + B_j p_{jt} + C_j y_{jt} + E_j z_{jt}) \quad (4.1)$$

En las restricciones, se tiene que:

La demanda debe satisfacerse en cada periodo para ambos grupos de producción de energía eléctrica. A este conjunto de restricciones se le denominan restricciones probabilísticas conjuntas y están sujetas a un nivel de probabilidad; por tanto:

$$P\left[\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (p_{jt} + q_{it}) \geq D_{Total(t)}\right] \geq \alpha, \forall i, j, t \quad (4.2)$$

Cualquier central térmica debe estar dentro de unos niveles máximos y mínimos de potencia o de energía eléctrica, dado por la restricción:

$$P_{min(jt)} v_{jt} \leq p_{jt} \leq P_{max(jt)} v_{jt}, \forall j, t \quad (4.3)$$

Al pasar de un periodo de tiempo al siguiente, cualquier central térmica no puede incrementar su producción por encima de un máximo, denominado rampa máxima de subida de carga. Análogamente, ninguna central térmica puede bajar su producción por debajo de un mínimo, que se denomina rampa máxima de bajada de carga. Estas restricciones se expresan respectivamente de la siguiente manera:

$$p_{jt+1} - p_{jt} \leq W_j, \forall j, t = 1, \dots, T - 1 \quad (4.4)$$

$$p_{jt} - p_{jt+1} \leq X_j, \forall j, t = 1, \dots, T - 1 \quad (4.5)$$

Cualquier central térmica que está funcionando puede pararse pero no arrancarse, y análogamente cualquier central parada puede arrancarse pero no pararse (lógica de arranque-parada). Esto se expresa de la siguiente forma:

$$y_{jt} - z_{jt} = v_{jt} - v_{jt-1}, \forall j, t \quad (4.6)$$

Cualquier central hidráulica debe funcionar por encima de su producción mínima y por debajo de su producción máxima de potencia o de energía eléctrica; por tanto:

$$Q_{min(it)} \leq q_{it} \leq Q_{max(it)}, \forall i, t \quad (4.7)$$

El volumen final del embalse i debe estar dentro de unos niveles máximos y mínimos, dado por la restricción:

$$V_{min(it)} \leq V_{it} \leq V_{max(it)}, \forall i, t \quad (4.8)$$

El caudal turbinado por la central i debe estar dentro de unos niveles máximos y mínimos, dado por la restricción:

$$K_{min(it)} \leq k_{it} \leq K_{max(it)}, \forall i, t \quad (4.9)$$

Restricción de continuidad hidráulica:

$$V_{it} = V_{it-1} + r_{it} - S_{it} - k_{it}, \forall i, t \quad (4.10)$$

Finalmente, las variables deben tomar valores no negativos y enteros, así:

$$\begin{aligned} v_{jt}, y_{jt}, z_{jt}, &\in \{0, 1\}, j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T \\ r_{it} &\geq 0 \\ p_{jt} &\geq 0 \\ q_{it} &\geq 0 \\ k_{it} &\geq 0 \\ V_{it} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Finalmente, el modelo propuesto de maximización de beneficios para un agente del sector eléctrico colombiano es:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \mathbf{E}(\lambda^t) q_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \mathbf{E}(\lambda^t) p_{jt} - (A_j v_{jt} + B_j p_{jt} + C_j y_{jt} + E_j z_{jt}) \quad (4.12)$$

s.a.

$$P\left[\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (p_{jt} + q_{it}) \geq D_{Total(t)}\right] \geq \alpha, \forall i, j, t \quad (4.13)$$

$$P_{min(jt)} v_{jt} \leq p_{jt} \leq P_{max(jt)} v_{jt}, \forall j, t \quad (4.14)$$

$$p_{jt+1} - p_{jt} \leq W_j, \forall j, t = 1, \dots, T - 1 \quad (4.15)$$

$$p_{jt} - p_{jt+1} \leq X_j, \forall j, t = 1, \dots, T - 1 \quad (4.16)$$

$$y_{jt} - z_{jt} = v_{jt} - v_{jt-1}, \forall j, t \quad (4.17)$$

$$Q_{min(it)} \leq q_{it} \leq Q_{max(it)}, \forall i, t \quad (4.18)$$

$$V_{min(it)} \leq V_{it} \leq V_{max(it)}, \forall i, t \quad (4.19)$$

$$K_{min(it)} \leq k_{it} \leq K_{max(it)}, \forall i, t \quad (4.20)$$

$$V_{it} = V_{it-1} + r_{it} - S_{it} - k_{it}, \forall i, t \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} v_{jt}, y_{jt}, z_{jt}, &\in \{0, 1\}, j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T \\ r_{it} &\geq 0 \\ p_{jt} &\geq 0 \\ q_{it} &\geq 0 \\ k_{it} &\geq 0 \\ V_{it} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Características generales del agente del sector eléctrico colombiano escogido para la implementación del modelo

Las metodologías para resolver problemas de optimización bajo incertidumbre, con base en reconocimiento de patrones, expuesta en el capítulo 3 y la llamada clásica, dada en capítulo 2, son implementadas mediante datos tomados de XM con el fin de validar el modelo anterior. Específicamente, se considera la información de un agente del sector eléctrico colombiano y las siguientes condiciones:

- Un agente generador de energía eléctrica colombiano, con 2 centrales termoeléctricas (Ciclo Combinado) de 160 MW y 450 MW de capacidad neta instalada y 2 centrales hidroeléctricas (filo de agua) ambas de 19.9 MW de capacidad neta instalada.
- En el beneficio del agente se tendrá en cuenta los precios ofertados que vienen dados en pesos colombianos por kilovatio-hora (COP/KWh), en el mercado diario y posteriormente serán expresados en COP/GWh .
- Se estima un horizonte de planificación de 6 meses comprendidos entre Julio y Diciembre de 2013, divididos en 6 periodos. Donde cada periodo consta de 30 datos y cada dato representa el día del mes con su correspondiente valor de energía eléctrica (GWh) generada por la central eléctrica. Los precios ofertados también cumplen con la misma característica anterior y se debe a que son los datos más actuales con respecto al estudio de esta tesis.
- Los datos de los 6 meses se consultaron en el portal de XM en www.xm.com.co.
- Se utiliza un sistema por días y meses, ya que los datos que se consultan en XM están expresados de esa forma.
- Los costos sobre un GWh de arranque, parada, fijos y variables son aproximados de acuerdo a la Asociación Colombiana de Generadores de Energía Eléctrica-ACOLGEN, ver en [25] y están dados en pesos colombianos.

- Los costos anteriores, que se pueden ver el cuadro 4.4 serán constantes en los 6 meses previstos, debido a que las centrales termoeléctricas propuestas utilizan gas natural como combustible para la generación de energía eléctrica y la demanda de gas natural tuvo muy poca variación de acuerdo a la Asociación Colombiana de Gas Natural-Naturgas, ver en [27].
- Los niveles máximos y mínimos de generación de energía eléctrica para cada una de las centrales se suponen a partir de las potencias netas en MW y convertidos en GWh .
- La demanda, que es el parámetro estocástico en el conjunto de restricciones probabilísticas de 4.2, será estimada de acuerdo a los datos consultados de la generación de energía eléctrica para cada una de las centrales. Se escoge un nivel de probabilidad α de prueba para el conjunto de restricciones probabilísticas del 80 % e inicialmente por motivos de aplicación didáctica en la metodología de patrones.
- Los caudales turbinados máximos y mínimos para cada central hidroeléctrica se expresan en Hm^3/s y se suponen dentro de sus niveles reales; al igual que el flujo de agua vertida.

Los datos de generación de energía eléctrica máximas y mínimas, dados en GWh de las centrales termoeléctricas (T) e hidroeléctricas (H) respectivamente, están representadas en cuadro 4.1:

PERIODO	Pmax T1	Pmin T1	Pmax T2	Pmin T2	Qmax H1	Qmin H1	Qmax H2	Qmin H2
1	250	80	35	10	19	6	17	7
2	200	80	30	10	19	6	19	6
3	200	80	40	10	19	6	19	6
4	250	80	25	10	19	6	18	7
5	199	80	30	10	19	6	19	7
6	201	80	25	10	19	6	17	6

Cuadro 4.1: Energía eléctrica máxima y mínima de las centrales termoeléctricas e hidroeléctricas.

En el cuadro 4.2, se representan las rampas máximas de subida y bajada de las centrales termoeléctricas involucradas.

PERIODO	LIMITE RAMPA DE SUBIDA		LIMITE RAMPA DE BAJADA	
	T1	T2	T1	T2
1	75	10	65	9
2	50	14	64	12
3	50	12	50	15
4	75	10	60	12
5	50	8	66	10

Cuadro 4.2: Rampas máximas de subida y bajada de las centrales termoeléctricas.

En el cuadro 4.3, se representan los caudales máximos y mínimos de las centrales hidroeléctricas involucradas. En el cuadro 4.4, se representan los costos de arranque, parada, variables y fijos

PERIODO	CAUDAL MININIMO		CAUDAL MAXIMO		FLUJO DE AGUA VERTIDA	
	H1	H2	H1	H2	H1	H2
1	8,5	8	17,5	16	5	6
2	9	9	16	16	5	6
3	7	7	16	16	6	6
4	9,3	9	17	18	5	6
5	9	8,6	16,8	15	5	6
6	9	8	18	117	6	6

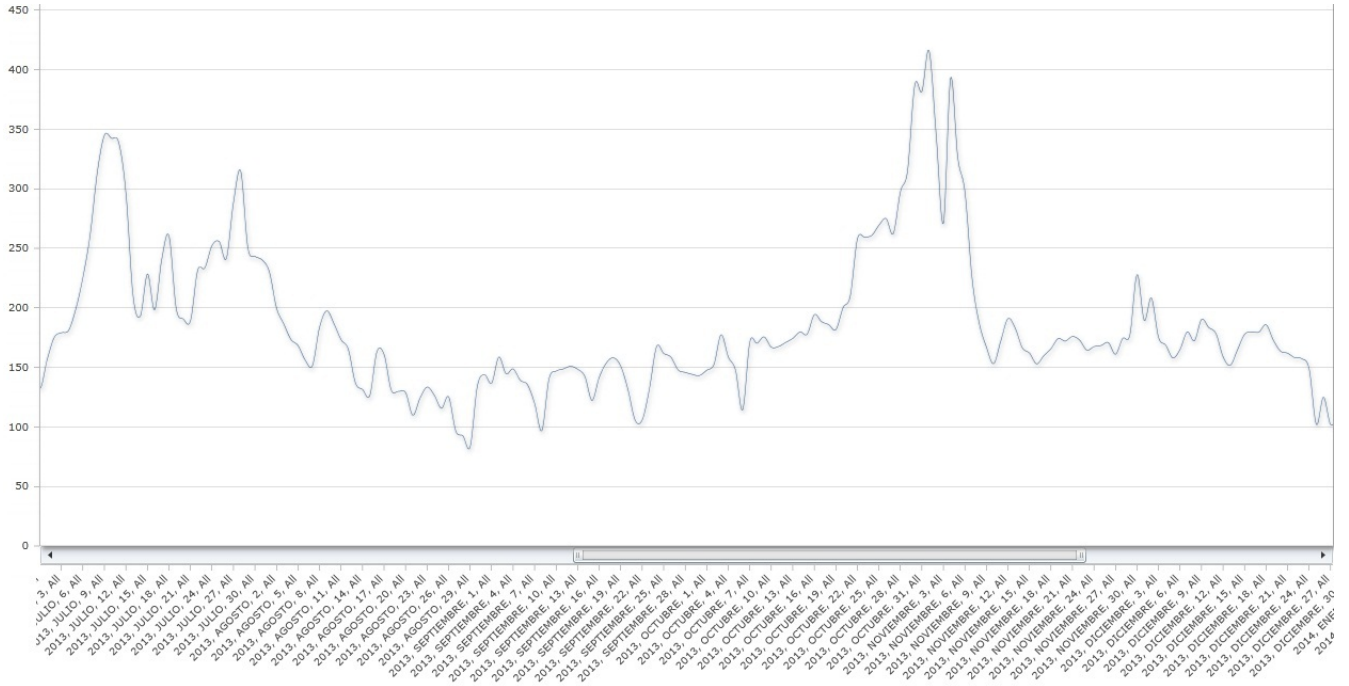
Cuadro 4.3: Caudales máximos y mínimos; flujo de agua vertida de las centrales hidroeléctricas.

sobre un GWh, de acuerdo con valores aproximados de la Asociación Colombiana de Generadores de Energía Eléctrica-ACOLGEN en [25].

