

UNIVERSIDAD EAFIT
Departamento de Ciencias Básicas

**Aproximación General al Comportamiento del Campo de Onda
Sísmico en un Medio Homogéneo Aplicando el Método de los
Elementos Finitos**

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar el
título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Leonardo Cano Uribe
Santhier Stiwari Mosquera Ampudia

Profesor
Jairo Villegas G
Jorge Castaño B

Departamento de Ciencias Básicas

Universidad EAFIT

Medellín

Agradecimientos

Agradecer a los profesores, Jairo Villegas G y Jorge Iván Castaño B por sus conocimientos, paciencia y apoyo en todo momento durante la realización de esta Tesis.

A la universidad EAFIT por facilitar los espacios académicos. De igual forma agradecemos a los excelentes profesores que tuvimos en la maestría en matemáticas aplicadas quienes con sus profundos conocimientos y gran compromiso nos orientaron en el aprendizaje de las matemáticas, y nos ofrecieron valiosos aportes en nuestra formación profesional.

Al doctor Juan Luis Mejía Arango rector de la Universidad Eafit (2018), al doctor Freddy Marín director actual de la maestría en matemáticas aplicadas por su colaboración en los procesos internos para llevar a feliz término nuestro trabajo de grado.

Dedicatoria

A mis padres Jesús Antonio y Martha Cecilia
por su amor y apoyo incondicional.
Para mi esposa, Lina María, y mi hija, María José,
las dueñas de mi corazón.
Leonardo

A mis padres José Herlein y Alba Mery
por ser mis impulsores y mis colaboradores
en la búsqueda de este objetivo.
Para mi esposa Maria Elena y mi
hijo Matías Joel, los cuales son mi todo.
Santhier

Índice general

Introducción	9
1. Preliminares	13
1.1. Teoría de Perturbación	13
1.2. Series de Potencias Asintóticas	15
1.3. Método del Balance Dominante	17
1.4. Método WKBJ	20
1.5. Método de las Características	22
1.6. Consideraciones de la función fuente	26
1.7. Problemas Interiores	28
1.8. Problemas Exteriores	29
1.9. Teoría de Rayos	30
1.9.1. Ecuaciones Eikonal y Transporte	30
1.9.2. Solución de la Ecuación Eikonal por el Método de las Características	34
1.9.3. $\lambda = \frac{1}{2}$. Parámetro de Corrida: σ	40
1.9.4. $\lambda = \frac{c(x)^2}{2}$. Parámetro de Corrida: Tiempo de Viaje (τ) .	42
1.9.5. $\lambda = \frac{c(x)}{2}$. Parámetro de Corrida: Longitud de arco(S) .	43
1.9.6. Teoría de Amplitud del Rayo	44
1.9.7. Tubo de Rayos y Jacobiano	44
1.9.8. Ecuación de Transporte como una Ecuación Diferencial Ordinaria	51

1.9.9. Diferenciación del Determinante	53
1.9.10. Verificación de la expresión (1.9.65)	58
1.9.11. Determinación de Datos Iniciales para las Ecuaciones de Rayos	60
1.9.12. Datos Iniciales para las Funciones de Green en 3D . . .	60
1.9.13. Datos Iniciales para las Funciones de Green en 2D . . .	65
1.10. Método de Elementos Finitos	68
1.10.1. Generalidades del Método de Galerkin	68
1.10.2. Generalidades del Método de Elementos Finitos para Problemas de Segundo Orden	70
1.10.3. Construcción de la Malla de Elementos Finitos	70
1.10.4. Puntos Nodales	70
1.10.5. Construcción de las Funciones Base	71
2. Ecuación de Helmholtz en 2D	75
2.1. Formulación Débil de la Ecuación de Helmholtz en 2D	75
2.2. Existencia y Unicidad de las Soluciones	78
2.3. Estimación del Error en la norma L^2	80
2.4. Estabilidad	81
3. Formulación del Problema y Simulación Numérica	85
3.0.1. Solución Analítica	86
3.0.2. Simulación Numérica	87
Conclusiones	103
A. Lenguaje de FreeFem++	105
B. Generación del código	109
Bibliografía	117

Introducción

La importancia de la exploración sísmica en la búsqueda de petróleo y gas está evidenciada por una aplicación extensiva. Las compañías de petróleo recurren a esta técnica para seleccionar el lugar donde se perforan pozos exploratorios. Es por esto que el principal objetivo es mapear la estructura geológica de los yacimientos de petróleo y gas mediante la imagen sísmica de la distribución reflexiva de la tierra [33].

En general el proceso de exploración sísmica requiere de una adquisición, procesamiento e interpretación de datos que pueden ser reevaluados conforme se obtenga más información de la zona mediante registros de pozos, mejoramiento de la calidad de la información ajustando los modelos de cálculo, entre otros.

En el proceso de adquisición se requiere de un cuidadoso y detallado plan antes que la operación en campo inicie. Tal planeamiento incluye: la selección del objetivo o *"target"*, estimación del potencial de producción, costos de adquisición, establecer el estandar en la calidad de datos, líneas deseadas, equipos a usarse y requerimientos de adquisición. Tales requerimientos incluyen la selección adecuada de la zona donde se ubicará la fuente, el tipo de fuente (obtener espectro de frecuencias adecuado tanto en tipo como en intensidad), receptores, cables y sistema de grabación.

Durante la adquisición se generan ondas sísmicas mediante la perturbación de la tierra usando una fuente artificial por medio de dinamita, vibrador, cañón de aire ó pistola hidráulica. Cuando se libera la energía de la fuente se generan vibraciones acústicas o elásticas que viajan por la tierra atravesando

los estratos con diferentes respuestas sísmicas y efectos de filtrado, y retornan a la superficie para ser registradas como datos sísmicos. Una vez la onda alcanza la superficie, se registra el arribo con receptores sísmicos. La configuración óptima de estos receptores y la orientación de las líneas de recepción con respecto a los rasgos geológicos, asegura que se registre la relación señal-ruido más alta con una resolución apropiada minimizando los efectos ajenos tales como las ondas aéreas, la onda superficial, las múltiples reflexiones y las difracciones que más adelante serán eliminadas a través del procesamiento. Cuando llega la vibración a los equipos de detección, por ejemplo los geófonos, se genera una débil corriente producida por el movimiento relativo entre la caja y la masa suspendida al interior del receptor. Este voltaje llega al equipo como una señal cruda.

La corteza terrestre no es una masa uniforme y homogénea. Es una sucesión de rocas que poseen distinto origen y naturaleza, de allí que se distinguen en cuanto a sus propiedades mecánico-estructurales y se comportan de manera particular cuando viaja una onda sísmica [31]. Por lo general, por simpleza matemática, la tierra es considerada como un medio isotrópico, es decir, la velocidad no depende de la dirección de propagación. Los sólidos presentes o los cristales anisotrópicos pueden dar lugar a variaciones de velocidad que son función de la dirección de propagación. Luego en general, esta velocidad de propagación de las ondas no es perpendicular a sus frentes de onda, así el movimiento de las partículas difiere del comportamiento isotrópico.

En zonas de la tierra donde se da un cambio de roca se produce una variación de las propiedades físicas del medio especialmente en densidad y velocidad de propagación. En estas zonas la energía sísmica es reflejada hacia la superficie y es detectada por los receptores sísmicos. Los datos son recolectados en forma digital, luego un procesamiento computacional es usado para eliminar el ruido, reconstruir el camino de las ondas sísmicas y extraer la información de interés para llevar a cabo la interpretación geológica respectiva.

Durante la etapa del procesamiento la transformada de Fourier es un elemento fundamental para el análisis e interpretación de datos sísmicos ayudando a eliminar el ruido y mejorar la señal [39]. La formulación general se conducirá en el dominio de la frecuencia para algún parámetro observable $u(x, x_0, \omega)$ llamado campo de desplazamiento ó presión. Aquí x representa la posición de observación, ω la frecuencia y x_0 la posición de la fuente. La propagación del campo $u(x, x_0, \omega)$ está gobernado por la ecuación de

Helmholtz

$$\Delta u(x; \omega) + k^2 u(x, \omega) = -\delta(x - x_0)$$

donde k representa el número de onda y la función $\delta(x - x_0)$ un impulso localizado en $x = x_0$.

El mejoramiento de la calidad de la información en la etapa de procesamiento requiere que día a día se generen modelos más robustos que representen de forma más exacta la estructura de la tierra.

La ecuación de Helmholtz surge en muchas aplicaciones físicas en particular en fenómenos de propagación de ondas acústicas, electromagnéticas y en mecánica cuántica [17]. Para solucionarla se emplean métodos de aproximación como solución en rayos [6], método de diferencias finitas [28] [35], método de los elementos finitos [1] [2] [8] [10] [26], transformada wavelets [14]. El trabajo desarrollado en [36] presenta un nuevo modelamiento de la propagación de ondas sísmicas en 2D aplicando wavelets. En este trabajo se emplea la ecuación de onda en un medio homogéneo y se analiza la evolución de la onda en el tiempo para diferentes condiciones de frontera y arreglos de fuente-receptor. Por lo general los problemas asociados a esta ecuación están bien definidos para regiones regulares con condiciones de frontera tipo *Dirichlet*, *Newman* y *Robin*. En muchos problemas de ingeniería donde los dominios no son regulares se omiten las condiciones de frontera lo que hace que el problema sea mal puesto [23]. En la práctica el uso de las condiciones de frontera no reflectantes permite mejorar las soluciones e incrementar la exactitud si se compara con condiciones de frontera estandar [12]. En este trabajo se considera el análisis desarrollado por [36] teniendo en cuenta el tipo de condición de frontera y se resuelve la ecuación de *Helmholtz* analizando, desde el régimen de la frecuencia, la incidencia de las condiciones de frontera. Se considera una región lo suficientemente grande que simule la sección transversal de una porción de la tierra, con una densidad constante, donde el campo de onda u se propagará y en la cual se cumpla la condición de radiación de *Sommerfeld*.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Teoría de Perturbación

La teoría de perturbación es el estudio de los efectos de pequeñas alteraciones producidas por la inserción de un parámetro ε [34].

Una serie perturbada se clasifica en dos tipos. En primer lugar si estas alteraciones son pequeñas y la serie perturbada es una serie de potencias en ε que no desaparece en su radio de convergencia, entonces se dice que la perturbación es regular. Si la serie perturbada puede tomar o no la forma de una serie, si lo hace, la serie de potencias se anula en su radio de convergencia y por tanto la perturbación es Irregular [4]. Dependiendo de la elección de ε , la forma de aproximación puede descomponerse en una lista de infinitos problemas. En términos generales para realizar un análisis de perturbación se siguen algunos pasos básicos:

- a) Se introduce un pequeño parámetro ε lo que convierte el problema original en un problema perturbado. En algunos casos es confuso porque hay muchas maneras de introducir ε .
- b) Se expande la respuesta del problema como una serie de potencias en ε perturbada, Respuesta $(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n$ con a_0 definida como la perturbación de orden cero. Generalmente este paso involucra una

secuencia iterativa para determinar los coeficientes. La existencia de la solución de orden cero en una forma cerrada asegura que los términos de orden superior se calculen de manera analítica.

- c) Se recupera la respuesta al problema original sumando la serie perturbada para el valor apropiado de ϵ , es decir, si $\epsilon = 1$ sumamos la serie. Este paso puede ser fácil o no. Si la serie perturbada converge la suma es la respuesta buscada. Muchas series divergen así que puede tenerse una buena aproximación a la respuesta cuando ϵ es muy pequeño.

Ejemplo 1.1.1. Hallar la raíz del polinomio $x^5 + x = 1$. La respuesta obtenida en un programa computacional es $x = 0,755$

1. Se ubica ϵ en la menor potencia de x , es decir, $x^5 + \epsilon x = 1$. Si $\epsilon = 0$ el problema no es perturbado y por tanto se resuelve la ecuación de manera exacta $x = 1$; lo cual podría ser una buena aproximación para $x = 0,755$.

2. Expansion de la respuesta en serie de potencias.

$$\text{Respuesta}(\epsilon) = R(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon^n = a_0 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2 + a_3 \epsilon^3 + \dots$$

Se calculan los coeficientes a_0, a_1, a_2, \dots . Para ello se reemplaza $R(\epsilon)$ en la ecuación $x^5 + \epsilon x = 1$. Por lo tanto

$$(1 + R(\epsilon))^5 = (a_0 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2 + a_3 \epsilon^3 + \dots)^5$$

Se realiza la expansión del polinomio y se determinan los coeficientes de ϵ para las diferentes potencias:

$$\epsilon^0, a_0 = 1$$

$$\epsilon^1, 5a_1 + 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1/5$$

$$\epsilon^2, 5a_2 + 10a_1^2 + a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = -1/25$$

$$\text{De forma secuencial se determina } a_3 = -1/125.$$

Por tanto

$$\text{Respuesta}(\epsilon) = R(\epsilon) = 1 - 1/5\epsilon - 1/25\epsilon^2 - 1/125\epsilon^3 + \dots$$

3. Se recupera la respuesta haciendo $\epsilon = 1$

$\text{Respuesta}(1) = R(1) = 1 - 1/5 - 1/25 - 1/125 + \dots \simeq 0,752$ lo cual es una buena aproximación a $x = 0,755$ ya que el error es de 3 en 750.

1.2. Series de Potencias Asintóticas

Relación de orden: Sea x una variable real ó compleja. Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones de x definidas y continuas en un dominio \mathbb{R} y que x_0 reside en la clausura de \mathbb{R} .

Definición 1.2.1. Notación “O”. Suponga que $x \rightarrow x_0$ en \mathbb{R} , si existe una constante k , independiente de x , en una vecindad N_0 de x_0 tal que $|f(x)| \leq k|g(x)|$. Decimos que $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow x_0$ en \mathbb{R} . Lo anterior significa que si $g(x) \neq 0$, entonces la relación $\frac{f(x)}{g(x)}$ está acotada cuando $x \rightarrow x_0$, es decir $|\frac{f(x)}{g(x)}| \rightarrow k$ siempre que $x \rightarrow x_0$

Definición 1.2.2. Notación “o”. Suponga que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una vecindad N_ε de x_0 tal que $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ para todo $N_\varepsilon \cap \mathbb{R}$. Entonces decimos que $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow x_0$ en \mathbb{R} . Esto significa que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Definición 1.2.3. Sea $f(x)$ una función continua definida en \mathbb{R} . La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ se dice que es una expansión en serie asintótica de f conforme $x \rightarrow x_0$ en \mathbb{R} si se cumple la condición:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ (x - x_0)^{-m} \left[f(x) - \sum_{n=0}^m (x - x_0)^n \right] \right\} = 0. \quad (1.2.1)$$

Algunas formas equivalentes a la expresión (1.2.1) son:

$$f(x) - \sum_{n=0}^m a_n(x - x_0)^n \ll a_{m+1}(x - x_0)^{m+1}, \quad (1.2.2)$$

$$f(x) - \sum_{n=0}^m a_n(x - x_0)^n \sim a_m(x - x_0)^m. \quad (1.2.3)$$

Así la serie de potencias es asintótica a una función si el residuo de “ m ” términos es mucho más pequeño que el último término retenido cuando $x \rightarrow x_0$. De ésta definición una serie puede ser asintótica a una función sin ser convergente.

Teorema 1.2.1. Si $f(x)$ puede expandirse en una serie asintótica de la forma

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^m a_n(x - x_0)^n \quad (1.2.4)$$

entonces los coeficientes de la expresión son únicos y serán determinados como:

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad y \quad a_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0}, \quad (1.2.5)$$

y en forma general

$$a_m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n (x - x_0)^n}{(x - x_0)^m}. \quad (1.2.6)$$

La condición para que la función tenga expansión en serie de potencias asintóticas es que los límites existan [5].

1.3. Método del Balance Dominante

El método del balance dominante [4] se utiliza para obtener soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales lineales ordinarias sobre puntos singulares irregulares. Este método se basa en la búsqueda de soluciones locales de la forma $y(x) = e^{s(x)}$, cuando $x \rightarrow x_0$. La técnica consiste en tres pasos:

1. Se suprimen los términos que parecen despreciables y se reemplaza la ecuación exacta por una relación asintótica.
2. Se sustituye la relación asintótica por la igualdad y se resuelve la ecuación resultante de manera exacta. La solución de la ecuación satisface la relación asintótica a través de cierta función.
3. Se verifica que la solución obtenida es consistente con la aproximación hecha en el paso 1.

Ejemplo 1.3.1. Considere la ecuación diferencial

$$xy'' + y' = y \quad (1.3.1)$$

La expresión (1.3.1) tiene una singularidad irregular en $+\infty$. Para determinar el comportamiento de la solución se aplica el método del balance dominante comenzando con buscar una solución local del tipo $y(x) = e^{s(x)}$. Las derivadas respectivas son:

$$y' = s'(x)e^{s(x)} \quad (1.3.2)$$

$$y'' = e^{s(x)}[(s'(x))^2 + s''(x)] \quad (1.3.3)$$

Sustituyendo (1.3.2) y (1.3.3) en (1.3.1) se obtiene la expresión

$$xe^{s(x)}[(s'(x))^2 + s''(x)] + s'(x)e^{s(x)} = e^{s(x)} \quad (1.3.4)$$

Como $e^{s(x)}$ es diferente de cero para todo valor de x , entonces se divide la expresión (1.3.4) por dicho factor y se obtiene la ecuación resultante:

$$x(s'(x))^2 + xs''(x) + s'(x) = 1 \quad (1.3.5)$$

Se aplica el paso 1 suprimiendo los términos que se consideran despreciables

$$s''(x) \ll (s'(x))^2 \Rightarrow xs''(x) \ll x(s'(x))^2 \quad (1.3.6)$$

bajo este supuesto la relación asintótica de expresión (1.3.6) esta definida como

$$s''(x) \ll (x(s'(x)))^2 \sim 1 - s'(x) \quad (1.3.7)$$

Resolviendo la expresión (1.3.7) se obtiene que

$$s(x) \sim 2\sqrt{x} \quad (1.3.8)$$

Se aplica el paso 2 sustituyendo la relación asintótica por la igualdad y se resuelve la ecuación de manera exacta.

$$s(x) = \pm 2\sqrt{x} + c(x) \quad (1.3.9)$$

donde $c(x) \ll 2\sqrt{x}$. Sustituyendo la expresión (1.3.9) en (1.3.6) y combinando términos se obtiene una expresión para $c(x)$

$$xc''(x) + x(c'(x))^2 + (2\sqrt{x} + 1)(c'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}) = 0 \quad (1.3.10)$$

Como $c(x) \ll 2\sqrt{x}$ se sigue que $xc''(x) \ll \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y $x(c'(x))^2 \ll \sqrt{x}c'(x)$. Como resultado se obtiene la ecuación diferencial asintótica

$$c'(x) \sim \frac{-1}{4}x^{-1}$$

cuya solución es $c(x) = \frac{1}{4}\ln(x)$.

Se aplica el paso 3 verificando la consistencia de la solución. El comportamiento principal de $y(x)$ está dado por $e^{s(x)+c(x)} = kx^{-1/4}e^{2\sqrt{x}}$ con k constante. Por tanto la solución asintótica estaría definida como:

$$y(x) \sim kx^{-1/4}e^{2\sqrt{x}} \quad (1.3.11)$$

Para mejorar la exactitud de la solución se puede considerar una aproximación del tipo

$$y(x) \sim kx^{-1/4}e^{2\sqrt{x}}w(x) \quad (1.3.12)$$

Sustituyendo la expresión (1.3.12) en (1.3.6) se trata la ecuación diferencial para la variable desconocida $w(x)$. La ecuación podría resolverse usando una expansión asintótica en serie de potencias inversa, debido a que se podría representar $w(x)$ como $1 + \varepsilon(x)$ donde $\varepsilon(x) \ll 1$ cuando $x \rightarrow +\infty$, es decir:

$$w(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)^{-n}, \quad a_0 = 1, \quad x \rightarrow +\infty \quad (1.3.13)$$

La expresión (1.3.13) en general es divergente pero cualquier suma finita provee la mejor aproximación para $w(x)$ y por tanto para $y(x)$.

1.4. Método WKBJ

Se desea calcular una solución aproximada a la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (Q(x)/\varepsilon)^2\psi = 0 \quad (1.4.1)$$

donde ε es un pequeño parámetro, $Q(x)$ es una función monótona creciente para valores de x . El método *WKBJ*, desarrollado por los físicos Wentzel, Kramers, Brillouin (1926) y el matemático Harold Jeffreys (1923), es un método de perturbación singular en donde la derivada de mayor orden es multiplicada por un pequeño parámetro. Este método tiene variadas aplicaciones debido a que cualquier ecuación lineal homogénea de segundo orden puede transformarse en (1.4.1). Aunque la solución exacta pueda ser demasiado compleja, la solución aproximada consiste en exponenciales de funciones algebraicas, integrales elementales o de funciones ya conocidas como las funciones de Airy [16], [18].

Formalmente se puede resolver la expresión (1.4.1) expandiendo ψ

$$\psi(x) \sim e^{\left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(x)\varepsilon^n\right)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.4.2)$$

La expresión (1.4.2) es la fórmula inicial con la cual se deriva la aproximación **WKBJ** y la naturaleza singular del método es evidente en el término $\frac{1}{\varepsilon}$ de la aproximación exponencial (1.4.2).

Ejemplo 1.4.1. Aproxime la solución de la ecuación de Schrödinger

$$\delta^2 y'' = Q(x)y, \quad Q(x) \neq 0. \quad (1.4.3)$$

Se comienza empleando la forma inicial para la aproximación WKBJ y determinando las derivadas respectivas:

$$y'(x) \sim e^{\left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x)\varepsilon^n\right)} \left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} S'_n(x)\varepsilon^n\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.4.4)$$

$$y''(x) \sim e^{\left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x)\varepsilon^n\right)} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} S'_n(x)\varepsilon^n\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} S''_n(x)\varepsilon^n\right], \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.4.5)$$

Sustituyendo (1.4.5) en (1.4.3) y dividiendo entre $e^{\left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x)\varepsilon^n\right)}$, se obtiene:

$$(\varepsilon)^2 \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} S'_n(x)\varepsilon^n \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} S''_n(x)\varepsilon^n \right] = Q(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.4.6)$$

Aplicando el método del balance dominante se presenta que el mayor término del lado izquierdo, $(\delta)^2 \frac{(S'_0)^2}{(\varepsilon)^2}$, tiene la misma magnitud que $Q(x)$ en el lado derecho. Así que ε es proporcional a δ y por simplicidad se elige $\varepsilon = \delta$. Al comparar las potencias de δ se obtiene una serie de ecuaciones que da la posibilidad de calcular S_0, S_1, S_2 ; la ecuación resultante para S_0 es conocida como la ecuación Eikonal y su solución es

$$S_0(x) = \pm \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt. \quad (1.4.7)$$

La ecuación resultante para S_1 es conocida como la ecuación de Transporte y su solución es

$$S_1(x) = \frac{-1}{4} \ln(Q(x)). \quad (1.4.8)$$

La solución general de (1.4.3), truncando la serie hasta S_1 es

$$y(x) \sim A_1 Q(x)^{\frac{-1}{4}} e^{\left(\frac{1}{\delta} \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt\right)} + A_2 Q(x)^{\frac{-1}{4}} e^{\left(\frac{1}{\delta} \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt\right)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.4.9)$$

donde A_1 y A_2 son constantes que se determinan con las condiciones iniciales y “a” es un punto fijo pero arbitrario de integración.

1.5. Método de las Características

El método de las características permite resolver problemas de ecuaciones diferenciales parciales lineales, semi-lineales y cuasi-lineales. La forma general para este tipo de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} f(x, y)u_x + g(x, y)u_y + k(x, y)u &= h(x, y) \text{ (Lineal)}, \\ f(x, y)u_x + g(x, y)u_y &= h(x, y, u) \text{ (Semi - Lineal)}, \\ f(x, y, u)u_x + g(x, y, u)u_y &= h(x, y, u) \text{ (Cuasi - Lineal)}. \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Para presentar el desarrollo formal del método considere la ecuación diferencial semi-lineal con condiciones iniciales:

$$f(x, y)u_x + g(x, y)u_y = h(x, y, u), \tag{1.5.2}$$

$$u(x, 0) = u_0$$

ó

$$u(0, y) = u_1$$

La solución general de (1.5.2) es una superficie $F(x, y, u) = 0$ donde $u = u(x, y)$. El cálculo del vector gradiente permite determinar el vector normal \vec{n} a la superficie $F(x, y, u) = 0$ como $\vec{n} = \nabla F = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} - u_x \vec{k}$. Una vez definido este vector se escribe la expresión (1.5.2) como el producto punto

$$(f(x, y), g(x, y), h(x, y, u)) \cdot (u_x(x, y), u_y(x, y), -1) = 0. \tag{1.5.3}$$

En la expresión (1.5.3) los campos vectoriales definidos por $(f(x, y), g(x, y), h(x, y, u))$ y $(u_x(x, y), u_y(x, y), -1)$ son ortogonales. En el caso del campo vectorial $(u_x(x, y), u_y(x, y), -1)$ se define que este corresponde a un vector normal ó vector gradiente. Por lo tanto la expresión (1.5.3) estaría definida como

$$(f(x, y), g(x, y), h(x, y, u)) \cdot \vec{n} = 0. \tag{1.5.4}$$

lo que significa que dado el vector $\vec{v} = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j} + h(x, y, u)\vec{k}$ es normal a \vec{n} ; ya que \vec{n} es normal a $F(x, y, u) = 0$, luego \vec{v} es tangencial a la superficie $F(x, y, u) = 0$ y por tanto pertenece plano tangente.

