

RESPUESTA DINÁMICA DE DEPÓSITOS DE SUELOS CONSIDERANDO  
PROPAGACIÓN VERTICAL DE ONDAS SH Y VARIACIÓN LINEAL DE LA  
VELOCIDAD DE ONDA DE CORTE

DORA LUCÍA CARVAJAL GUTIÉRREZ

UNIVERSIDAD EAFIT  
ESCUELA DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL  
MEDELLÍN  
2017

RESPUESTA DINÁMICA DE DEPÓSITOS DE SUELOS CONSIDERANDO  
PROPAGACIÓN VERTICAL DE ONDAS SH Y VARIACIÓN LINEAL DE LA  
VELOCIDAD DE ONDA DE CORTE

DORA LUCÍA CARVAJAL GUTIÉRREZ

Proyecto de grado para optar por el título de Magíster en Ingeniería

ASESOR:

JUAN DIEGO JARAMILLO FERNÁNDEZ, PhD

UNIVERSIDAD EAFIT  
ESCUELA DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL  
MEDELLÍN

2017

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios por todas las oportunidades de crecimiento personal y profesional que me brinda cada día.

A Larry Gutiérrez Monsalve, mi esposo, por el apoyo incondicional que siempre me ha brindado, sobre todo en los momentos difíciles.

Al profesor Juan Diego Jaramillo Fernández por compartir conmigo sus conocimientos, su experiencia y su inspirador amor por la ingeniería y la investigación.

## TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN .....	12
INTRODUCCIÓN .....	13
NOTACIÓN Y DEFINICIONES .....	16
1. OBJETIVOS.....	18
1.1. Objetivo general .....	18
1.2. Objetivos específicos .....	18
2. ASPECTOS TEÓRICOS DE LA RESPUESTA DINÁMICA UNIDIMENSIONAL DE DEPÓSITOS DE SUELOS CON VELOCIDAD CONSTANTE .....	20
2.1. Desplazamientos para el modelo de base sobre roca rígida .....	22
2.2. Función de transferencia para el modelo de base sobre roca rígida.....	23
2.3. Desplazamientos para el modelo de base sobre roca elástica .....	23
2.4. Función de transferencia para el modelo de base sobre roca elástica .....	24
2.5. Efectos de considerar el modelo de roca rígida y el modelo de roca elástica ..	25
3. RESPUESTA DINÁMICA UNIDIMENSIONAL DE DEPÓSITOS DE SUELOS CON RIGIDEZ VARIANDO CONTINUAMENTE CON LA PROFUNDIDAD .....	27
3.1. Aspectos Teóricos.....	27
3.2. Casos de estudio a través de la historia .....	29
4. RESPUESTA DINÁMICA UNIDIMENSIONAL DE DEPÓSITOS DE SUELOS CON VELOCIDAD VARIANDO LINEALMENTE CON LA PROFUNDIDAD - CASO DE ESTUDIO .....	33
5. SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN UNIDIMENSIONAL DE ONDAS CONSIDERANDO VARIACIÓN LINEAL DE LA VELOCIDAD DE ONDA DE CORTE .	36
5.1. Deducción analítica de la ecuación de desplazamientos .....	36
5.2. Deducción de la amplitud de las ondas de corte en superficie .....	39

5.3.	Deducción de la amplitud de las ondas entre estratos de suelos ( $C_{1m}, C_{2m}$ ) ...	40
5.4.	Deducción de la amplitud de las ondas en la roca ( $C_{1r}, C_{2r}$ ).....	42
6.	VALIDACIÓN DE LAS ECUACIONES DEDUCIDAS PARA EL CASO DE VELOCIDAD VARIANDO LINEALMENTE CON LA PROFUNDIDAD.....	43
6.1.	Validación No.1: Un solo estrato de suelo .....	43
6.2.	Validación No. 2: Caso suelo estratificado.....	44
7.	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA .....	47
7.1.	Función de transferencia para el caso de roca rígida .....	47
7.2.	Función de transferencia para el caso de roca elástica .....	48
7.3.	Comparación de las funciones de transferencia para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica .....	52
8.	FORMAS MODALES.....	55
9.	COMPARACIÓN DE LA RESPUESTA DINÁMICA OBTENIDA CON EL CASO DE VELOCIDAD DE ONDA DE CORTE VARIANDO LINEALMENTE Y EL CASO DE VELOCIDAD DE ONDA DE CORTE CONSTANTE.....	58
10.	DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN APROXIMADA PARA EL PERIODO FUNDAMENTAL .....	72
10.1.	Caso base sobre roca rígida.....	72
10.2.	Caso base sobre roca elástica.....	83
10.3.	Comparación de las ecuaciones de periodo fundamental aproximado obtenidas para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica.....	90
11.	DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN APROXIMADA PARA LA AMPLITUD MÁXIMA	93
11.1.	Amplitud máxima para el caso de roca rígida .....	93
11.2.	Amplitud máxima para el caso de roca elástica .....	96
11.3.	Comparación de las ecuaciones de amplitud máxima aproximada obtenidas para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica .....	99

12.	CONCLUSIONES.....	100
13.	REFERENCIAS.....	103

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Convenciones para el desplazamiento y la profundidad, para el depósito de suelo y la roca .....	20
Figura 2. Esquema depósito de suelo de un solo estrato.....	25
Figura 3. Comparación funciones de transferencia para los modelos de roca rígida y roca elástica – Caso velocidad de onda de corte constante .....	26
Figura 4. Modelo depósito de suelo estratificado .....	27
Figura 5. Algunos posibles modelos de depósitos de suelos con variación continua de la velocidad de onda de corte en profundidad .....	29
Figura 6. Representación gráfica del caso de estudio.....	34
Figura 7. Esquema suelo estratificado con variación lineal de la velocidad en cada estrato de suelo.....	40
Figura 8. Funciones de transferencia para depósito de suelo con velocidad constante y depósito con velocidad variando linealmente y tendiendo a cero el parámetro $\alpha$ – Caso un solo estrato de suelo .....	44
Figura 9. Esquema suelo estratificado para el análisis .....	45
Figura 10. Funciones de transferencia para depósito de suelo con velocidad constante y depósito con velocidad variando linealmente en cada estrato de suelo y tendiendo a cero el parámetro $\alpha$ – Caso suelo estratificado .....	46
Figura 11. Comparación de la solución analítica propuesta para el caso de roca rígida con la solución propuesta para este mismo caso por Gazetas (1982). $v_0 = 100 \text{ m/s}$ , $v_0/v_H = 0,50$ , $H = 30 \text{ m}$ y $\xi_S = 5\%$ .....	48
Figura 12. Funciones de Transferencia para diferentes relaciones $v_0/v_H$ para el modelo de base sobre roca elástica $v_0 = 100 \text{ m/s}$ , $v_{sr} = v_H$ , $H = 30 \text{ m}$ $\xi_S = \xi_r = 0\%$ , $\rho_s = \rho_r = 2000 \text{ kg/m}^3$ .....	51
Figura 13. Comparación de la función de transferencia para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica. $v_0/v_H = 0,10$ , $v_{sr} = v_H = 1000 \text{ m/s}$ , $H = 30 \text{ m}$ , $\rho_s = \rho_r = 1800 \text{ kg/m}^3$ , $\xi_S = 5\%$ para el caso de roca rígida y $\xi_S = \xi_r = 0\%$ para el caso de roca elástica .....	53

Figura 14. Comparación de la función de transferencia para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica. $v_0/v_H = 0,30$ , $v_{sr} = v_H = 333,33 \text{ m/s}$ , $H = 30 \text{ m}$ , $\rho_s = \rho_r = 1800 \text{ kg/m}^3$ , $\xi_s = 5\%$ para el caso de roca rígida y $\xi_s = \xi_r = 0\%$ para el caso de roca elástica .....	53
Figura 15. Comparación de la función de transferencia para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica. $v_0/v_H = 0,50$ , $v_{sr} = v_H = 200 \text{ m/s}$ , $H = 30 \text{ m}$ , $\rho_s = \rho_r = 1800 \text{ kg/m}^3$ , $\xi_s = 5\%$ para el caso de roca rígida y $\xi_s = \xi_r = 0\%$ para el caso de roca elástica .....	54
Figura 16. Comparación de la función de transferencia para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica. $v_0/v_H = 0,90$ , $v_{sr} = v_H = 111,11 \text{ m/s}$ , $H = 30 \text{ m}$ , $\rho_s = \rho_r = 1800 \text{ kg/m}^3$ , $\xi_s = 5\%$ para el caso de roca rígida y $\xi_s = \xi_r = 0\%$ para el caso de roca elástica .....	54
Figura 17. Forma modal normalizada por el desplazamiento en superficie – Modo 1 ..	56
Figura 18. Forma modal normalizada por el desplazamiento en superficie – Modo 2 ..	57
Figura 19. Forma modal normalizada por el desplazamiento en superficie – Modo 3 ..	57
Figura 20. Esquema depósitos de suelos a evaluar .....	60
Figura 21. Funciones de transferencia para el depósito de suelo No.1 .....	61
Figura 22. Funciones de transferencia para el depósito de suelo No.2 .....	61
Figura 23. Funciones de transferencia para el depósito de suelo No.3 .....	62
Figura 24. Funciones de transferencia para el depósito de suelo No.4 .....	62
Figura 25. Variación de la frecuencia fundamental del caso homogéneo con respecto al caso no homogéneo para diferentes relaciones $v_0/v_H$ .....	69
Figura 26. Variación de la amplitud máxima del caso homogéneo con respecto al caso no homogéneo para diferentes relaciones $v_0/v_H$ .....	71
Figura 27. Variación del periodo fundamental para el caso de roca rígida considerando $v_0 = 100 \text{ m/s}$ , $\xi_s = 5\%$ .....	74
Figura 28. Variación del periodo fundamental para $H = 30 \text{ m}$ .....	75
Figura 29. Variación del periodo fundamental para $H = 15 \text{ m}$ .....	76
Figura 30. Variación del periodo fundamental para $H = 1 \text{ m}$ .....	76
Figura 31. Variación de la pendiente $m_1$ con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca rígida .....	77