PERIODO	COSTO FIJO		COSTO VARIABLE		COSTO ARRANQUE		COSTO PARADA	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2	T1	T2
1	8860	7185	5350	3900	9745	6570	4340	2220
2	8860	7185	5350	3900	9745	6570	4340	2220
3	8860	7185	5350	3900	9745	6570	4340	2220
4	8860	7185	5350	3900	9745	6570	4340	2220
5	8860	7185	5350	3900	9745	6570	4340	2220
6	8860	7185	5350	3900	9745	6570	4340	2220

Cuadro 4.4: Costos de las centrales eléctricas.

En el cuadro 4.5, se representan los valores del Máximo Precio de Oferta Nacional para los generadores de energía eléctrica y comprende desde el primero de Julio de 2013 hasta el 31 de Diciembre del 2013.



Cuadro 4.5: Máximo Precio de Oferta Nacional.

FUENTE: <http://www.xm.com.co> [Consultado 13 Marzo 2014]

4.2. Implementación y análisis de resultados

Se calculará inicialmente los valores esperados para cada uno de los periodos de planeación de acuerdo al cuadro 4.5 y que son utilizados en la función objetivo. Para ello se utilizó el programa para ajuste de distribución *EasyFit*, ver en [26], que permite ajustar automáticamente las distribuciones a los datos de la muestra, se consideró un nivel de confianza del 98 %. Los precios están ajustados en *COP/GWh* para continuar con el sistema escogido.

Para los meses de Julio y Agosto, se encontró que los datos se comportan de acuerdo a una *Función de Distribución Log Normal*. Esta distribución tiene una función de densidad de probabilidad

$$f(\lambda; \mu, \sigma) = \frac{1}{\lambda\sigma(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(\ln\lambda - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Donde λ es la variable aleatoria continua (precios de la electricidad), μ y σ son la media y la desviación estandar respectivamente. El valor esperado para una variable aleatoria continua en general, está dado por:

$$E(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(\lambda) d\lambda$$

Por lo tanto el valor esperado para la *Función de Distribución Log Normal* es

$$E(\lambda) = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

Del programa EasyFit se obtienen los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} p - \text{valor}(\text{Julio}) &= 0.472 \\ \mu_{(\text{Julio})} &= 14.636 \\ \sigma_{(\text{Julio})} &= 0.20987 \\ p - \text{valor}(\text{Agosto}) &= 0.598 \\ \mu_{(\text{Agosto})} &= 14.154 \\ \sigma_{(\text{Agosto})} &= 0.23077 \end{aligned}$$

Y el valor esperado es

$$\begin{aligned} E(\lambda)_{(\text{Julio})} &= 2.322 \times 10^6 \\ E(\lambda)_{(\text{Agosto})} &= 1.440 \times 10^6 \end{aligned}$$

Para los meses de Septiembre y Octubre, se encontró que los datos se comportan de acuerdo a una distribución *Logistic*. Esta distribución tiene una función de densidad de probabilidad

$$f(\lambda; \mu, \sigma) = \frac{\pi}{7\sigma} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi(\lambda - \mu)}{3.5\sigma} \right)$$

El valor esperado para esta distribución, está dado por:

$$E(\lambda) = \mu$$

Del programa EasyFit se obtienen los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} p - \text{valor}(\text{Sept}) &= 0.130 \\ \mu_{(\text{Sept})} &= 1.380 \times 10^6 \\ \sigma_{(\text{Sept})} &= 87667 \\ p - \text{valor}(\text{Oct}) &= 0.031 \\ \mu_{(\text{Oct})} &= 2.093 \times 10^6 \\ \sigma_{(\text{Oct})} &= 371570 \end{aligned}$$

Y el valor esperado es

$$\begin{aligned} E(\lambda)_{(\text{Sept})} &= 1.380 \times 10^6 \\ E(\lambda)_{(\text{Oct})} &= 2.093 \times 10^6 \end{aligned}$$

Para el mes de Noviembre, se encontró que los datos se comportan de acuerdo a una distribución *Valor Extremo Generalizada*. Esta distribución tiene una función de densidad de probabilidad

$$f(\lambda; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{\left(\frac{(\lambda - \mu)}{\sigma} - e^{\frac{(\lambda - \mu)}{\sigma}} \right)}$$

El valor esperado para esta distribución, está dado por:

$$E(\lambda) = \mu$$

Del programa EasyFit se obtienen los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} p - \text{valor}(\text{Nov}) &= 0.059 \\ \mu_{(\text{Nov})} &= 1.694 \times 10^6 \\ \sigma_{(\text{Nov})} &= 236870 \end{aligned}$$

El valor esperado viene dado por:

$$E(\lambda) = \mu$$

Por lo tanto,

$$E(\lambda)_{(Nov)} = 1.694 \times 10^6$$

Y para el mes de Diciembre, se encontró que los datos se comportan de acuerdo a una *Distribución de Laplace*. Esta distribución tiene una función de densidad de probabilidad

$$f(\lambda; \mu, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{\left(\frac{-|\lambda-\mu|}{\sigma}\right)}$$

El valor esperado para esta distribución, está dado por:

$$E(\lambda) = \mu$$

Del programa EasyFit se obtienen los siguientes parámetros:

$$p - \text{valor}(Dic) = 0.423$$

$$\mu_{(Dic)} = 1.589 \times 10^6$$

El valor esperado viene dado por:

$$E(\lambda) = \mu$$

Por lo tanto,

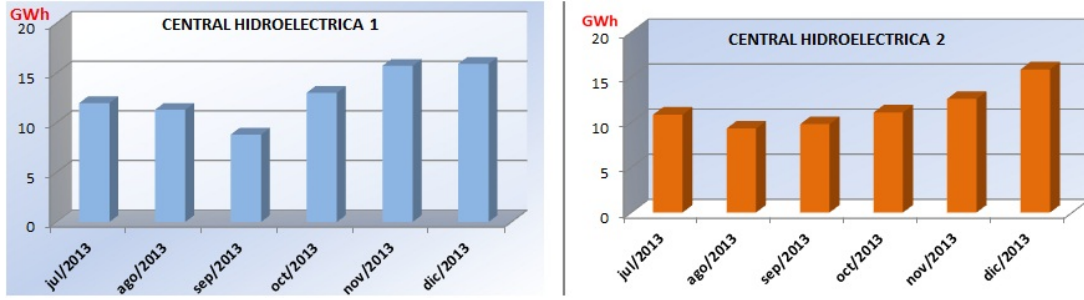
$$E(\lambda)_{(Dic)} = 1.589 \times 10^6$$

En el cuadro 4.6, se muestran los datos calculados de los valores esperados de forma ordenada para cada periodo de planeación de acuerdo a los datos anteriores.

PERIODO	MAXIMO PRECIO DE OFERTA (Millones \$)
1	2.322
2	1.440
3	1.380
4	2.093
5	1.695
6	1.589

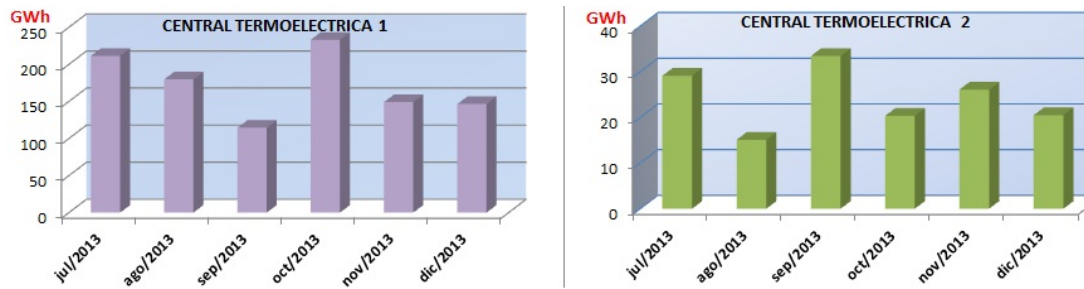
Cuadro 4.6: Máximo Precio de Oferta.

En los cuadros 4.7 y 4.8, se muestran los promedios de las demandas de energía a nivel mensual para cada una de las centrales eléctricas. Solo se muestran estos promedios ya que los valores diarios de demanda para cada una de las centrales serán utilizadas en la metodología basada en patrones que se explicará más adelante.



Cuadro 4.7: Demandas de Energía Hidroeléctrica.

FUENTE: <http://www.xm.com.co> [Consultado 13 Marzo 2014]



Cuadro 4.8: Demandas de Energía Termoeléctrica.