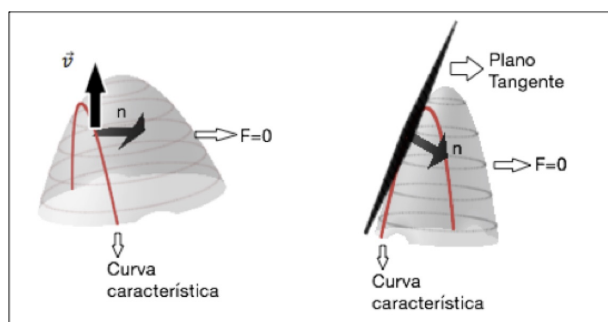


Figura 1.1: Interpretación Geométrica del Gradiente y el vector normal

Si se comienza en algún punto de condición inicial y se hace un desplazamiento en dirección del vector \vec{v} , entonces el desplazamiento se hace a lo largo de la superficie $F(x, y, u) = 0$. La curva descrita se define como curva característica. Así la ecuación diferencial parcial provee un requerimiento geométrico de que cualquier superficie integral en un punto debe ser tangente al vector \vec{v} . Si se parametriza la curva característica se pueden hallar los puntos de la misma así:

$$\vec{w}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + u(t)\vec{k}. \quad (1.5.5)$$

Diferenciando la expresión (1.5.5) respecto t se obtiene el vector tangente el cual recorre al plano tangente de la superficie $F(x, y, u) = 0$ en un punto dado

$$\vec{w}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + u'(t)\vec{k}. \quad (1.5.6)$$

Como la característica se obtiene recorriendo la superficie en dirección del vector \vec{k} , se cumple que \vec{v} y $\vec{w}'(t)$ deben ser proporcionales, por ejemplo $\vec{w}'(t) = \beta\vec{v}$, para algún β ó de manera equivalente

$$dt = \frac{dx}{f(x, y)} = \frac{dy}{g(x, y)} = \frac{du}{h(x, y, u)}. \quad (1.5.7)$$

La solución de los pares en la expresión (1.5.7) definen la característica de la ecuación diferencial parcial. Para el caso de una ecuación diferencial parcial cuasi-lineal, al igual que en el caso semi-lineal, las características son curvas en el espacio x, y, u definidas por:

$$dt = \frac{dx}{f(x, y, u)} = \frac{dy}{g(x, y, u)} = \frac{du}{h(x, y, u)}. \quad (1.5.8)$$

Ejemplo 1.5.1. Hallar la solución al problema de Cauchy de la ecuación diferencial parcial semi-lineal para $x > 0$.

$$xu_x + yu_y = xe^{-u}, u(x, x^2) = x. \quad (1.5.9)$$

- Se identifican las funciones $f(x, y), g(x, y), h(x, y, u)$. En este caso $f(x, y) = x, g(x, y) = y, h(x, y, u) = xe^{-u}$.
- Se define el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias como se presenta en la expresión (1.5.7), $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{xe^{-u}}$.
- Se toma el primer par de ecuaciones diferenciales ordinarias $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ y se obtiene como resultado la expresión $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1| \rightarrow y = C_1x$, por tanto $C_1 = \frac{y}{x}$.
- Se toma la expresión $\frac{dx}{x} = \frac{du}{xe^{-u}}$ y se resuelve la ecuación diferencial ordinaria $e^u du = dx$, obteniéndose como resultado la expresión $e^u = x + C_2$, luego $C_2 = e^u - x$. La solución general del problema combina las constantes C_1 y C_2 con una relación funcional de la forma $C_2 = G(C_1)$ con G una función arbitraria. Así

$$e^u - x = G(y/x) \rightarrow e^u = x + G(y/x). \quad (1.5.10)$$

Para determinar la función G se hace uso de las condiciones iniciales $u(x, x^2) = x$. $e^x = x + G(\frac{x^2}{x}) \rightarrow e^x = x + G(x)$. Por tanto $G(x) = e^x - x$, luego

$$e^u = x + e^{\left(\frac{y}{x}\right)} - \frac{y}{x}. \quad (1.5.11)$$

Luego la expresión (1.5.11) es la solución particular al problema de Cauchy (1.5.9). La figura 1.2 presenta la gráfica de la superficie solución.

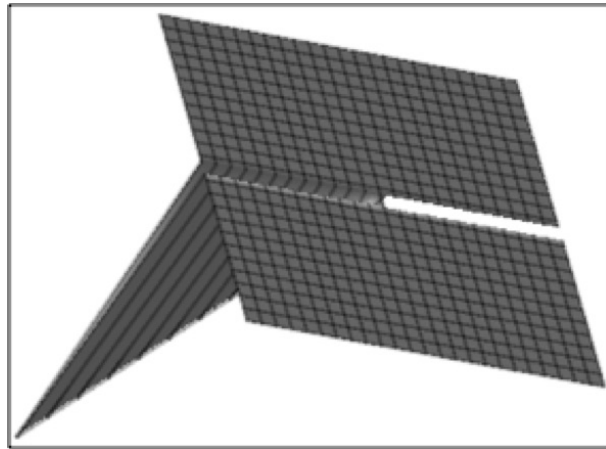


Figura 1.2: Superficie Solución

1.6. Consideraciones de la función fuente

Una fuente puede ser considerada como un objeto infinitamente pequeño en 2D y 3D que irradia energía acústica [37]. Un punto fuente en 3D con un vector posición r_0 está definido como la solución de la ecuación no homogénea de Helmholtz (Figura 1.3).

$$\nabla^2 g(r/r_0) + \frac{\omega^2}{c(x)^2} g(r/r_0) = -\delta(r - r_0), \quad r \in \Omega \subset R^3 \quad (1.6.1)$$

donde

r : Punto de observación

$g(r/r_0)$: Función de Green que también satisface la ecuación homogénea de Helmholtz en todos los puntos excepto en $r = r_0$.

$\delta(r - r_0)$: Denotada como la función delta de Dirac en tres dimensiones representando un punto fuente localizado en r_0 .

La expresión $\delta(r - r_0)$ en coordenadas cartesianas está definida como:

$$\delta(r - r_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0).$$

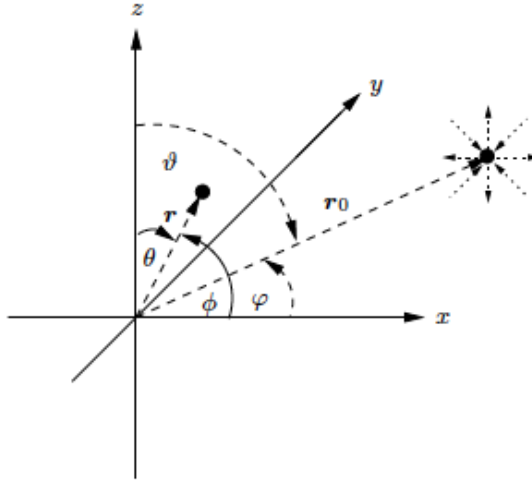


Figura 1.3: Punto Fuente en 3D

La función de Green que representa al punto fuente debe satisfacer la condición de radiación

$$\lim_{\|r - r_0\| \rightarrow \infty} \|r - r_0\|^{(\frac{D-1}{2})} \left(\frac{\partial}{\partial \|r - r_0\|} g(r/r_0) - ig(r/r_0) \right) = 0 \quad (1.6.2)$$

donde $D = 2, 3$ denota la dimensión del problema.

La condición de radiación provee una condición de frontera al infinito y por tanto asegura que la fuente irradia ondas que se absorberán en la frontera. Estas ondas son denominadas ondas salientes. La solución de (1.6) que también satisface la condición de radiación está dada por

$$g(r/r_0) = \frac{e^{ik\|r-r_0\|}}{4\pi \|r-r_0\|}.$$

Para el caso de ondas entrantes la solución es

$$g(r/r_0) = \frac{e^{-ik\|r-r_0\|}}{4\pi \|r-r_0\|}.$$

Otras soluciones de la ecuación de Helmholtz no homogénea pueden formularse considerando cualquier combinación lineal de $g(r/r_0)$. Para el caso en 2D una solución general puede expresarse como

$$g(r/r_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1,2)}(k \|r-r_0\|).$$

Donde $H_0^{(1,2)}$ representa la función de Hankel de primer y segundo tipo de orden cero; el superíndice (1,2) indica si las ondas son salientes o entrantes. En este caso para un medio de velocidad constante la expresión analítica de la función de Green en 2D es

$$g(x, x_0, \omega) = \frac{i \operatorname{sgn}(\omega)}{4} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega |x-x_0|}{c(x_0)}\right). \quad (1.6.3)$$

Al considerar la forma asintótica de la función de Hankel en (1.6.3), la función de Green queda expresada como

$$g(x, x_0, \omega) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c(x_0)}{2\pi |\omega| |x-x_0|}} e^{\frac{i\omega|x-x_0|}{c(x_0)} + i \operatorname{sgn}(\omega) \frac{\pi}{4}}.$$

Cuando la la función Delta de Dirac es empleada como punto fuente, entonces la función de Green es la solución del problema adjunto con fuente puntual. Si la fuente no fuese la Delta de Dirac, la solución analítica puede hallarse como

$$u(x) = \int_{\Omega} g(x, x_0, \omega) f(x) dx.$$

1.7. Problemas Interiores

Los problemas interiores son conjuntos con dominios acotados con condiciones de frontera homogéneas. El problema podría definirse en términos generales como

$$\nabla^2 u(x; \omega) + \frac{\omega^2}{c(x)^2} u(x, \omega) = f(x) \quad , \quad x \in \Omega \quad (1.7.1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \text{Dirichlet}$$

$$u_n(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \text{Newmann.}$$

La formulación del problema está bien puesta para casi todos los valores de k . Se presentan inconvenientes cuando se tiene un conjunto discreto de k que corresponde a los valores propios del operador $-c(x)^2 \nabla^2$ establecido en el dominio Ω con condiciones de frontera definidas. Este k corresponde físicamente a los modos de resonancia de Ω . Considere la ecuación de Helmholtz con coeficientes constantes en 1D y determinemos para que valores de k el problema está bien puesto.

$$u_{xx}(x) + k^2 u(x) = f(x) \quad , \quad x \in (0, L)$$

$$u(x) = u(L) = 0.$$

El único valor propio que genera soluciones no triviales se encuentra cuando $\lambda = k^2$ y por tanto el conjunto de valores y funciones propias son

$$\lambda_k = \left(\frac{k^2 \pi^2}{L^2} \right), \quad \mu_k = \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right).$$

Al expandir la solución u y la función f en términos de las funciones propias se obtiene que

$$\mu_k = \frac{f_k}{k^2 - \lambda_k}.$$

Luego el problema está bien definido si $k^2 \neq \lambda_k$ para todo k donde $f_k \neq 0$. Cuando la ecuación 1.7.1 modela situaciones físicas al interior de un dominio acotado se puede incluir un parámetro de absorción o amortiguamiento que permite que la solución esté bien

definida. En términos matemáticos este parámetro de amortiguamiento es adicionado a la ecuación de Helmholtz como

$$i\omega\xi u(x; \omega) + \nabla^2 u(x; \omega) + \frac{\omega^2}{c(x)^2} u(x, \omega) = f(x)$$

donde $\xi > 0$ es conocido como parámetro de amortiguamiento. El efecto de este parámetro sobre el campo de onda genera que las ondas “mueran” cuando recorren grandes distancias y la energía es disipada.

1.8. Problemas Exteriores

Se refiere a aquellos problemas donde el dominio no es acotado como el caso de la dispersión de ondas. El dominio de las soluciones está fuera de un conjunto Ω abierto acotado. El problema es modelado como

$$\nabla^2 u(x; \omega) + \frac{\omega^2}{c(x)^2} u(x, \omega) = 0 \quad (1.8.1)$$

con condiciones no homogéneas en Ω

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad \text{Dirichlet}$$

$$u_n(x) = h(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad \text{Newmann.}$$

En la expresión 1.8.1 no hay fuente ya que las ondas son generadas por las condiciones de frontera no homogéneas $g(x)$ ó $h(x)$.

1.9. Teoría de Rayos

El método de rayos es un método asintótico para resolver problemas de difracción. En la física matemática, un método asintótico es una versión de una técnica de perturbación y el método de rayos no es la excepción. Para nuestro estudio el método de rayos es el resultado que se obtiene al resolver las ecuaciones Eikonal y de transporte que son válidas sólo en el régimen de alta frecuencia.

1.9.1. Ecuaciones Eikonal y Transporte

Estas dos ecuaciones resultan de sustituir la solución asintótica obtenida al aplicar el método WKBJ (también conocida como serie de Debye) en la ecuación homogénea de Helmholtz. Se presenta un desarrollo a partir de la ecuación de onda.

Considere la ecuación de onda:

$$\nabla^2 u(x, t) - \frac{1}{c(x)^2} u_{tt} = 0 \quad x \in \Omega \quad t > 0 \quad (1.9.1)$$

Donde $\nabla^2 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ es el operador de Laplace, $c(x)$ representa la velocidad de propagación del campo u y t el tiempo.

Aplicando la transformada de Fourier al dominio del tiempo en la ecuación (1.9.1) la variable espacial u es llevada a través de la transformada como un parámetro. Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 u(x; t) e^{-iwt} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{c(x)^2} u_{tt}(x; t) \right) e^{-iwt} dt = 0$$

$$\nabla^2 u(x, w) + \frac{w^2}{c(x)^2} u(x, w) = 0 \quad (1.9.2)$$

donde w es la frecuencia angular.

La expresión (1.9.2) se conoce como la ecuación de Onda Reducida ó ecuación de Helmholtz, cuyas condiciones de frontera pueden ser tipo *Dirichlet* ($u(x) = g(x)$, $x \in \partial\Omega$), *Newmann* ($u_n(x) = g(x)$, $x \in \partial\Omega$) ó *Robin* ($u_n(x) + \alpha u(x) = g(x)$, $x \in \partial\Omega$)

En el caso $1D$, donde el Laplaciano es una segunda derivada, la ecuación de Helmholtz es una ecuación diferencial ordinaria. Las soluciones linealmente independientes de esta ecuación pueden ser escritas en forma asintótica cuando $\omega \rightarrow \infty$.

Para la aplicación del método WKBJ se requiere multiplicar la ecuación de Helmholtz por un pequeño parámetro ε que sirva como base para la aproximación asintótica. Se tomará el pequeño parámetro como $\varepsilon = \frac{1}{i\omega}$ debido a que para altas frecuencias la onda tiene una longitud de onda relativamente corta, del orden de $|\frac{2\pi}{\omega}| \ll 1$. De este supuesto subyace la aplicación del método *WKBJ* a muchos problemas en la física, óptica, electromagnetismo y acústica. Con relación a alta frecuencia se menciona por ejemplo, en el caso del ultrasonido, las ondas pueden tener frecuencias del orden de $10^6 Hz$ con longitud de onda de $3 \cdot 10^{-2} m$ en el aire [22].

Basados en la anterior discusión, se construirá una aproximación asintótica a la solución de la ecuación de Helmholtz en el régimen de alta frecuencia.

Considere en la ecuación de Helmholtz la velocidad $c(x) = c$ constante. En esta ecuación se tendrá solución de onda plana: $u(x, \omega) = A(\omega)e^{\frac{i\omega}{c}x}$, donde la amplitud $A(\omega)$ es constante. En el caso en que $c(x)$ no es constante, la solución de onda plana motiva soluciones de la forma:

$$u(x, \omega) = A(x, \omega)e^{i\omega\tau(x)} \quad (1.9.3)$$

donde $A(x, \omega)$ es la amplitud y $\tau(x)$ la fase.

El interés de este desarrollo radica en buscar soluciones con comportamiento asintótico cuando $\omega \rightarrow \infty$. Para expresarlas, suponga que tiene una expansión asintótica de la forma:

$$A(x, \omega) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} A_j(x)\varepsilon^j = \sum_{j=0}^{+\infty} A_j(x)\varepsilon^j, \quad (1.9.4)$$

con $A_j(x) = 0$ para $j = -1, -2, \dots$ Tomando en consideración el hecho de que $\varepsilon = \frac{1}{i\omega}$ se tiene que la expansión asintótica esta definida como:

$$A(x, \omega) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A_j(x)}{(i\omega)^j}. \quad (1.9.5)$$

La expansión asintótica significa que para cada $n \geq 0$

$$A(x, \omega) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A_j(x)}{(i\omega)^j} + o(\omega^{-n}), \quad (1.9.6)$$

donde la notación $o(\omega^{-n})$ denota el término para el cual $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |o(\omega^{-n})| = 0$. Es claro que una serie asintótica puede no ser convergente, en tal caso se puede tener una buena aproximación truncando la serie en un valor para el cual el error tiende a cero conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, es decir cuando $\omega \rightarrow \infty$.

Por lo tanto la aproximación asintótica para la ecuación de Helmholtz cuando la velocidad $c(x)$ no es constante es:

$$u(x, \omega) \sim e^{i\omega\tau(x)} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A_j(x)}{(i\omega)^j}. \quad (1.9.7)$$

La expresión (1.9.7) surge de la óptica geométrica. La idea es que la solución altamente oscilante se representa como un producto lentamente variable de la amplitud y la exponencial de la fase multiplicados por un parámetro grande ω . Por lo tanto en lugar del campo de onda oscilante las incógnitas en la óptica geométrica son la fase y la amplitud que varían en una escala mayor y es más fácil el cálculo numérico, pero teniendo en cuenta que esta aproximación sólo es válida para grandes frecuencias. Se requiere que las variaciones de velocidad de propagación $c(x)$ en un medio estén a una mayor escala que la longitud de onda.

Usualmente se utiliza una expresión de la forma (1.9.7), pero en ocasiones, aunque es poco frecuente, pueden emplearse expresiones de la forma (1.9.8) y (1.9.9)

$$u(x, \omega) \sim \omega^\beta e^{i\omega\tau(x)} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A_j(x)}{(i\omega)^j}, \quad (1.9.8)$$

$$u(x, \omega) \sim e^{[(i\omega\tau(x) - i\omega t) (\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A_j(x)}{(i\omega)^j})]}. \quad (1.9.9)$$

Las expresiones (1.9.7) y (1.9.9), usualmente llamadas soluciones de rayos, son modeladas con la solución mas elemental de la ecuación de onda (ondas planas)[3].

Las ecuaciones Eikonal y de Transporte se obtienen sustituyendo la solución asintótica (1.9.8) en la ecuación homogénea de Helmholtz como se presenta a continuación:

Sustituyendo (1.9.8) en (1.9.2):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\omega^\beta e^{i\omega\tau(x)} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A_j(x)}{(i\omega)^j}) + \left(\frac{\omega^2}{c(x)^2}\right) (\omega^\beta e^{i\omega\tau(x)} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A_j(x)}{(i\omega)^j}) = 0. \quad (1.9.10)$$

Calculando las derivadas parciales de (1.9.10) respecto a la variable espacial x y reemplazando en (1.9.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} &+ \omega^\beta e^{i\omega\tau(x)} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(i\omega)^j} [\nabla^2 A_j + i\omega \nabla_\tau \cdot \nabla A_j - \omega^2 A_j (\nabla_\tau)^2 \right. \\ &+ \left. i\omega \nabla_\tau \cdot \nabla A_j] \right) + \omega^\beta e^{i\omega\tau(x)} * \left(\frac{\omega^2}{c(x)^2} \right) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A_j(x)}{(i\omega)^j} = 0 \quad (1.9.11) \end{aligned}$$

Ordenando términos en potencias de ω en la expresión (1.9.1):

$$\begin{aligned} &\omega^\beta e^{i\omega\tau(x)} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(i\omega)^j} \left[\nabla^2 A_j \left(\frac{1}{c(x)^2} - (\nabla_\tau)^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. i\omega (2\nabla_\tau \cdot \nabla A_j + A_j \nabla_\tau^2) + \nabla^2 A_j \right] = 0 \quad (1.9.12) \end{aligned}$$

En la expresión (1.9.12) se asume que los términos de diferentes potencias de ω no pueden cancelarse unos con otros lo que determinaría que los coeficientes de la serie se suprimen independientemente. Para ello se igualan los coeficientes de ω a cero comenzando con la mayor potencia que es $\beta + 2$ Este término sólo está presente en la primera

parte de la serie en (1.9.12) y sólo en el caso para $j = 0$. Ajustando estos coeficientes a cero surge la ecuación *Eikonal*:

$$(\nabla_{\tau}(x))^2 - \frac{1}{c(x)^2} = 0. \quad (1.9.13)$$

Al hacer esta suposición la serie completa en (1.9.12) es cero y por tanto se analiza qué pasa con las dos series restantes. En el caso de la serie intermedia la mayor potencia de ω es $\beta + 1$ la cual surge, como en el caso anterior, para cuando $j = 1$. La tercera serie comienza con una menor potencia de ω y es β . Al ajustar los coeficientes de la mayor potencia de ω a cero se obtiene la ecuación de *Transporte*:

$$2\nabla_{\tau}(x) \cdot \nabla A_j(x) + A_j(x)\nabla_{\tau}^2(x) = 0. \quad (1.9.14)$$

Al resolver las ecuaciones Eikonal y Transporte se pueden hallar los coeficientes $A_j(x)$ de manera recursiva

1.9.2. Solución de la Ecuación Eikonal por el Método de las Características

Intentar una solución directa de la ecuación Eikonal en más de una dimensión no es viable debido a la no linealidad de las variables involucradas. Por esto se requiere aplicar de manera indirecta el método de las características para encontrar la solución. Considere la superficie.

$$F(x, y, z, \tau, \tau_x, \tau_y, \tau_z) = 0 \quad (1.9.15)$$

donde x, y, z son variables espaciales, τ es la solución del problema y τ_x, τ_y, τ_z sus derivadas parciales. La expresión (1.9.15) se puede interpretar como una función en un espacio de dimensión siete (7) la cual define una familia de superficies de nivel en el espacio x, y, z que corresponden a superficies de igual tiempo de viaje (frente de onda). El gradiente de τ describe el vector normal al frente de onda, lo que se conoce como rayos.