Figura 32. Variación de la pendiente $m_2$ con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca rígida .....	78
Figura 33. Variación de la pendiente $m_3$ con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca rígida .....	78
Figura 34. Variación de la pendiente $d$ con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca rígida .....	79
Figura 35. % Error Periodo obtenido con la Ecuación $T_{Rígido Aprox \xi=5\%}$ con respecto al Periodo Real ( $T$ ) considerando $v_0 = 100 \text{ m/s}$ y $\xi_S = 5\%$ .....	80
Figura 36. Error (%) obtenido con la Ecuación $T_{Rígido Aprox}$ con respecto al Periodo Real ( $T$ ) .....	82
Figura 37. Variación del periodo fundamental para el caso de roca elástica considerando $v_0 = 100 \text{ m/s}$ , $v_{sr} = v_H$ , $\rho_s = \rho_r$ , $\xi_s = \xi_r = 0,0 \%$ .....	84
Figura 38. Variación de la pendiente $m_1$ con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca elástica .....	85
Figura 39. Variación de la pendiente $m_2$ con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca elástica .....	85
Figura 40. Variación de la pendiente $m_3$ con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca elástica .....	86
Figura 41. Variación de la pendiente $d$ con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca elástica .....	86
Figura 42. % Error Periodo obtenido con la Ecuación $T_{Elástico Aprox}$ con respecto al Periodo Real ( $T$ ) considerando $v_0 = 100 \text{ m/s}$ , $v_{sr} = v_H$ , $\rho_s = \rho_r$ , $\xi_s = \xi_r = 0,0\%$ .....	88
Figura 43. Error (%) obtenido con la Ecuación $T_{Elástico Aprox}$ con respecto al Periodo Real ( $T$ ) .....	89
Figura 44. Gráfica para obtener $T_{Rígido Aprox}$ y $T_{Elástico Aprox}$ con la ecuación $T = 4H/v_{eq}$ .....	91
Figura 45. Amplitud máxima para el caso de roca rígida considerando $v_0 = 100 \text{ m/s}$ y $\xi_S = 5\%$ .....	93
Figura 46. Error Amplitud (%) obtenido con la Ecuación $Amplitud \text{ M}{\acute{a}}xima_{Rígida Aprox}$ con respecto a la Amplitud M{áxima Real .....	95

Figura 47. Amplitud máxima para el caso de roca elástica considerando  $v_0 = 100 \text{ m/s}$ ,  
 $v_{sr} = v_H$ ,  $\rho_s = \rho_r$ ,  $\xi_s = \xi_r = 0,0 \%$ ..... 96

Figura 48. Error Amplitud (%) obtenido con la Ecuación *Amplitud Máxima*<sub>Elástica Aprox</sub>  
con respecto a la Amplitud Máxima Real ..... 98

Figura 49. Amplitud máxima para el modelo de roca rígida y el modelo de roca elástica.  
..... 99

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Casos de estudio a través de la historia.....	30
Tabla 2. Configuraciones de depósito para el análisis .....	59

## RESUMEN

En el siguiente trabajo se estudia la respuesta dinámica de los depósitos de suelos producida por la propagación vertical de ondas SH, considerando que la velocidad de onda de corte del suelo varía linealmente con la profundidad.

A diferencia de otros estudios donde también se consideró una variación lineal de la velocidad de onda de corte (Gazetas, 1982; Towhata, 1996), en este trabajo se consideró el suelo como un medio viscoelástico a partir del modelo Kelvin - Voigt y se dedujo la ecuación de desplazamientos bajo este modelo. Además del caso de roca rígida también se consideró el caso de roca elástica en la deducción de las funciones de transferencia y las ecuaciones aproximadas para el periodo fundamental y la amplitud máxima.

Adicionalmente, un análisis comparativo de la respuesta dinámica de depósitos de suelos con velocidad constante y depósitos con velocidad variando linealmente en profundidad fue realizado en términos de funciones de transferencia y formas modales (considerando los primeros tres modos).

Finalmente, a partir de esta investigación se puede concluir en términos de frecuencias que con el caso de variación lineal de la velocidad se obtienen depósitos de suelos que se comportan más rígidamente que los depósitos con velocidad constante estudiados; y en términos de amplitudes se puede concluir que ciertos depósitos de suelos con variación lineal de la velocidad pueden ser reemplazados, con porcentajes de error menores al 10%, por algunos casos de depósito equivalente con velocidad constante.

Palabras clave: Respuesta dinámica unidimensional, depósito de suelo, velocidad de onda de corte, formas modales, función de transferencia, periodo fundamental, amplitud máxima.

## INTRODUCCIÓN

La respuesta dinámica de los depósitos de suelos debida a la propagación vertical de ondas de corte SH o respuesta dinámica unidimensional, ha sido un tema de estudio desde décadas atrás (Jacobsen, 1930; Ambraseys, 1959; Roesset, 1970; Dobry, Oweis & Urzua, 1976) y por su complejidad e importancia sigue siendo un tema de gran interés en la actualidad (Rovithis, Parashakis & Mylonakis, 2011; Vrettos, 2013).

En el estudio de la respuesta dinámica unidimensional de los depósitos de suelos se ha abordado la velocidad de onda de corte desde dos enfoques, considerando que esta es constante en cada estrato de suelo (Roesset, 1970; Kramer, 1996) y considerando que tiene una variación continua en toda la profundidad del depósito, ya sea en forma lineal (Gazetas, 1982; Towhata, 1996) o potencial (Ambraseys, 1959; Dobry et al. 1976; Gazetas, 1982; Towhata, 1996; Afra & Pecker, 2002; Travararou & Gazetas, 2004; Rovithis et al., 2011; Vrettos, 2013).

En adelante, en este trabajo también se hará referencia al caso de velocidad de onda de corte constante como caso convencional y al caso de velocidad de onda de corte con variación continua en profundidad (lineal, potencial, hiperbólica, exponencial, entre otros) como caso no homogéneo; dichas denominaciones son las comúnmente empleadas en la literatura técnica.

El caso no homogéneo es un modelo más próximo a la realidad que el caso convencional, de ahí la importancia de su estudio. De acuerdo con Rovithis et al. (2011), bajo ciertas condiciones tales como aquellas encontradas en depósitos de suelos blandos y de espesor considerable, los procedimientos de análisis convencionales basados en la discretización del suelo en un sistema multi estrato con propiedades constantes en cada estrato, pueden subestimar la amplificación del suelo con respecto a la respuesta del caso no homogéneo, dependiendo principalmente del contenido de frecuencia del movimiento de entrada.

Para el caso no homogéneo, las investigaciones se han realizado en su mayoría considerando el modelo de base sobre roca rígida y las ecuaciones deducidas para los desplazamientos, funciones de transferencia y frecuencias naturales han sido obtenidas, por lo general, en términos de funciones de Bessel y series de potencia.

En esta investigación se estudia el caso no homogéneo en su expresión más simple, el cual corresponde al caso de velocidad con variación lineal en profundidad. Por ser el caso más simple su solución está expresada en términos de funciones elementales y su importancia radica en que este caso brinda una mayor claridad y entendimiento de la respuesta dinámica de los depósitos de suelos no homogéneos, y de sus resultados se podrán obtener conclusiones que permitirán una mejor interpretación del comportamiento de depósitos de suelos con variaciones más complejas de la velocidad en profundidad. Por otro lado, este caso se puede aplicar individualmente por estrato de suelo con el fin de obtener variaciones más complejas de perfiles de velocidad en el depósito, incluso para generar perfiles de velocidad poco típicos.

El caso de estudio se aborda considerando la densidad del suelo y el amortiguamiento como parámetros constantes en toda la profundidad y se desarrolla para los casos de roca rígida y roca elástica.

Con el fin de estudiar los aspectos más importantes de la respuesta dinámica del caso de estudio, el presente trabajo se desarrolla de la siguiente manera:

Se inicia con la exposición de los aspectos teóricos de la respuesta dinámica unidimensional del caso convencional que se requieren para el estudio del caso de velocidad de onda de corte variando linealmente. Luego, se presenta una revisión de las investigaciones en las cuales se estudió la respuesta dinámica de depósitos de suelos no homogéneos.

Seguidamente, se deduce de forma analítica para el caso de estudio las ecuaciones de desplazamiento bajo el modelo de Kelvin - Voigt, se presenta la validación de dichas

ecuaciones y se deducen analíticamente las ecuaciones de las funciones de transferencia tanto para el caso de roca rígida como para el caso de roca elástica.

A continuación, gráficamente se comparan las formas modales del caso de estudio con el caso de velocidad constante.