FUENTE: <http://www.xm.com.co> [Consultado 13 Marzo 2014]

De acuerdo al número de centrales hídricas y térmicas que se tiene y a la notación descrita al principio del capítulo 4, el modelo de maximización de beneficios queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{máx} \quad & [\mathbf{E}(\lambda^1)p_{11} - (A_1v_{11} + B_1p_{11} + C_1y_{11} + E_1z_{11}) + \mathbf{E}(\lambda^1)q_{11}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^2)p_{12} - (A_1v_{12} + B_1p_{12} + C_1y_{12} + E_1z_{12}) + \mathbf{E}(\lambda^2)q_{12}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^3)p_{13} - (A_1v_{13} + B_1p_{13} + C_1y_{13} + E_1z_{13}) + \mathbf{E}(\lambda^3)q_{13}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^4)p_{14} - (A_1v_{14} + B_1p_{14} + C_1y_{14} + E_1z_{14}) + \mathbf{E}(\lambda^4)q_{14}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^5)p_{15} - (A_1v_{15} + B_1p_{15} + C_1y_{15} + E_1z_{15}) + \mathbf{E}(\lambda^5)q_{15}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^6)p_{16} - (A_1v_{16} + B_1p_{16} + C_1y_{16} + E_1z_{16}) + \mathbf{E}(\lambda^6)q_{16}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^1)p_{21} - (A_2v_{21} + B_2p_{21} + C_2y_{21} + E_2z_{21}) + \mathbf{E}(\lambda^1)q_{21}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^2)p_{22} - (A_2v_{22} + B_2p_{22} + C_2y_{22} + E_2z_{22}) + \mathbf{E}(\lambda^2)q_{22}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^3)p_{23} - (A_2v_{23} + B_2p_{23} + C_2y_{23} + E_2z_{23}) + \mathbf{E}(\lambda^3)q_{23}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^4)p_{24} - (A_2v_{24} + B_2p_{24} + C_2y_{24} + E_2z_{24}) + \mathbf{E}(\lambda^4)q_{24}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^5)p_{25} - (A_2v_{25} + B_2p_{25} + C_2y_{25} + E_2z_{25}) + \mathbf{E}(\lambda^5)q_{25}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^6)p_{26} - (A_2v_{26} + B_2p_{26} + C_2y_{26} + E_2z_{26}) + \mathbf{E}(\lambda^6)q_{26}]
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

s.a.

$$\left(\begin{array}{l} p_{11} + p_{21} + q_{11} + q_{21} \geq D_{Total(1)} \\ p_{12} + p_{22} + q_{12} + q_{22} \geq D_{Total(2)} \\ p_{13} + p_{23} + q_{13} + q_{23} \geq D_{Total(3)} \\ p_{14} + p_{24} + q_{14} + q_{24} \geq D_{Total(4)} \\ p_{15} + p_{25} + q_{15} + q_{25} \geq D_{Total(5)} \\ p_{16} + p_{26} + q_{16} + q_{26} \geq D_{Total(6)} \end{array} \right) \geq 0.8 \quad (4.24)$$

$$\begin{array}{l} P_{min(11)}v_{11} \leq p_{11} \leq P_{max(11)}v_{11} \\ P_{min(12)}v_{12} \leq p_{12} \leq P_{max(12)}v_{12} \\ P_{min(13)}v_{13} \leq p_{13} \leq P_{max(13)}v_{13} \\ P_{min(14)}v_{14} \leq p_{14} \leq P_{max(14)}v_{14} \\ P_{min(15)}v_{15} \leq p_{15} \leq P_{max(15)}v_{15} \\ P_{min(16)}v_{16} \leq p_{16} \leq P_{max(16)}v_{16} \end{array} \quad (4.25)$$

$$\begin{array}{l} P_{min(21)}v_{21} \leq p_{21} \leq P_{max(21)}v_{21} \\ P_{min(22)}v_{22} \leq p_{22} \leq P_{max(22)}v_{22} \\ P_{min(23)}v_{23} \leq p_{23} \leq P_{max(23)}v_{23} \\ P_{min(24)}v_{24} \leq p_{24} \leq P_{max(24)}v_{24} \\ P_{min(25)}v_{25} \leq p_{25} \leq P_{max(25)}v_{25} \\ P_{min(26)}v_{26} \leq p_{26} \leq P_{max(26)}v_{26} \end{array} \quad (4.26)$$

$$\begin{array}{l} p_{12} - p_{11} \leq W_1 \\ p_{13} - p_{12} \leq W_1 \\ p_{14} - p_{13} \leq W_1 \\ p_{15} - p_{14} \leq W_1 \\ p_{16} - p_{15} \leq W_1 \end{array} \quad (4.27)$$

$$\begin{array}{l} p_{22} - p_{21} \leq W_2 \\ p_{23} - p_{22} \leq W_2 \\ p_{24} - p_{23} \leq W_2 \\ p_{25} - p_{24} \leq W_2 \\ p_{26} - p_{25} \leq W_2 \end{array} \quad (4.28)$$

$$\begin{array}{l} p_{11} - p_{12} \leq X_1 \\ p_{12} - p_{13} \leq X_1 \\ p_{13} - p_{14} \leq X_1 \\ p_{14} - p_{15} \leq X_1 \\ p_{15} - p_{16} \leq X_1 \end{array} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
p_{21} - p_{22} &\leq X_2 \\
p_{22} - p_{23} &\leq X_2 \\
p_{23} - p_{24} &\leq X_2 \\
p_{24} - p_{25} &\leq X_2 \\
p_{25} - p_{26} &\leq X_2
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
y_{11} - z_{11} &= v_{11} - v_{10} \\
y_{12} - z_{12} &= v_{12} - v_{11} \\
y_{13} - z_{13} &= v_{13} - v_{12} \\
y_{14} - z_{14} &= v_{14} - v_{13} \\
y_{15} - z_{15} &= v_{15} - v_{14} \\
y_{16} - z_{16} &= v_{16} - v_{15}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
y_{21} - z_{21} &= v_{21} - v_{20} \\
y_{22} - z_{22} &= v_{22} - v_{21} \\
y_{23} - z_{23} &= v_{23} - v_{22} \\
y_{24} - z_{24} &= v_{24} - v_{23} \\
y_{25} - z_{25} &= v_{25} - v_{24} \\
y_{26} - z_{26} &= v_{26} - v_{25}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
Q_{min(11)} &\leq q_{11} \leq Q_{max(11)} \\
Q_{min(12)} &\leq q_{12} \leq Q_{max(12)} \\
Q_{min(13)} &\leq q_{13} \leq Q_{max(13)} \\
Q_{min(14)} &\leq q_{14} \leq Q_{max(14)} \\
Q_{min(15)} &\leq q_{15} \leq Q_{max(15)} \\
Q_{min(16)} &\leq q_{16} \leq Q_{max(16)}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
Q_{min(21)} &\leq q_{21} \leq Q_{max(21)} \\
Q_{min(22)} &\leq q_{22} \leq Q_{max(22)} \\
Q_{min(23)} &\leq q_{23} \leq Q_{max(23)} \\
Q_{min(24)} &\leq q_{24} \leq Q_{max(24)} \\
Q_{min(25)} &\leq q_{25} \leq Q_{max(25)} \\
Q_{min(26)} &\leq q_{26} \leq Q_{max(26)}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
K_{min(11)} &\leq k_{11} \leq K_{max(11)} \\
K_{min(12)} &\leq k_{12} \leq K_{max(12)} \\
K_{min(13)} &\leq k_{13} \leq K_{max(13)} \\
K_{min(14)} &\leq k_{14} \leq K_{max(14)} \\
K_{min(15)} &\leq k_{15} \leq K_{max(15)} \\
K_{min(16)} &\leq k_{16} \leq K_{max(16)}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
K_{min(21)} &\leq k_{21} \leq K_{max(21)} \\
K_{min(22)} &\leq k_{22} \leq K_{max(22)} \\
K_{min(23)} &\leq k_{23} \leq K_{max(23)} \\
K_{min(24)} &\leq k_{24} \leq K_{max(24)} \\
K_{min(25)} &\leq k_{25} \leq K_{max(25)} \\
K_{min(26)} &\leq k_{26} \leq K_{max(26)}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
r_{11} &= S_{11} + k_{11} \\
r_{12} &= S_{12} + k_{12} \\
r_{13} &= S_{13} + k_{13} \\
r_{14} &= S_{14} + k_{14} \\
r_{15} &= S_{15} + k_{15} \\
r_{16} &= S_{16} + k_{16}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
r_{21} &= S_{21} + k_{21} \\
r_{22} &= S_{22} + k_{22} \\
r_{23} &= S_{23} + k_{23} \\
r_{24} &= S_{24} + k_{24} \\
r_{25} &= S_{25} + k_{25} \\
r_{26} &= S_{26} + k_{26}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$j = 1, 2; t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$v_{jt}, y_{jt}, z_{jt} \in \{0, 1\}; r_{it} \geq 0; p_{jt} \geq 0; q_{it} \geq 0; k_{it} \geq 0$$

Observación. Se comienza la solución del problema de maximización de beneficios para un agente del sector eléctrico colombiano con la metodología de reconocimiento de patrones vista en el capítulo 3.

Inicialmente, se considera a Ω como el conjunto de escenarios posibles del vector aleatorio de demandas de las 6 restricciones. Se supone una muestra de 15 datos que corresponde a la mitad

de datos por cada periodo, es decir, $K = 15$ datos por periodo y los escenarios de demanda serán representados como $k = 1, k = 2, \dots, k = 15$.

Sea $[D_1^k, D_2^k, D_3^k, D_4^k, D_5^k, D_6^k]$ los 6 vectores aleatorios de demandas de energía para cada uno de los escenarios.

Se denota las distribuciones de probabilidad marginal acumulada como $\mathbf{F}_1(D_1^k), \mathbf{F}_2(D_2^k), \mathbf{F}_3(D_3^k), \mathbf{F}_4(D_4^k), \mathbf{F}_5(D_5^k), \mathbf{F}_6(D_6^k)$ y la distribución de probabilidad conjunta acumulada como $\mathbf{F}(D^k)$.

En el cuadro 4.9 se muestran los vectores aleatorios de demanda de energía total con su respectivo escenario para las restricciones probabilísticas, esto con respecto a los cuadros 4.7 y 4.8 y a los datos consultados en el portal de *XM*.

k	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
1	267	216	163	276	210	196
2	258	219	172	282	203	194
3	261	225	163	287	204	198
4	260	212	164	285	203	201
5	258	214	162	283	205	198
6	258	219	163	280	208	198
7	265	216	165	278	209	195
8	265	211	173	276	207	201
9	264	212	173	282	202	195
10	261	216	164	277	207	197
11	260	215	160	274	207	196
12	265	212	166	275	209	197
13	261	213	166	277	201	197
14	263	215	163	282	205	197
15	262	215	165	279	208	199

Cuadro 4.9: Demandas de Energía Totales para las Centrales Eléctricas.

En el cuadro 4.10 se muestran las distribuciones de probabilidad acumulada y conjunta de las demandas. Se puede observar que los escenarios $k = 10, k = 14$ y $k = 15$ tienen una distribución acumulada conjunta de 92%, 85% y 85% respectivamente superando el nivel de probabilidad propuesto de $\alpha = 80\%$ en las restricciones probabilísticas .