Usando una notación mas compacta se pueden definir las variables espaciales como $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ y las derivadas parciales $\tau_{x_1} = p_1$,

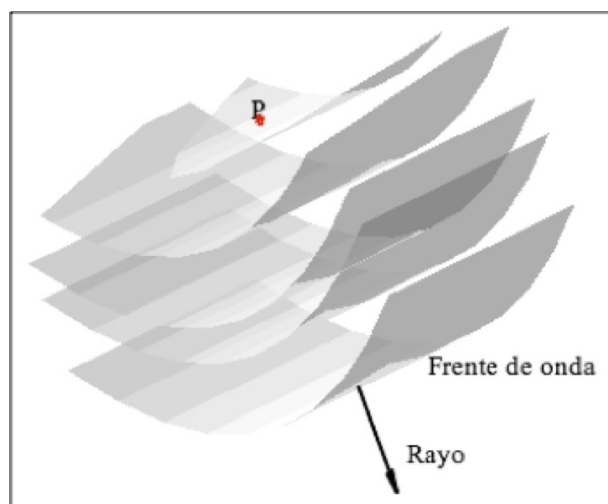


Figura 1.4: Propagación de una Perturbación sísmica

$\tau_{x_2} = p_2, \tau_{x_3} = p_3$. Por tanto la expresión para F escrita con las nuevas variables es:

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \tau, \tau_x, \tau_y, \tau_z) &= F(x_1, x_2, x_3, \tau, p_1, p_2, p_3) \\ &= F(X, T, P) = 0. \end{aligned} \quad (1.9.16)$$

Para mostrar la estructura de las ecuaciones diferenciales ordinarias se analizará qué pasa cuando un punto X se desplaza a otro punto $X + \Delta X$ en la misma superficie solución. Es claro que T y P también cambian. Basados en el hecho anterior se cumple que:

$$F(X + \Delta X, T + \Delta T, P + \Delta T) = 0.$$

Como $F = 0$ en X , se tiene que el orden lineal en el punto $X + \Delta X$ es

$$F(X + \Delta X, T + \Delta T, P + \Delta T) - F(X, T, P) = 0 \quad (1.9.17)$$

Pero,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{F(X + \Delta X, T + \Delta T, P + \Delta T) - F(X, T, P)}{\Delta x_i}$$

Luego la expresión (1.9.15) está definida como:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F}{\partial p_j} \Delta p_j + \frac{\partial F}{\partial \tau} \Delta \tau = 0 \quad (1.9.18)$$

En la expresión (1.9.18) las derivadas parciales de F son evaluadas en el punto inicial (X, T, P) y las funciones T, P dependen de X . Las perturbaciones de estas cantidades pueden ser escritas en términos de los cambios en X a través de

$$\begin{aligned} \Delta \tau &= \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial \tau}{\partial x_3} \Delta x_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^3 p_i \Delta x_i. \end{aligned} \quad (1.9.19)$$

De la misma manera se tiene que para Δp_j la estructura general se define como:

$$\Delta p_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial p_1}{\partial x_3} \Delta x_3$$

$$\Delta p_2 = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial p_2}{\partial x_3} \Delta x_3$$

$$\Delta p_3 = \frac{\partial p_3}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial p_3}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \Delta x_3$$

$$\Delta p_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \Delta x_i$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\Delta p_j &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_j} \right) \Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right) \Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \Delta x_i.
\end{aligned} \tag{1.9.20}$$

Sustituyendo las expresiones (1.9.19) y (1.9.20) en (1.9.18) se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F}{\partial p_j} \Delta p_j + \frac{\partial F}{\partial \tau} \Delta \tau = 0 \\
&(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i) + (\sum_{j=1}^3 \frac{\partial F}{\partial p_j} (\sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \Delta x_i)) + (\frac{\partial F}{\partial \tau} p_i \Delta x_i) = 0 \\
&(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i) + (\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F}{\partial p_j} \Delta x_i) + (\sum_{j=1}^3 \frac{\partial F}{\partial \tau} p_i \Delta x_i) = 0 \\
&\sum_{i=1}^3 \Delta x_i (F_{x_i} + \sum_{j=1}^3 F_{p_j} p_{i x_j} + F_{\tau} p_i) = 0 \tag{1.9.21}
\end{aligned}$$

donde $F_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, $F_{p_i} = \frac{\partial F}{\partial p_i}$, $p_{i x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$ y $F_{\tau} = \frac{\partial F}{\partial \tau}$

Dado que en la expresion (1.9.21) los Δx_i son independientes se podria tomar $\Delta x = (\Delta x_1, 0, 0)$ o $\Delta x = (0, \Delta x_2, 0)$ o $\Delta x = (0, 0, \Delta x_3)$ y la ecuacion podria satisfacerse si cada diferencial por aparte es igual a cero. Además para cualquier elección de las variables, la suma sobre los “i” igual a cero para τ y p elementos de la solucion (1.9.16). Por lo tanto se tiene que:

$$F_{x_i} + \sum_{j=1}^3 F_{p_j} p_{i x_j} + F_{\tau} p_i = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Esta expresión puede escribirse como

$$\sum_{j=1}^3 F_{p_j} p_{i x_j} + F_{\tau} p_i = -[F_{x_i} + F_{\tau} p_i], \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.9.22)$$

Si se expande la serie de la expresión (1.9.22) se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}, \frac{\partial F}{\partial p_2}, \frac{\partial F}{\partial p_3} \right) \cdot \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_1}, \frac{\partial p_i}{\partial x_2}, \frac{\partial p_i}{\partial x_3} \right) &= \nabla_p F \cdot \nabla_x p_i \\ &= -[F_{x_i} + F_{\tau} p_i]. \end{aligned} \quad (1.9.23)$$

El lado izquierdo de la expresión (1.9.23) tiene estructura de derivada direccional tomada en una dirección X , identificada con el vector $\nabla_p F$. De este resultado se desprende la posibilidad de aplicar el método de las características ya que las ecuaciones pueden no ser lineales en P pero lo son en las primeras derivadas. Este tipo de ecuaciones son llamadas Cuasi-Lineales y su solución general se presentó en la sección 1.5. En el caso de medios isótropos los rayos se definen como curvas cuyas tangentes son perpendiculares al frente de onda. Se puede realizar una descripción del rayo usando una representación paramétrica. Sea $X(\sigma) = (x_1(\sigma), x_2(\sigma), x_3(\sigma))$ el vector posición de un punto en el rayo con σ un parámetro que varía a lo largo del rayo. Como el vector $\frac{dX}{d\sigma}$ es tangente a X se establece que los vectores $\frac{dX}{d\sigma}$ y ∇_p tienen la misma dirección y por lo tanto para algún λ se tiene que:

$$\frac{dX}{d\sigma} = \lambda \Delta_p F \quad (1.9.24)$$

donde el factor de escala λ depende de la elección de σ y caracteriza la longitud relativa del vector $\frac{dX}{d\sigma}$ y el vector $\nabla_p F$. La expresión (1.9.24) determina 3 ecuaciones; además define la dirección en el espacio y la razón de cambio de X en esa dirección. Sustituyendo la expresión (1.9.24) en (1.9.23) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} \left(\frac{dX}{d\sigma} \right) \cdot \nabla_x p_i &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{dx_1}{d\sigma}, \frac{dx_2}{d\sigma}, \frac{dx_3}{d\sigma} \right) \cdot \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_1}, \frac{\partial p_i}{\partial x_2}, \frac{\partial p_i}{\partial x_3} \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\sigma}, \frac{\partial p_i}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\sigma}, \frac{\partial p_i}{\partial x_3} \frac{dx_3}{d\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \frac{dp_i}{d\sigma}.
\end{aligned} \tag{1.9.25}$$

Por tanto la expresión (1.9.23) se convierte en

$$\frac{dp_i}{d\sigma} = -\lambda [F_{x_i} + F_{\tau} p_i], \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.9.26}$$

La ecuación (1.9.26) define tres ecuaciones y ésta representa la tasa de cambio de P en la dirección X . Es necesario conocer cómo cambia τ a lo largo de la característica. Para ello el cambio total en τ es

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\sigma} + \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\sigma} + \frac{\partial \tau}{\partial x_3} \frac{dx_3}{d\sigma} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\sigma},$$

pero $\frac{dx_j}{d\sigma} = \lambda \nabla_p F$, y $\frac{\tau}{\partial x_j} = \tau_{x_j} = p_j$,

por lo tanto

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = p \cdot \lambda \nabla_p F = \sum_{j=1}^3 p_j F_{p_j}. \tag{1.9.27}$$

Retomando la ecuación Eikonal (expresión (1.9.13)) se observa que τ no aparece explícita en la ecuación y se establece que $F_{\tau} = 0$. Por tanto:

$$F(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = (\nabla \tau(x)) \cdot (\nabla \tau(x)) - \frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} = 0$$

$$F(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = (\tau_{x_1}, \tau_{x_2}, \tau_{x_3}) \cdot (\tau_{x_1}, \tau_{x_2}, \tau_{x_3}) - \frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} = 0$$

$$F(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, p_3) \cdot (p_1, p_2, p_3) - \frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} = 0$$

$$F(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} = 0, \quad (1.9.28)$$

luego

$$F_{p_j} = \frac{\partial F}{\partial p_j} = 2p_j, \quad j = 1, 2, 3$$

Retomando las expresiones (1.9.10) y (1.9.1) se define que la forma general de las ecuaciones de rayos para la ecuación Eikonal es:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\sigma} &= 2\lambda p_1, & \frac{dp_1}{d\sigma} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right) \\ \frac{dx_2}{d\sigma} &= 2\lambda p_2, & \frac{dp_2}{d\sigma} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right) \\ \frac{dx_3}{d\sigma} &= 2\lambda p_3, & \frac{dp_3}{d\sigma} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right) \\ \frac{d\tau}{d\sigma} &= \lambda \sum_{j=1}^3 2p_j^2 = \frac{2\lambda}{c(x_1, x_2, x_3)^2}. \end{aligned} \quad (1.9.29)$$

Las ecuaciones presentadas en la expresión (1.9.29) son 7 ecuaciones con 8 incógnitas si se toma a λ como una incógnita, todas ellas como función de σ . Para tener un sistema consistente que sea soluble, el número de ecuaciones e incógnitas debe ser el mismo, luego se debe buscar la forma de encontrar otra ecuación o eliminar una incógnita. En este caso λ jugará un papel importante ya que servirá de conexión entre las variables cartesianas del problema y el parametro σ .

A continuación se presentan las formas que podría tomar λ con diferentes parámetros de corrida.

1.9.3. $\lambda = \frac{1}{2}$. Parámetro de Corrida: σ

La elección de $\lambda = \frac{1}{2}$ se debe a la necesidad de eliminar el factor 2 que aparece en las ecuaciones. El resultado de manera compacta es:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{d\sigma} &= 2\lambda p_1 = 2\frac{1}{2}p_1 = p_1, \\
\frac{dx_2}{d\sigma} &= 2\lambda p_2 = 2\frac{1}{2}p_2 = p_2, \\
\frac{dx_3}{d\sigma} &= 2\lambda p_3 = 2\frac{1}{2}p_3 = p_3, \\
\frac{dX}{d\sigma} &= P,
\end{aligned}
\tag{1.9.30}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{d\sigma} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right), \\
&= - \left(\frac{c_{x_1}(x_1, x_2, x_3)}{c(x_1, x_2, x_3)^3} \right) \\
\frac{dp_2}{d\sigma} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right), \\
&= - \left(\frac{c_{x_2}(x_1, x_2, x_3)}{c(x_1, x_2, x_3)^3} \right) \\
\frac{dp_3}{d\sigma} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right), \\
&= - \left(\frac{c_{x_3}(x_1, x_2, x_3)}{c(x_1, x_2, x_3)^3} \right) \\
\frac{dP}{d\sigma} &= \frac{\nabla c(X)}{c(X)^3};
\end{aligned}
\tag{1.9.31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tau}{d\sigma} &= \lambda \sum_{j=1}^3 2p_j^2 = \frac{2\lambda}{c(x_1, x_2, x_3)^2} = \frac{2\frac{1}{2}}{c(x_1, x_2, x_3)^2} = \frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \\
\frac{\tau}{d\sigma} &= \frac{1}{c(X)^2},
\end{aligned}
\tag{1.9.32}$$

1.9.4. $\lambda = \frac{c(x)^2}{2}$. Parámetro de Corrida: Tiempo de Viaje (τ)

La elección de $\lambda = \frac{c(x)^2}{2}$ ofrece la ventaja de conocer el tiempo de viaje en cada rayo dado que se tiene la premisa de ser el parámetro de corrida. El sistema de ecuaciones (1.9.29) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{d\sigma} &= 2\lambda p_1 = 2 \frac{c(x_1, x_2, x_3)^2}{2} p_1 = c(x_1, x_2, x_3) p_1, \\
 \frac{dx_2}{d\sigma} &= 2\lambda p_2 = 2 \frac{c(x_1, x_2, x_3)^2}{2} p_2 = c(x_1, x_2, x_3) p_2, \\
 \frac{dx_3}{d\sigma} &= 2\lambda p_3 = 2 \frac{c(x_1, x_2, x_3)^2}{2} p_3 = c(x_1, x_2, x_3) p_3, \\
 \frac{\partial x}{d\sigma} &= c(X)^2 P,
 \end{aligned}
 \tag{1.9.33}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1}{d\sigma} &= \left(\frac{c(x_1, x_2, x_3)}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right) = - \left(\frac{c_{x_1}(x_1, x_2, x_3)}{c(x_1, x_2, x_3)} \right), \\
 \frac{dp_2}{d\sigma} &= \left(\frac{c(x_1, x_2, x_3)}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right) = - \left(\frac{c_{x_2}(x_1, x_2, x_3)}{c(x_1, x_2, x_3)} \right), \\
 \frac{dp_3}{d\sigma} &= \left(\frac{c(x_1, x_2, x_3)}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right) = - \left(\frac{c_{x_3}(x_1, x_2, x_3)}{c(x_1, x_2, x_3)} \right), \\
 \frac{\partial p}{d\sigma} &= - \frac{\nabla c(X)}{c(X)},
 \end{aligned}
 \tag{1.9.34}$$

$$\frac{dp_\tau}{d\sigma} = \lambda \sum_{j=1}^3 2p_j^2 = \frac{2\lambda}{c(x_1, x_2, x_3)^2} = \frac{\frac{2c(x_1, x_2, x_3)^2}{2}}{c(x_1, x_2, x_3)^2} = 1 \Rightarrow d\tau = d\sigma
 \tag{1.9.35}$$

La expresión $d\tau = d\sigma$ implica que $\tau = \sigma$. Bajo este resultado las expresiones anteriores pueden ser representadas en términos del tiempo de viaje (τ) como:

$\frac{dX}{d\tau} = c(X)^2 P = c(X) * c(X) P = c(X) \hat{p}$, definido como el vector unitario
y $\frac{dP}{d\tau} = -\frac{\nabla c(X)}{c(X)}$.

1.9.5. $\lambda = \frac{c(x)}{2}$. Parámetro de Corrida: Longitud de arco(S)

Dado que cada curva puede parametrizarse por su longitud de arco [24] al elegir $\lambda = \frac{c(X)}{2}$ y reemplazar σ por “s” las ecuaciones de rayos quedan determinadas como:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{ds} &= 2\lambda p_1 = 2 \left(\frac{c(x_1, x_2, x_3)}{2} \right) p_1 = c(x_1, x_2, x_3) p_1, \\ \frac{dx_2}{ds} &= 2\lambda p_2 = 2 \left(\frac{c(x_1, x_2, x_3)}{2} \right) p_2 = c(x_1, x_2, x_3) p_2, \\ \frac{dx_3}{ds} &= 2\lambda p_3 = 2 \left(\frac{c(x_1, x_2, x_3)}{2} \right) p_3 = c(x_1, x_2, x_3) p_3, \\ \frac{dX}{ds} &= c(X) P = \hat{P},\end{aligned}\tag{1.9.36}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{d\sigma} &= \left(\frac{c(x_1, x_2, x_3)}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right) = - \left(\frac{c_{x_1}(x_1, x_2, x_3)}{c(x_1, x_2, x_3)} \right), \\ \frac{dp_2}{d\sigma} &= \left(\frac{c(x_1, x_2, x_3)}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right) = - \left(\frac{c_{x_2}(x_1, x_2, x_3)}{c(x_1, x_2, x_3)} \right), \\ \frac{dp_3}{d\sigma} &= \left(\frac{c(x_1, x_2, x_3)}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \right) = - \left(\frac{c_{x_3}(x_1, x_2, x_3)}{c(x_1, x_2, x_3)} \right), \\ \frac{\partial p}{d\sigma} &= - \frac{\nabla c(X)}{(c(X))^2},\end{aligned}\tag{1.9.37}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{d\sigma} &= \frac{2\lambda}{c(x_1, x_2, x_3)^2} = \frac{2\lambda}{c(x_1, x_2, x_3)^2} = \frac{1}{c(x_1, x_2, x_3)^2} \\ \frac{d\tau}{ds} &= \frac{1}{c(X)}.\end{aligned}\tag{1.9.38}$$

Una visión cualitativa al interior del camino del rayo se deriva fácilmente considerando el vector de curvatura definido como: $\frac{d^2X}{ds^2} = K$. Las derivadas pueden calcularse de la expresión (1.9.36) dado que se conoce $\frac{dX}{ds}$ así:

$$K = \frac{d^2X}{ds^2} = \frac{d}{ds}(c(X)P) = c(X)\frac{dP}{ds} + P\frac{dc(X)}{ds} = c(X)\frac{dP}{ds} + P\frac{dX}{ds} \cdot \nabla c(X).$$

Usando el resultado obtenido en (1.9.37) y despejando P en la expresión (1.9.36) se obtiene:

$$K = -c(X) \cdot \frac{\nabla c(X)}{c(X)^2} + \nabla c(X) \cdot P \frac{dX}{ds} = \frac{\nabla c(X)}{c(X)} + \left(\nabla c(X) \cdot \frac{1}{c(X)} \frac{dX}{ds} \right) \frac{dX}{ds},$$

$$K = -\frac{1}{c(x)} \left(\nabla c(X) - \left(\nabla c(X) \cdot \frac{dX}{ds} \right) \frac{dX}{ds} \right). \quad (1.9.39)$$

El término $\nabla c(X) \cdot \frac{dX}{ds}$ puede interpretarse como el cambio total de la velocidad a lo largo del rayo. Además el término entre corchetes es la parte del gradiente de la velocidad de onda que es perpendicular al rayo debido a que el segundo término en el grupo elimina la parte tangencial del gradiente.

1.9.6. Teoría de Amplitud del Rayo

En la sección (1.9.2) se presentó la forma de resolver la ecuación Eikonal la cual provee información del tiempo de viaje y el comportamiento del campo de onda. En esta sección se resolverá la ecuación de transporte la cual nos dará información acerca de las amplitudes.

1.9.7. Tubo de Rayos y Jacobiano

Para resolver la ecuación de transporte

$$2\nabla\tau(x) \cdot \nabla A_j(x) + A_j(x)\nabla^2\tau(x) = 0 \quad (1.9.40)$$

es necesario considerar el concepto de tubo de rayos y la relación que existe entre el Jacobiano y las propiedades geométricas del campo de rayos, en especial la densidad del campo de rayos. El tubo de rayos está definido como el volumen de barrido del frente de onda entre rayos

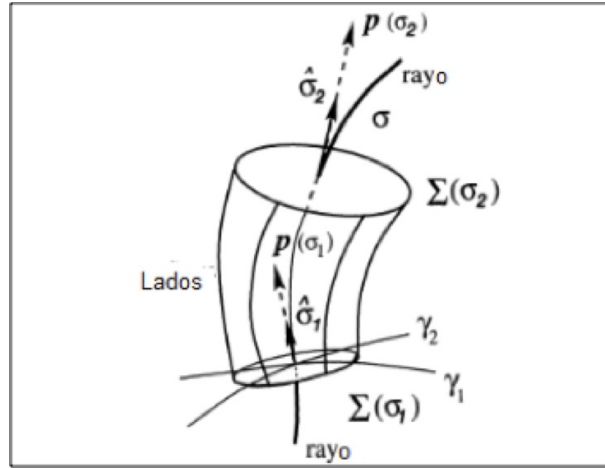


Figura 1.5: Esquema General del Tubo de Rayos [6].

vecinos que difieren muy poco en sus condiciones iniciales [11]. La figura 1.5 presenta un esquema general del tubo de rayos.

En términos generales el frente de onda estará parametrizado por dos variables γ_1 y γ_2 que son llamadas parámetros del rayo; los elementos que definen la sección transversal del tubo de rayos están identificados como $\Sigma(\sigma_1)$ y $\Sigma(\sigma_2)$ con vectores unitarios $\hat{\sigma}_1$ y $\hat{\sigma}_2$ respectivamente. La coordenada σ es parámetro de corrida a lo largo del rayo y los vectores $p(\sigma_1)$ y $p(\sigma_2)$ son perpendiculares a las superficies respectivas para σ constante. Al considerar el volumen formado por el tubo de rayos se establece que:

$$\int_{\text{Tubo de Rayos}} \nabla \cdot N \, dV = 0 = \int_{\text{Superficie del tubo}} N \cdot dS \quad (1.9.41)$$

Considere la ecuación de transporte:

$$2\nabla\tau(x) \cdot \nabla A(x) + A(x)\nabla^2\tau(x) = 0$$

Para construir la forma de la expresión que conduzca a la aplicación del teorema de la divergencia, se multiplica la ecuación de transporte por un factor $A(x_1, x_2, x_3) = A(x)$, es decir

$$2A(x) \left(\frac{\partial \tau(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_3} \right) \cdot \left(\frac{\partial A(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial A(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial A(x)}{\partial x_3} \right) \\ + A^2(x) \left(\frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_3^2} \right) = 0.$$

$$2A(x) \left(\frac{\partial \tau(x)}{\partial x_1} \frac{\partial A(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_2} \frac{\partial A(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_3} \frac{\partial A(x)}{\partial x_3} \right) \\ + A^2(x) \left(\frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_3^2} \right) = 0. \quad (1.9.42)$$

Realizando el producto y ordenando términos se obtiene

$$2A(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_1} \frac{\partial A(x)}{\partial x_1} + 2A(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_2} \frac{\partial A(x)}{\partial x_2} + 2A(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_3} \frac{\partial A(x)}{\partial x_3} \\ + A^2(x) \frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_1^2} + A^2(x) \frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_2^2} \\ + A^2(x) \frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_3^2} = 0,$$

$$2A(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_1} \frac{\partial A(x)}{\partial x_1} + A^2(x) \frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_1^2} + 2A(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_2} \frac{\partial A(x)}{\partial x_2} \\ + A^2(x) \frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_2^2} + 2A(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_3} \frac{\partial A(x)}{\partial x_3} + A^2(x) \frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_3^2} = 0 \quad (1.9.43)$$

El término general $2 \sum_i A(x) \left(\frac{\partial \tau(x)}{\partial x_i} \frac{\partial A(x)}{\partial x_i} \right) + A^2(x) \frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_i^2}$, $i = 1, 2, 3$ se puede expresar como $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A^2(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_i} \right)$ y por lo tanto se obtiene

la expresion

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(A^2(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(A^2(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(A^2(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_3} \right) = 0,$$

ó de forma equivalente

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot \left(\left(A^2(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_1} \right), \left(A^2(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_2} \right), \left(A^2(x) \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_3} \right) \right) = 0,$$

$$\nabla \cdot (A^2(x) \nabla \tau(x)) = 0. \quad (1.9.44)$$

Sea D el volumen del tubo de rayos acotado por una superficie definida como ∂D . Al aplicar el teorema de la divergencia a la expresión (1.9.44) se obtiene:

$$\int_D \nabla \cdot (A^2(x) \nabla \tau(x)) dV = \int_{\partial D} (A^2(x) \nabla \tau(x)) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1.9.45)$$

donde \vec{n} es un vector normal que apunta hacia fuera de la frontera ∂D . La frontera del tubo de rayos estará compuesta por los rayos que forman los lados del tubo y las capas superior e inferior identificadas por $\sum(\sigma_1)$ y $\sum(\sigma_2)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (A^2(x) \nabla \tau(x)) \cdot \vec{n} dS &= \int_{lados} (A^2(x) \nabla \tau(x)) \cdot \vec{n} dS \\ + \int_{\sum(\sigma_2)} (A^2(x) \nabla \tau(x)) \cdot \vec{n} dS_2 &+ \int_{\sum(\sigma_1)} (A^2(x) \nabla \tau(x)) \cdot \vec{n} dS_1 = 0 \end{aligned}$$

Dado que la superficie lateral se compone de rayos, el vector normal a esta superficie es perpendicular al rayo, por lo tanto $\int_{lados} (A^2(x) \nabla \tau(x)) \cdot \vec{n} dS = 0$. Para el caso de la superficie identificada por $\sum(\sigma_1)$ el vector normal apunta hacia el interior del tubo y en la aplicación del teorema de la divergencia es necesario que éste apunte "fuera" de la superficie. Para solucionar este inconveniente se realiza un

cambio de signo estableciéndolo como negativo. En este orden de ideas la expresión estaría definida como:

$$\int_{\Sigma(\sigma_2)} (A^2(x) \nabla \tau(x)) \cdot \hat{\sigma}_2 dS_2 - \int_{\Sigma(\sigma_1)} (A^2(x) \nabla \tau(x)) \cdot \hat{\sigma}_1 dS_1 = 0 \quad (1.9.46)$$

Al considerar el cambio $\nabla \tau(x) = p$ se obtiene

$$\int_{\Sigma(\sigma_2)} (A^2(x) p(x)) \cdot \hat{\sigma}_2 dS_2 - \int_{\Sigma(\sigma_1)} (A^2(x) p(x)) \cdot \hat{\sigma}_1 dS_1 = 0 \quad (1.9.47)$$

Considere la ecuación paramétrica $x = x(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)$. Si γ_1, γ_2 son fijos pero constantes y el tiempo de viaje, $\sigma = \tau$, es variable entonces x representa la ecuación paramétrica de un rayo específico.