Posteriormente, se presenta un análisis de las funciones de transferencia obtenidas con el caso de estudio y las funciones de transferencia obtenidas con el caso convencional, en el cual la velocidad constante se estimó para cinco casos comúnmente empleados en la práctica: velocidad mínima del depósito de suelo, velocidad que genera el mismo tiempo de viaje de la onda sísmica, velocidad promedio del depósito, velocidad que genera el mismo periodo fundamental del caso de estudio y velocidad máxima del depósito.

Luego de lo anterior, se presenta un estudio de las tendencias de las gráficas para el periodo fundamental y la amplitud del modo fundamental y se deducen ecuaciones aproximadas, prácticas y simples para el periodo y la amplitud máxima, tanto para el caso de roca rígida como para el caso de roca elástica. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo desarrollado.

## NOTACIÓN Y DEFINICIONES

$a$  = Tasa de variación de la velocidad de onda de corte con la profundidad

$G$  = Módulo de rigidez al esfuerzo cortante del material

$G_s$  = Módulo de rigidez al esfuerzo cortante del suelo

$G_r$  = Módulo de rigidez al esfuerzo cortante de la roca

$H$  = Espesor del depósito de suelo

$k^*$  = Número de onda complejo

$k_s^*$  = Número de onda complejo del suelo

$k_r^*$  = Número de onda complejo de la roca

$t$  = Variable de tiempo

$u$  = Desplazamiento horizontal

$u_s$  = Desplazamiento horizontal del suelo

$u_r$  = Desplazamiento horizontal de la roca

$v_s$  = Velocidad de onda de corte del material

$v_{ss}$  = Velocidad de onda de corte del suelo

$v_{sr}$  = Velocidad de onda de corte de la roca

$v_0$  = Velocidad de onda de corte en la superficie del depósito de suelo

$z$  = Variable de profundidad

$z_s$  = Variable de profundidad para el suelo

$z_r$  = Variable de profundidad para la roca

$\gamma$  = Deformación a cortante del material

$\gamma_s$  = Deformación a cortante del suelo

$\eta$  = Viscosidad del material

$\xi$  = Relación de amortiguamiento crítico del material

$\xi_s$  = Relación de amortiguamiento crítico del suelo

$\xi_r$  = Relación de amortiguamiento crítico de la roca

$\rho$  = Densidad del material

$\rho_s$  = Densidad del suelo

$\rho_r$  = Densidad de la roca

$\tau_{zx}$  = Esfuerzo cortante del material en el plano  $z$  y en dirección  $x$

$\tau_s$  = Esfuerzo cortante del suelo

$\omega$  = Frecuencia angular del movimiento

# 1. OBJETIVOS

## 1.1. Objetivo general

Estudiar en términos de funciones de transferencia y formas modales la respuesta dinámica unidimensional de depósitos de suelos con velocidad de onda de corte variando linealmente en profundidad y comparar dichos resultados con el caso de velocidad constante.

## 1.2. Objetivos específicos

- Deducir la ecuación de desplazamientos para el caso de velocidad variando linealmente con la profundidad considerando el modelo de sólidos de Kelvin - Voigt.
- Deducir la función de transferencia para el caso de velocidad variando linealmente con la profundidad, para los modelos de roca rígida y roca elástica.
- Comparar gráficamente las formas modales de los tres primeros modos para el caso de velocidad variando linealmente y el caso de velocidad constante.
- Comparar y analizar las funciones de transferencia del caso de velocidad variando linealmente y el caso de velocidad constante.
- Determinar una ecuación aproximada, simple y práctica para el periodo fundamental para el caso de velocidad variando linealmente con la profundidad, tanto para el caso de roca rígida como para el caso de roca elástica.

- Determinar una ecuación aproximada, simple y práctica para la amplitud máxima para el caso de velocidad variando linealmente con la profundidad, tanto para el caso de roca rígida como para el caso de roca elástica.

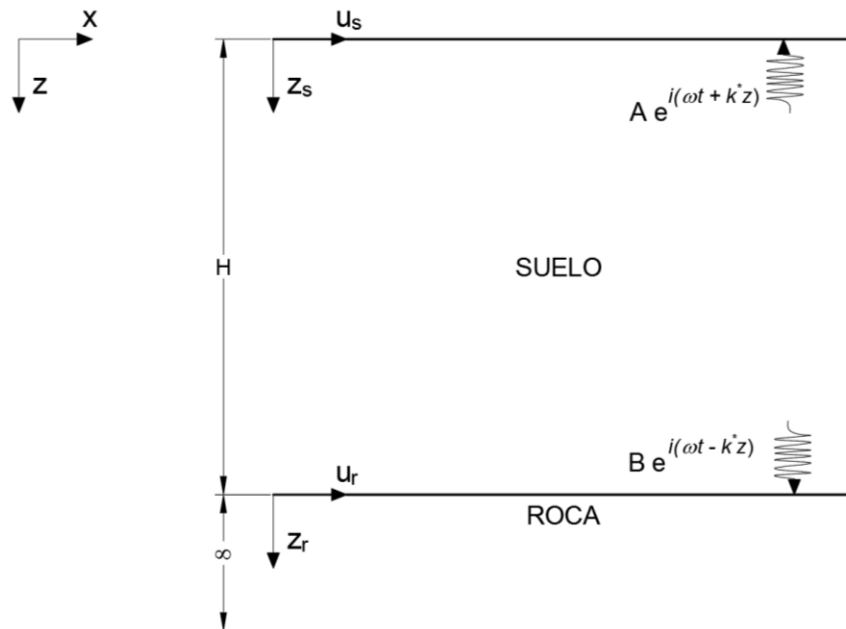
## 2. ASPECTOS TEÓRICOS DE LA RESPUESTA DINÁMICA UNIDIMENSIONAL DE DEPÓSITOS DE SUELOS CON VELOCIDAD CONSTANTE

En este capítulo se presentan los aspectos teóricos de la respuesta dinámica unidimensional de depósitos de suelos con velocidad constante, los cuales son fundamentales y aplican para el caso de velocidad de onda de corte variando linealmente con la profundidad.

La ecuación unidimensional de movimiento para una propagación vertical de ondas de corte SH corresponde a la ecuación (1):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (1)$$

En la Figura 1 se presenta esquemáticamente la convención para el desplazamiento  $u$  y la profundidad  $z$ , tanto para al suelo como para la roca.



**Figura 1. Convenciones para el desplazamiento y la profundidad, para el depósito de suelo y la roca**

El suelo y la roca son usualmente representados con el modelo de sólidos Kelvin – Voigt, para el cual la resistencia al esfuerzo cortante está dada por la suma de una componente elástica y una componente viscosa (amortiguador) como se define en la ecuación (2):

$$\tau_{zx} = G\gamma + \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (2)$$

Reemplazando la ecuación (2) en la ecuación (1) se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( G\gamma + \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \quad (3)$$

Donde:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4)$$

$$\eta = \frac{2G}{\omega} \xi \quad (5)$$

$$G = \rho v_s^2 \quad (6)$$

De acuerdo con la ecuación (6), el módulo de rigidez al esfuerzo cortante ( $G$ ) está directamente relacionado con la velocidad de onda de corte ( $v_s$ ). Entonces, si se considera como un parámetro constante el módulo de rigidez al esfuerzo cortante en la ecuación (3) y se define un movimiento de entrada en la base en la forma de desplazamientos armónicos horizontales, generando ondas de corte propagándose verticalmente, se obtiene la solución para el caso de velocidad de onda de corte constante, la cual se presenta a continuación:

$$u(z, t) = Ae^{i(\omega t + k^*z)} + Be^{i(\omega t - k^*z)} \quad (7)$$

Donde:

$$k^* = \frac{\omega}{v_s (1 + i\xi)} \quad (8)$$

$A$  y  $B$  son las amplitudes de las ondas viajando en dirección  $-z$  (hacia arriba) y en dirección  $+z$  (hacia abajo), respectivamente (Véase Figura 1).

### 2.1. Desplazamientos para el modelo de base sobre roca rígida

De acuerdo con Kramer (1996, p.264) el modelo de base sobre roca rígida establece que cualquier onda viajando hacia abajo en el suelo será completamente reflejada de regreso hacia la superficie del depósito por la roca, por lo tanto, toda la energía elástica de las ondas quedará atrapada en el depósito de suelo.

En otras palabras, este modelo considera la interfaz suelo – roca como un extremo fijo y la onda incidente es reflejada en su totalidad.

Debido a que en este modelo solo se considera el movimiento del suelo como un medio aislado, éste es el modelo usualmente empleado para determinar las frecuencias naturales y las formas modales.

En definitiva, los desplazamientos debido a la propagación vertical de ondas de corte en cada estrato de suelo para el modelo de base sobre roca rígida se encuentran determinados por las siguientes expresiones:

$$u_s(z_s, t) = A_s e^{i(\omega t + k_s^* z_s)} + B_s e^{i(\omega t - k_s^* z_s)} \quad (9)$$

$$k_s^* = \frac{\omega}{v_{ss}^*} \quad (10)$$

$$v_{ss}^* = v_{ss}(1 + i\xi_s) \quad (11)$$

## 2.2. Función de transferencia para el modelo de base sobre roca rígida

La función de transferencia describe la relación de las amplitudes de los desplazamientos entre dos puntos seleccionados. Si estos dos puntos se toman como la superficie del depósito de suelo ( $z = 0$ ) y la interfaz suelo - roca ( $z = H$ ) se obtiene:

$$F(\omega) = \frac{u_s(0, t)}{u_s(H, t)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega H}{v_{ss}^*}\right)} \quad (12)$$

El módulo de la función de transferencia corresponde a la función de amplificación:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{\omega H}{v_{ss}^*}\right)\right|} \quad (13)$$

Con la función de amplificación se determinan las máximas amplitudes de desplazamiento que se pueden presentar en el depósito de suelo. Adicionalmente, las frecuencias en las cuales se dan dichos máximos corresponden a las frecuencias naturales.