Se retoma la definición 3.1.1 de los escenarios p-suficientes y la definición 3.1.2 del proceso de binarización y se llega al cuadro 4.11. Donde se pasa de un conjunto de números *reales* de dimensión 2 a un conjunto de *vectores binarios* de dimensión 16 ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, 1\}^{16}$). El número total de puntos de corte, que son los candidatos a ser los valores determinísticos en las restricciones probabilísticas y que están asociados con cada componente de la demanda, se expresan

k	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	$F_1(D_1^k)$	$F_2(D_2^k)$	$F_3(D_3^k)$	$F_4(D_4^k)$	$F_5(D_5^k)$	$F_5(D_6^k)$	$F(D^k)$
1	267	216	163	276	210	196	1,00	0,81	0,41	0,27	1,00	0,33	0,51
2	258	219	172	282	203	194	0,20	0,94	0,87	0,81	0,27	0,07	0,16
3	261	225	163	287	204	198	0,53	1,00	0,41	1,00	0,34	0,80	0,75
4	260	212	164	285	203	201	0,33	0,20	0,54	0,94	0,27	1,00	0,67
5	258	214	162	283	205	198	0,20	0,41	0,14	0,88	0,47	0,80	0,67
6	258	219	163	280	208	198	0,20	0,94	0,41	0,61	0,80	0,80	0,51
7	265	216	165	278	209	195	0,94	0,81	0,67	0,47	0,80	0,20	0,67
8	265	211	173	276	207	201	0,94	0,34	1,00	0,27	0,67	1,00	0,16
9	264	212	173	282	202	195	0,74	0,20	1,00	0,81	0,14	0,20	0,45
10	261	216	164	277	207	197	0,53	0,81	0,54	0,40	0,67	0,60	0,92
11	260	215	160	274	207	196	0,33	0,61	0,07	0,07	0,67	0,33	0,22
12	265	212	166	275	209	197	0,94	0,20	0,80	0,14	0,93	0,60	0,45
13	261	213	166	277	201	197	0,53	0,27	0,80	0,40	0,07	0,60	0,67
14	263	215	163	282	205	197	0,67	0,61	0,41	0,81	0,47	0,60	0,85
15	262	215	165	279	208	199	0,60	0,61	0,67	0,54	0,80	0,87	0,85

Cuadro 4.10: Distribuciones de Probabilidad.

con $n = 16$ y cada uno viene dado por:

$$\begin{aligned}
 C = \{ & c_{11} = 261, c_{12} = 262, c_{13} = 263 \\
 & c_{21} = 215, c_{22} = 216 \\
 & c_{31} = 163, c_{32} = 164, c_{33} = 165 \\
 & c_{41} = 277, c_{42} = 279, c_{43} = 282 \\
 & c_{51} = 205, c_{52} = 207, c_{53} = 208 \\
 & c_{61} = 197, c_{62} = 199 \}
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

El cuadro 4.11 se divide en un conjunto $\bar{\Omega}_B^-$ de los p-insuficientes y $\bar{\Omega}_B^+$ de los p-suficientes, éstos son los conjuntos de escenarios relevantes de acuerdo a la subsección 3.1.3. Además, $\bar{\Omega}_B^+$ de los p-suficientes define el conjunto factible de la solución del problema y por la definición 3.1.4 y 3.1.7 se incluye la función booleana definida parcialmente (dpBf) como $g(k)$.

Se aplica ahora el *teorema 3.2.1* (problema equivalente determinista) para transformar las restricciones probabilísticas en su equivalente determinístico. A continuación se muestra el modelo de programación lineal de maximización de beneficios a través de la metodología de reconoci-

Representación Numérica							Imágenes binarizadas																		
k	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	β_{11}^k	β_{21}^k	β_{31}^k	β_{12}^k	β_{22}^k	β_{13}^k	β_{23}^k	β_{33}^k	β_{14}^k	β_{24}^k	β_{34}^k	β_{15}^k	β_{25}^k	β_{35}^k	β_{16}^k	β_{26}^k	$g(k)$		
6	258	219	163	280	208	198	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	$\bar{\Omega}_B^-$ p-insuficientes
7	265	216	165	278	209	195	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0		
9	264	212	173	282	202	195	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0		
11	260	215	160	274	207	196	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0		
13	261	213	166	277	201	197	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
10	261	216	164	277	207	197	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	$\bar{\Omega}_B^-$ p-suficientes	
14	263	215	163	282	205	197	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1		
15	262	215	165	279	208	199	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1		
16	261	215	163	277	205	197	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1		
17	261	215	163	277	207	197	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1		
18	261	215	163	277	208	197	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0		
19	261	215	164	277	205	197	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1		
20	261	215	164	277	207	197	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1		
21	261	215	164	277	208	197	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0		
22	261	215	165	277	205	197	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1		
23	261	215	165	277	207	197	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1		
24	261	215	165	277	208	197	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0		
26	261	216	163	277	205	197	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1		
27	261	216	163	277	207	197	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1		
28	261	216	163	277	208	197	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0		
29	261	216	164	277	205	197	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1		
30	261	216	164	277	208	197	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0		
31	261	216	165	277	205	197	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1		
32	261	216	165	277	207	197	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1		
33	261	216	165	277	208	197	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0		

Cuadro 4.11: Imágenes Binarizadas del Conjunto $\bar{\Omega}_B$ de Escenarios Relevantes.

miento de patrones:

$$\begin{aligned}
 \text{máx} \quad & [\mathbf{E}(\lambda^1)p_{11} - (A_1v_{11} + B_1p_{11} + C_1y_{11} + E_1z_{11}) + \mathbf{E}(\lambda^1)q_{11}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^2)p_{12} - (A_1v_{12} + B_1p_{12} + C_1y_{12} + E_1z_{12}) + \mathbf{E}(\lambda^2)q_{12}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^3)p_{13} - (A_1v_{13} + B_1p_{13} + C_1y_{13} + E_1z_{13}) + \mathbf{E}(\lambda^3)q_{13}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^4)p_{14} - (A_1v_{14} + B_1p_{14} + C_1y_{14} + E_1z_{14}) + \mathbf{E}(\lambda^4)q_{14}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^5)p_{15} - (A_1v_{15} + B_1p_{15} + C_1y_{15} + E_1z_{15}) + \mathbf{E}(\lambda^5)q_{15}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^6)p_{16} - (A_1v_{16} + Bp_{16} + C_1y_{16} + E_1z_{16}) + \mathbf{E}(\lambda^6)q_{16}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^1)p_{21} - (A_2v_{21} + B_2p_{21} + C_2y_{21} + E_2z_{21}) + \mathbf{E}(\lambda^1)q_{21}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^2)p_{22} - (A_2v_{22} + B_2p_{22} + C_2y_{22} + E_2z_{22}) + \mathbf{E}(\lambda^2)q_{22}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^3)p_{23} - (A_2v_{23} + B_2p_{23} + C_2y_{23} + E_2z_{23}) + \mathbf{E}(\lambda^3)q_{23}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^4)p_{24} - (A_2v_{24} + B_2p_{24} + C_2y_{24} + E_2z_{24}) + \mathbf{E}(\lambda^4)q_{24}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^5)p_{25} - (A_2v_{25} + B_2p_{25} + C_2y_{25} + E_2z_{25}) + \mathbf{E}(\lambda^5)q_{25}] \\
 & + [\mathbf{E}(\lambda^6)p_{26} - (A_2v_{26} + B_2p_{26} + C_2y_{26} + E_2z_{26}) + \mathbf{E}(\lambda^6)q_{26}]
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

s.a.

$$\begin{aligned}
 p_{11} + p_{21} + q_{11} + q_{21} & \geq 261u_{11} + 262u_{21} + 263u_{31} \\
 p_{12} + p_{22} + q_{12} + q_{22} & \geq 215u_{12} + 216u_{22} \\
 p_{13} + p_{23} + q_{13} + q_{23} & \geq 163u_{13} + 164u_{23} + 165u_{33} \\
 p_{14} + p_{24} + q_{14} + q_{24} & \geq 277u_{14} + 279u_{24} + 282u_{34} \\
 p_{15} + p_{25} + q_{15} + q_{25} & \geq 205u_{15} + 207u_{25} + 208u_{35} \\
 p_{16} + p_{26} + q_{16} + q_{26} & \geq 197u_{16} + 199u_{26}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
& u_{12} + u_{22} + u_{13} + u_{14} + u_{24} + u_{15} + u_{25} + u_{35} + u_{16} \leq 5 \\
& u_{11} + u_{21} + u_{31} + u_{12} + u_{22} + u_{13} + u_{23} + u_{33} + u_{14} + u_{15} + u_{25} + u_{35} \leq 5 \\
& u_{11} + u_{21} + u_{31} + u_{13} + u_{23} + u_{33} + u_{14} + u_{24} + u_{34} \leq 5 \\
& u_{12} + u_{15} + u_{25} \leq 5 \\
& u_{11} + u_{13} + u_{23} + u_{33} + u_{14} + u_{16} \leq 5
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
& u_{11} + u_{21} + u_{31} = 1 \\
& u_{12} + u_{22} = 1 \\
& u_{13} + u_{23} + u_{33} = 1 \\
& u_{14} + u_{24} + u_{34} = 1 \\
& u_{15} + u_{25} + u_{35} = 1 \\
& u_{16} + u_{26} = 1
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
& P_{min(11)}v_{11} \leq p_{11} \leq P_{max(11)}v_{11} \\
& P_{min(12)}v_{12} \leq p_{12} \leq P_{max(12)}v_{12} \\
& P_{min(13)}v_{13} \leq p_{13} \leq P_{max(13)}v_{13} \\
& P_{min(14)}v_{14} \leq p_{14} \leq P_{max(14)}v_{14} \\
& P_{min(15)}v_{15} \leq p_{15} \leq P_{max(15)}v_{15} \\
& P_{min(16)}v_{16} \leq p_{16} \leq P_{max(16)}v_{16}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
& P_{min(21)}v_{21} \leq p_{21} \leq P_{max(21)}v_{21} \\
& P_{min(22)}v_{22} \leq p_{22} \leq P_{max(22)}v_{22} \\
& P_{min(23)}v_{23} \leq p_{23} \leq P_{max(23)}v_{23} \\
& P_{min(24)}v_{24} \leq p_{24} \leq P_{max(24)}v_{24} \\
& P_{min(25)}v_{25} \leq p_{25} \leq P_{max(25)}v_{25} \\
& P_{min(26)}v_{26} \leq p_{26} \leq P_{max(26)}v_{26}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
& p_{12} - p_{11} \leq W_1 \\
& p_{13} - p_{12} \leq W_1 \\
& p_{14} - p_{13} \leq W_1 \\
& p_{15} - p_{14} \leq W_1 \\
& p_{16} - p_{15} \leq W_1
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
& p_{22} - p_{21} \leq W_2 \\
& p_{23} - p_{22} \leq W_2 \\
& p_{24} - p_{23} \leq W_2 \\
& p_{25} - p_{24} \leq W_2 \\
& p_{26} - p_{25} \leq W_2
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
p_{11} - p_{12} &\leq X_1 \\
p_{12} - p_{13} &\leq X_1 \\
p_{13} - p_{14} &\leq X_1 \\
p_{14} - p_{15} &\leq X_1 \\
p_{15} - p_{16} &\leq X_1
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
p_{21} - p_{22} &\leq X_2 \\
p_{22} - p_{23} &\leq X_2 \\
p_{23} - p_{24} &\leq X_2 \\
p_{24} - p_{25} &\leq X_2 \\
p_{25} - p_{26} &\leq X_2
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
y_{11} - z_{11} &= v_{11} - v_{10} \\
y_{12} - z_{12} &= v_{12} - v_{11} \\
y_{13} - z_{13} &= v_{13} - v_{12} \\
y_{14} - z_{14} &= v_{14} - v_{13} \\
y_{15} - z_{15} &= v_{15} - v_{14} \\
y_{16} - z_{16} &= v_{16} - v_{15}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
y_{21} - z_{21} &= v_{21} - v_{20} \\
y_{22} - z_{22} &= v_{22} - v_{21} \\
y_{23} - z_{23} &= v_{23} - v_{22} \\
y_{24} - z_{24} &= v_{24} - v_{23} \\
y_{25} - z_{25} &= v_{25} - v_{24} \\
y_{26} - z_{26} &= v_{26} - v_{25}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
Q_{min(11)} &\leq q_{11} \leq Q_{max(11)} \\
Q_{min(12)} &\leq q_{12} \leq Q_{max(12)} \\
Q_{min(13)} &\leq q_{13} \leq Q_{max(13)} \\
Q_{min(14)} &\leq q_{14} \leq Q_{max(14)} \\
Q_{min(15)} &\leq q_{15} \leq Q_{max(15)} \\
Q_{min(16)} &\leq q_{16} \leq Q_{max(16)}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
Q_{min(21)} &\leq q_{21} \leq Q_{max(21)} \\
Q_{min(22)} &\leq q_{22} \leq Q_{max(22)} \\
Q_{min(23)} &\leq q_{23} \leq Q_{max(23)} \\
Q_{min(24)} &\leq q_{24} \leq Q_{max(24)} \\
Q_{min(25)} &\leq q_{25} \leq Q_{max(25)} \\
Q_{min(26)} &\leq q_{26} \leq Q_{max(26)}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
K_{min(11)} &\leq k_{11} \leq K_{max(11)} \\
K_{min(12)} &\leq k_{12} \leq K_{max(12)} \\
K_{min(13)} &\leq k_{13} \leq K_{max(13)} \\
K_{min(14)} &\leq k_{14} \leq K_{max(14)} \\
K_{min(15)} &\leq k_{15} \leq K_{max(15)} \\
K_{min(16)} &\leq k_{16} \leq K_{max(16)}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
K_{min(21)} &\leq k_{21} \leq K_{max(21)} \\
K_{min(22)} &\leq k_{22} \leq K_{max(22)} \\
K_{min(23)} &\leq k_{23} \leq K_{max(23)} \\
K_{min(24)} &\leq k_{24} \leq K_{max(24)} \\
K_{min(25)} &\leq k_{25} \leq K_{max(25)} \\
K_{min(26)} &\leq k_{26} \leq K_{max(26)}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
r_{11} &= S_{11} + k_{11} \\
r_{12} &= S_{12} + k_{12} \\
r_{13} &= S_{13} + k_{13} \\
r_{14} &= S_{14} + k_{14} \\
r_{15} &= S_{15} + k_{15} \\
r_{16} &= S_{16} + k_{16}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
r_{21} &= S_{21} + k_{21} \\
r_{22} &= S_{22} + k_{22} \\
r_{23} &= S_{23} + k_{23} \\
r_{24} &= S_{24} + k_{24} \\
r_{25} &= S_{25} + k_{25} \\
r_{26} &= S_{26} + k_{26}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$j = 1, 2; t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$u_{jt}, v_{jt}, y_{jt}, z_{jt}, \in \{0, 1\}; r_{it} \geq 0; p_{jt} \geq 0; q_{it} \geq 0; k_{it} \geq 0$$