Para el caso en que $\sigma = \tau$ es fijo y γ_1, γ_2 varían, entonces la ecuación paramétrica se convierte en la ecuación del frente de onda. Es claro que cada rayo pasa a través de la superficie $\Sigma(\sigma_1)$. Si al introducir las coordenadas γ_1, γ_2 y parametrizar la superficie $\Sigma(\sigma_1)$ cada rayo puede ser descrito de la forma paramétrica $x = x(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)$. Al establecer el rango de valores de (γ_1, γ_2) como $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)$ en la superficie $\Sigma(\sigma_1)$, se observa que el mismo conjunto de valores llenará el dominio D cuando σ varía entre σ_1 y σ_2 por tanto se puede emplear el mismo rango $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)$ con parámetros (γ_1, γ_2) para describir la superficie $\Sigma(\sigma_2)$ si solo se evalúa

$$x = x(\sigma_2, \gamma_1, \gamma_2)$$

En sismología es usual encontrar regiones donde los rayos no penetran (zonas de sombra) o eventos donde más de un rayo pasa a través de cada punto. Para este tipo de situaciones el Jacobiano de una transformación desempeña un papel importante. Si el Jacobiano está definido y no desaparece en la región D, el campo de rayos es llamado regular, de otra forma se llamara singular. Al ser σ un parámetro de corrida a lo largo del rayo, el Jacobiano dependera no sólo de (γ_1, γ_2) sino además de σ . Si se considera en la expresión (1.9.47) la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas de rayos se define el Jacobiano de la forma

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)} = \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right|_{\sigma} = \det Q(x)$$

con $Q(x)$ la matriz de transformación tomada para σ . Por tanto la expresión (1.9.47) en términos del nuevo sistema de coordenadas está definido por:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)} (A^2(x) p(x)) \cdot \hat{\sigma}_2 \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right|_{\Sigma(\sigma_2)} d\gamma_1 d\gamma_2 \\ & - \int_{\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)} (A^2(x) p(x)) \cdot \hat{\sigma}_1 \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right|_{\Sigma(\sigma_1)} d\gamma_1 d\gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

donde el vector del producto cruz $\left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right|_{\Sigma(\sigma_i)}$ para $i = 1, 2$, es normal a la superficie de integración. Como el vector $\frac{dx}{d\sigma} = p$ apunta en dirección normal al igual que los vectores $\hat{\sigma}_1$ y $\hat{\sigma}_2$ entonces para un mismo punto $x = x(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)$, con σ constante, se combina el producto punto y producto escalar.

$$p \cdot \hat{\sigma}_i \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right| = |p| \left| \hat{\sigma}_i \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right| \right| \cos(\theta), \quad i = 1, 2$$

con θ el ángulo entre los vectores p y $\hat{\sigma}_i \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right|$. Como los vectores tienen la misma dirección el ángulo entre ellos es cero, luego

$$\begin{aligned} p \cdot \hat{\sigma}_i \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right| &= |p| \left| \hat{\sigma}_i \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right| \right| \\ &= |p| |\hat{\sigma}_i| \left| \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right| \right| \\ &= |p| |\hat{\sigma}_i| \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right| \\ &= |p| \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right| \end{aligned} \tag{1.9.48}$$

ya que $|\hat{\sigma}_i| = 1$. Por tanto

$$\begin{aligned}
 p \cdot \hat{\sigma}_i \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right| &= |p| \left| \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right| \\
 &= \left| p \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right| \\
 &= \left| \frac{dx}{d\sigma} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right|_{\sigma}
 \end{aligned} \tag{1.9.49}$$

y así

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)} A^2(\sigma_2) \left| \frac{dx}{d\sigma} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right|(\sigma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \\
 &- \int_{\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)} A^2(\sigma_1) \left| \frac{dx}{d\sigma} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right|(\sigma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = 0
 \end{aligned} \tag{1.9.50}$$

El producto mixto que aparece en la integral, para el caso de tres dimensiones, se conoce como Jacobiano del Rayo

$$J_{3D}(\sigma) = \left[\frac{dx}{d\sigma} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right](\sigma) \tag{1.9.51}$$

Para $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)$ una sección transversal arbitraria, puede tomarse un elemento diferencial (γ_1, γ_2) lo que define que los integrandos

$$A^2(\sigma_2) \left| \frac{dx}{d\sigma} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right|(\sigma_2), A^2(\sigma_1) \left| \frac{dx}{d\sigma} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right|(\sigma_1)$$

son iguales puntualmente, por lo tanto se cumple que, para el caso en tres dimensiones

$$A^2(\sigma_2) |J_{3D}(\sigma_2)| = A^2(\sigma_1) |J_{3D}(\sigma_1)| \tag{1.9.52}$$

Al representar las condiciones iniciales del parametro de corrida σ_1 como σ_0 y el valor general del mismo σ_2 como σ , la expresion (1.9.52) desarrollada para el cuadrado de la amplitud esta definida como

$$A^2(\sigma) = A^2(\sigma_0) \frac{J_{3D}(\sigma_0)}{J_{3D}(\sigma)} \quad (1.9.53)$$

De manera análoga las expresiones del cuadrado de la amplitud y el Jacobiano del rayo en dos dimensiones son

$$A^2(\sigma) = A^2(\sigma_0) \frac{J_{2D}(\sigma_0)}{J_{2D}(\sigma)} \quad (1.9.54)$$

$$J_{2D}(\sigma) = \left[\frac{dx}{d\sigma} \times \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} \right] (\sigma). \quad (1.9.55)$$

1.9.8. Ecuación de Transporte como una Ecuación Diferencial Ordinaria

La solución en series involucra los coeficientes de amplitud $A(X)$. Para determinarlos se desarrolla un procedimiento, con ayuda de las ecuaciones de rayos, que transforma la ecuación de transporte en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el parámetro de corrida σ . Retomando la ecuación de transporte y multiplicándola por el factor $A(X)$ se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} 2\nabla\tau(x) \cdot \nabla A(x) + A(x)^2(x) \nabla^2\tau(x) &= 0 \\ 2\nabla\tau(x) \cdot \nabla A(x) &= -A(x)^2 \nabla^2\tau(x) \end{aligned} \quad (1.9.56)$$

$$\begin{aligned} 2A(x) \left(\frac{\partial\tau(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial\tau(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial\tau(x)}{\partial x_3} \right) \cdot \left(\frac{\partial A(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial A(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial A(x)}{\partial x_3} \right) &= \\ -A^2(x) \nabla^2\tau(x) \end{aligned} \quad (1.9.57)$$

La expresión $\frac{dX}{d\sigma} = P$, con $P = \nabla\tau(x)$, resulta al aplicar el método de las características a la ecuación Eikonal para cuando $\lambda = \frac{1}{2}$. Este

término permite transformar la expresión (1.9.57) como

$$2A(x)(p_1, p_2, p_3) \cdot \left(\frac{\partial A(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial A(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial A(x)}{\partial x_3} \right) = -A^2(x) \nabla^2 \tau(x),$$

$$2A(x) \left(p_1 \frac{\partial A(x)}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial A(x)}{\partial x_2} + p_3 \frac{\partial A(x)}{\partial x_3} \right) = -A^2(x) \nabla^2 \tau(x),$$

$$2A(x) \left(\frac{dx_1}{d\sigma} \frac{\partial A(x)}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{d\sigma} \frac{\partial A(x)}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{d\sigma} \frac{\partial A(x)}{\partial x_3} \right) = -A^2(x) \nabla^2 \tau(x). \quad (1.9.58)$$

El lado izquierdo de la expresión (1.9.58) es equivalente a $\frac{dA^2(x)}{d\sigma}$, luego

$$\frac{dA^2(x)}{d\sigma} = -A^2(x) \nabla^2 \tau(x). \quad (1.9.59)$$

Al considerar la ecuación paramétrica del rayo $x = x(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)$ donde (γ_1, γ_2) son fijos y σ variable, se tendrá dependencia del parámetro de corrida σ y por tanto la expresión (1.9.59) toma la forma

$$\frac{dA^2(\sigma)}{d\sigma} = -A^2(\sigma) \nabla^2 \tau(\sigma). \quad (1.9.60)$$

Cuando se conoce la solución del rayo para τ , el término $\nabla^2 \tau(\sigma)$ es una función conocida de σ y es una ecuación diferencial ordinaria en σ para A^2 .

Una forma alterna de construir la derivada se hace con base al resultado obtenido en la expresión (1.9.53). Al tomar la derivada en ambos miembros respecto a σ

$$\frac{dA^2(\sigma)}{d\sigma} = A^2(\sigma_0) J(\sigma_0) \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{J(\sigma)} \right). \quad (1.9.61)$$

Al reemplazar el término $A^2(\sigma) J(\sigma) = A^2(\sigma_0) J(\sigma_0)$ en la expresión (1.9.61), se obtiene

$$\frac{dA^2(\sigma)}{d\sigma} = A^2(\sigma) J(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{J(\sigma)} \right). \quad (1.9.62)$$

Por tanto la expresión (1.9.62) cambia a

$$\frac{dA^2(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{A^2(\sigma)}{J(\sigma)} \frac{d}{d\sigma}(J(\sigma)) \quad (1.9.63)$$

En la expresión (1.9.63) el término $\frac{1}{J(\sigma)} \frac{d}{d\sigma}(J(\sigma))$ tiene la forma de la derivada del logaritmo natural, luego $\frac{1}{J(\sigma)} \frac{d}{d\sigma}(J(\sigma)) = \frac{d}{d\sigma} \ln(J(\sigma))$, Por tanto la expresión (1.9.63) toma la forma

$$\frac{dA^2(\sigma)}{d\sigma} = -A^2(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \ln(J(\sigma)). \quad (1.9.64)$$

Al comparar las expresiones (1.9.64) y (1.9.60) se sugiere una relación entre $J(\sigma)$ y $\nabla^2 \tau(\sigma)$ de la forma

$$\frac{dA^2(\sigma)}{d\sigma} = -A^2(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \ln(J(\sigma)) = -A^2(\sigma) \nabla^2 \tau(\sigma),$$

$$\frac{d}{d\sigma} \ln(J(\sigma)) = \nabla^2 \tau(\sigma). \quad (1.9.65)$$

Se realizará la demostración del resultado 1.9.65 en tres dimensiones diferenciando el determinante del Jacobiano ya que es un proceso poco conocido.

1.9.9. Diferenciación del Determinante

Se presenta la diferenciación del determinante "M" para el caso específico de una matriz "A" 3x3 con los elementos definidos por μ_{ij} , $i = j = 1, 2, 3$ que son funciones de una variable independiente denotada por σ .

Sea M el determinante de la matriz definido por:

$$A = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}, \det(A) = M = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix}$$

$$M = \mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32}$$

Agrupando términos semejantes se obtiene:

$$M = \mu_{11} [\mu_{22}\mu_{33} - \mu_{23}\mu_{32}] + \mu_{12} [\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}\mu_{33}] + \mu_{13} [\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{22}\mu_{31}].$$

Por tanto:

$$M = \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^3 \mu_{11}\mu_{2j}\mu_{3k}\epsilon_{1jk} + \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^3 \mu_{12}\mu_{2j}\mu_{3k}\epsilon_{2jk} + \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^3 \mu_{13}\mu_{2j}\mu_{3k}\epsilon_{3jk}$$

Luego

$$M = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ k=1}}^3 \mu_{1i}\mu_{2j}\mu_{3k}\epsilon_{ijk}$$

$$\text{Donde, } \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk = 123, \quad 231, \quad 312 \\ -1, & ijk = 132, \quad 213, \quad 321 \\ 0, & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Como μ_{ij} es función de la variable independiente σ , la derivada del determinante respecto a la variable independiente queda definida como:

$$\frac{dM}{d\sigma} = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ k=1}}^3 \frac{d\mu_{1i}}{d\sigma} \mu_{2j}\mu_{3k}\epsilon_{ijk} + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ k=1}}^3 \frac{d\mu_{2j}}{d\sigma} \mu_{1i}\mu_{3k}\epsilon_{ijk} + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ k=1}}^3 \frac{d\mu_{3k}}{d\sigma} \mu_{1i}\mu_{2j}\epsilon_{ijk} \right)$$

Se observa que la derivada del determinante es la suma de tres determinantes. En cada determinante, una columna de la matriz $[\mu_{ij}]$ ha sido modificado por su derivada. En términos generales la fórmula de derivación podría finalizarse de esta forma pero para el propósito de este estudio se requiere una presentación diferente. Retomando la expresión general del determinante M

$$M = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ k=1}}^3 \mu_{1i} \mu_{2j} \mu_{3k} \epsilon_{ijk}$$

Al escribir el determinante M en términos de los cofactores se obtiene

$$M = \sum_{i=1}^3 \mu_{1i} \text{Cof}(\mu_{1i}) = \sum_{j=1}^3 \mu_{2j} \text{Cof}(\mu_{2j}) = \sum_{k=1}^3 \mu_{3k} \text{Cof}(\mu_{3k})$$

Donde:

$$\text{Cof}(\mu_{1i}) = \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^3 \mu_{2j} \mu_{3k} \epsilon_{ijk}$$

$$\text{Cof}(\mu_{2j}) = \sum_{\substack{i=1 \\ k=1}}^3 \mu_{1i} \mu_{3k} \epsilon_{ijk}$$

$$\text{Cof}(\mu_{3k}) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^3 \mu_{1i} \mu_{2j} \epsilon_{ijk}$$

Al escribir los cofactores rotando cíclicamente los índices de tal forma que todos se ubiquen en el índice “i” se presenta:

$$\text{Cof}(\mu_{1i}) = \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^3 \mu_{2j} \mu_{3k} \epsilon_{ijk}$$

$$\text{Cof}(\mu_{2i}) = \sum_{\substack{k=1 \\ j=1}}^3 \mu_{1k} \mu_{3i} \epsilon_{ijk}$$

$$\text{Cof}(\mu_{3i}) = \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^3 \mu_{1j} \mu_{2k} \epsilon_{ijk}$$

Luego la expresión $(\frac{dM}{d\sigma})$ en términos de los cofactores esta definida como:

$$\frac{dM}{d\sigma} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{d\mu_{1i}}{d\sigma} \text{Cof}(\mu_{1i}) + \sum_{j=1}^3 \frac{d\mu_{2j}}{d\sigma} \text{Cof}(\mu_{2j}) + \sum_{k=1}^3 \frac{d\mu_{3k}}{d\sigma} \text{Cof}(\mu_{3k}) \right)$$

Al mover los índices “j” y “k” en $\sum_{j=1}^3 \frac{d\mu_{2j}}{d\sigma} \mu_{1i} \mu_{3k} \epsilon_{ijk}$ y $\sum_{k=1}^3 \frac{d\mu_{3k}}{d\sigma} \text{Cof}(\mu_{3k})$ para que la sumatoria sea en “i” se obtiene

$$\frac{dM}{d\sigma} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{d\mu_{1i}}{d\sigma} \text{Cof}(\mu_{1i}) + \sum_{i=1}^3 \frac{d\mu_{2i}}{d\sigma} \text{Cof}(\mu_{2i}) + \sum_{i=1}^3 \frac{d\mu_{3i}}{d\sigma} \text{Cof}(\mu_{3i}) \right)$$

Por tanto

$$\frac{dM}{d\sigma} = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ q=1}}^3 \frac{d\mu_{qi}}{d\sigma} \text{Cof}(\mu_{qi}) \right)$$

Retomando la expresión

$$M = \sum_{i=1}^3 \mu_{1i} \text{Cof}(\mu_{1i})$$

Considere el caso cuando $\mu_{1i} = \mu_{2i}$, es decir

$$M = \sum_{i=1}^3 \mu_{2i} \text{Cof}(\mu_{1i})$$

Luego

$$M = \mu_{21} \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^3 \mu_{2j} \mu_{3k} \epsilon_{ijk} + \mu_{22} \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^3 \mu_{2j} \mu_{3k} \epsilon_{ijk} + \mu_{23} \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^3 \mu_{2j} \mu_{3k} \epsilon_{ijk}$$

Expandiendo las series y teniendo en cuenta la estructura de ϵ_{ijk} se obtiene

$$M = \mu_{21}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{22}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{23}\mu_{21}\mu_{32} \\ - \mu_{23}\mu_{22}\mu_{31} - \mu_{22}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{21}\mu_{23}\mu_{32}$$

Luego

$$M = 0$$

Es claro que en cada caso, cuando $\mu_{1i} = \mu_{2i}$ ó $\mu_{1i} = \mu_{3i}$, se calcula el determinante de una matriz donde hay igualdad entre dos filas y por tanto es bien conocido que este determinante es igual a cero. Luego la expresión $\sum_{i=1}^3 \mu_{1i} \text{Cof}(\mu_{1i})$ puede ser escrita como

$$\sum_{i=1}^3 \mu_{pi} \text{Cof}(\mu_{1i}) = M\delta_{p1}$$

De forma similar si se aplica la propiedad a los casos restantes se obtiene una expresión general

$$\sum_{i=1}^3 \mu_{pi} \text{Cof}(\mu_{qi}) = M\delta_{pq}, \quad p, q = 1, 2, 3 \quad (1.9.66)$$

En la expresión (1.9.66) el término δ_{pq} , se conoce como función Delta de Kronecker. Es una función de dos variables, por lo general sólo de enteros positivos, y está definida por

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$$

Considere la expresión

$$v_{iq} = \frac{\text{Cof}(\mu_{qi})}{M}, \quad i, p, q = 1, 2, 3$$

Luego

$$\sum_{i=1}^3 \mu_{pi} v_{iq} = \delta_{pq}, \quad p, q = 1, 2, 3 \quad (1.9.67)$$

Recuerde que “M” es el determinante de una Matriz “A” de orden 3x3 con elementos μ_{ij} , por tanto la inversa de la matriz “A” (siempre y cuando “A” sea invertible), denotada por A^{-1} , puede calcularse como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{M} (\text{cof}(A))^T = \frac{1}{M} (\text{Cof}(\mu_{qi}))^T$$

Luego

$$\text{Cof}(\mu_{qi}) = M(A^{-1})^T = M v_{iq}$$

Así, los cofactores presentados en la ecuación anterior son los elementos de la transpuesta de la inversa de la matriz con elementos μ_{ij} multiplicado por el determinante original M. Por lo tanto

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{d\sigma} = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ q=1}}^3 \frac{d\mu_{qi}}{d\sigma} v_{iq} \right)$$

1.9.10. Verificación de la expresión (1.9.65)

Para verificar la expresión 1.9.65 sea aplicará el procedimiento descrito en el numeral anterior tomando:

$$J_{3D}(\sigma) = M, \quad \sigma = \gamma_3, \quad \mu_{qi} = \frac{\partial x_q}{\partial \gamma_i}$$

Además al hacer uso de la función Delta de Kronecker se puede identificar el término v_{iq} , es decir

$$\delta_{pq} = \sum_{i=1}^3 \mu_{pi} v_{iq} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_p}{\partial \gamma_i} v_{iq} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_p}{\partial \gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_q}$$

Luego $v_{iq} = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_q}$

Considerando la expresión y haciendo uso de la terminología que aplica al problema se tiene:

$$\frac{1}{J_{3D}} \frac{dJ_{3D}}{d\sigma} = \left(\sum_{q=1}^3 \frac{\partial}{\partial \gamma_3} \left(\frac{\partial x_q}{\partial \gamma_i} \right) \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_q} \right) = \left(\sum_{q=1}^3 \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \left(\frac{\partial x_q}{\partial \gamma_3} \right) \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_q} \right)$$

Al definir $\gamma_3 = \sigma$ y usar la ecuación de rayos cuando $\lambda = \frac{1}{2}$ se obtiene

$$\frac{\partial x_q}{\partial \gamma_3} = \frac{dx_q}{d\gamma_3} = \frac{dx_q}{d\sigma} = P_q = \frac{\partial \tau}{\partial x_q}$$

Luego

$$\frac{1}{J_{3D}} \frac{dJ_{3D}}{d\sigma} = \left(\sum_{q=1}^3 \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_q} \right) \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_q} \right)$$

En la expresión anterior la suma sobre “i” es la regla de la cadena respecto a x_q , es decir

$$\frac{1}{J_{3D}} \frac{dJ_{3D}}{d\sigma} = \sum_{q=1}^3 \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_q} \right) \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_q} + \sum_{q=1}^3 \frac{\partial}{\partial \gamma_2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_q} \right) \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_q} + \sum_{q=1}^3 \frac{\partial}{\partial \gamma_3} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_q} \right) \frac{\partial \gamma_3}{\partial x_q}$$

Luego

$$\frac{1}{J_{3D}} \frac{dJ_{3D}}{d\sigma} = \sum_{q=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_q} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_q} \right) = \sum_{q=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial (x_q)^2} \right) = \nabla^2 \tau(\sigma)$$

Por tanto queda demostrado que

$$\frac{d}{d\sigma} \ln(J(\sigma)) = \frac{1}{J_{3D}} \frac{dJ_{3D}}{d\sigma} = \nabla^2 \tau(\sigma)$$

1.9.11. Determinación de Datos Iniciales para las Ecuaciones de Rayos

Dada la ecuación de Helmholtz, un conjunto de condiciones de frontera o conjunto de condiciones de radiación para problemas no acotados, se podría encontrar una solución única para el campo de onda u . Cuando la función de forzamiento, o función fuente, de la ecuación de Helmholtz es un impulso, como

$$Lu = \left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{v(x)^2} \right] u = -\delta(x - x_s).$$

entonces la solución es un resultado especial llamado función de Green. Para problemas con coeficientes constantes, como en el caso de velocidad constante, la función de Green puede encontrarse analíticamente para problemas con dominios no acotados usando el método de la transformada de Fourier. En geofísica, la velocidad de la onda no es constante y por tanto no es usual encontrar expresiones analíticas para la función de Green. Como primera medida se podría tener una representación aproximada del perfil de velocidades de la onda mediante algún método como por ejemplo, tomar el perfil de velocidad de la onda usando análisis de velocidad sísmica ó medidas de velocidad obtenidas de registros de pozos.

Con el fin de resolver completamente las ecuaciones para el tiempo de viaje se hace necesario de datos iniciales para las ecuaciones de rayos. Análogamente se requiere de esta información para resolver la ecuación de transporte ya que hasta el momento se desconoce el valor de las constantes que surgen al integrar la expresión $A^2(\sigma_0)J_{3D}(\sigma)$.

Para obtener estos datos se hará uso de las funciones de Green en dos y tres dimensiones.

1.9.12. Datos Iniciales para las Funciones de Green en 3D

Suponga que se tiene un punto fuente $\delta(x - x_0)$ para la ecuación de Helmholtz. Es necesario generar datos iniciales para las ecuaciones de

rayos y por tanto es lógico asumir que estos emanan desde un punto en la superficie; lo que significa que el área transversal del tubo de rayos se vuelve cero en este límite y por tanto se espera que $J_{3D}(\sigma)$, $J_{2D}(\sigma)$ sean cero en este punto y las soluciones de (1.9.53) y (1.9.54) sean singulares. Luego en el punto fuente se presenta la posición inicial $x = x_0$ con tiempo de viaje $\tau = 0$ para $\sigma = 0$

Considere las expresiones de las ecuaciones de rayos:

$$\frac{dX}{d\sigma} = P, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{c(X)^2}, \quad \frac{dP}{d\sigma} = -\frac{\nabla c(X)}{c(X)^3}$$

Se observa que las direcciones de los rayos, en particular la dirección inicial, esta dada por P . Se propone permitir que los vectores iniciales cubran un rango sobre todas las direcciones angulares y su longitud debe cumplir que:

$$P(x_0) = |P(x_0)| = \frac{1}{c(x_0)}.$$

El vector posición $\vec{P}(x_0)$ en términos de las coordenadas esféricas se define como:

$$\vec{P}(x_0) = P(x_0) \hat{P},$$

donde

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \text{sen}\phi\text{cos}\theta \\ \text{sen}\phi\text{sen}\theta \\ \text{cos}\phi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad \text{y} \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Dado que θ y ϕ varían en esos rangos, la dirección inicial del rayo cubre la esfera unitaria completa de todas las posibles direcciones. Cada par fijo (θ, ϕ) determina un único rayo a través de su valor inicial, luego θ y ϕ son una elección particular para γ_1 y γ_2 aunque estas elecciones no son únicas.

Ahora se requiere determinar las constantes en la solución de la ecuación de transporte para la amplitud. Este valor inicial podría

depender sólo del medio en la vecindad del punto fuente x_0 . Así, incluso para medios heterogéneos, la constante que se busca podría ser la misma como para aquel problema en el cual $c(x) = c(x_0)$.