## 2.3. Desplazamientos para el modelo de base sobre roca elástica

De acuerdo con Kramer (1996, p.264) el modelo de roca elástica establece que una onda viajando hacia abajo que alcanza la interfaz suelo - roca será reflejada solo parcialmente; parte de su energía será transmitida a través de la interfaz para continuar viajando hacia abajo a través de la roca. Si la roca se extiende a gran profundidad, suficiente para que ondas reflejadas de cualquier profunda interfaz no retornen a la interfaz suelo - roca prontamente, o con suficiente amplitud para influenciar la respuesta del depósito de

suelo, la energía elástica de estas ondas será efectivamente removida del depósito de suelo. Esta es una forma de amortiguamiento que se denomina por radiación y causa que las amplitudes en la superficie del depósito sean menores que aquellas para el caso de roca rígida.

En este modelo los desplazamientos debido a la propagación vertical de ondas de corte en el suelo siguen correspondiendo a los desplazamientos de la ecuación (9), pero adicionalmente se determinan los desplazamientos en la roca a partir de las siguientes expresiones:

$$u_r(z_r, t) = A_r e^{i(\omega t + k_r^* z_r)} + B_r e^{i(\omega t - k_r^* z_r)} \quad (14)$$

$$k_r^* = \frac{\omega}{v_{sr}^*} \quad (15)$$

$$v_{sr}^* = v_{sr}(1 + i\xi_r) \quad (16)$$

#### 2.4. Función de transferencia para el modelo de base sobre roca elástica

La función de transferencia para este modelo se define como la relación entre los desplazamientos en la superficie del suelo y los desplazamientos obtenidos en la superficie de la roca cuando el depósito de suelo no está presente. Se obtiene entonces la función de transferencia que se presenta en la ecuación (17):

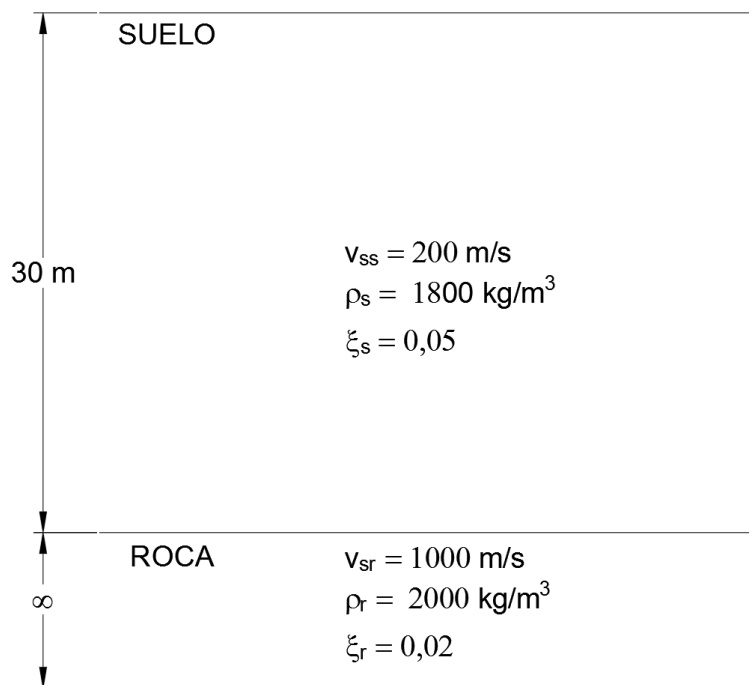
$$FT(\omega) = \frac{2}{(1 + \alpha_z^*) e^{ik_s^* H} + (1 - \alpha_z^*) e^{-ik_s^* H}} \quad (17)$$

Donde  $\alpha_z^*$  es la impedancia entre el suelo y la roca, como se muestra en la ecuación (18):

$$\alpha_z^* = \frac{\rho_s v_{ss}^*}{\rho_r v_{sr}^*} \quad (18)$$

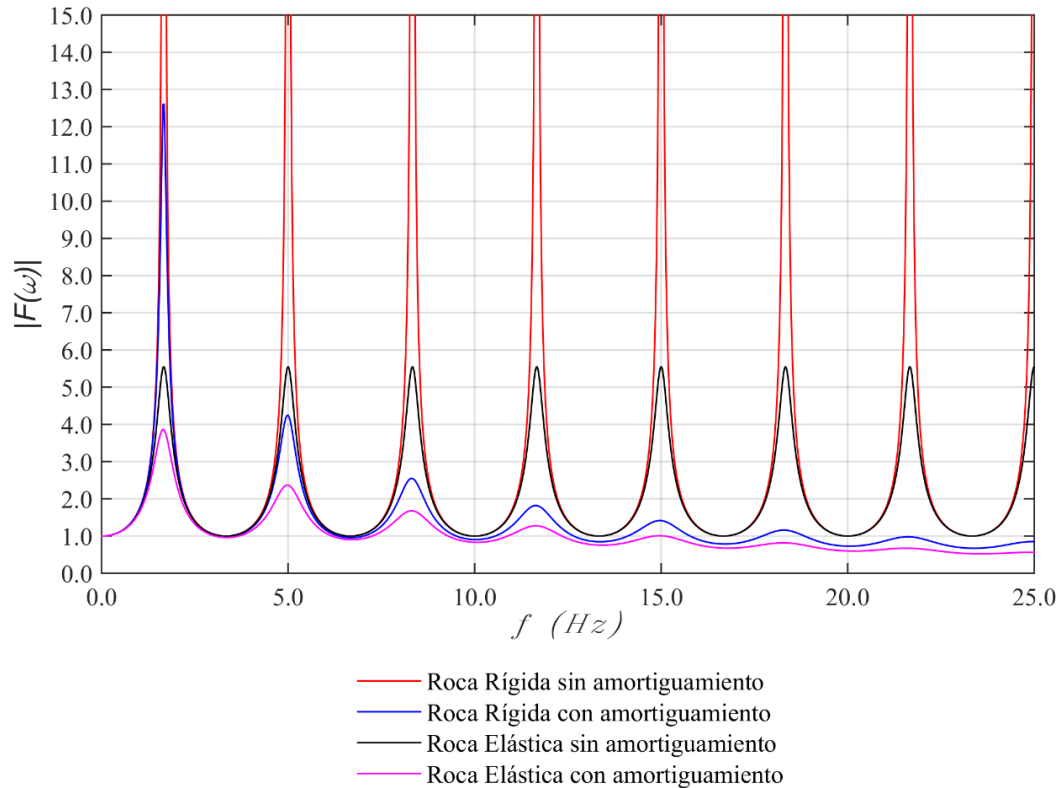
## 2.5. Efectos de considerar el modelo de roca rígida y el modelo de roca elástica

Los efectos de considerar el modelo de roca rígida y el modelo de roca elástica se pueden evidenciar fácilmente al comparar las gráficas de las funciones de transferencia de ambos modelos. Para este análisis comparativo se tomará como caso de estudio el depósito de suelo que se presenta en la Figura 2:



**Figura 2. Esquema depósito de suelo de un solo estrato**

Las funciones de transferencia para este depósito de suelo se presentan en la Figura 3:



**Figura 3. Comparación funciones de transferencia para los modelos de roca rígida y roca elástica – Caso velocidad de onda de corte constante**

En la Figura 3 se puede observar un cambio muy significativo en el valor de la amplitud cuando se comparan los casos de roca rígida con los casos de roca elástica. Para los casos con amortiguamiento se puede observar que la función de transferencia pasa de tener un valor máximo cercano a 13 para el caso de roca rígida a tener un valor máximo cercano a 4 para el caso de roca elástica.

Adicionalmente, se observa para el caso sin amortiguamiento, que en el caso de roca rígida la amplitud tiende a infinito, en cambio en el caso de roca elástica la amplitud máxima es cercana a un valor de 6; el hecho de que no tienda a infinito se debe al fenómeno de amortiguamiento por radiación, como se explicó anteriormente.