Observación. *Ahora se empleará la sección 2.3 relacionada con la metodología clásica para resolver un problema estocástico a través de las funciones de distribución de probabilidad y con la ayuda del programa EasyFit se transformarán las restricciones 4.24 en sus equivalentes determinísticos. Los datos que corresponden para el ajuste de las distribuciones se pueden obtener de [23] y para este ajuste se toman los 30 datos por cada uno de los periodos, es decir, para los meses de Julio a Diciembre del 2013.*

Después de utilizar el programa EasyFit, la mejor distribución que se ajusta a los datos es la función de distribución Weibull con una confiabilidad del 98 %. De acuerdo a ésto, se llegó a las siguientes restricciones determinísticas que serán reemplazadas en el modelo original. A continuación se muestra el modelo de programación lineal de maximización de beneficios a través de la metodología clásica:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & [\mathbf{E}(\lambda^1)p_{11} - (A_1v_{11} + B_1p_{11} + C_1y_{11} + E_1z_{11}) + \mathbf{E}(\lambda^1)q_{11}] \\
& + [\mathbf{E}(\lambda^2)p_{12} - (A_1v_{12} + B_1p_{12} + C_1y_{12} + E_1z_{12}) + \mathbf{E}(\lambda^2)q_{12}] \\
& + [\mathbf{E}(\lambda^3)p_{13} - (A_1v_{13} + B_1p_{13} + C_1y_{13} + E_1z_{13}) + \mathbf{E}(\lambda^3)q_{13}] \\
& + [\mathbf{E}(\lambda^4)p_{14} - (A_1v_{14} + B_1p_{14} + C_1y_{14} + E_1z_{14}) + \mathbf{E}(\lambda^4)q_{14}] \\
& + [\mathbf{E}(\lambda^5)p_{15} - (A_1v_{15} + B_1p_{15} + C_1y_{15} + E_1z_{15}) + \mathbf{E}(\lambda^5)q_{15}] \\
& + [\mathbf{E}(\lambda^6)p_{16} - (A_1v_{16} + B_1p_{16} + C_1y_{16} + E_1z_{16}) + \mathbf{E}(\lambda^6)q_{16}] \\
& + [\mathbf{E}(\lambda^1)p_{21} - (A_2v_{21} + B_2p_{21} + C_2y_{21} + E_2z_{21}) + \mathbf{E}(\lambda^1)q_{21}] \\
& + [\mathbf{E}(\lambda^2)p_{22} - (A_2v_{22} + B_2p_{22} + C_2y_{22} + E_2z_{22}) + \mathbf{E}(\lambda^2)q_{22}] \\
& + [\mathbf{E}(\lambda^3)p_{23} - (A_2v_{23} + B_2p_{23} + C_2y_{23} + E_2z_{23}) + \mathbf{E}(\lambda^3)q_{23}] \\
& + [\mathbf{E}(\lambda^4)p_{24} - (A_2v_{24} + B_2p_{24} + C_2y_{24} + E_2z_{24}) + \mathbf{E}(\lambda^4)q_{24}] \\
& + [\mathbf{E}(\lambda^5)p_{25} - (A_2v_{25} + B_2p_{25} + C_2y_{25} + E_2z_{25}) + \mathbf{E}(\lambda^5)q_{25}] \\
& + [\mathbf{E}(\lambda^6)p_{26} - (A_2v_{26} + B_2p_{26} + C_2y_{26} + E_2z_{26}) + \mathbf{E}(\lambda^6)q_{26}]
\end{aligned} \tag{4.58}$$

s.a.

$$\begin{aligned}
p_{11} + p_{21} + q_{11} + q_{21} &\geq 262 \\
p_{12} + p_{22} + q_{12} + q_{22} &\geq 214.6 \\
p_{13} + p_{23} + q_{13} + q_{23} &\geq 165 \\
p_{14} + p_{24} + q_{14} + q_{24} &\geq 279 \\
p_{15} + p_{25} + q_{15} + q_{25} &\geq 205 \\
p_{16} + p_{26} + q_{16} + q_{26} &\geq 197
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
P_{\min(11)}v_{11} &\leq p_{11} \leq P_{\max(11)}v_{11} \\
P_{\min(12)}v_{12} &\leq p_{12} \leq P_{\max(12)}v_{12} \\
P_{\min(13)}v_{13} &\leq p_{13} \leq P_{\max(13)}v_{13} \\
P_{\min(14)}v_{14} &\leq p_{14} \leq P_{\max(14)}v_{14} \\
P_{\min(15)}v_{15} &\leq p_{15} \leq P_{\max(15)}v_{15} \\
P_{\min(16)}v_{16} &\leq p_{16} \leq P_{\max(16)}v_{16}
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
P_{min(21)}v_{21} &\leq p_{21} \leq P_{max(21)}v_{21} \\
P_{min(22)}v_{22} &\leq p_{22} \leq P_{max(22)}v_{22} \\
P_{min(23)}v_{23} &\leq p_{23} \leq P_{max(23)}v_{23} \\
P_{min(24)}v_{24} &\leq p_{24} \leq P_{max(24)}v_{24} \\
P_{min(25)}v_{25} &\leq p_{25} \leq P_{max(25)}v_{25} \\
P_{min(26)}v_{26} &\leq p_{26} \leq P_{max(26)}v_{26}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
p_{12} - p_{11} &\leq W_1 \\
p_{13} - p_{12} &\leq W_1 \\
p_{14} - p_{13} &\leq W_1 \\
p_{15} - p_{14} &\leq W_1 \\
p_{16} - p_{15} &\leq W_1
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
p_{22} - p_{21} &\leq W_2 \\
p_{23} - p_{22} &\leq W_2 \\
p_{24} - p_{23} &\leq W_2 \\
p_{25} - p_{24} &\leq W_2 \\
p_{26} - p_{25} &\leq W_2
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
p_{11} - p_{12} &\leq X_1 \\
p_{12} - p_{13} &\leq X_1 \\
p_{13} - p_{14} &\leq X_1 \\
p_{14} - p_{15} &\leq X_1 \\
p_{15} - p_{16} &\leq X_1
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
p_{21} - p_{22} &\leq X_2 \\
p_{22} - p_{23} &\leq X_2 \\
p_{23} - p_{24} &\leq X_2 \\
p_{24} - p_{25} &\leq X_2 \\
p_{25} - p_{26} &\leq X_2
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
y_{11} - z_{11} &= v_{11} - v_{10} \\
y_{12} - z_{12} &= v_{12} - v_{11} \\
y_{13} - z_{13} &= v_{13} - v_{12} \\
y_{14} - z_{14} &= v_{14} - v_{13} \\
y_{15} - z_{15} &= v_{15} - v_{14} \\
y_{16} - z_{16} &= v_{16} - v_{15}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
y_{21} - z_{21} &= v_{21} - v_{20} \\
y_{22} - z_{22} &= v_{22} - v_{21} \\
y_{23} - z_{23} &= v_{23} - v_{22} \\
y_{24} - z_{24} &= v_{24} - v_{23} \\
y_{25} - z_{25} &= v_{25} - v_{24} \\
y_{26} - z_{26} &= v_{26} - v_{25}
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
Q_{min(11)} &\leq q_{11} \leq Q_{max(11)} \\
Q_{min(12)} &\leq q_{12} \leq Q_{max(12)} \\
Q_{min(13)} &\leq q_{13} \leq Q_{max(13)} \\
Q_{min(14)} &\leq q_{14} \leq Q_{max(14)} \\
Q_{min(15)} &\leq q_{15} \leq Q_{max(15)} \\
Q_{min(16)} &\leq q_{16} \leq Q_{max(16)}
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
Q_{min(21)} &\leq q_{21} \leq Q_{max(21)} \\
Q_{min(22)} &\leq q_{22} \leq Q_{max(22)} \\
Q_{min(23)} &\leq q_{23} \leq Q_{max(23)} \\
Q_{min(24)} &\leq q_{24} \leq Q_{max(24)} \\
Q_{min(25)} &\leq q_{25} \leq Q_{max(25)} \\
Q_{min(26)} &\leq q_{26} \leq Q_{max(26)}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
K_{min(11)} &\leq k_{11} \leq K_{max(11)} \\
K_{min(12)} &\leq k_{12} \leq K_{max(12)} \\
K_{min(13)} &\leq k_{13} \leq K_{max(13)} \\
K_{min(14)} &\leq k_{14} \leq K_{max(14)} \\
K_{min(15)} &\leq k_{15} \leq K_{max(15)} \\
K_{min(16)} &\leq k_{16} \leq K_{max(16)}
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
K_{min(21)} &\leq k_{21} \leq K_{max(21)} \\
K_{min(22)} &\leq k_{22} \leq K_{max(22)} \\
K_{min(23)} &\leq k_{23} \leq K_{max(23)} \\
K_{min(24)} &\leq k_{24} \leq K_{max(24)} \\
K_{min(25)} &\leq k_{25} \leq K_{max(25)} \\
K_{min(26)} &\leq k_{26} \leq K_{max(26)}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned}
r_{11} &= S_{11} + k_{11} \\
r_{12} &= S_{12} + k_{12} \\
r_{13} &= S_{13} + k_{13} \\
r_{14} &= S_{14} + k_{14} \\
r_{15} &= S_{15} + k_{15} \\
r_{16} &= S_{16} + k_{16}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
r_{21} &= S_{21} + k_{21} \\
r_{22} &= S_{22} + k_{22} \\
r_{23} &= S_{23} + k_{23} \\
r_{24} &= S_{24} + k_{24} \\
r_{25} &= S_{25} + k_{25} \\
r_{26} &= S_{26} + k_{26}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$j = 1, 2; t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$v_{jt}, y_{jt}, z_{jt}, \in \{0, 1\}; r_{it} \geq 0; p_{jt} \geq 0; q_{it} \geq 0; k_{it} \geq 0$$