Como primera aproximación se determinará la constante suponiendo un medio homogéneo. En este caso, para un medio de velocidad constante, la expresión analítica de la función de Green en 3D es

$$g(x, x_0, \omega) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} e^{i\omega|x-x_0|}.$$

Significa que en un medio de velocidad constante, la amplitud $A(x)$ está definida como: $A(x) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|}$ la cual podría comportarse igual en el límite del punto fuente incluso para medios heterogéneos.

Para un medio con velocidad de onda constante se define que el vector \vec{P} es constante. Al resolver la primera ecuación de rayos para una distancia x desde la fuente como función de σ se tiene:

$$\frac{dX}{d\sigma} = P,$$

$$\int_{x_0}^x dX = \int_0^\sigma P d\beta = \int_0^\sigma P(x_0) \hat{P} d\beta \Rightarrow x - x_0 = P(x_0) \hat{P} \sigma.$$

lo que significa que

$$|x - x_0| = P(x_0) \sigma.$$

Al reemplazar este resultado en la expresión $A(x) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|}$ se obtiene

$$A(\sigma) = \frac{1}{4\pi P(x_0) \sigma}.$$

El resultado expuesto anteriormente representa una solución al problema de velocidad constante en términos de σ . Se observa que esta solución exhibe un comportamiento singular para cuando $\sigma = 0$. El objetivo es usar este resultado para determinar un valor de $A^2(\sigma_0) J_{3D}(\sigma)$.

En el momento el desarrollo ha sugerido una forma de solución para medio homogéneo, pero se quiere que la solución sea válida para todo $\sigma > 0$ porque se desea que esta misma constante sea de utilidad para el punto fuente en problemas no homogéneos. Se podría tomar un valor inicial $\sigma_0 = 0$ pero se presenta un comportamiento singular de la solución en este punto imposibilitando una simple evaluación. De allí que la elección de los datos iniciales para el punto fuente sean tomados de forma adecuada. Con base a lo anterior considere la expresión:

$$A^2(\sigma) = A^2(\sigma_0) \frac{J_{3D}(\sigma_0)}{J_{3D}(\sigma)}$$

Suponga que se buscan soluciones de la forma

$$A(\sigma) = \frac{K}{\sqrt{J_{3D}(\sigma)}}, \quad \sigma > 0$$

Para determinar este limite se calcula $J_{3D}(\sigma_0)$ y se combina con la expresión $A(\sigma) = \frac{1}{4\pi P(x_0)\sigma}$. Retomando el resultado general $x - x_0 = P(x_0)\hat{P}\sigma$, considere la distancia desde la fuente hacia los puntos x_1, x_2, x_3 representados en coordenadas esféricas como

$$x_1 - x_{10} = P(x_0)\sigma \text{sen}\phi \text{cos}\theta$$

$$x_2 - x_{20} = P(x_0)\sigma \text{sen}\phi \text{sen}\theta$$

$$x_3 - x_{30} = P(x_0)\sigma \text{cos}\phi$$

Calculando $J_{3D}(\sigma)$ y evaluándolo en σ_0 se obtiene

$$J_{3D}(\sigma) = \begin{vmatrix} P(x_0)\text{sen}\phi\text{cos}\theta & P(x_0)\sigma\text{cos}\phi\text{cos}\theta & -P(x_0)\sigma\text{sen}\phi\text{sen}\theta \\ P(x_0)\text{sen}\phi\text{sen}\theta & P(x_0)\sigma\text{cos}\phi\text{sen}\theta & P(x_0)\sigma\text{sen}\phi\text{cos}\theta \\ P(x_0)\text{cos}\phi & -P(x_0)\sigma\text{sen}\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$J_{3D}(\sigma) = P(x_0)^3\sigma^2\text{sen}\phi \left[\text{sen}^2\phi(\text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta) + \text{cos}^2\phi \right]$$

$$J_{3D}(\sigma) = P(x_0)^3 \sigma^2 \text{sen}\phi [\text{sen}^2\phi + \text{cos}^2\phi]$$

$$J_{3D}(\sigma) = P(x_0)^3 \sigma^2 \text{sen}\phi$$

Al evaluar J_{3D} en σ_0 se obtiene la primera expresión buscada

$$J_{3D}(\sigma) = P(x_0)^3 \sigma_0^2 \text{sen}\phi$$

Al reescribir la expresión como

$$A^2(\sigma) J_{3D}(\sigma) = A^2(\sigma_0) J_{3D}(\sigma_0)$$

y evaluando $A(\sigma) = \frac{1}{4\pi P(x_0)\sigma}$ en σ_0 se obtiene

$$A^2(\sigma) J_{3D}(\sigma) = \left(\frac{1}{4\pi P(x_0)\sigma_0} \right)^2 P(x_0)^3 \sigma_0^2 \text{sen}\phi = \frac{1}{(4\pi)^2} P(x_0) \text{sen}\phi$$

Se observa que para el caso donde la velocidad es constante el producto $A^2(\sigma) J_{3D}(\sigma)$ no depende de σ_0 , luego el valor de $K = \lim_{\sigma_0 \rightarrow 0} A^2(\sigma_0) J_{3D}(\sigma_0)$ puede ser hallado y por tanto la solución de la ecuación de transporte en términos del Jacobiano es

$$A^2(\sigma) = \frac{\frac{1}{(4\pi)^2} P(x_0) \text{sen}\phi}{J_{3D}(\sigma)} \Rightarrow A(\sigma) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{P(x_0) \text{sen}\phi}{J_{3D}(\sigma)}}$$

El resultado obtenido en la expresión podría ser utilizado para problemas con perfil de onda heterogénea. Al hacer uso de las series de potencias cerca de $\sigma = 0$ se podría confirmar que la elección de la constante es la correcta. Así, si se tuviese la solución del problema no homogéneo para los rayos, tiempo de viaje y amplitud, se podría escribir el orden inicial o WKBJ de la función de Green en 3D como

$$g(x, x_0, \omega) \sim \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{P(x_0) \text{sen}\phi}{J_{3D}(\sigma)}} e^{i\omega\tau(x, x_0)}$$

$$g(x, x_0, \omega) \sim \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{P(x_0) \text{sen}\phi}{J_{3D}(\sigma)}} e^{[i\omega \int_{x_0}^x \frac{1}{c^2(x(\beta))} d\beta]}$$

Este resultado surge de seleccionar los parámetros γ_1 y γ_2 como el rango sobre todas las direcciones angulares usando coordenadas esféricas. Otra selección de los parámetros podría arrojar una constante de integración y Jacobiano diferentes.

1.9.13. Datos Iniciales para las Funciones de Green en 2D

Se realiza un procedimiento similar para determinar el orden inicial o WKBJ de la función de Green como se realizó en el caso 3D.

Para determinar los valores iniciales de la solución teórica de la función de Green en 2D, se parte del hecho que los rayos son generados desde un punto fuente en la superficie donde $x = x_0$ en $\sigma = 0$. El tiempo de viaje se toma cero, $\tau = 0$, para $\sigma = 0$; por tanto se requiere el valor inicial de P para determinar la dirección del rayo. Para permitir rayos en todas las direcciones se toman aquellos valores iniciales donde

$$\vec{P}(x_0) = P(x_0) \hat{P},$$

con

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \text{sen}\theta \\ \text{cos}\theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Al igual que en caso 3D, el Jacobiano es cero en el punto inicial y por tanto se determinará una constante apropiada para la solución de la amplitud. En la búsqueda de dicha constante se asume una solución con velocidad de la onda constante y se argumenta que este valor será correcto para la solución cuando la velocidad de la onda es variable. En este caso para un medio de velocidad constante la expresión analítica de la función de Green en 2D es

$$g(x, x_0, \omega) = \frac{i \operatorname{sgn}(\omega)}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega |x - x_0|}{c(x_0)} \right).$$

Al considerar la forma asintótica de la función de Hankel en la función de Green queda expresada como

$$g(x, x_0, \omega) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c(x_0)}{2\pi |\omega| |x - x_0|}} e^{\frac{i\omega|x-x_0|}{c(x_0)} + i \operatorname{sgn}(\omega) \frac{\pi}{4}}$$

Como en el caso anterior, al resolver la primera ecuación de rayos para una distancia x desde la fuente como función de σ se tiene: $|x - x_0| = P(x_0) \sigma$

Luego

$$g(x(\sigma), x_0, \omega) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c(x_0)}{2\pi |\omega| P(x_0) \sigma}} e^{\frac{i\omega P(x_0)}{c(x_0)} + i \operatorname{sgn}(\omega) \frac{\pi}{4}}.$$

La longitud de los vectores iniciales esta definida por

$P(x_0) = |P(x_0)| = \frac{1}{c(x_0)}$, luego la expresión anterior queda definida como

$$g(x(\sigma), x_0, \omega) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi |\omega| P^2(x_0) \sigma}} e^{i\omega P^2(x_0) + i \operatorname{sgn}(\omega) \frac{\pi}{4}}.$$

Al organizar la expresión para identificar términos de interés según la forma WKB de la solución asintótica se obtiene

$$g(x(\sigma), x_0, \omega) \sim \left(\frac{e^{i \operatorname{sgn}(\omega) \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\omega|}} \right) \left(e^{i\omega P^2(x_0)} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi P^2(x_0) \sigma}} \right),$$

donde el término $\frac{e^{i \operatorname{sgn}(\omega) \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\omega|}}$ podría interpretarse como una generalización del factor ω^β y la amplitud estaría definida por

$$A(x(\sigma_0)) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi P^2(x_0) \sigma}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{P^2(x_0) \sigma}} \right).$$

Se realiza un análisis similar cuando se buscan soluciones de la forma

$$A(\sigma) = \frac{K}{\sqrt{J_{2D}(\sigma)}}, \quad \sigma > 0,$$

con K una constante respecto a σ que debe ser determinada. Así

$$K = \lim_{\sigma_0 \rightarrow 0} A^2(\sigma_0) J_{2D}(\sigma_0)$$

Cuando la velocidad de la onda es constante el valor de P es constante. Los valores iniciales del vector son escritos como

$$\begin{aligned} x_1 - x_{10} &= P(x_0) \sigma \cos\theta \\ x_2 - x_{20} &= P(x_0) \sigma \sin\theta \end{aligned}$$

Luego el Jacobiano en 2D se calcula como

$$J_{2D}(\sigma) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \sigma} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P(x_0) \cos\theta & -P(x_0) \sigma \sin\theta \\ P(x_0) \sin\theta & P(x_0) \sigma \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$J_{2D}(\sigma) = P^2(x_0) \sigma \cos^2\theta + P^2(x_0) \sigma \sin^2\theta = P^2(x_0) \sigma$$

Comparando términos se concluye que los valores de K y $A(\sigma)$ para medios heterogéneos son

$$K = \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \right), \quad A(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{J_{2D}(\sigma)}}$$

Por lo tanto la solución asintótica de primer orden ó función de Green en 2D esta definida como

$$g(x, x_0, \omega) \sim A(x, x_0) e^{i\omega\tau(x, x_0)}$$

$$g(x, x_0, \omega) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi |\omega| J_{2D}(\sigma)}} e^{(i\omega \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left(\frac{1}{c^2(x(\rho))} \right) d\rho + i \operatorname{sgn}(\omega) \frac{\pi}{4})}$$

La construcción de la función de green para la ecuación de onda en 2D y 3D, pueden ser revisadas en [32].

1.10. Método de Elementos Finitos

El método de los elementos finitos es un método numérico empleado para resolver problemas de ingeniería y física matemática de forma aproximada donde la distribución del campo en el dominio de estudio no presenta soluciones analíticas exactas. Para mostrar una forma detallada de la aplicación del método de elementos finitos se presenta una visión general del método de Galerkin.

1.10.1. Generalidades del Método de Galerkin

Considere el problema variacional de valor en la frontera (VBVP) de encontrar una función $u \in V$ que satisfaga

$$a(u, v) = \langle \ell, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in V \quad (1.10.1)$$

con V un subespacio de un espacio de *Hilbert*, $a(u, v)$ una forma bilineal en V . La dificultad en tratar de resolver (1.10.1) está en el hecho que V es un espacio de dimensión infinita con el resultado que no es posible desarrollar un método práctico para encontrar la solución.

Suponga que en lugar de trabajar en el espacio V se eligen funciones linealmente independientes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N$ en V y se define el espacio de dimensión finita V^h subespacio de V , es decir

$$V^h \subseteq V, \quad \text{gen}\{\varphi_i\}_{i=1}^N = V^h$$

El parámetro h está entre cero y uno. La magnitud de este indica que tan cerca está el espacio V^h de V . Si el número N de funciones es grande el parámetro h tiende a ser pequeño. En el caso para el cual $N \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ se podría elegir $\{\varphi_i\}$ de tal forma que V^h se aproxime a V .

Una vez se defina V^h , el problema (1.10.1) estará puesto en V^h en lugar de V y por tanto se requiere encontrar una función $u_h \in V^h$ tal que se satisfaga

$$a(u_h, v_h) = \langle \ell, v_h \rangle, \quad \text{para todo } v_h \in V^h \quad (1.10.2)$$

Con el fin de resolver para u_h se observa que u_h, v_h pueden ser combinación lineal de las funciones bases $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ de V^h , así que

$$u_h = \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i, \quad v_h = \sum_{j=1}^N d_j \varphi_j$$

Como v_h es arbitrario entonces los coeficientes d_j también lo serán. Además como a es una forma bilineal y ℓ es lineal entonces

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) C_i d_j = \sum_{j=1}^n \langle \ell, \varphi_j \rangle d_j$$

$$\sum_{j=1}^N d_j \left(\sum_{i=1}^N K_{ij} C_i - F_j \right) = 0, \quad (1.10.3)$$

donde

$K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ y $F_j = \langle \ell, \varphi_j \rangle$.

En la práctica los elementos K_{ij} , F_j pueden ser evaluados ya que las funciones base φ_i son conocidos al igual que a y ℓ .

Como los coeficientes d_j son arbitrarios se tiene entonces que el término al interior del paréntesis es cero y por tanto el problema se reduce en resolver un sistema simultáneo de ecuaciones lineales

$$\sum_{i=1}^N K_{ij} C_i - F_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

o de forma compacta

$$k^T C = F$$

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales se puede obtener la solución aproximada u_h usando la expresión (1.10.2).

La desventaja del método de *Galerkin* radica en que el problema de construir una base $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ de tal manera que V^h se aproxime a V cuando $N \rightarrow \infty$ puede ser difícil y más aún si el dominio presenta una forma irregular. De aquí surge la importancia en la aplicación del método de elementos finitos.

En situaciones prácticas la determinación de las funciones base usando el método de Galerkin pueden ser demasiado complejo especialmente cuando el dominio no tiene una forma simple. El método de elementos finitos proporciona un método sistemático para construir las funciones bases en formas arbitrarias. La principal característica del método es que las funciones base son polinomios a trozos que son distintos de cero en pequeñas regiones del dominio de tal forma que el cálculo se realiza de forma modular.

1.10.2. Generalidades del Método de Elementos Finitos para Problemas de Segundo Orden

Suponga que se tiene un (VBVP) de la forma: hallar $u \in V$ que satisfaga

$$a(u, v) = \langle \ell, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in V$$

Para un problema de valor en la frontera (BVP) el espacio de funciones admisibles V consiste de todas aquellas funciones $H^1(\Omega)$ que satisfagan las condiciones de frontera.

A continuación se describe el método general para construir las funciones base $\{N\}_{i=1}^G$ asociadas al método de los elementos finitos.

1.10.3. Construcción de la Malla de Elementos Finitos

Se considera el dominio Ω y se divide en un número finito E de subdominios $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_E$ llamado **Elemento Finito**. Estos elementos no se superponen y cubren todo el dominio Ω de tal forma que

$$\Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset, \quad \text{para } e \neq f,$$

$$\bigcup_{e=1}^E \overline{\Omega}_e = \overline{\Omega}.$$

Como aproximación válida se supone que el dominio Ω es poligonal si este es un subconjunto de R^2 y su frontera, denotada por Γ , se compone de segmentos rectos. Además se requiere que cada lado de la frontera de un elemento en R^2 sea cualquier parte de Γ ó un lado de otro elemento. Con estos supuestos no es difícil mostrar que todo el dominio puede cubrirse exactamente por elementos poligonales.

1.10.4. Puntos Nodales

Los puntos nodales están localizados al menos en los vértices de los elementos. Cuando se requiere una mejor aproximación se incluye mayor cantidad de nodos, por ejemplo en el punto medio de los lados de los elementos.

En cualquier caso hay un total de G nodos con vector posición los vectores x_1, x_2, \dots, x_G . El conjunto de elementos y nodos que componen el dominio Ω es llamado **Malla de Elemento Finito**.

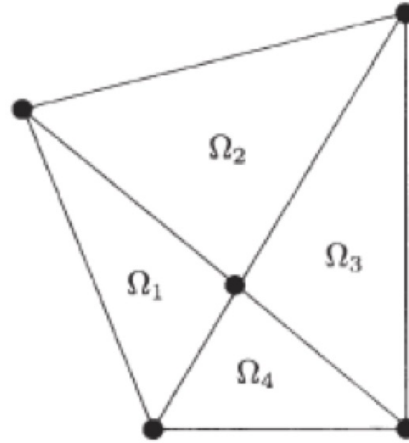


Figura 1.6: Dominio Poligonal y Puntos Nodales [30].

1.10.5. Construcción de las Funciones Base

Para problemas de segundo orden es necesario que las funciones base definidas sobre el espacio V^h deben ser funciones $H^1(\Omega)$ que satisfagan las condiciones de frontera.

Las funciones base requeridas deben cumplir las siguientes propiedades:

1. Las funciones N_i son acotadas y continuas ($N_i \in C(\bar{\Omega})$).
2. Hay un total de G funciones base, que es una para cada nodo y cada función N_i es distinta de cero solamente en aquellos elementos que están conectados al nodo i , $N_i(x)|_{\Omega_e} = 0$
3. Las funciones N_i son iguales a uno (1) en el nodo i e iguales a cero (0) en los otros nodos $N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
4. La restricción $N_i^{(e)}$ de N_i a Ω_e es un polinomio $N_i(x_j)|_{\Omega_e} = N_i^{(e)}$, $N_i^{(e)} \in P_K(\Omega_e)$ para algún $K \geq 1$. Donde $P_K(\Omega_e)$ es el espacio de polinomios a lo sumo de grado K en Ω_e .

De las propiedades 3 y 4 la función básica local, denotada por $N_i(x)^{(e)}$, tendrá la propiedad

$$N_i(x_j)^{(e)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donde i, j recorren todos los nodos en Ω_e . Estas funciones base podrían considerarse como el resultado de la unión o “remiendo” de funciones base locales asociadas al nodo i .

Retomando la expresión

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^G b_i N_i(x)$$

y particularizando el resultado en un nodo j se tiene que

$$v_h(x_j) = \sum_{i=1}^G b_i N_i(x_j) = b_j$$

lo que indica que el coeficiente b_j es el valor de v_h en el nodo j .

Para presentar la estructura de la solución aproximada, considere la forma bilineal $a(N_i, N_j)$ representada por una integral sobre el dominio Ω

$$a(N_i, N_j) = \int_{\Omega} F(N_i, N_j) dx$$

La integral presentada puede verse como la suma de integrales cada Ω_e , luego la expresión se transforma en

$$a(N_i, N_j) = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} F(N_i, N_j) dx \quad a(N_i, N_j) = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} F(N_i^{(e)}, N_j^{(e)}) dx,$$

$$a(N_i, N_j) = \sum_{e=1}^E a^{(e)}(N_i^{(e)}, N_j^{(e)}).$$

Al realizar un procedimiento similar con la expresión $\langle \ell, N_j \rangle$ se obtiene

$$\langle \ell, N_j \rangle = \sum_{e=1}^E \langle \ell^{(e)}, N_j^{(e)} \rangle ,$$

luego, las expresiones para la matriz K y el vector F se pueden expresar como

$$K = \sum_{e=1}^E k^{(e)} , \quad F = \sum_{e=1}^E F^{(e)} ,$$

donde

$$K_{ij}^{(e)} = a^{(e)}(N_i^{(e)}, N_j^{(e)}),$$

$$F_j^{(e)} = \langle \ell^{(e)}, N_j^{(e)} \rangle .$$

La matriz K es simétrica ya que cada fila solo tiene como elementos no nulos los correspondientes a los nodos del propio elemento y los contiguos. Esta matriz se conoce como **Matriz de Rigidez** y el vector F , **Vector de Carga**. Dado que $N_i = 0$ en los elementos que no tienen como nodo i , se obtienen que $K_{ij}^{(e)} = 0$ si los nodos i, j no pertenecen a Ω_e . Con este resultado el requerimiento computacional se disminuye ya que la matriz K tiene una estructura en banda con elementos no nulos alrededor de la diagonal principal.

En términos generales se presentan tres dificultades asociadas a los problemas de dimensiones superiores.

1. **Tamaño del sistema.** Conforme la dimensión crece, el sistema lineal así lo hace con el fin de alcanzar el nivel de exactitud deseado. Por ejemplo si se busca un nivel de exactitud del 1% , y sabemos que el error está acotado por h^2 , con $\frac{1}{N}$, y N el número de grados de libertad en cada dirección. Entonces para alcanzar la exactitud del 1% se requiere de $N = 10$ dando un error de $\frac{1}{N^2} = 1$. Así en una dimensión se requieren 10 elementos dando una matriz de $10 * 10$. Para el caso en dos dimensiones, para una exactitud del 1% , se requiere de $N = 10$ y una matriz de $100 * 100$.
2. **Generación de la malla.** La generación de la malla puede ser más compleja en dos dimensiones especialmente si el dominio computacional es complicado. La ventaja de este método radica en la versatilidad para acoplar la triangulación al dominio de trabajo.
3. **Aproximación del espacio.** No sólo el uso polinomios continuos a tramos como funciones son efectivos para cierto tipo de problemas. Esquemas tales como métodos de elementos finitos generalizados donde se usan funciones base específicas para el modelo en estudio y otros elementos son acoplados para el problema físico en particular.

CAPÍTULO 2

Ecuación de Helmholtz en 2D

Físicamente el problema de *Helmholtz* está usualmente definido en un dominio exterior con la condición de radiación de *Sommerfeld* cumpliéndose en el infinito. Computacionalmente este problema con dominio externo se resuelve introduciendo un dominio acotado Ω con frontera artificial Γ y se imponen ciertas condiciones sobre la frontera de tal forma que reflexiones no físicas pueden eliminarse o minimizarse, véase [7], [15].

2.1. Formulación Débil de la Ecuación de Helmholtz en 2D

Considere la ecuación de onda con término fuente la función delta de Dirac:

$$\Delta u(x; t) - \frac{1}{c(x)^2} u_{tt}(x; t) = -\delta(x - x_0) \delta(t) \quad , \quad x \in \Omega \quad , \quad t > 0$$

donde $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ es el operador de *Laplace*, u el campo de onda, $c(x)$ representa la velocidad de propagación y t el tiempo.

Al aplicar la transformada de *Fourier* en la variable temporal se obtiene

$$\Delta u(x; \omega) + \frac{\omega^2}{c(x)^2} u(x, \omega) = -\delta(x - x_0), \quad (2.1.1)$$

donde ω es la frecuencia angular. La expresión (2.1.1) se conoce como la ecuación de onda reducida ó ecuación de *Helmholtz*. Una forma general de presentar la ecuación (2.1.1) es

$$\Delta u(x; \omega) + k^2 u(x, \omega) = -\delta(x - x_0), \quad (2.1.2)$$

donde $k^2 = \frac{\omega^2}{c(x)^2}$ se conoce como número de onda. Para $k > 0$ la ecuación describe la variación en el espacio de la propagación lineal de ondas con numero de onda k .

Para presentar la formulación débil se considera una función de prueba $v(x; \omega) \in H^1(\Omega)$ que cumple las mismas condiciones de frontera de $u(x; \omega)$ y se multiplica la expresión (2.1.1) por esta función

$$v \nabla^2 u + v \frac{\omega^2}{c(x)^2} u = -v (\delta(x - x_0)).$$

Integrando sobre el dominio Ω se obtiene

$$\int_{\Omega} v \nabla^2 u \, dX + \int_{\Omega} v \frac{\omega^2}{c(x)^2} u \, dX = - \int_{\Omega} v (\delta(x - x_0)) \, dX.$$

Al aplicar la identidad de Green la expresión anterior toma la forma

$$\int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dX + \int_{\Omega} \frac{\omega^2}{c(x)^2} v u \, dX = - \int_{\Omega} v (\delta(x - x_0)) \, dX.$$

Se ordena la expresión obteniendo

$$\int_{\Omega} \left(\nabla v \cdot \nabla u - \frac{\omega^2}{c(x)^2} v u \right) dX = \int_{\Omega} (v \delta(x - x_0)) dX + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS. \quad (2.1.3)$$

La expresión (2.1.3) representa una forma general de la formulación débil donde no se especifica el tipo de condición de frontera.