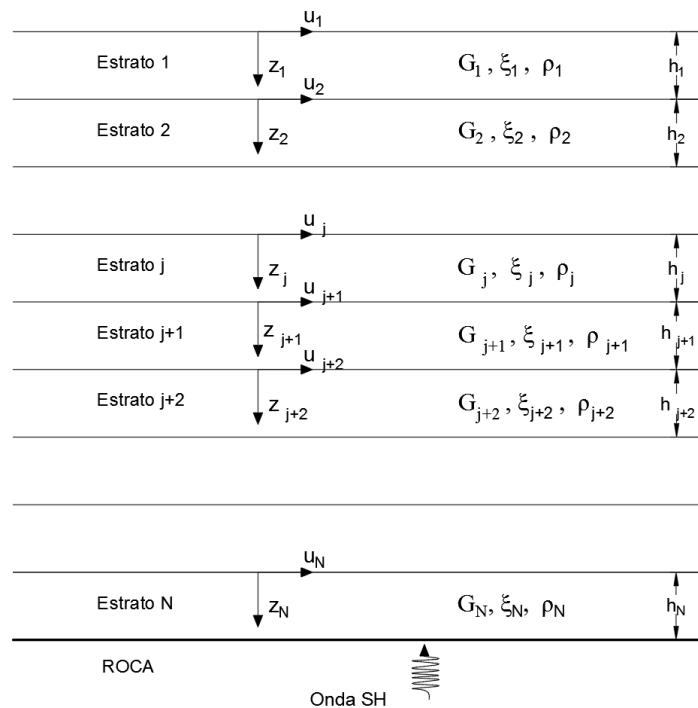
Finalmente, es importante resaltar que los valores máximos de ambos modelos se dan en frecuencias muy similares, pero no exactamente en las mismas frecuencias.

### 3. RESPUESTA DINÁMICA UNIDIMENSIONAL DE DEPÓSITOS DE SUELOS CON RIGIDEZ VARIANDO CONTINUAMENTE CON LA PROFUNDIDAD

#### 3.1. Aspectos Teóricos

El módulo de rigidez al esfuerzo cortante del suelo ( $G_s$ ) se encuentra determinado por la densidad ( $\rho_s$ ) y la velocidad de onda de corte ( $v_{ss}$ ), como se establece en la ecuación (6); es por esta razón que es posible hablar de la rigidez del suelo en términos de velocidad de onda de corte o de módulo de rigidez al esfuerzo cortante.

Convencionalmente la respuesta dinámica de los depósitos de suelos se ha llevado a cabo considerando que el depósito se encuentra dividido en varias capas o estratos, donde cada capa o estrato posee un valor constante de densidad ( $\rho_s$ ), velocidad de onda de corte ( $v_{ss}$ ) o módulo de rigidez al esfuerzo cortante ( $G_s$ ), y amortiguamiento ( $\xi_s$ ), como se muestra en la Figura 4.



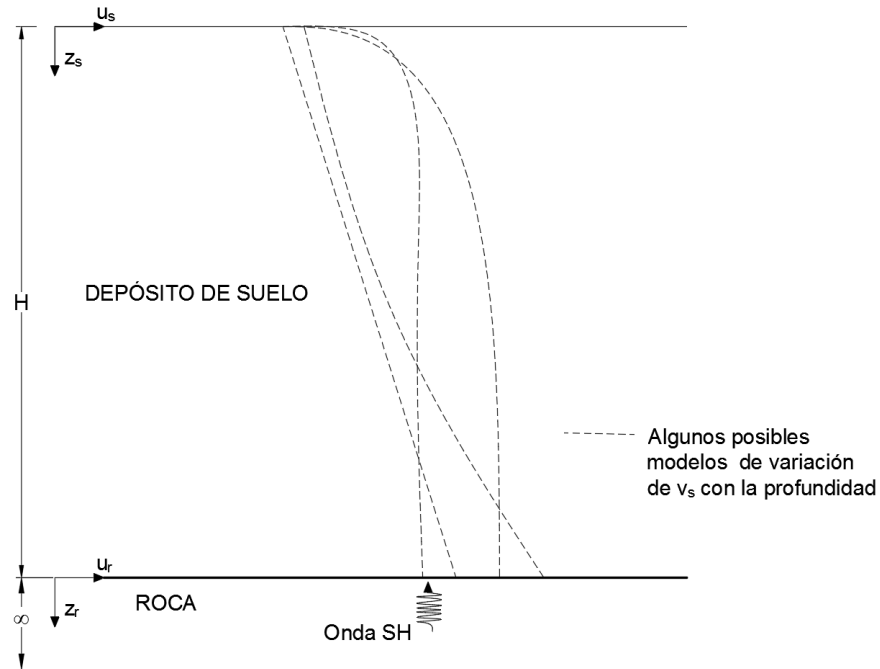
**Figura 4. Modelo depósito de suelo estratificado**

Sin embargo, la rigidez del suelo se encuentra determinada por muchos factores como lo son el tipo de suelo, la presión efectiva sobre éste y el grado de consolidación y cementación. Dichos factores se toman en cuenta en la respuesta dinámica del suelo al considerar que la rigidez presenta una variación continua con la profundidad. Towhata (1996) encontró que la velocidad de onda de corte y el módulo de rigidez al esfuerzo cortante varían más continuamente con la profundidad incluso cuando el tipo de suelo cambia de cohesivo a no cohesivo.

Según Idriss & Seed (1968), en una capa de suelo compuesta principalmente de suelos cohesivos se podría considerar que el módulo de rigidez al esfuerzo cortante es uniforme. Pero para un estrato compuesto principalmente de suelos no cohesivos el módulo de rigidez variará con la profundidad y de acuerdo con resultados experimentales los módulos de rigidez de suelos no cohesivos varían con la presión de confinamiento a potencias de  $1/3$  o  $1/2$ .

Para Dobry et al. (1976) una variación de la velocidad de onda de corte de la forma  $V = V_0 z^{p/2}$ , siendo  $V_0$  la velocidad de onda de corte en superficie,  $z$  la variable de profundidad y  $p$  variando entre  $0 \leq p < 2$ , es representativa de un suelo normalmente consolidado. Por otro lado Afra & Pecker (2002) exponen que variaciones de la rigidez de la forma  $G = G_0 \left(\frac{z}{H}\right)^P$ , siendo  $G_0$  el módulo de rigidez en la base del depósito,  $H$  el espesor del depósito y  $z$  la variable de profundidad son encontradas en depósitos de suelos no cohesivos, para los cuales el valor de  $P$  varía de 0,45 a 0,60 o arcillas normalmente consolidadas para las cuales  $P$  varía entre 0,8 y 1,0.

Algunos posibles modelos para la velocidad variando continuamente con la profundidad en el depósito de suelo se presentan esquemáticamente en la Figura 5.



**Figura 5. Algunos posibles modelos de depósitos de suelos con variación continua de la velocidad de onda de corte en profundidad**

Para considerar el caso de rigidez variando con la profundidad, se reemplaza en la ecuación (3) el valor de  $G$  por la ecuación que represente la variación de la rigidez con la profundidad, ya sea en términos de módulo de rigidez al esfuerzo cortante o de velocidad de onda de corte, y se resuelve dicha ecuación diferencial.

### 3.2. Casos de estudio a través de la historia

A través de la historia varios autores han estudiado la respuesta dinámica unidimensional de los depósitos de suelos considerando que la rigidez varía con la profundidad, como se presenta en la Tabla 1:

**Tabla 1. Casos de estudio a través de la historia**

Autor (es)	Modelo de estudio	Deducciones	Tipo de Base
Ambraseys (1959)	$G(y) = G \left( \frac{y}{h'} \right)$ <p><math>G</math>: Módulo de rigidez en la superficie del depósito  <math>h'</math>: Altura por encima del depósito de suelo en la cual la proyección del perfil de rigidez es igual a cero  <math>y</math>: Variable de profundidad</p>	Ecuación de desplazamientos y ecuación de las frecuencias naturales no amortiguadas, ambas en términos de funciones de Bessel.	No se define en el documento.
Idriss & Seed (1968)	$G = ky^p$ <p><math>k</math>: Constante  <math>y</math>: Variable de profundidad  <math>p \leq 0,5</math></p>	Ecuación de desplazamientos y ecuación de frecuencias naturales, ambas en términos de funciones de Bessel.	No se define en el documento.
Dobry, Whitman & Roesset (1971) [Como se cita en Dobry et al. (1976)]	$V = V_0 z^{p/2}$ <p><math>V_0</math>: Velocidad de onda de corte en superficie  <math>z</math>: Variable de profundidad  <math>0 \leq p &lt; 2</math></p>	Ecuación de desplazamientos y ecuación del periodo fundamental no amortiguado, ambas en términos de funciones de Bessel.	No se define en el documento.
Urzua (1974) [Como se cita en Dobry et al. (1976)]	$\frac{G}{G_H} = k^2 + \frac{1 - k^2}{H} z$ $k = \sqrt{\frac{G_0}{G_H}}$ <p><math>G_0</math>: Módulo de rigidez al esfuerzo cortante en superficie  <math>G_H</math>: Módulo de rigidez al esfuerzo cortante en la base del depósito  <math>H</math>: Espesor del depósito  <math>z</math>: Variable de profundidad.  <math>k &lt; 1</math>: El módulo incrementa con la profundidad  <math>k &gt; 1</math>: El módulo decrece con la profundidad.</p>	Ecuación de desplazamientos y ecuación del periodo fundamental no amortiguado, ambas en términos de funciones de Bessel.	No se define en el documento.