Comparación de Resultados

A continuación se realizará un análisis comparativo de resultados de las dos metodologías empleadas en el problema de maximización de beneficios para un agente colombiano, que relacionó 2 centrales termoeléctricas y 2 centrales hidroeléctricas. Para las simulaciones se empleó el programa WinQSB Versión 1.0.0 para Windows [6], en un computador con memoria de 2.00 GB y procesador Intel Celeron B810 a una velocidad de reloj de 1.6 GHz.

Inicialmente, en la figura 4.1 se puede observar los valores obtenidos después de aplicar las metodologías de patrones y clásica de las demandas totales asociados a los datos de los cuadros 4.7 y 4.8 y que luego se convirtieron en los valores determinísticos a ser empleados en el conjunto de restricciones 4.41 y 4.49.

Como se puede observar las restricciones de demanda 3, 5 y 6 su diferencia es 0 GWh y en las demás es menor de 2 GWh, mostrando mucha similitud en este primer ítem de comparación y que será de muy buen pronóstico para calcular el máximo beneficio del problema asociado.

Con respecto a la metodología de patrones, se encontró que las variables binarias u_{11} , u_{12} , u_{33} , u_{14} , u_{15} y u_{16} cuyo valor fue 1, están asignando los valores de demanda energía eléctrica de 261, 215, 165, 277, 205 y 197 GWh respectivamente en las restricciones 4.41, como se puede observar en la figura 4.1 y genera un p-patrón cuyo término es $t^* = \beta_{11}\beta_{12}\beta_{33}\beta_{14}\beta_{15}\beta_{16}$, el cual verifica los escenarios $k = 15$, $k = 22$, $k = 23$, $k = 24$, $k = 31$, $k = 32$ y $k = 33$ en el cuadro 4.11 y son las que definen las condiciones mínimas (puntos factibles) para que las restricciones probabilísticas de 4.13 se cumplan.



Figura 4.1: Demandas de energía eléctrica totales determinísticas.

El cuadro 4.12 relaciona las cantidades de energía eléctrica (GWh) a producir en cada periodo de tiempo por cada una de las centrales eléctricas con respecto a las metodologías empleadas. También relaciona la diferencia entre el total que debe producir cada central eléctrica durante los seis periodos de tiempo, mostrando mayor relevancia en la central termoelectrica 2, donde la diferencia fue de 12 GWh , pero que se ve compensada con las demás diferencias de las otras centrales eléctricas. Además, la diferencia de energía eléctrica total por las cuatro centrales en los seis periodos de tiempo fue $4,4\text{ GWh}$, la cual se ve reflejada en el máximo beneficio obtenido por ambas metodologías, donde la diferencia fue de $8,7\text{ millones de pesos colombianos}$; como se puede observar en la figura 4.2.

PRODUCCION DE ENERGIA ELECTRICA (GWh)								
PERIODO	TERMoeLECTRICA 1		TERMoeLECTRICA 2		HIDROELECTRICA 1		HIDROELECTRICA 2	
	PATRONES	CLASICA	PATRONES	CLASICA	PATRONES	CLASICA	PATRONES	CLASICA
JULIO	204	225	19	19	19	8	19	10
AGOSTO	185	184,6	10	10	9	9	11	11
SEPTIEMBRE	167	169	10	10	8	8	11	11
OCTUBRE	217	219	22	22	19	19	19	19
NOVIEMBRE	158	159	20	17	12	12	15	17
DICIEMBRE	159,8	134	10	25	12,4	19	14,8	19
TOTAL	1090,8	1090,4	91	103	79,4	75	89,8	87
DIFERENCIA	0,4		12		4,4		2,8	
TOTAL PATRONES	1351							
TOTAL CLASICA	1355,4							

Cuadro 4.12: Óptimos que maximizan los beneficios esperados con la metodología de patrones y clásica.

Ahora continuamos con el análisis de las variables de caudal utilizado por cada central hidroeléctrica en cada periodo de tiempo y las aportaciones externas de agua para dichas centrales. En el cuadro 4.13 se observa los valores de caudal y aportaciones para cada periodo, donde por ambas metodologías patrones y clásica la diferencia de valores es 0 Hm^3 , dando un muy buen criterio de confiabilidad al utilizar ambas metodologías.

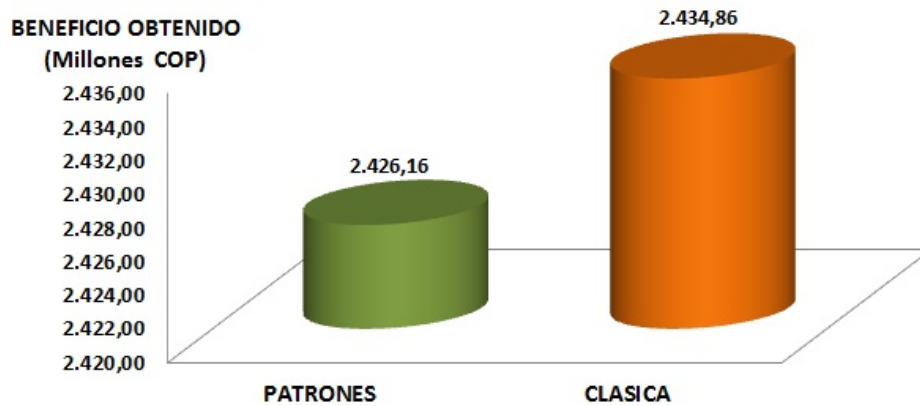


Figura 4.2: Máximo beneficio obtenido por el agente colombiano con la metodología de patrones y clásica.

PERIODO	CAUDAL UTILIZADO				APORTACIONES EXTERNAS DE AGUA			
	CENTRAL HIDROELECTRICA 1		CENTRAL HIDROELECTRICA 2		CENTRAL HIDROELECTRICA 1		CENTRAL HIDROELECTRICA 2	
	PATRONES	CLASICA	PATRONES	CLASICA	PATRONES	CLASICA	PATRONES	CLASICA
JULIO	8,5	8,5	8	8	13,5	13,5	14	14
AGOSTO	9	9	9	9	14	14	15	15
SEPTIEMBRE	7	7	7	7	12	12	13	13
OCTUBRE	9,3	9,3	9	9	14,3	14,3	15	15
NOVIEMBRE	9	9	8,6	8,6	14	14	14,6	14,6
DICIEMBRE	9	9	8	8	14	14	14	14

Cuadro 4.13: Caudal y aportaciones externas de agua para cada central hidroeléctrica con la metodología de patrones y clásica.

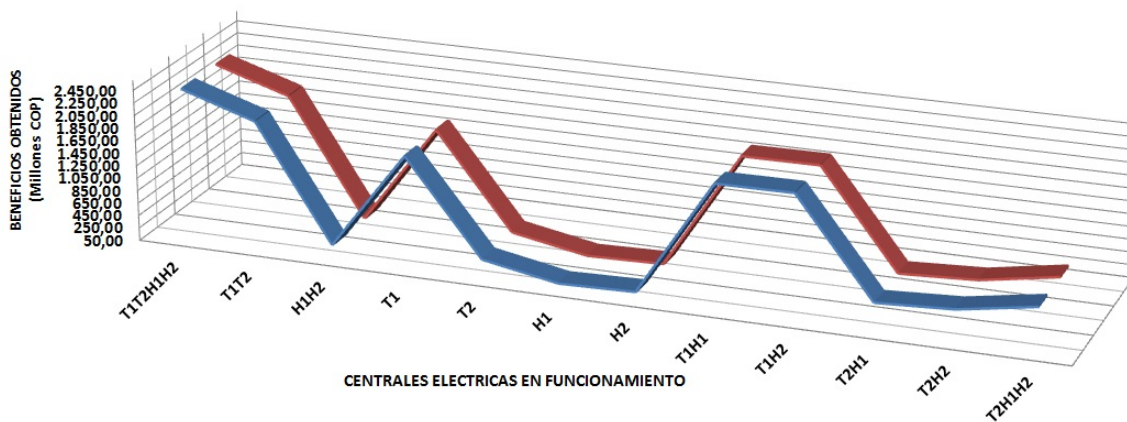
Resumen y consideraciones para el agente colombiano

- El máximo beneficio obtenido por el agente colombiano con la metodología de patrones fue de \$ 2426.26 millones COP y con la metodología clásica fue de \$ 2434.86 millones COP; con una diferencia de \$ 8.7 millones COP.
- La cantidad de energía que debió producir el agente colombiano en los seis meses por ambas metodologías fue 1351 GWh y 1355.4 GWh; respectivamente. Con una diferencia de 4.4 GWh.
- El número de variables a utilizar en el programa determinístico que utilizó la metodología de patrones fue de 100 variables y 133 restricciones.
- El número de variables a utilizar en el programa determinístico que utilizó la metodología clásica fue 84 variables y 122 restricciones.
- De acuerdo a los resultados anteriores y con un criterio menos optimista, se considera que el agente colombiano debe utilizar la metodología de reconocimiento de patrones para determinar el beneficio máximo de sus centrales eléctricas, ya que si tiene una expectativa de ganancia más alta, puede tomar decisiones equivocadas frente a las cantidades y tipo de energía que debe vender.