La forma débil del problema (2.1.3) con condiciones de frontera de *Dirichlet* es: encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \left(\nabla v \cdot \nabla u - \frac{\omega^2}{c(x)^2} vu \right) dX = \int_{\Omega} (v\delta(x - x_0)) dX, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.1.4)$$

y con condiciones de frontera absorbentes es: hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\nabla v \cdot \nabla u - \frac{\omega^2}{c(x)^2} vu \right) dX - \int_{\Gamma} \left(\frac{\omega^2}{c(x)^2} \alpha vu \right) dS = \\ \int_{\Omega} (v\delta(x - x_0)) dX + \int_{\Gamma} gvdS, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Considere la formulación variacional (2.1.4). Para desarrollar la estructura de la matriz de rigidez y vector de carga se considera un conjunto de funciones linealmente independiente, $\{N_i\}_{i=1}^G$, que forman una base para V^h . Luego la forma de u y v en términos de las funciones linealmente independientes es

$$u = \sum_{i=1}^G C_i N_i(x), \quad v = \sum_{j=1}^G d_j N_j(x)$$

donde los coeficientes C_i son constantes y deben ser determinados. Al reemplazar la forma de u en la formulación variacional se obtiene

$$\sum_{i=1}^G \int_{\Omega} \left(\nabla v \cdot \nabla N_i - \frac{\omega^2}{c(x)^2} v N_i \right) C_i dX = \int_{\Omega} (v\delta(x - x_0)) dX, \quad (2.1.6)$$

La expresión (2.1.6) se mantiene para todo $v \in V^h$, en particular lo hará para $v = N_j(x)$ con $j=1, 2, \dots, G$, luego

$$\sum_{i=1}^G \int_{\Omega} \left(\nabla N_j \cdot \nabla N_i - \frac{\omega^2}{c(x)^2} N_j N_i \right) C_i dX = \int_{\Omega} (N_j \delta(x - x_0)) dX, \quad (2.1.7)$$

ó de forma equivalente

$$KC = F, \quad (2.1.8)$$

donde

$$K = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1G} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{G1} & \cdots & a_{GG} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_G \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_G \end{pmatrix},$$

con

$$a_{i,j} = \int_{\Omega} \left(\nabla N_j \cdot \nabla N_i - \frac{\omega^2}{c(x)^2} N_j N_i \right) dX,$$

$$f_j = \int_{\Omega} (N_j \delta(x - x_0)) dX.$$

donde K es la matriz de rigidez y F el vector de carga. Aplicando un procedimiento similar se puede obtener las expresiones de $a_{i,j}$ y f_j para la expresión (2.1.5) definidas como

$$a_{i,j} = \left(\int_{\Omega} \left(\nabla N_j \cdot \nabla N_i - \frac{\omega^2}{c(x)^2} N_j N_i \right) dX - \int_{\Gamma} \left(\frac{\omega^2}{c(x)^2} \alpha N_j N_i \right) dS \right),$$

$$f_j = \int_{\Omega} (N_j \delta(x - x_0)) dX + \int_{\Gamma} g N_j dS.$$

2.2. Existencia y Unicidad de las Soluciones

Para determinar la existencia y unicidad de los problemas (2.1.4) y (2.1.5) se presenta el teoremas de *Lax Milgram* y el teorema alternativo de *Fredholm*, véase [25], [27].

Teorema de Lax-Milgram. Suponga que a es una forma sesquilineal, $a : V \times V \rightarrow C$, definida en un espacio de *Hilbert* V y satisfice

1. *Continuidad:*

$$\exists M > 0 : |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V,$$

2. *Elipticidad:*

$$\exists \alpha > 0 : \alpha \|u\|_V^2 \leq |a(u, u)|, \quad \forall u \in V,$$

y sea f un funcional lineal acotado definido en V . Entonces existe un único elemento $u_0 \in V$ tal que

$$a(v, u_0) = (v, f), \quad \forall v \in V. \quad (2.2.1)$$

Note que f está asociado con el funcional lineal (\cdot, f) . Si se toma el conjugado a ambos lados de (2.2.1) se puede afirmar que el problema dual

$$a^*(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

tiene solución única. El problema $a(u, v) = f(u, v)$ tiene solución única para todos los funcionales antilineales $f \in V^*$.

Teorema (*alternativo de Fredholm*). Sea $\varphi : H \rightarrow H$ un operador lineal compacto y H un espacio de *Hilbert*. Entonces:

1. La ecuación $(\varphi + \psi)u = \lambda$ tiene una única solución para cada $\lambda \in H$.
2. La ecuación $(\varphi + \psi)u = 0$ tiene solución $u \neq 0$.

Se presenta una demostración corta de existencia y unicidad del problema (2.1.4). La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ definida por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\nabla v \cdot \nabla u - \frac{\omega^2}{c(x)^2} vu \right) dX,$$

satisface

$$a(u, v) \geq |u|_1^2 - k^2 \|u\|_0^1, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (2.2.2)$$

con $k^2 = \frac{\omega^2}{c(x)^2}$. Para definir el operador φ , se requiere de una nueva forma bilineal. Considere la forma coerciva, interpretada como una propiedad V-elíptica, de la forma

$$a_{\varphi}(u, v) = a(u, v) + k^2(u, v). \quad (2.2.3)$$

La nueva forma bilineal definida en (2.2.3) satisface

$$a_\varphi(u, v) \geq \|u\|_1^2.$$

Con la ayuda de la nueva forma bilineal, $a_\varphi(u, v)$, el problema (2.1.4) puede escribirse como

$$a_\varphi(u, v) - k^2(u, v) = (\delta, v). \quad (2.2.4)$$

Usando el numeral 1 del teorema alternativo de *Fredholm* se sigue que $u = \lambda - \varphi u$. Usando esta expresión en el primer término de la ecuación (2.2.4)

$$a_\varphi(\lambda - \varphi u, v) - k^2(u, v) = (\delta, v).$$

Por tanto se define φ como: para $u \in L^2(\Omega)$ encontrar $\varphi u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a_\varphi(\varphi u, v) = -k^2(u, v), \forall v \in H^1(\Omega),$$

y λ como: encontrar $\lambda u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a_\varphi(\lambda u, v) = (\delta, v), \forall v \in H^1(\Omega).$$

Como la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva y acotada entonces el problema, definiendo φ y λ , tiene única solución según el teorema de *Lax-Milgram*.

2.3. Estimación del Error en la norma L^2

El problema de estudio se caracteriza por tener una frontera suave y el término fuente $\delta(x - x_0) \in L^2(\Omega)$. Bajo estas dos condiciones se sabe que la formulación débil tiene única solución y la norma de energía $\|v\|_a$ es equivalente a $\|v\|_1$ en H^1 . Además la solución $u(x) \in H^2$. En el método de los elementos finitos V^h es el espacio de las funciones lineales a tramos sobre la partición T_h y u_h es la solución del elemento finito.

Una estimación de la norma en $L^2(\Omega)$ se obtiene de manera similar que la norma en H^1 . Suponga que $kh < 1$, luego se puede demostrar la estabilidad discreta como

$$\|u_h - u_I\| \leq ck \|u - u_I\|, \quad (2.3.1)$$

con c independiente de kh . Así

$$\|u - u_I\| \leq (1 + k) \|u - u_I\|.$$

Insertando al lado derecho la forma de estimación para el polinomio interpolador

$$\|u - u_h\| \leq (1 + Ck) \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 |u|_2,$$

para una solución oscilatoria $\frac{|u|_2}{\|u\|} = k^2$ y por tanto el error relativo puede estimarse como

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\|u - u_h\|}{\|u\|} < ck(kh)^2 \quad (2.3.2)$$

donde c es constante y no depende de k , h . La estimación (2.3.2) es dispersiva y se cumple también en un rango asintótico. Esto indica que el error crece linealmente con k conforme h se hace pequeño [21].

2.4. Estabilidad

El siguiente desarrollo se concentra en presentar las generalidades de la estabilidad del sistema para grandes números de onda. A medida que el número de onda incrementa el operador de *Helmholtz* pierde elipticidad con la cual se deben forzar drásticas condiciones en la malla para asegurar la estabilidad y evitar un fenómeno de polución. Este requerimiento de malla debe garantizar una aproximación de la onda medible para las funciones de los elementos finitos. Un análisis matemático de la conexión entre el valor del tamaño de malla y el número de onda k es dado en [1]. En términos generales se presenta una explicación del efecto en los rangos asintótico y pre-asintótico donde se establece que la malla debe satisfacer la restricción $k^2h \ll 1$ y el

error del elemento finito es proporcional al error de aproximación. Antes que el tamaño de malla requerido sea cumplido, una estimación inicial puede generarse para kh pequeño.

Teorema: Sea $u \in V$ una solución débil del problema (2.1.2) y sea $u \in V^h$ su aproximación de elementos finitos. Sea h el tamaño de malla tal que

$$C_s(k^2 + \sigma)h^2 \ll 1, \quad (2.4.1)$$

entonces existe una constante $\alpha > 0$, independiente de k, σ, h tal que

$$a(u - u_h, u - u_h) > \alpha \|u - u_h\|_1^2. \quad (2.4.2)$$

El requerimiento del tamaño de malla lo suficientemente pequeño surge del resultado del teorema anterior. La constante de estabilidad C_s puede tomarse como $C_s = 1 + \frac{k^2}{\sigma}$. Luego el tamaño de malla debería tomarse de tal forma que término $\frac{k^3 h}{\sigma} \ll 1$. En el peor de los casos el tamaño de malla está relacionado con la tercera potencia de k .

El teorema anterior da una conexión entre la dependencia del número de onda y el tamaño de malla.

Una forma de evaluar la estabilidad del sistema puede orientarse en realizar el estudio de la variación de los valores de la matriz A . Con el fin de determinar la dependencia continua de los datos se presentan las generalidades del método de localización de valores propios mediante el método de *Gershgorin*.

Definición Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \times n$ (real o compleja) y sea r_i la suma de los valores absolutos de las entradas fuera de la diagonal en el i -ésimo renglón de A ; esto es, $r_i = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$. El i -ésimo disco de *Gershgorin* en el disco circular D_i en el plano complejo con centro a_{ii} y radio r_i .

Teorema del disco de Gershgorin: Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \times n$ (real o compleja). Entonces todo valor propio de A está contenida dentro de un disco de *Gershgorin*.

Para la aplicación del teorema se deben determinar los valores propios de la matriz junto con los radios de los discos asociados; es decir

$$|\lambda_i - a_{ii}| \leq r(A)_i,$$

luego

$$\frac{|\lambda_i - a_{ii}|}{r(A)_i} \leq 1. \quad (2.4.3)$$

Para un error establecido, ya sea en la medición de los datos, en la transcripción de los mismos o por cualquier razón que hubiera afectado a los mismos, se puede analizar la dependencia continua de los datos mediante la expresión 2.4.3.

CAPÍTULO 3

Formulación del Problema y Simulación Numérica

Se estudia la propagación acústica de la onda en una configuración geométrica definida y se presenta el problema de valor en la frontera que se desea estudiar. Se asume un medio homogéneo e isotrópico, es decir, las funciones de velocidad y densidad se asumen constantes (Figura 3.1). Para contrastar el campo conocido con el método de los elementos finitos se considera la región de estudio libre de medios dispersantes, por tanto la ecuación de *Helmholtz* se cumple en todo Ω . Cuando se estudian problemas no acotados es usual introducir una frontera artificial descomponiendo el problema original en dos regiones. En la región no acotada se incluyen anisotropías, no linealidades, etc. La región acotada, en la que se busca la solución numérica, se usa una función en la frontera que sirva como puente entre la solución numérica y la analítica. El problema está formulado como

$$\Delta u(x; \omega) + \frac{\omega^2}{c(x)^2} u(x, \omega) = -\delta(x - x_0), \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$u = G. \quad \forall x \in \Gamma.$$

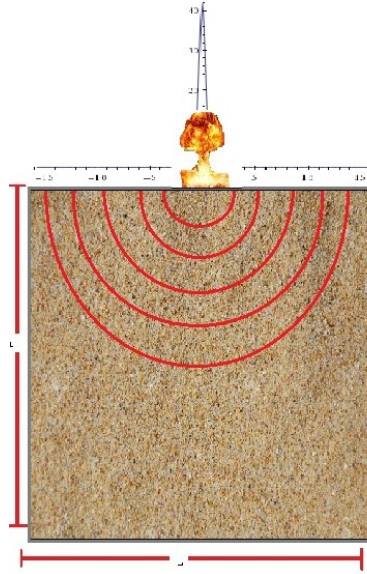


Figura 3.1: Modelo

3.0.1. Solución Analítica

Con el fin de comparar los resultados que se obtengan con el método de los elementos finitos, se emplea una solución analítica conocida. Dada la ecuación de *Helmholtz* con velocidad de onda constante, $c(x)=c$ y un conjunto de condiciones de frontera o condiciones de radiación en dominios no acotados se puede encontrar una solución única para el campo u . Cuando la función de forzamiento o fuente de la ecuación de *Helmholtz* es un impulso, la solución puede encontrarse usando la función de Green. Luego la expresión (1.6.3) definida por

$$G(x, x_0, \omega) = \frac{i \operatorname{sgn}(\omega)}{4} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega |x - x_0|}{c(x_0)}\right),$$

,donde $H_0^{(1)}$ es la función de *Hankel* de orden cero, es aquella que servirá para determinar el error en las aproximaciones realizadas.

3.0.2. Simulación Numérica

Consideraciones

Se realizan pruebas numéricas para determinar el campo acústico considerando:

- Dominio acotado $\Omega = (0, 1000) \times (0, 1000)$
- Medio homogéneo con velocidad $c = 1600 \text{ m/s}$
- Frecuencia (ω). Los datos sísmicos están limitados por banda y el ancho de banda de la mayoría de datos sísmicos contienen información útil entre 5 Hz y 100 Hz . Un amplio ancho de banda es muy importante porque cuanto mayor sea este mejor será la imagen del subsuelo [29]. Este ancho de banda es generado con la adquisición de datos sísmicos en intervalos de tiempo regular. Por lo general se presentan periodos de muestreo de 1ms , 2ms , 4ms , 8ms . Para cada periodo se calcula la frecuencia de muestreo como $f = \frac{1}{T}$, con T el periodo de muestreo. Por ejemplo para un periodo de 1ms se presentará una frecuencia de 1000Hz . Cuando se presenta un muestreo inadecuado de la señal, se genera ambigüedad entre los datos sísmicos y el ruido. A este efecto se le conoce como *aliasing*. Para identificar este fenómeno se requiere conocer la máxima frecuencia f_N a partir de la cual se producirá *aliasing*. La frecuencia f_N es conocida como frecuencia de *Nyquist* y es determinada como: $f_N = \frac{1}{2T}$. Por encima de la frecuencia f_N la señal sísmica con frecuencias más altas se reconstruyen en forma de señal sísmica con bajas frecuencias. Es importante tener en cuenta que la frecuencia de muestreo del sistema de grabación no tiene nada que ver con las frecuencias nativas que se observan. Resulta que la mayoría de los sistemas de adquisición sísmica son seguros con $f_N = 125\text{Hz}$, porque las fuentes sísmicas como camiones Vibro y dinamita no envían altas frecuencias muy lejos; la tierra filtra y los atenúa antes de que lleguen al receptor. En las siguientes simulaciones se estudia el comportamiento de la onda con frecuencias $\omega(\text{Hz}) = 0.5, 3, 10, 40, 80, 100$.
- Función fuente: Se emplea la función delta de *Dirac* como impluso ubicado en una de las fronteras.

- Condiciones de frontera: En la simulación se emplea la condición de frontera implícita $u = G$, con G la solución mediante función de *Green*.
- Para la aplicación del método de los elementos finitos se emplea una malla triangular y polinomios de segundo grado como funciones base. Se emplea la condición restringida para $kh < 1$ con h el tamaño de la malla .
- Para el desarrollo de las simulaciones se utiliza un equipo i5, con procesador de 2.3 GHz, y 8 GB de memoria Ram.

Las pruebas se desarrollaron empleando el programa computacional *FreeFem++* [19]. Se complementan algunos resultados mediante la ayuda de *Matlab*. Las figuras obtenidas se agruparon con el fin de presentar los resultados para cada frecuencia variando el refinamiento de la malla. Para $i = 1, 12$ se presenta el orden definido:

- figura ai : corresponde a la malla obtenida para la frecuencia y el refinamiento de la misma.
- figura bi : gráfico de la solución mediante funciones de *Green*.
- figura ci : solución aproximada empleando el método de los elementos finitos.
- figura di : presenta el error relativo de la solución aproximada respecto a la solución mediante funciones de *Green*. La estimación del error se realiza aplicando la condición (2.3.1).

Comportamiento de las soluciones variando frecuencia

Dentro de las ventajas que posee el programa computacional *FreeFem++* se tiene la opción de adaptar la malla según la singularidad del campo de onda. Esta función genera que el tamaño de la malla no sea único. Los valores del tamaño de malla obtenidos seán referidos al máximo valor del elemento encontrado. La figura (3.2) presenta el tamaño del máximo elemento y el número de aristas. Es claro que a mayor cantidad de aristas se obtiene un elemento de menor tamaño. Para observar la incidencia de la cantidad de elementos en la región de estudio se presentan los resultados en las diferentes frecuencias adaptando la malla de elementos para un rango de malla de 164 y 8, 74.

1. $\omega = 0,5$: Se realiza simulación refinando la malla observando errores relativos puntuales que se mueven entre -10 y 10 . En la mayoría de dominio el ajuste de la aproximación es adecuado con errores relativos cercanos a cero (0).
 2. $\omega = 3$: Sin el refinamiento a simple vista el gráfico de la solución real y la aproximación parecen ser similares. El error relativo presenta un rango de variación en la parte media de la región con valores de $1 * 10^6$ lo que muestra un mal ajuste. Se refina la malla evidenciando un descenso notable del error relativo hasta valores cercanos a cero (0).
 3. $\omega = 10$: Al igual que en el caso $\omega = 3$, se observa un error relativo del orden de $1 * 10^6$. El refinamiento de la malla ayuda a disminuir el error ajustando la aproximación a la solución con funciones de *Green*.
 4. $\omega = 40$: El tamaño del elemento y aristas empleado genera un gráfico que difiere en su totalidad al obtenido con la función de *Green*. Los errores relativos se presentan en todos los puntos de la región variando en un rango de $-1 * 10^6$ hasta $1 * 10^6$. Al lanzar el cálculo adaptando la malla con incremento se observa un ajuste adecuado observando errores relativos cercanos a cero. El máximo error relativo se aproxima a $0,8$.
 5. $\omega = 80$: Se inicia el cálculo observando grandes diferencias en el conjunto de isovalores de la solución aproximada. El error relativo varía entre $-9 * 10^{11}$ y $2,6 * 10^{11}$. Se recalculan los valores con una mayor cantidad de aristas lo que conlleva a un refinamiento de la malla. De esta forma se reduce la franja del error relativo entre -1 y 1 .
 6. $\omega = 100$: El resultado inicial arroja una perturbación de la malla irregular. Al sobreponer la solución analítica sobre la malla no se presenta una deformación similar al campo de onda generado. Esto se hace más claro al observar el gráfico obtenido en la simulación. Debido a esto el error relativo es alto con una franja de variación de $-0,9 * 10^6$ y $0,995 * 10^6$. Al igual que los casos anteriores, se adapta la malla hasta observar una estructura del campo definida. El gráfico del error relativo presenta un rango de variación entre -1 y 1 .
-

Análisis de convergencia

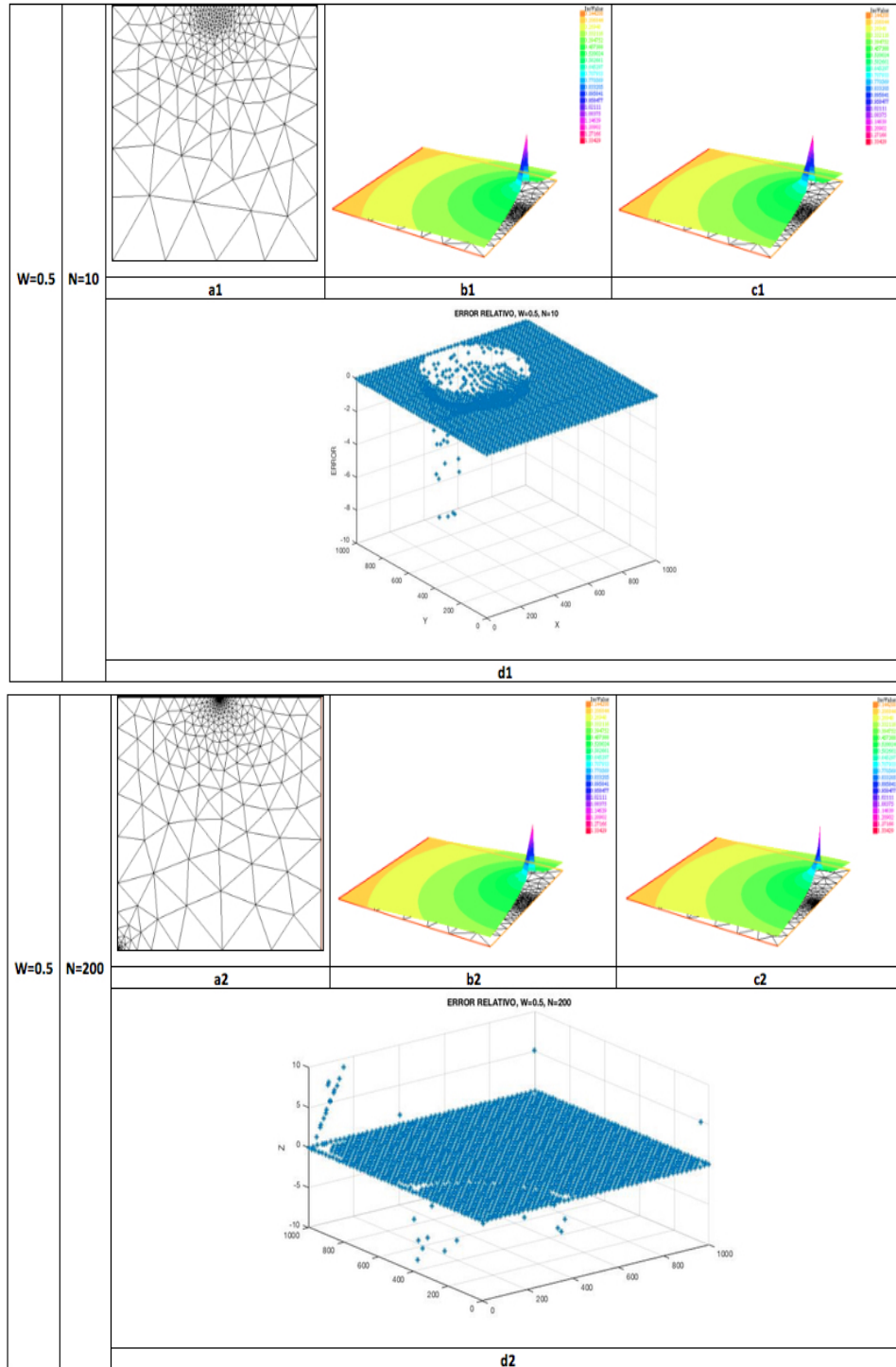
Una de las principales dificultades en la simulación numérica de ecuaciones de onda es el alto número de funciones base requeridas para resolver la solución. Basados en el resultado presentado en la figura (3.3), antes que la solución de elementos finitos se parezca a la solución exacta, en este caso la función de *Green*, se requiere un tamaño de malla lo suficientemente fino. Basados en la norma L^2 , figura (3.3), la aproximación del elemento finito no tiene una conexión a la solución exacta antes que el tamaño de la malla es alcanzado. Según los resultados el tamaño de la malla tiende a cero cuando el parámetro $k = \frac{\omega}{c(x)}$ crece lo que se ve reflejado en el tiempo de cálculo figura (3.4). Si se requiere que $L^2 < 1$ entonces:

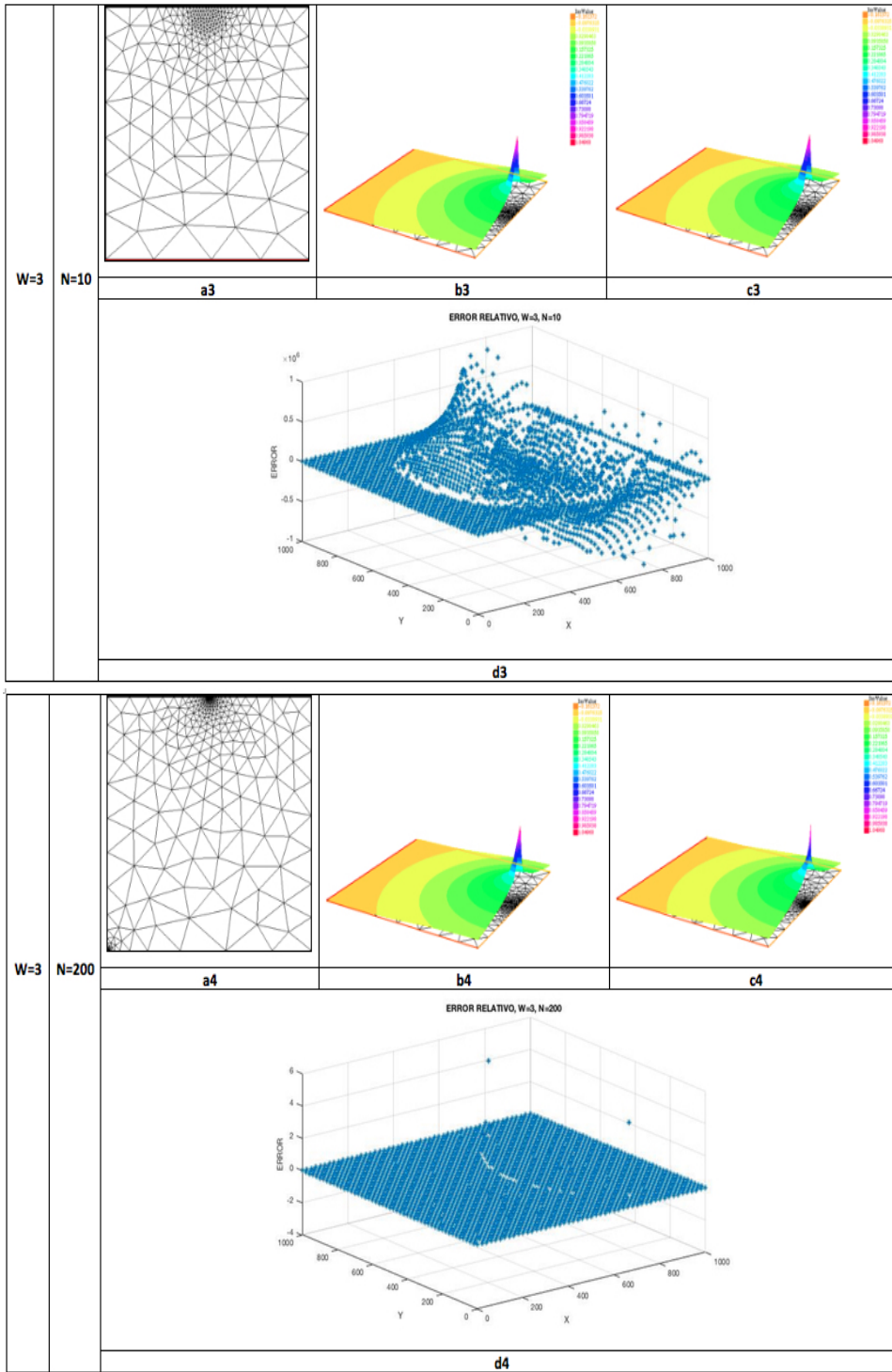
- $\omega = 0,5, 3, 10$: es necesario de 194 aristas lo que corresponde a un tamaño de malla de 40.
- $\omega = 40, 80$: para $\omega = 40$ se requieren de 4436 aristas con un tamaño de malla de 28. En el caso de $\omega = 80$ se necesitaron 5921 aristas que corresponden a un tamaño de malla de 23.
- $\omega = 100$: este caso requirió de 12126 aristas equivalente a 16 como tamaño de malla. Se intenta realizar calculo con un mayor refinamiento de malla sin éxito debido a la restricciones de memoria del equipo.

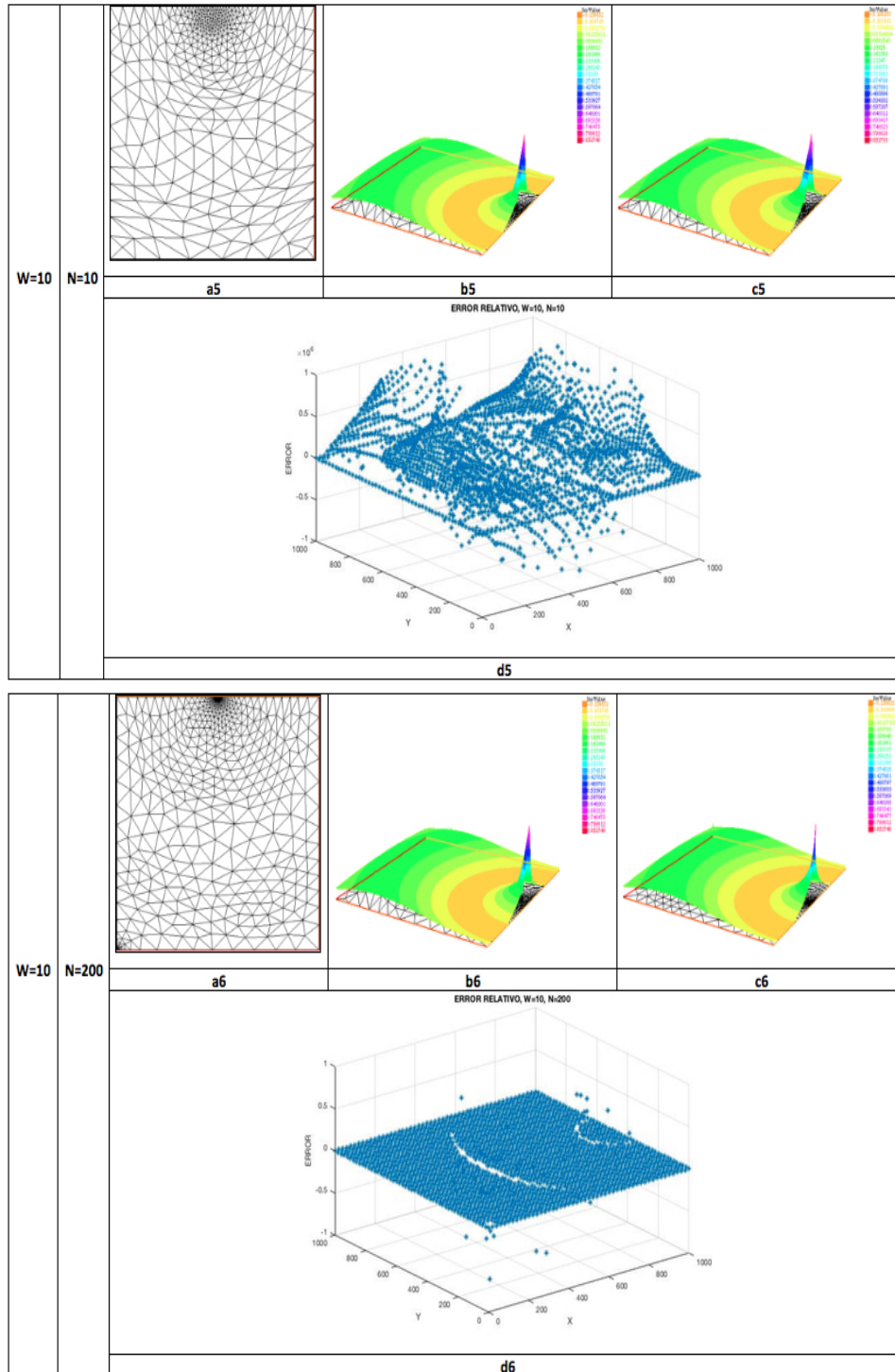
Análisis de estabilidad

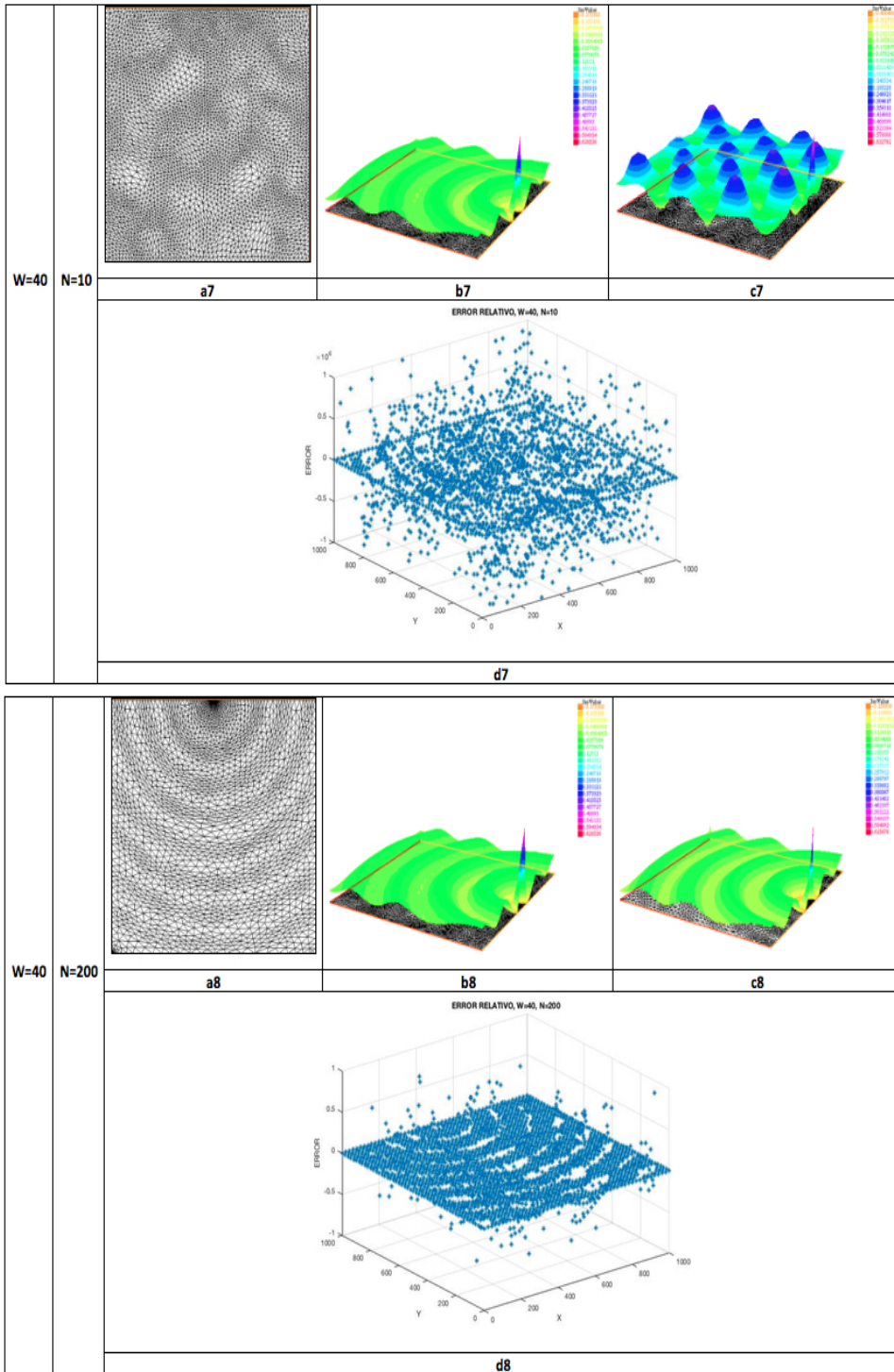
Para presentar el comportamiento de estabilidad se analizará el caso para una alta frecuencia $\omega = 100$ ya que la solución es altamente oscilatoria, luego se requieren grandes refinamientos de mallas. El requerimiento de malla que garantiza la condición $kh < 1$ se establece cuando $h < 16,894$ (Figura 3.5). Se continúa refinando la malla para conocer el comportamiento de la condición hasta limitarse el cálculo por falta de memoria. El máximo refinamiento se obtuvo para un tamaño de malla de 5,582 equivalente a 390739 aristas. El error en la normal L^2 , condicionado al refinamiento de la malla, decrece hasta un tamaño de malla de 8,74. Se observa un cambio en el comportamiento del error ocasionado por la tendencia oscilante de la solución (Figura 3.6). Para evaluar la dependencia continua de los datos, se calculan los valores propios para números de onda afectados por cambios en frecuencia ($\omega = 99, 101$) (figura 3.9). De estos resultados se establece:

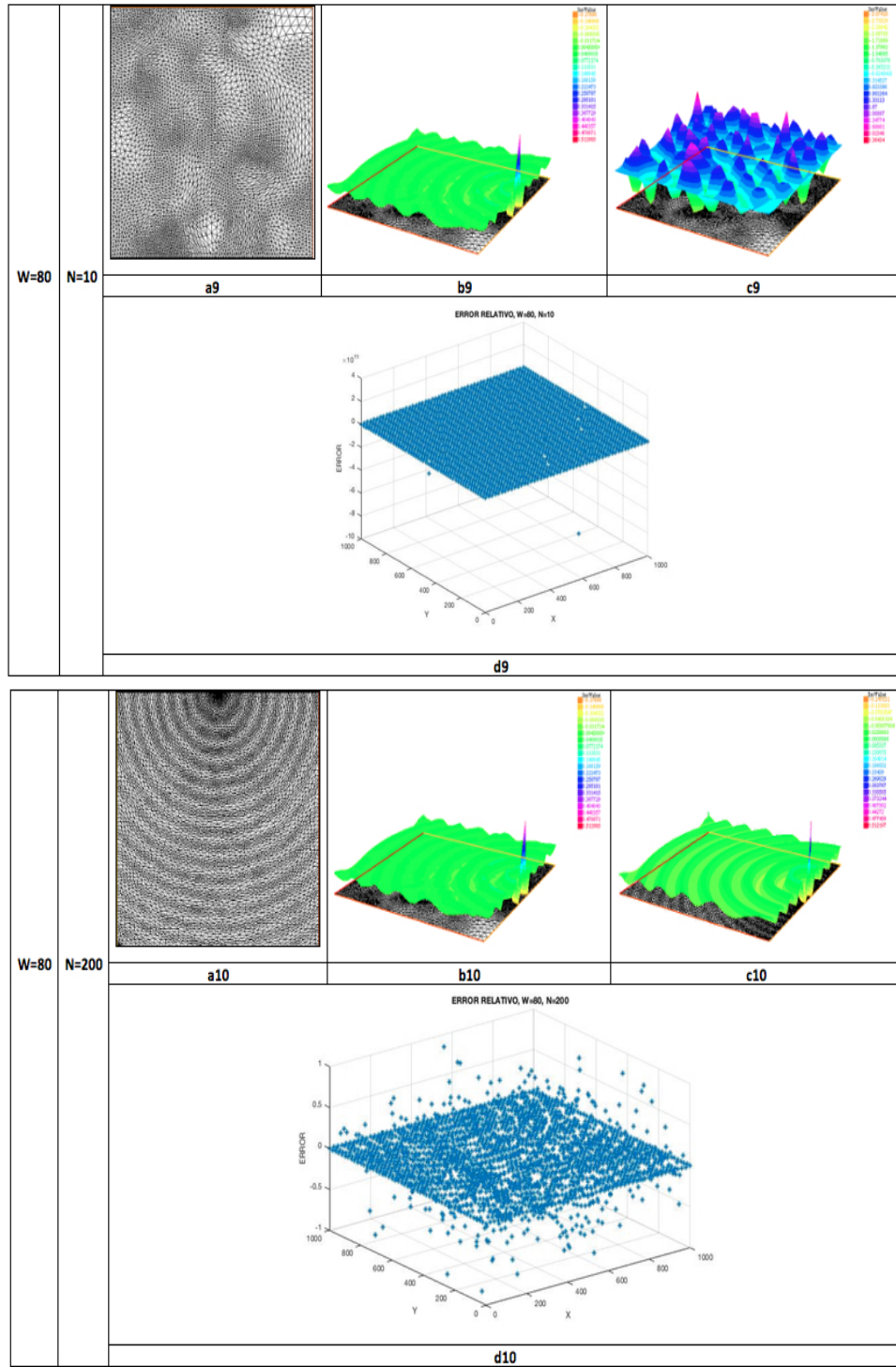
- Dependencia continua de los datos para frecuencia de $99Hz$.
- Inestabilidad de las soluciones para frecuencia de $101Hz$. Este resultado es generado debido a la naturaleza oscilante de la solución lo que hace sensible cambios en parámetros.











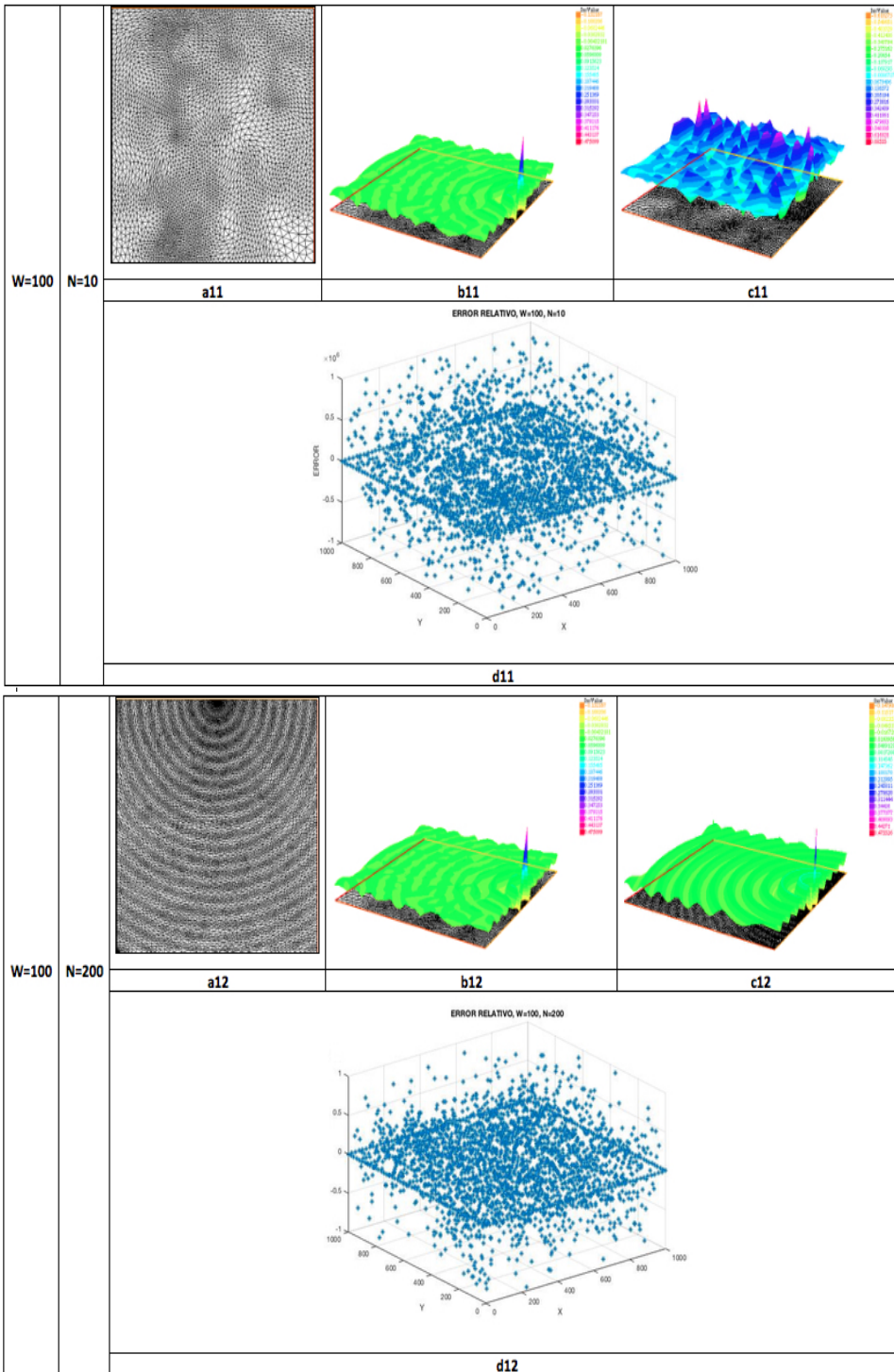




Figura 3.2: Área triangular

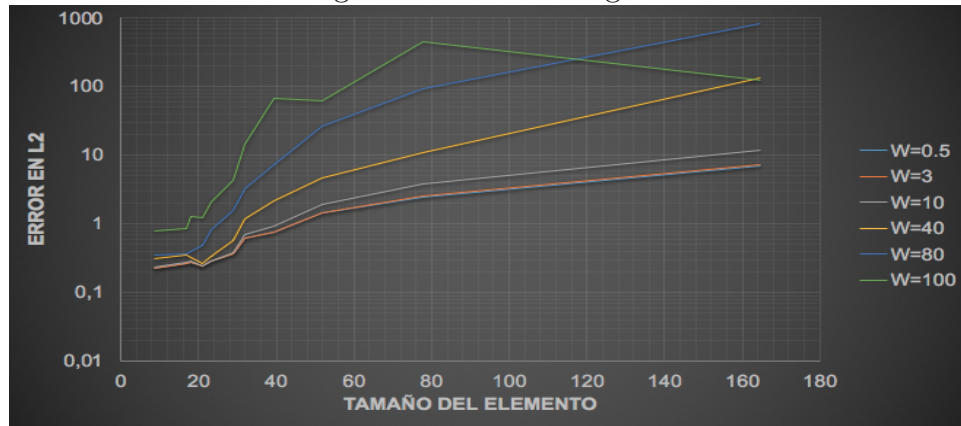
Figura 3.3: Error L^2 

Figura 3.4: Tiempo de ejecución

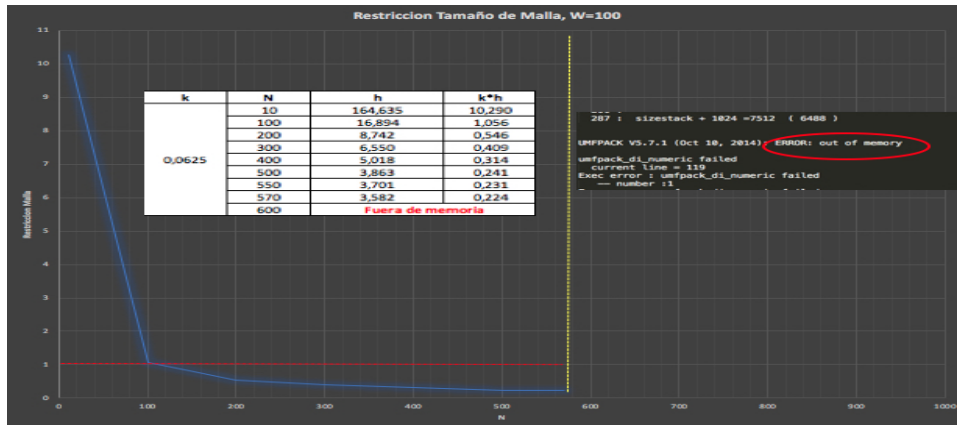
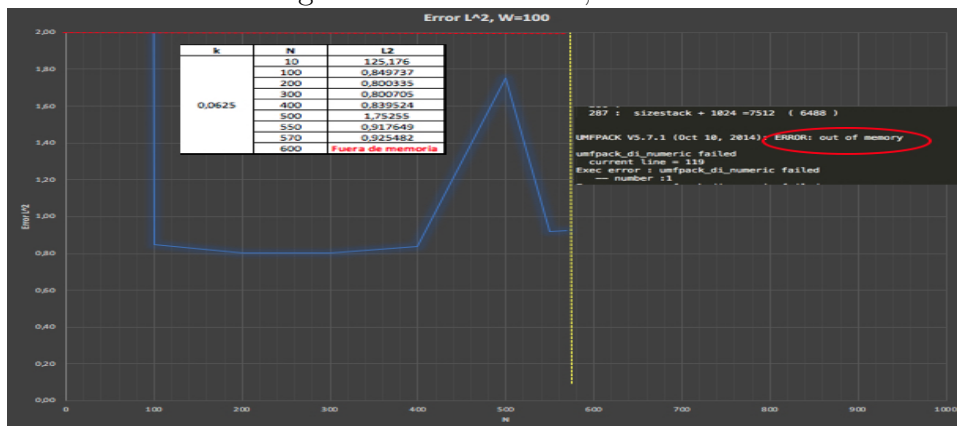