Autor (es)	Modelo de estudio	Deducciones	Tipo de Base
Gazetas (1982)	$c = c_0 (1 + \mu z)^m$ <p><math>c_0</math>: Velocidad de onda de corte en superficie  <math>\mu</math>: Constante positiva  <math>m = 1, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}</math>  <math>z</math>: Variable de profundidad</p>	<p>Ecuación de desplazamientos, periodos naturales no amortiguados y formas modales en términos de funciones de Bessel para <math>m = \frac{1}{4}</math> y en términos de funciones elementales para <math>m = 1</math> y <math>\frac{2}{3}</math>.  Para <math>m = 1</math> presentó la ecuación de la función de transferencia considerando el caso de roca rígida.</p>	Roca Rígida
Towhata (1996)	$G = A (z + z_0)^n$ <p><math>z_0</math>: Módulo de rigidez al esfuerzo cortante en superficie  <math>A</math>: Constante  <math>z</math>: Variable de profundidad  <math>0 &lt; n &lt; \infty</math></p>	<p>Ecuación de desplazamientos y periodos naturales no amortiguados.  Para los casos <math>0 &lt; n &lt; 2</math> y <math>n &gt; 2</math> las soluciones fueron obtenidas en términos de funciones de Bessel.</p>	Roca Rígida y Roca Elástica
Afra & Pecker (2002)	$G = G_0 \left(\frac{z}{H}\right)^p$ <p><math>G_0</math>: Módulo de rigidez en la base del depósito  <math>H</math>: espesor del depósito  <math>z</math>: Variable de profundidad  <math>0 \leq p &lt; 2</math></p>	<p>En términos de funciones de Bessel presentaron las ecuaciones para el desplazamiento, las frecuencias naturales, la función de transferencia considerando el caso de roca elástica, la ecuación para la máxima amplificación y la ecuación para las amplitudes en los valles.</p>	Roca Elástica
Travasarou & Gazetas (2004)	$v_{ss} = mz^{2/3}$ <p><math>m</math>: Constante  <math>z</math>: Variable de profundidad</p>	<p>Ecuación de desplazamientos en términos de funciones de Bessel.  Ecuación de las frecuencias naturales, formas modales y función de amplificación en términos de funciones elementales.</p>	Roca Rígida
Rovithis et al. (2011)	$V_s = V_H \left(b + (1 - b) \frac{z}{H}\right)^n$ $b = \left(\frac{V_0}{V_H}\right)^{1/n}$ <p><math>V_0</math>: Velocidad de onda de corte en superficie</p>	<p>Ecuación de desplazamientos, formas modales, frecuencias naturales y la función de transferencia, dichas ecuaciones expresadas en términos de funciones de Bessel.</p>	Roca Rígida

Autor (es)	Modelo de estudio	Deducciones	Tipo de Base
	$V_H$ : Velocidad de onda de corte en la base del depósito $z$ : Variable de profundidad $0 < n < 1$		
Vrettos (2013)	$G(z) = G_0 + (G_\infty - G_0)(1 - e^{-\alpha z})$ $G_0$ : Módulo de rigidez a cortante en superficie $G_\infty$ : Módulo de rigidez a una profundidad infinita $z$ : Variable de profundidad	<p>Ecuación de desplazamientos y ecuación para las frecuencias naturales, ambas en términos de series de potencia.</p> <p>Presentó en términos de series de potencia la ecuación de la función de amplificación para el caso de roca elástica y una ecuación aproximada para la frecuencia fundamental.</p>	Roca Elástica

Todos los anteriores autores consideraron la densidad y el amortiguamiento como un parámetro constante en el depósito de suelo.

#### 4. RESPUESTA DINÁMICA UNIDIMENSIONAL DE DEPÓSITOS DE SUELOS CON VELOCIDAD VARIANDO LINEALMENTE CON LA PROFUNDIDAD - CASO DE ESTUDIO

El caso de velocidad de onda de corte variando linealmente con la profundidad es el caso más simple cuando se considera una variación continua de la rigidez con la profundidad. Su estudio permitirá obtener una mayor claridad y entendimiento de la respuesta dinámica de suelos con velocidad variando en profundidad y de sus resultados se obtendrán conclusiones que permitirán una mejor interpretación de la respuesta dinámica de suelos con configuraciones más complejas de velocidad.

Por otro lado, el caso de velocidad de onda de corte variando linealmente en profundidad al ser aplicado en cada estrato de suelo permite obtener perfiles más complejos de velocidad en profundidad, por lo que podrá ser aplicado para generar perfiles de velocidad de diferentes geometrías en el depósito de suelo, lo que se traduce en la posibilidad de generar tanto los perfiles típicos como los perfiles atípicos.

En esta investigación se estudia la respuesta dinámica de depósitos de suelos considerando que la velocidad de onda de corte varía linealmente en profundidad de acuerdo con la siguiente expresión:

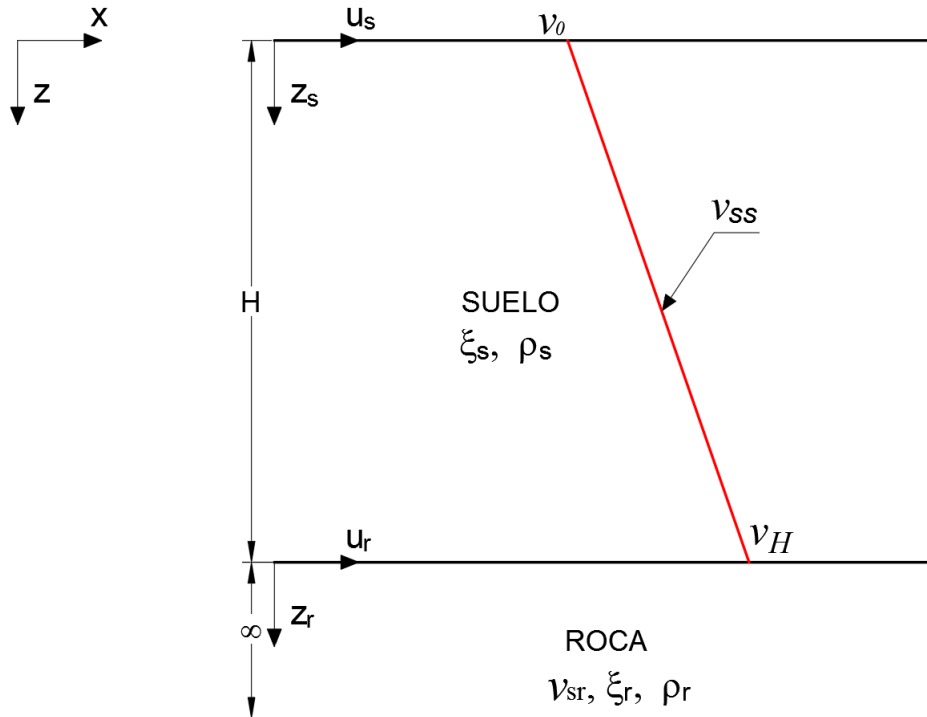
$$v_{ss} = az + v_0 \quad (19)$$

Donde:

$a$  = Tasa de variación de la velocidad de onda de corte con la profundidad

$v_0$  = Velocidad de onda de corte en la superficie del depósito

Adicionalmente, se considera la densidad y el amortiguamiento tanto del suelo como de la roca como parámetros constantes y para la roca se considera una velocidad de onda de corte constante. El caso de estudio se presenta esquemáticamente en la Figura 6.



**Figura 6. Representación gráfica del caso de estudio**

El amortiguamiento tanto del suelo como de la roca se considera como un amortiguamiento viscoelástico a partir del modelo de sólidos Kelvin - Voigt, como se define en la ecuación (2).

Como se había mencionado en el numeral 3.2, Gazetas (1982) estudió el caso de velocidad de onda de corte variando linealmente con la profundidad considerando la densidad constante y el amortiguamiento igual a cero. En su investigación dedujo la ecuación de desplazamientos, formas modales y frecuencias naturales para el caso no amortiguado. Adicionalmente, dedujo la ecuación para la función de transferencia considerando el modelo de base sobre roca rígida y comparó el periodo fundamental obtenido con el caso de velocidad de estudio (para diferentes valores de la constante  $\mu$ ) con el caso de velocidad constante, donde la velocidad constante se determinó como la velocidad en la mitad del depósito de suelo.

Por otro lado, Towhata (1996) estudió indirectamente el caso de velocidad lineal al considerar el módulo de rigidez al esfuerzo cortante variando en forma cuadrática. En su

investigación consideró la densidad constante y amortiguamiento del suelo nulo. Presentó la ecuación para los desplazamientos y los periodos naturales, las cuales coinciden con las ecuaciones presentadas por Gazetas (1982).

A diferencia de los autores anteriormente mencionados, en esta investigación se deduce la ecuación de desplazamientos considerando un amortiguamiento viscoelástico a través del modelo Kelvin - Voigt y se presentan las ecuaciones de desplazamientos para el caso de un depósito de suelo estratificado con velocidad lineal en cada estrato. Se deducen también las ecuaciones analíticas de la función de transferencia tanto para el modelo de roca rígida como para el modelo de roca elástica. Adicionalmente, para el caso de roca elástica se realiza un análisis comparativo de las funciones de transferencia obtenidas para el caso de estudio con las funciones de transferencia obtenidas para el caso de velocidad constante, donde la velocidad constante se determina por medio de cinco metodologías comúnmente usadas en la práctica.

Así mismo, se realiza un análisis comparativo de las formas modales obtenidas para el caso de estudio y el caso de velocidad constante, considerando los tres primeros modos de vibración. Finalmente, se deducen ecuaciones sencillas y prácticas para el periodo fundamental y la amplitud de desplazamientos máxima, tanto para el modelo de roca rígida como para el modelo de roca elástica.