A continuación se realizarán algunas suposiciones sobre el funcionamiento de las cuatro centrales eléctricas y los precios de la electricidad en la función objetivo; las suposiciones son:

- Funcionamiento de las 4 centrales eléctricas $T1T2H1H2$ (caso ya realizado).
- Funcionamiento de las 2 centrales termoeléctricas $T1T2$.
- Funcionamiento de las 2 centrales hidroeléctricas $H1H2$.
- Alternar en funcionamiento cada una de las centrales eléctricas $T1$, $T2$, $H1$, $H2$.
- Combinar una central termoeléctrica con una hidroeléctrica $T1H1$, $T1H2$, $T2H1$, $T2H2$.
- Estén en funcionamiento las 3 centrales eléctricas de menor capacidad $T2H1H2$
- Aumentar los precios de la electricidad de forma gradual comenzando con un 25 %, 50 %, 75 % y finalizando con 100 %.

En la figura 4.3 se muestran los resultados de las suposiciones hechas para las centrales eléctricas, donde se relaciona los beneficios obtenidos y se deriva lo siguiente:



	T1T2H1H2	T1T2	H1H2	T1	T2	H1	H2	T1H1	T1H2	T2H1	T2H2	T2H1H2
■ PATRONES	2.426,16	2.052,66	236,0338	1.796,16	322,4641	103,5496	132,4842	1.968,98	1.978,21	456,3701	518,325	722,1859
■ CLASICA	2.434,86	2.064,74	235,5571	1.808,25	322,4641	103,5496	132,0075	1.981,06	1.990,29	461,8956	521,325	730,1799
DIFERENCIA	8,7	12,08	0,48	12,09	0	0	0,48	12,08	12,08	5,53	3	7,99

Figura 4.3: Resultados de los beneficios obtenidos al colocar cada una de las centrales electricas en diferente posición de funcionamiento con la metodología de patrones y clásica.

- La curvas de beneficios de la metodología de patrones y clásica son muy similares. La diferencia entre ambas en cada situación varía entre 0 y 12,08 millones COP, lo que da un buen criterio de referencia sabiendo que los beneficios están dados en miles de millones.
- La metodología de patrones predomina en valores inferiores en el beneficio obtenido en relación a la metodología clásica, y desde un criterio menos optimista ésta es la que se escogería.
- El beneficio de las 4 centrales eléctricas $T1T2H1H2$ en funcionamiento superan las otras posibilidades de funcionamiento.

- La central termoeléctrica $T1$ es la que mayor beneficio otorga al agente colombiano con \$1796 millones COP, ya que es la de mayor capacidad de producción con 450 MW.
- Entre las 2 centrales hidroeléctricas $H1$ y $H2$, la segunda proporciona \$29 millones COP más que la primera.
- Se obtienen muy buenos beneficios al alternar la central termoeléctrica $T1$ con alguna de las centrales hidroeléctricas $H1$ y $H2$ con \$ 1968.98 y \$ 1978.21 COP, respectivamente.
- La situación de funcionamiento de las 2 centrales termoeléctricas $T1T2$ supera notablemente a la situación de funcionamiento de las 2 centrales hidroeléctricas $H1H2$ en \$ 1816.63 millones COP; esto debido a las características del agente escogido, donde $T1$, $T2$, $H1$ y $H2$ tienen 450 MW, 160 MW, 19.9 MW, 19.9 MW de capacidad neta instalada, respectivamente y producen mayor energía eléctrica en cada uno de los periodos establecidos. Por otro lado, el modelo afirmaría lo contrario si la capacidad de generación hidráulica es mayor a la térmica.

En la figura 4.4 se muestran los resultados de los beneficios obtenidos al aumentar los precios de la electricidad y de lo cual se afirma lo siguiente:

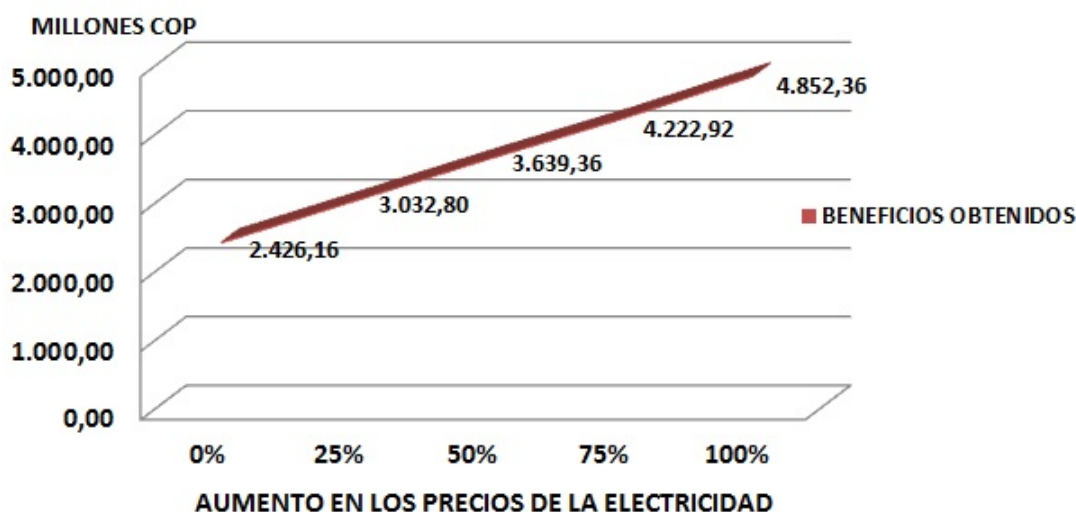


Figura 4.4: Resultados de los beneficios obtenidos al aumentar los precios de la electricidad.

- Cualquiera que fuese la razón del aumento de los precios de la electricidad como por ejemplo la escasez del agua por motivos de fenómenos naturales (fenómeno del niño) o escasez de combustible por motivos de conflicto armado; si se aumenta en un 25 % el precio de la electricidad el agente obtendría un beneficio adicional de \$606.64 millones COP, si se aumenta en un 50 % el agente obtendría un beneficio adicional de \$1213.2 millones COP, si se aumenta en un 75 % el agente obtendría un beneficio adicional de \$1796.76 millones COP y finalmente si se aumenta en un 100 % el agente obtendría un beneficio adicional muy aproximado al doble de su beneficio inicial, es decir, \$4852.36 millones COP.

A continuación la figura 4.5, mostrará los resultados de las cantidades de energía eléctrica a producir en cada periodo por las centrales termoeléctricas y hidroeléctricas, al cambiar el número

de muestras en la metodología de reconocimiento de patrones; para esto se utilizó unas muestras con $K = 10$, $K = 20$ y $K = 30$ en cada periodo adicionales a la de $K = 15$. Como esto involucró una nueva serie de escenarios, tablas de distribución de probabilidad y tablas de los proceso de binarización, se omiten ya que se considera redundante relacionarlas de nuevo en esta tesis. En

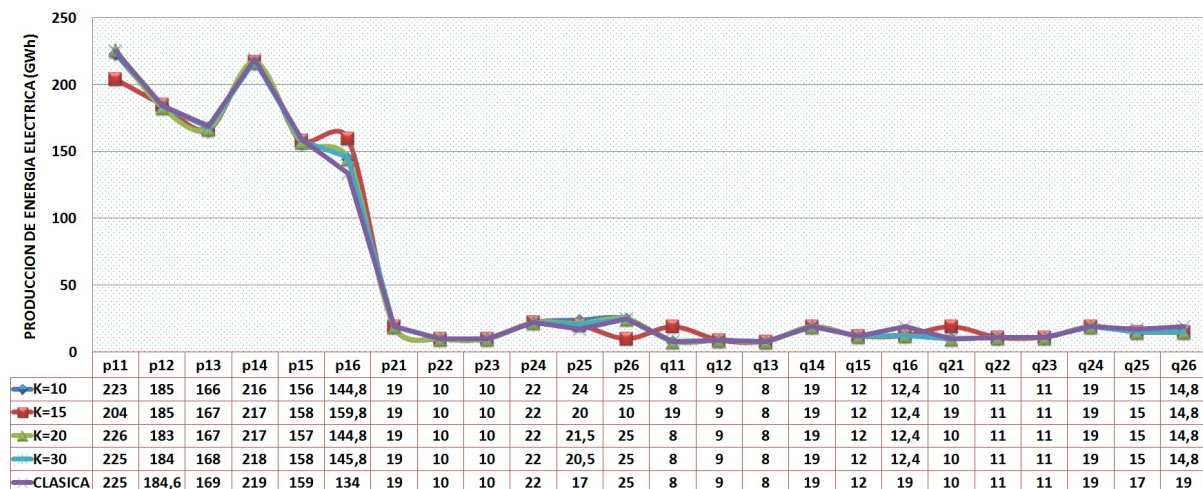


Figura 4.5: Producción de energía eléctrica con diferentes muestras en la metodología de patrones comparada con la clásica.

la figura 4.5 para cada una de las muestras en la metodología de patrones y en comparación con la metodología clásica, se observa lo siguiente:

- Las producciones de energía eléctrica en la central termoeléctrica 2 son iguales en los periodos del 1 al 4.
- En la central hidroeléctrica 1 sus producciones de energía eléctrica son iguales en los periodos del 2 al 5 .
- En la central hidroeléctrica 2 sus producciones de energía eléctrica son iguales en los periodos del 2 al 4.
- En los demás periodos hay diferencias que son las que hacen que los beneficios sean también distintos en cada situación, como se puede observar el figura 4.6.
- A medida que las muestras representadas por K en la metodología de patrones tiende a 30 datos, que es el máximo a considerar por periodo y es el que también considera la metodología clásica, las producciones de energía eléctrica por ambas metodologías son muy similares.

En la figura 4.6, se puede observar que la tendencia a medida que las muestras aumentan en la metodología de patrones, el máximo beneficio obtenido es muy cercano al calculado por la metodología clásica. La diferencia es de \$ 1.91 millones COP.