Figura 3.5: Estabilidad, W=100

Figura 3.6: Error L^2 , W=100

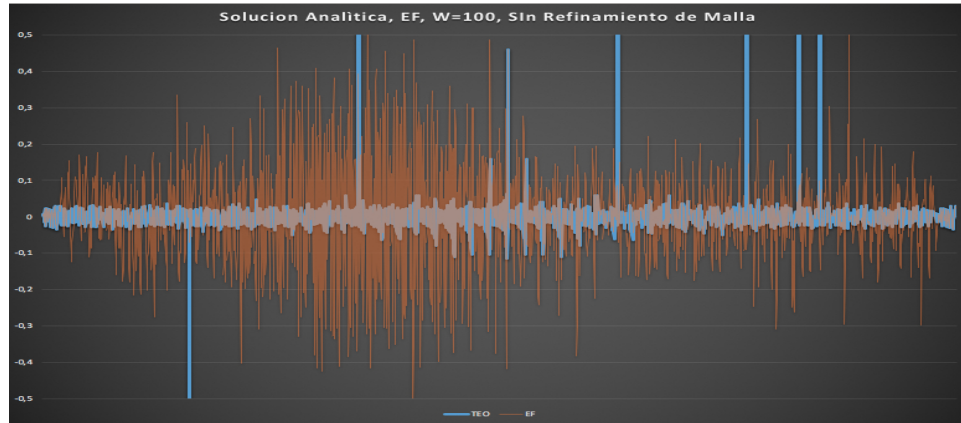


Figura 3.7: Superposicion, Sin Refinamiento de Malla, W=100

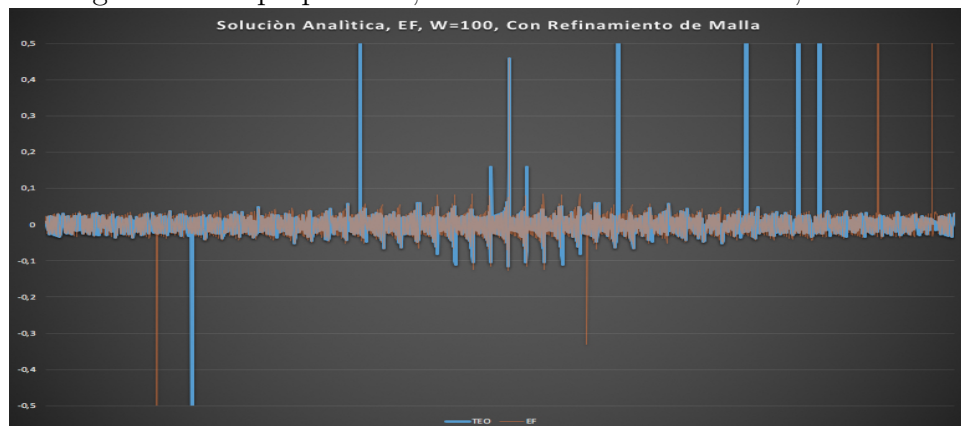


Figura 3.8: Superposicion, Refinamiento de Malla, W=100

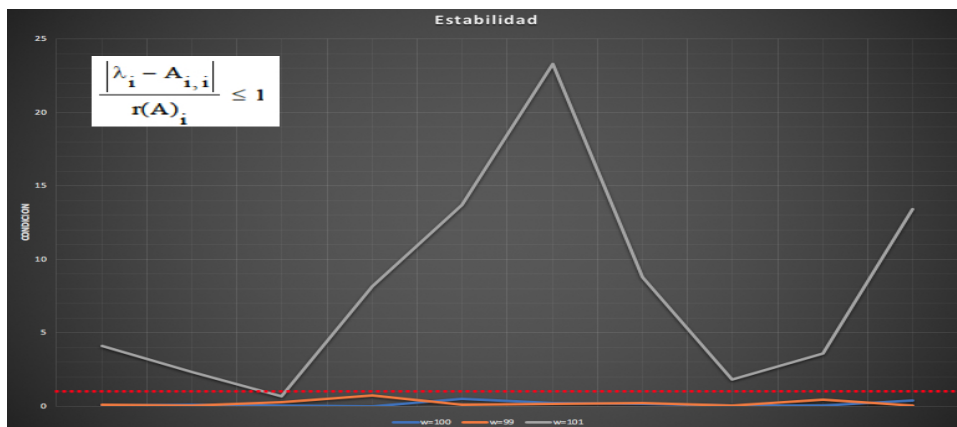


Figura 3.9: Criterio de Estabilidad

Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

- Los experimentos numéricos indican que el método de los elementos finitos es una técnica robusta y útil para resolver la ecuación de *Helmholtz* en 2D en un medio homogéneo.
- Para garantizar que la solución aproximada converja a la solución real fué necesario definir un umbral de malla de tal forma que el error en $L^2 < 1$.
- En aplicaciones que requieran mayor detalle, como fenómenos de dispersión de ondas, se hace necesario precisar el grado de exactitud y por tanto definir el número de elementos de la malla teniendo en cuenta que el requerimiento computacional será mayor.
- Se obtuvo buena exactitud en frecuencias superiores a 40 *Hz* a través del refinamiento de la malla. El precio que se paga para obtener un bajo error es el incremento en el tamaño del sistema lineal y el costo computacional para resolverlo.
- Los resultados obtenidos se pueden mejorar utilizando polinomios de interpolación de mayor grado en conjunto con alto refinamiento de la malla. Esto requiere de equipos de computo de mayor capacidad.

Recomendaciones

- Se recomienda emplear otros métodos de aproximación tales como formulación *wavelet*, volúmenes finitos, diferencias finitas para comparar el error relativo y tiempo de ejecución con el fin de verificar si el método de los elementos finitos es más estable que los otros métodos de aproximación.
 - Como trabajos posteriores queda abierta la posibilidad de aplicar el método de los elementos finitos en dominios no homogéneos en régimen de alta frecuencia con cambios de las propiedades en profundidad.
 - Utilizar polinomios de *lagrange* como elementos de interpolación y comparar los resultados con este estudio.
 - Para futuros desarrollos se recomienda utilizar equipos de cómputo más robustos ya que los refinamientos de malla en problemas más complejos se requiera mayor cantidad de memoria para los cálculos.
-

APÉNDICE A

Lenguaje de FreeFem++

FreeFem++ fue desarrollado en el laboratorio Jacques-Louis Lions en la universidad Pierre y Marie Curie y se diseñó para resolver ecuaciones diferenciales parciales empleando el método de los elementos finitos. Una guía detallada de instalación y ejecución puede verse en [19] [20].

En términos generales el programa se construye con el esquema básico definido por la siguiente estructura:

- Construcción del dominio de trabajo
- Generación de la malla
- Estructura de la formulación débil y desarrollo del cálculo

Se presenta un resumen general de los comandos empleados en cada estructura.

Construcción del dominio de trabajo

Para construir el dominio de trabajo se realiza una descripción paramétrica del contorno de la superficie y de cada lado del mismo en el sentido contrario a las agujas del reloj. La opción **border** define un segmento del contorno de la geometría. Cada lado puede nombrarse asignando el comando **label=**.

Un ejemplo sencillo de la construcción de un cuadrado centrado en el punto (100,100) es:

```
border C1(t=0,100){x=t; y=0;label=1;};
border C2(t=0,100){x=100;y=t; label=2;};
border C3(t=100,0){x=t; y=100; label=3};
border C4(t=100,0){x=0;y=t; label=4;};
```

Generación de la malla

Una vez construido el dominio de trabajo se emplean los comandos **mesh** y **buildmesh** para generar la malla. Para almacenar y graficar se usan las opciones **savemesh (Th, "nombre.msh")** y **plot(th,wait=1,ps="nombre.eps")**. Se presenta un esquema general para la generación de la malla:

```
int n=1;
mesh Th=buildmesh(C1(10*n)+ C2(10*n)+ C3(10*n)+ C4(10*n));
savemesh (Th, " Malla.msh");
plot(th,wait=1,ps= " Malla.eps");
```

Estructura de la formulación débil y desarrollo del cálculo

Antes de desarrollar la formulación débil se requiere definir el espacio de trabajo y el tipo elemento finito. FreeFem++ posee variedad de funciones base como funciones constantes a tramos discontinuas (P0), funciones lineales continuas a tramos (P1), funciones lineales a tramos discontinuas (P1dc), entre otros (vease [9]). La siguiente es la forma para definir el tipo de elemento finito y el espacio al cual pertenecen las funciones u_h, v_h :

```
fespace Vh(Th,P1);
Vh <complex> uh,vh;
```

En este caso el polinomio a emplear son funciones lineales continuas a tramos (P1) y las funciones u_h, v_h pertenecen al espacio complejo. Los problemas son descritos en la forma variacional incluyendo la forma bilineal $a(u,v)$, la forma lineal $b(f,v)$ y las condiciones de frontera así:

Problema $P(u,v) = a(u,v) - b(f,v) + (\text{condición de frontera})$.

La formulación variacional presenta un tipo de integración numérica. Para ello se tiene establecido los siguientes comandos:

$$\begin{aligned} \text{int1d}(Th)(v) &= \int_{\partial\Omega} v(x) dx \\ \text{int2d}(Th)(v) &= \int_{\Omega} v(x) dx \end{aligned}$$

Por ejemplo, para una función $f(x, y)$ se desea hallar una función $u(x, y)$ que satisfaga

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y) \text{ para todo } x, y \in \Omega$$

$$u(x, y) = 0 \text{ para todo } (x, y) \in \partial\Omega$$

Con Ω un disco unitario con frontera $C = \{(x, y) \mid x = \cos(t), y = \sin(t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

La formulación variacional respectiva es:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy$$

Luego para la triangulación Th de Ω , se tiene que las formas bilineal y lineal son escritas como

$$\int_{Th} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \text{int2d}(Th)(dx(u)dx(v) + dy(u)dy(v))$$

$$\int_{Th} f v dx dy = \text{int2d}(Th)(vf)$$

La condición de frontera $u(x, y) = 0$ se escribe $on(C, u = 0)$.

Para resolver el problema se puede emplear la forma **solve**. En el ejemplo anterior si el problema es llamado Poisson, entonces la opción **solve** plantea y resuelve el problema así:

`solvePoisson(u, v) = (Define y resuelve la EDP)`

`int2d(Th)(dx(u)dx(v) + dy(u)dy(v)) (Define la forma bilineal)`

`-int2d(Th)(vf) (Define la forma lineal)`

`+on(C, u = 0); (Define la condicion de frontera)`

Para presentar los resultados gráficos se emplea el comando **plot(u, ps="nombre.eps")**. Si se quiere conocer el tiempo usado para el cálculo se puede emplear la opción

`real d = clock(); cout << CPU = clock() - d << endl;`

APÉNDICE B

Generación del código

Se presenta el código desarrollado para resolver la ecuación de Helmholtz en un medio homogéneo con función fuente la delta de Dirac.

```
//Solucion de la Ecuacion de Helmholtz aplicando metodo
//de los Elementos Finitos para un medio homogeneo
//La region omega serÃ¡ un cuadrado de x=p, y=p
//La fuente se ubicarÃ¡ en la superficie del terreno
//ubicada en x=dix, y=diy
//Contiene graficas de frontera, malla, Solucion en lineas,
//colores.

verbosity=0;
// Distancia de la fuente en la posicion x
real dix=500;
// Distancia de la fuente en la posicion y
real diy=999;

//GENERACION DEL DOMINIO OMEGA (cuadrado de x=p, y=p)

int p=1000; //Longitud lado region
border C1(t=0,p){x=t;y=0;label=1;}
```

```
border C2(t=0,p){x=p;y=t;label=2;}
border C3(t=p,0){x=t;y=p;label=3;}
border C4(t=p,0){x=0;y=t;label=4;}

// coordenada x de delta_i
real[int] xdelta = [dix,0.9];
// coordenada x de delta_j
real[int] ydelta = [diy,0.9];
// coeficiente delta_i
real[int] cdelta=[1.,2.];

//GENERACION DE LA MALLA PARA n ARISTAS

int n=10;

mesh Th=buildmesh(C1(10*n)+C2(10*n)+C3(10*n)+C4(10*n));

savemesh(Th,"Malla.msh");

//DEFINICION DE FUNCIONES

//Frecuencia en HZ (1/seg)
//real w=2.0*pi*0.85e9/1.0e10;
real w=0.5;
real k1=1;
//Coeficiente de Amortiguamiento
real alfa=0.000001;

//Velocidad en el medio c (mt/seg)
//func c=340+1.3*y;
real c=1600;
//N°mero de Onda k, Unidades m(-1)
real k=w/c;

real t0=0;

//Solucion de la ecuacion de Helmholtz analitica en
```

```

//un medio homoganeo. Funcion de Green en 2D

func green=0.25*1i*((j0((k)*sqrt((x-dix)^2+(y-diy)^2)))
+1i*y0((k)*sqrt((x-dix)^2+(y-diy)^2))) ;
// Se define es espacio y se usan polinomios de grado 2
fespace Vh(Th,P2) ;
// Se declara el espacio Vh ( complejo ).
//Inicialmente uhH, uh , vh pertenecen a un espacio complejo
VH <complex> uhH, uh , vh;
// Se asigna la funcion uhH a green debido a que se trata
//de un medio homoganeo
uhH=green ;
// Solo interesa la parte real de Vh
VH RuhH;
// Parte Real de la funcion uhH es decir de h
//(Solucion analitica Green)
RuhH=real(uhH) ;

//Codigo para generar la funcion delta de dirac
//y lanzar el calculo en varias iteraciones
for(int iter=0;iter < 1;iter++)
{

//ESTRUCTURA FORMULACION DEBIL
// Se define es espacio y se usan polinomios de grado 2
fespace Vh(Th,P2) ;
// Se inicia reloj para contabilizar tiempo de calculo
real Tiempo=clock();
// Matriz de interpolacion
matrix D = interpolate(Vh,xdelta,ydelta);
// En el punto (xdelta[j],ydelta[i] ) se llena h
// $D_{ij} = w^i((xdelta[j],ydelta[i]))
//donde w^i son las funciones base en Vh.
// Espacios y funciones de prueba
Vh uh,vh;

Vh b;
b[] = D*cdelta;

```

```
b[] = -b[];

// Definicion del Problema
problem Helmholtz(uh, vh) =

// Forma Bilineal
int2d(Th)((dx(uh)*dx(vh)+dy(uh)*dy(vh)))
-int2d(Th)((w^2/c^2)*(uh*vh))
+ b[] // Forma lineal, funcion delta de dirac

// -int2d(Th)(vh*f)
// Funcional lineal
// -int1d(Th)(vh*RuhH)
// Expresion amortiguamiento
// -int1d(Th)(1i*w*alfa*uh*vh)
// -int1d(Th)(1i*w*vh*uh)

// En caso de tener du/dn en la frontera
// -int1d(Th)(RuhH*vh)
// Condiciones de frontera
+on(1,2,3,4,uh=RuhH)
;
// Lanza el calculo
Helmholtz;

// Malla
cout << "max uh = " << uh[].max << " nv = " << Th.nv <<
endl;
int npasos=3;
for (int n=0;n<npasos;n++)
{
    int nbverts=Th.nv;
    fespace Mh(Th,P2);
    Mh hhh=hTriangle;
    cout << "mesh size=" << hhh[].max << "nb of
    vertices=" << nbverts << endl;
}


```

```
//Adaptado de malla segun singularidad del campo de onda
Th=adaptmesh(Th,uh,nbvx=10000,err= 0.01*1.2^- iter );

//Guarda datos calculados EF a medida que hace la iteracion
ofstream file1("Helmholtz FE.txt");
file1<<uh[];

//Grafico malla
plot(Th, dim=1, wait=true , ps="Malla");
//Grafico en escala de grises
plot(Th,RuhH,wait=true ,dim=3,fill=1,value=1,ps=
"Solucion Analitca , 3D");
//Gráfico del campo en 3D
plot(Th,uh , wait=1,dim=3,fill=1,value=1,ps=
"Solucion Aproximada , 3D ");
//Grafico malla
//plot(Th,RuhH,uh , dim=3, wait=true , ps="Malla");

//PRESENTACION DE RESULTADOS

//Calculo del Error en X
for ( real i=0 ; i <1; i +=0.1){
cout << uh( i ,0)<<endl ;
}{
ofstream gnu ( "Error_en_X.txt" ) ;
for ( real i=0; i <=p; i +=1)
{
gnu << i << " " << RuhH( i , 0 ) << " " << uh( i , 0 )
<< " " << (RuhH( i ,0)-uh( i , 0 ) ) /RuhH( i , 0 ) *100
<<endl ;
}
}

//Calculo del Error en Y
for ( real iii=0 ; iii <1; iii +=0.1){
cout << uh( 0 ,iii)<<endl ;
}{
ofstream gnuu ( "Error_en_Y.txt" ) ;
for ( real iii=0; iii <=p; iii +=1)
```

```
{
gnuu << iii << " " << RuhH( 0 , iii ) << " " <<
uh( 0 , iii )<< " " << (RuhH( 0 ,iii)-uh( 0 , iii ) ) /
RuhH( 0 , iii )*100 <<endl ;
}
}

//error acoplado
for ( real i=0 ; i <1; i +=0.1){

    for ( real iii=0 ; iii <1; iii +=0.1)

        {

            cout << uh( i ,iii)<<endl ;
            }{
ofstream gnu ( "Error_acoplado.txt" ) ;

for ( real i=0; i <=p; i +=20)
{
    for ( real iii=0; iii <=p; iii +=20)

        {
gnu << i << " " << RuhH( i , iii ) << " " << uh( i , iii )
<< " " << (RuhH( i ,iii)-uh( i , iii ) ) /
RuhH( i , iii )*100 <<endl ;

        }

    }

}

}

real L2error;
// Error en la Norma L^2
L2error=sqrt(int2d(Th)((RuhH-uh)^2));
// Muestra el error en pantalla
```

```
cout<<"L2error = "<<L2error<<endl;

//Impresion de resultados numÃ©ricos
ofstream file2("Helmholtz FE.txt");
file2<<uh[];
ofstream file3("Helmholtz Analitica.txt");
file3<<RuhH[];

//Datos Matriz de Rigidez y Vector de Carga

varf a(uh,vh) = int2d(Th)((dx(uh)*dx(vh)+dy(uh)*dy(vh))-
((w^2/c^2)*(uh*vh))+b[]);
matrix A=a(Vh,Vh);
varf bc([vh],[g]) = int1d(Th)(g*vh);
//matrix B=b(vh,g)
//save(raw,"uh.dat",uh,Th);
ofstream u1data("Matriz de Rigidez.txt");
u1data<<A;
ofstream u2data("Vector de Carga.txt");
//u2data<<B;
}

//GRAFICA SOLUCION

//Codigo para Variacion de colores
real[int] colorhsv=[ // color hsv model
4./6., 1 , 0.5, // dark blue
4./6., 1 , 1, // blue
5./6., 1 , 1, // magenta
1, 1. , 1, // red
1, 0.5 , 1 // light red
];
real[int] viso(31);
for (int i=0;i<viso.n;i++)
viso[i]=i*0.1;

//Codigo para generacion de ejes
real m=p+10;
real h=1;
```

```
real [int] x(m+1),ox(m+1);
real [int] y(m+1),oy(m+1);

for (int ii=0;ii<m+1;ii++)
{
  x[ii]=ii*h;
  ox[ii]=0;

  y[ii]=0;
  oy[ii]=h*ii;

};
```

Bibliografía

- [1] Babuska, I., Ihlenburg, F., Paik, E. T. Sauter, S. A., *A generalized finite element method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 128(3-4), 325-359. Elsevier, 1995
- [2] Bathe K.J., Saunders, H. *Finite Element Procedures*, Prentice Hall. New Jersey 1996.
- [3] Bavic V.M, Buldyrev V.S. *Short Wavelength Diffraction Theory. Asymptotic Methods* , Springer-Verlag. Moscow 1972.
- [4] Bender C.M, Orszag S.A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. Asymptotic Methods and Perturbation Theory.* , Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, New York. 1999
- [5] Bleistein N, Handelsman R. *Asymptotic Expansions of Integrals.* , Dover Publications, Inc New York, 1986.
- [6] Bleistein N, Cohen J. *Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration, and Inversion* , Springer Science, Inc New York, 2013.
- [7] Born, M., Wolf, E. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier, 2013
- [8] Brenner, S., Scott, R. *The mathematical theory of finite element methods*. Springer Science and Business Media. 2007

-
- [9] Chacón, E., *Notas sobre FreeFem++ 2D y 3D: traducción del manual de F. Hecht*,. Departamento de ecuaciones diferenciales y análisis numérico, Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla. 2010.
- [10] Chandrupatla T.R, Belegundu A.D. *Introduction to Finite Elements in Engineering*,. Prentice Hall. New Jersey 2002.
- [11] Chapman C.H. *Fundamentals of Seismic Wave Propagation*,. Cambridge University Press-New York 2004.
- [12] Deakin, A. S., Rasmussen, H., *Nonreflecting boundary condition for the Helmholtz equation*. Computers and Mathematics with Applications, 41(3-4), 307-318. Elsevier, 2001
- [13] Debnath, L. *Nonlinear Partial Differential Equations: for Scientists and Engineers*. Second Edition, Birkhäuser, Boston 2005.
- [14] Dou, F. F., Fu, C. L., *A wavelet method for the Cauchy problem for the Helmholtz equation*. ISRN Applied Mathematics. Hindawi Publishing Corporation, 2012.
- [15] Dautray, R., Lions, J. L. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology: volume 1 physical origins and classical methods*. Springer Science and Business Media, 2012
- [16] Erdlyi A. *Asymptotic Expansions*. Dover publications Inc. New York 1956.
- [17] Filippi, P., Bergassoli, A., Habault, D. Lefebvre, J. P. *Acoustics: basic physics, theory, and methods*. Academic Press, 1998
- [18] Froman N., Froman P. *JWKB Approximation: Contributions to the Theory*, North-Holland Publishing Company. Amsterdam 1965.
- [19] Hecht, F., *New development in FreeFem++*. Journal of Numerical Mathematics. Volume 20, Number 3-4, Pages 251-265. 2001
- [20] Hecht, F., *FreeFem++*. Third Edition, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie. Paris.
- [21] Ihlenburg, F., *Finite element analysis of acoustic scattering*. Springer Science and Business Media, 2006
-

-
- [22] Holmes M.H. *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag. New York 1995.
- [23] Kirsch, A., *An introduction to the mathematical theory of inverse problems (Vol. 120)*. Springer Science and Business Media, 2011
- [24] Kuhnel W., *Differential Geometry, Curves, Surfaces Manifolds*, Second Edition. American Mathematical Society. Wiesbaden-Germany. 2003.
- [25] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, 2000.
- [26] Melenk, J. M., *On generalized finite element methods (Doctoral dissertation), research directed by Dept. of Mathematics*. University of Maryland at College Park, 1995.
- [27] Monk, P., *Finite element methods for Maxwell's equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2003.
- [28] LeVeque, R. J., *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007
- [29] Onajite, E., *Seismic data analysis techniques in hydrocarbon exploration*. Elsevier, 2013.
- [30] Reddy D. *Introductory Functional Analysis: with Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*. Springer Science. 2013.
- [31] Restrepo I., Chica A. *Importancia de Considerar la Corteza No Homogénea en sismología*. Revista Dyna, Nro 139, pp. 59-67. Medellín, Julio 10 de 2013.
- [32] Sato H., Fehler M.C., Maeda T. *Seismic Wave Propagation and Scattering in the Heterogeneous Earth* Springer-Verlag. Berlin 2012.
- [33] Sheriff, R. E., and Geldart, L. P. *Exploration seismology*. Volume 1: History, theory, and data acquisition. Cambridge University Press, New York, NY. 1983.
-

- [34] Simmonds, J.G., Mann J.E. *First Look at Perturbation Theory*, Second Edition. Dover Publications, INC. Mineloa-New York. 1986.
 - [35] Singer, I., Turkel, E. *High-order finite difference methods for the Helmholtz equation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 163(1-4), 343-358. Elsevier, 1998
 - [36] Tae-Kyung Hong and B. L. N. Kennett. *A wavelet-based method for simulation of two-dimensional elastic wave propagation*, 2002.
 - [37] Teutsch, H., *Modal array signal processing: principles and applications of acoustic wavefield decomposition* (Vol. 348). Springer, 2007
 - [38] Torres L., Triviño J. *Problemas de Frontera para la Ecuación de Helmholtz*, Universidad Eafit, Medellín
 - [39] Yilmaz, Ö., *Seismic data analysis: Processing, inversion, and interpretation of seismic data*. Society of exploration geophysicists. 2001
-