## 5. SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN UNIDIMENSIONAL DE ONDAS CONSIDERANDO VARIACIÓN LINEAL DE LA VELOCIDAD DE ONDA DE CORTE

### 5.1. Dedución analítica de la ecuación de desplazamientos

Al considerar en la ecuación (3) que la rigidez ( $G_s$ ) varía con la profundidad se obtiene la siguiente expresión:

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = \frac{\partial (G_s(z) \gamma_s)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial \gamma_s}{\partial t} \right) \quad (20)$$

Reemplazando la ecuación (4) y ecuación (5) en la ecuación (20) se llega a la siguiente expresión:

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( G_s(z) \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \frac{2G_s(z)}{\omega} \xi_s \right) \frac{\partial^2 u_s}{\partial t \partial z} \right) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = & G_s(z) \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} + \frac{\partial G_s(z)}{\partial z} \frac{\partial u_s}{\partial z} + \left( \frac{2G_s(z)}{\omega} \xi_s \right) \frac{\partial^3 u_s}{\partial t \partial z^2} \\ & + \left( \frac{2\xi_s}{\omega} \right) \frac{\partial G_s(z)}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 u_s}{\partial t \partial z} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Para ondas armónicas los desplazamientos pueden ser escritos como:

$$u_s(z, t) = U e^{i\omega t} \quad (23)$$

Derivando la ecuación (23):

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = -\omega^2 U e^{i\omega t} \quad (24)$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} e^{i\omega t} \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} e^{i\omega t} \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial t \partial z} = i\omega e^{i\omega t} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^3 u_s}{\partial t \partial z^2} = i\omega e^{i\omega t} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (28)$$

Reemplazando (24), (25), (26), (27) y (28) en (22) se llega a:

$$G_s(z)(1 + 2i\xi_s) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (1 + 2i\xi_s) \frac{\partial G_s(z)}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} + \rho_s \omega^2 U = 0 \quad (29)$$

Si se considera entonces que la velocidad de onda de corte ( $v_{ss}$ ) varía linealmente con la profundidad de acuerdo con la ecuación (19), se obtiene entonces a partir de la velocidad de onda de corte ( $v_{ss}$ ), un módulo de cortante ( $G_s$ ) que varía con la profundidad de acuerdo a la siguiente expresión:

$$G_s = \rho_s v_{ss}^2 = \rho_s (az + v_0)^2 \quad (30)$$

y

$$\frac{\partial G_s(z)}{\partial z} = 2a\rho_s (az + v_0) \quad (31)$$

Reemplazando (30) y (31) en (29) se obtiene:

$$(az + v_0)^2(1 + 2i\xi_s) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2a (az + v_0) * (1 + 2i\xi_s) \frac{\partial U}{\partial z} + \omega^2 U = 0 \quad (32)$$

Si se considera:

$$U = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (33)$$

Entonces:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} \quad (35)$$

Reemplazando (33), (34) y (35) en (32) se llega a la siguiente expresión:

$$(az + v_0)^2(1 + 2i\xi_s) \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} + 2a (az + v_0) * (1 + 2i\xi_s) \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \omega^2 \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (36)$$

Definiendo  $V$  como:

$$V = (az + v_0)^{r+1/2} \quad (37)$$

Se obtiene la siguiente solución para la ecuación diferencial (32):

$$U = C_1 (az + v_0)^{r-1/2} + C_2 (az + v_0)^{-r-1/2} \quad (38)$$

Donde:

$$r = \frac{\sqrt{[-4\omega^2 + a^2(1 + 2i\xi_s)] (1 + 2i\xi_s)}}{2a(1 + 4\xi_s^2)} * (1 - 2i\xi_s) \quad (39)$$

Reemplazando (38) en (23) se obtiene:

$$u_s(z, t) = [C_1 (az + v_0)^{r-1/2} + C_2 (az + v_0)^{-r-1/2}] e^{i\omega t} \quad (40)$$

Donde:

$C_1, C_2$  = Constantes de integración que se determinan a partir de las condiciones de frontera.

La ecuación (40) corresponde a la solución de la ecuación unidimensional de propagación de onda considerando variación lineal de la velocidad de onda de corte.

## 5.2. Deducción de la amplitud de las ondas de corte en superficie

Una de las condiciones de frontera se debe al hecho que las ondas de corte al llegar a la superficie no transmiten ningún esfuerzo, toda la amplitud del esfuerzo es reflejada, por lo anterior el esfuerzo cortante desaparece en superficie:

$$\tau(0, t) = G_s(0) \frac{\partial u_s(0, t)}{\partial z} + \eta \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_s(0, t)}{\partial z} \right) = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial z} = [C_1 a \left( r - \frac{1}{2} \right) (az + v_0)^{r-\frac{3}{2}} e^{i\omega t} + C_2 a \left( -r - \frac{1}{2} \right) (az + v_0)^{-r-\frac{3}{2}} e^{i\omega t}] \quad (42)$$

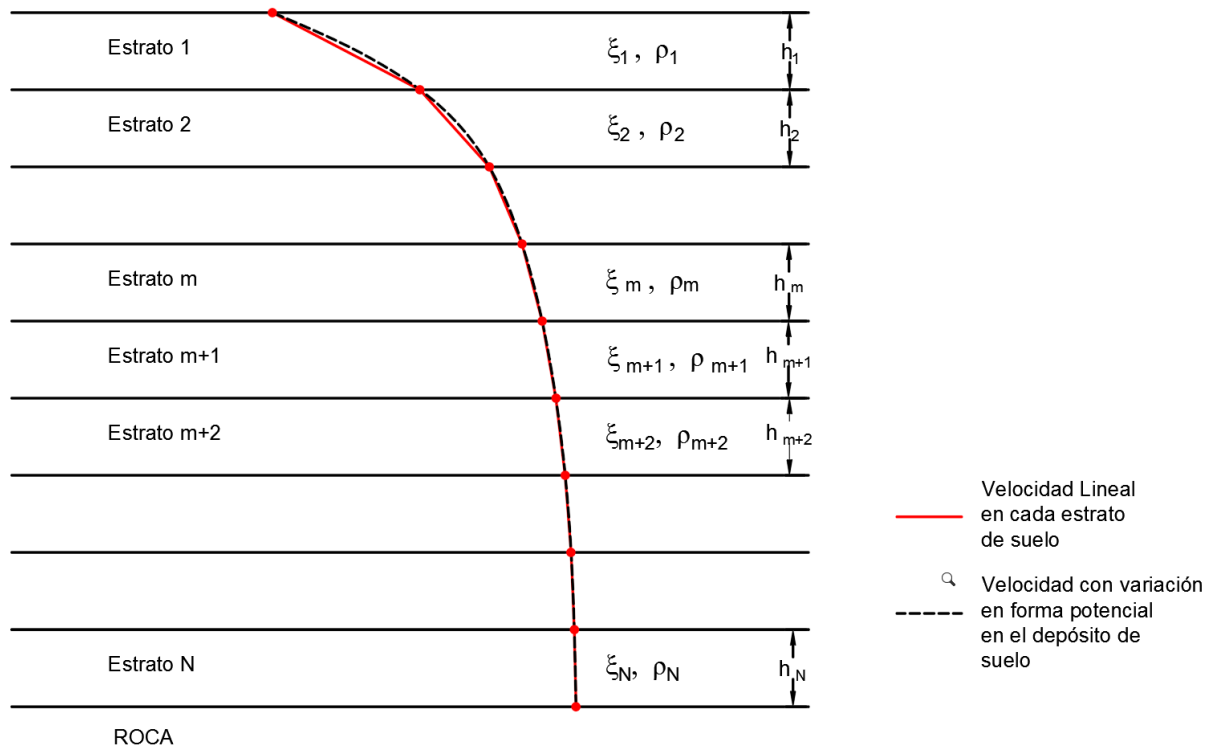
$$\begin{aligned} \tau(0, t) &= \rho_s (v_0)^2 (1 + 2i\xi_s) \left[ C_1 a \left( r - \frac{1}{2} \right) (v_0)^{r-\frac{3}{2}} + C_2 a \left( -r - \frac{1}{2} \right) (v_0)^{-r-\frac{3}{2}} \right] e^{i\omega t} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

De la ecuación (43) se obtiene para la superficie la amplitud  $C_2$  en términos de  $C_1$ :

$$C_2 = \frac{-C_1 \left( r - \frac{1}{2} \right) (v_0)^{2r}}{\left( -r - \frac{1}{2} \right)} \quad (44)$$

### 5.3. Deducción de la amplitud de las ondas entre estratos de suelos ( $C_{1m}, C_{2m}$ )

El caso de velocidad de onda de corte variando linealmente con la profundidad se puede aplicar de manera particular a cada estrato de suelo con el fin de obtener un perfil de velocidad que varíe en forma potencial o en formas más complejas en el depósito de suelo, como se muestra en la Figura 7.



**Figura 7. Esquema suelo estratificado con variación lineal de la velocidad en cada estrato de suelo**

Vrettos (2013) estudió el caso de un suelo estratificado y comparó la función de amplificación sobre roca elástica obtenida con las siguientes tres diferentes aproximaciones del módulo de rigidez al esfuerzo cortante: módulo variando exponencialmente en profundidad en el depósito de suelo, módulo de rigidez constante en cada estrato y módulo de rigidez variando linealmente en cada estrato de suelo. Encontró que las funciones de amplificación daban muy similares, pero la que mejor se ajustaba al caso exponencial era la función de amplificación obtenida considerando un módulo de rigidez variando linealmente en cada estrato de suelo. Adicionalmente, resaltó

que para depósitos de suelos blandos con valores de rigidez pequeños en la superficie y fuertes variaciones de la rigidez en profundidad, el caso de módulo de rigidez variando linealmente en cada estrato se ajusta mejor a los resultados del caso exponencial que el caso convencional.