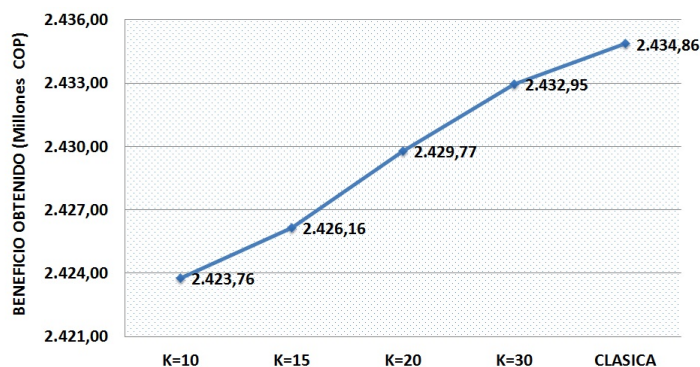


Figura 4.6: Beneficios obtenidos con diferentes muestras en la metodología de reconocimiento de patrones comparada con la clásica.

En el cuadro 4.14 se muestran los porcentajes de los beneficios obtenidos al tomar diferentes muestras para la metodología de reconocimiento de patrones en relación a la metodología clásica.

NUMERO DE MUESTRAS K	BENEFICIO (millones COP)	PORCENTAJE %
10	2.423,76	99,54
15	2.426,16	99,64
20	2.429,77	99,79
30	2.432,95	99,92

Cuadro 4.14: Porcentajes de los beneficios obtenidos con diferentes muestras en la metodología de reconocimiento de patrones comparada con la clásica

Del cuadro 4.14, se concluye una importante afirmación y es que el número de muestras al considerar en la metodología de patrones dice que el porcentaje de relación con respecto a la metodología clásica es muy alto con un promedio del 99.72%. De allí, se puede considerar que se puede escoger una pequeña muestra alrededor del 30% en la metodología de patrones y el porcentaje del beneficio esperado estará muy próximo al 99.5% en relación a la metodología clásica. Esto favorece al decisor que calcula el modelo de maximización de beneficios al utilizar muy poca información y encontrarse con resultados muy confiables.

En relación a los tiempos de ejecución de máquina (en milisegundos ms) para calcular los pro-

	NUMERO DE MUESTRAS K				CLASICA
	10	15	20	30	30
TIEMPO DE EJECUCION (ms)	530	537	545	561	296
PORCENTAJE DE AUMENTO DE TIEMPO %	44,15	44,88	45,69	47,24	

Cuadro 4.15: Tiempos de ejecución de máquina empleados por el programa WinQSB para calcular los modelos equivalentes deterministas

blemas equivalentes deterministas a través del programa WinQSB, hay una muy leve desventaja de la metodología de patrones, ya que el porcentaje de tiempo de ejecución de máquina está en promedio del 45.49 % como se puede observar en el cuadro 4.15, pero esta desventaja se considera poco trascendental ya que utilizan menos de 600 ms para calcular dichos modelos. De paso se afirma una de las conclusiones de [13], en el cual al aumentar el número de muestras y por ende de escenarios el tiempo de solución de los modelos deterministas no es una función creciente.

Conclusiones y futuras investigaciones

- * En este trabajo se logra implementar una metodología muy novedosa basada en teoría de patrones para resolver problemas de optimización estocástica.
- * Se diseña un modelo de maximización de beneficios con restricciones técnicas y de operación para un agente del sector eléctrico colombiano considerando datos reales.
- * El modelo anterior propuesto puede ser intervenido con incertidumbre en otras variables como el nivel de los embalses por efecto del clima y sin embargo la metodología sigue siendo válida.
- * Se resuelve el problema anterior mediante dos metodologías, la clásica y la basada en reconocimiento de patrones, en cuyos resultados se encontró que:
 - En la metodología basada en reconocimiento de patrones se puede considerar alrededor del 30 % de las muestras y el porcentaje del beneficio esperado estará muy próximo al 99 % en relación a la metodología clásica. Esto favorece al decisor que calcula un modelo de maximización de beneficios que tiene poca información, pero que mediante esta metodología se encuentra con resultados muy confiables.
 - Ambas metodologías se utilizan para transformar problemas de programación estocástica con restricciones probabilísticas en problemas equivalentes determinísticos.
 - A nivel de resultados, a medida que las muestras representadas por K en la metodología de patrones tiende a 30 datos, que es el máximo a considerar por periodo y es el que también considera la metodología clásica, los óptimos (las producciones de energía eléctrica) por ambas metodologías son muy similares.
- * Los resultados que arrojaron las metodologías, la de reconocimiento de patrones siempre estuvo por debajo de los valores del beneficio esperado con respecto a la clásica, dado que define una región factible restringida al cumplimiento de los niveles de probabilidad propuestos por el decisor y donde en consecuencia puede obtener un valor máximo distinto. De acuerdo a ésto, el agente del sector eléctrico puede considerar tener en cuenta la metodología de reconocimiento de patrones para solucionar el problema de maximización de beneficios propuesto de acuerdo a un criterio menos optimista el cual le aportará resultados muy confiables.
- * Como trabajo futuro se logró identificar una posible implementación en el modelo de una medida de riesgo como el VaR o el CVaR en la función objetivo para cambiar la medida tradicional de esperanza matemática por otra medida que capture la aversión al riesgo. Adicionalmente, el modelo se podría implementar con un agente que presente un número

mayor de centrales hidroeléctricas con embalses y termoeléctricas de ciclo simple o combinado, con un conjunto de restricciones probabilísticas conjuntas a la cual se le asigne un rango de probabilidades de ocurrencia mayores al que fue asignado en la tesis y utilizar solamente la metodología de reconocimiento de patrones para solucionarlo.

- * El modelo puede complementarse incluyendo los cargos por confiabilidad en la función objetivo, y adicionar una restricción que de cuenta de la probabilidad de riesgo por una falla técnica no detectada a tiempo en una máquina, o por un siniestro diferente que provoque una parada no programada.

Bibliografía

- [1] Arce, Anastacio; Marecos, Amado y Cicogna, Marcelo, 2007, Beneficios Asociados a la Operación Coordinada de las Usinas Hidroeléctricas Brasileñas junto con las Usinas Binacionales de Itaipu, Corpus y Yacyreta, Revista Científica Politécnica, año 3, No 03, págs 31-37. URL: <http://www.fpune.edu.py/docs/revistas/revista2007.pdf>
- [2] Bazaraa, Mokhtar S., Jarvis, John J., 1977, Linear Programming and Network Flows, 2nd Edition, John Wiley and Sons, EU.
- [3] Birge, John R. and Louveaux, Francois, 1997, Introduction to Stochastic Programming. Springer, New York.
- [4] Carrasco, Jesús A. y Martínez, José, 2011. Reconocimiento de patrones. Komputer Sapiens, Vol. 2, No 3.
- [5] Castillo, Enrique; Conejo, Antonio; Pedregal, Pablo, García ,Ricardo y Alguacil, Natalia, 2002, Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia. URL: <http://www.investigacion-operaciones.com/ARCHIVOS-LIBRO/LibroCompleto.pdf>
- [6] Chang, Yih-Long. WinQSB (Versión 2) [Software].
- [7] Rubiales, Aldo; Mayorano, Fernando, Lotito, Pablo, 2007. Optimización Aplicada a la Coordinación Hidrotérmica del Mercado Eléctrico Argentino . Mécanica Computacional Vol XXVI, pp 1906-1920. URL: <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/1237/1181>
- [8] Dentcheva, Darinka; Ruszczycki, Andrzej P. and Shapiro, Alexander, 2009, Lectures Stochastic Programming, Society for Industrial and Applied and the Mathematics and Mathematical Programming Society.
- [9] Fleten, Stein-Erik and Wallace, Stein W., 2009, Delta-Hedging a Hydropower Plant Using Stochastic Programming, Energy Systems, Springer Berlin Heidelberg, págs 507-524. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-88965-6-22>
- [10] Garcés, Alejandro; Gomez, Oscar, 2007, Cálculo del Valor en Riesgo (Var) en el Despacho Hidrotérmico a Mediano Plazo. Scientia et Technica año XIII, No 35, Agosto de 2007. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701
- [11] Kall, Peter; Wallace, Stein W., 1994, Stochastic programming, 2nd Edition, John Wiley and Sons, EU.

- [12] Gottfried, B. 1973, Introduction to optimization theory. Englewood Cliffs, New Jersey, EE.UU.: Printice- Hall.
- [13] Lejeune, Miguel A. , 2012, Pattern-Based Modeling and Solution of Probabilistically Constrained Optimization Problems, OPERATIONS RESEARCH, Vol. 60, No. 6, págs. 1356-1372, <http://dx.doi.org/10.1287/opre.1120.1120>.
- [14] López, Mario; Arce, Anastacio , 2008. Aplicación de Algoritmos Genéticos para la Definición de Despacho de Unidades Generadoras Hidroeléctricas. Revista Científica Politecnica, Vol. 4, págs.106-115.
- [15] Mingo, Luis; Angarita, Jorge; Martinez-Crespo, Jorge, (2009). Academic Software For Optimizing Supply-Side Bids In A Wholesale Electricity Market. Wiley Periodicals, Inc. Comput Appl Eng Educ Vol.19, págs. 457-465, 2011. URL Oficial: <http://wileyonlinelibrary.com/journal/cae>; DOI 10.1002/cae.20325
- [16] Ramos, A.; Ayuso, A y Pérez, G. 2008, Optimización bajo incertidumbre. Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, España. URL: <http://www.doi.icaei.upco.es/simio/apuntes/a-sp.pdf>
- [17] Ramos, A.; Cerisola, S. 2010, Optimización estocástica. Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, España. Biblioteca Comillas. Red Temática de Optimización Bajo Incertidumbre(ReTOBI). URL: <http://www.optimizacionbajoincertidumbre.org>
- [18] Ruiz-Shulcloper J.; Guzmán Arenas A. y Martínez-Trinidad J.F., 1999. Enfoque Lógico Combinatorio al Reconocimiento de Patrones I. , Selección de Variables y Clasificación Supervisada, ISSN 2007-0691, México.
- [19] Taha, Hamdy A., 2004, Investigación de Operaciones, Pearson, 7ma edición, Mexico.
- [20] Webb, Andrew R, 2002. Statistical Pattern Recognition. John Wiley and Sons, Ltd., Second Edition. ISBNs: 0-470-84513-9
- [21] Zimmerman, Ray; Murillo, Carlos, 2011. Matpower 4.1User-s Manual. URL: <http://www.pserc.cornell.edu/matpower/manual.pdf>
- [22] Zimmerman, Ray; Murillo, Carlos and Thomas, Robert, 2011. MATPOWER: Steady-State Operations, Planning, and Analysis Tools for Power Systems Research and Education. IEEE Transactions on power system, Vol. 26, No 1.
- [23] <https://sv01.xm.com.co/Opesin/paginas/cargavARIABLE.asp?Tit=GENERACI>
- [24] <http://m.dinero.com/empresas/articulo/colombia-ejemplo-modelo-energetico-sostenible/166334>
- [25] <http://http://www.acolgen.org.co>
- [26] <http://http://http://www.mathwave.com/es/home.html>
- [27] <http://www.naturgas.com.co>
- [28] <http://www.xm.com.co>
- [29] <http://www.creg.gov.co>
- [30] <http://www.isagen.com.co>