Para el caso de velocidad lineal las amplitudes de onda  $C_{1m}$  y  $C_{2m}$  en cada estrato de suelo, se determinan verificando la compatibilidad de esfuerzos y desplazamientos entre estratos de suelo.

Considerando el esquema de suelo estratificado que se presenta en la Figura 7 y valores diferentes en cada estrato para las variables  $a$ ,  $v_0$ ,  $\xi$  y  $\rho$ , se evaluó la compatibilidad de esfuerzos y desplazamientos entre estratos y se obtuvo las siguientes amplitudes de onda en términos del estrato suprayacente:

$$C_{1m+1} = \frac{C_{1m} (a_m h_m + v_{0m})^{(r_m - \frac{1}{2})} + C_{2m} (a_m h_m + v_{0m})^{(-r_m - \frac{1}{2})} - C_{2m+1} (v_{0m+1})^{(-r_{m+1} - \frac{1}{2})}}{(v_{0m+1})^{(r_{m+1} - \frac{1}{2})}} \quad (45)$$

$$C_{2m+1} = C_{1m} * \left[ \frac{D}{F} \right] + C_{2m} * \left[ \frac{E}{F} \right] \quad (46)$$

$$D = \rho_m a_m (1 + 2i\xi_m) \left( r_m - \frac{1}{2} \right) (a_m h_m + v_{0m})^{(r_m + \frac{1}{2})} - a_{m+1} \frac{(a_m h_m + v_{0m})^{(r_m - \frac{1}{2})}}{(v_{0m+1})^{(r_{m+1} - \frac{1}{2})}} \rho_{m+1} (1 + 2i\xi_{m+1}) \left( r_{m+1} - \frac{1}{2} \right) (v_{0m+1})^{(r_{m+1} + \frac{1}{2})} \quad (47)$$

$$E = \rho_m a_m (1 + 2i\xi_m) \left( -r_m - \frac{1}{2} \right) (a_m h_m + v_{0m})^{(-r_m + \frac{1}{2})} - a_{m+1} \frac{(a_m h_m + v_{0m})^{(-r_m - \frac{1}{2})}}{(v_{0m+1})^{(r_{m+1} - \frac{1}{2})}} \rho_{m+1} (1 + 2i\xi_{m+1}) \left( r_{m+1} - \frac{1}{2} \right) (v_{0m+1})^{(r_{m+1} + \frac{1}{2})} \quad (48)$$

$$F = -2 (r_{m+1}) (\rho_{m+1}) (1 + 2i\xi_{m+1}) (a_{m+1}) (v_{0\ m+1})^{(-r_{m+1}+\frac{1}{2})} \quad (49)$$

#### 5.4. Deducción de la amplitud de las ondas en la roca ( $C_{1r}, C_{2r}$ )

Para la interfaz suelo – roca, se verifica la compatibilidad de esfuerzos y desplazamientos teniendo en cuenta para la roca una velocidad de onda de corte constante. Por lo anterior, para los desplazamientos en la roca se trabaja con la ecuación (14).

Realizando compatibilidad de esfuerzos y desplazamientos en la interfaz suelo-roca, se obtienen las siguientes amplitudes de onda de corte para la roca:

$$C_{1r} = C_{1N} (a_N h_N + v_{0N})^{(r_N - \frac{1}{2})} + C_{2N} (a_N h_N + v_{0N})^{(-r_N - \frac{1}{2})} - C_{2r} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & C_{2r} \\ = & C_{1N} \left[ \frac{-\rho_N (a_N h_N + v_{0N})^{(r_N + \frac{1}{2})} (1 + 2i\xi_N) \left(r_N - \frac{1}{2}\right) a_N + G_r^* i k_r^* (a_N h_N + v_{0N})^{(r_N - \frac{1}{2})}}{2 G_r^* i k_r^*} \right] \\ & + C_{2N} \left[ \frac{-\rho_N (a_N h_N + v_{0N})^{(-r_N + \frac{1}{2})} (1 + 2i\xi_N) \left(-r_N - \frac{1}{2}\right) a_N + G_r^* i k_r^* (a_N h_N + v_{0N})^{(-r_N - \frac{1}{2})}}{2 G_r^* i k_r^*} \right] \end{aligned} \quad (51)$$

Donde el subíndice  $N$  corresponde a la última capa de suelo (Véase Figura 7).

## 6. VALIDACIÓN DE LAS ECUACIONES DEDUCIDAS PARA EL CASO DE VELOCIDAD VARIANDO LINEALMENTE CON LA PROFUNDIDAD

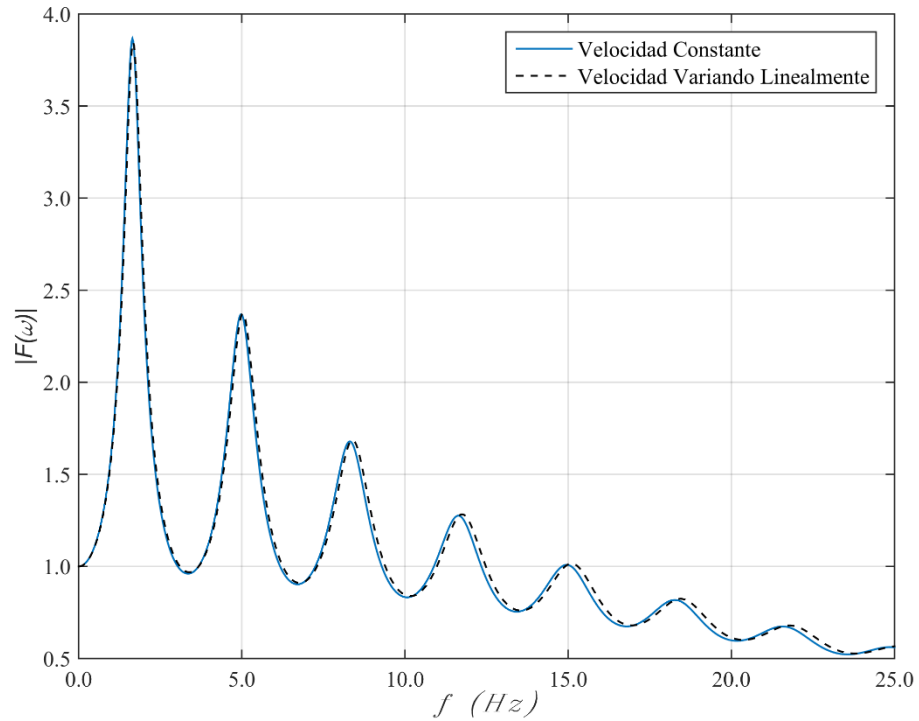
Si se tiende a cero la tasa de variación de la velocidad con la profundidad ( $a$ ) en la ecuación (40), la velocidad de onda de corte ( $v_{ss}$ ) se aproxima a un valor constante, por lo tanto los resultados obtenidos con las ecuaciones deducidas (ecuaciones (44), (45), (46), (50) y (51)) deben ser muy similares a los resultados obtenidos con el caso de velocidad constante. Esta validación se realizará por medio de dos casos, en el primer caso se considerará un solo estrato de suelo y en el segundo caso se considerará un suelo estratificado.

### 6.1. Validación No.1: Un solo estrato de suelo

Para este caso se considerará el depósito de suelo que se presenta en la Figura 2.

En la herramienta de software Matlab se desarrolló el algoritmo para el caso de velocidad constante y el caso de velocidad variando linealmente con la profundidad.

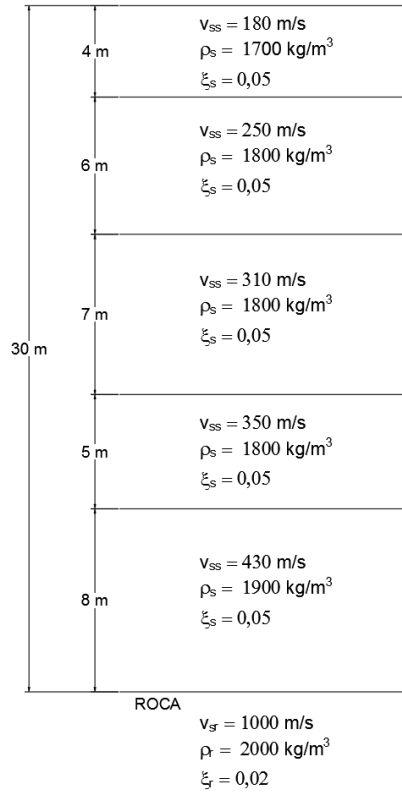
En la Figura 8 se presentan las funciones de transferencia obtenidas para el caso de velocidad constante y el caso de velocidad variando linealmente con la profundidad considerando que el parámetro  $a$  tiende a cero. Se puede observar que las funciones de transferencia son muy similares.



**Figura 8. Funciones de transferencia para depósito de suelo con velocidad constante y depósito con velocidad variando linealmente y tendiendo a cero el parámetro  $\alpha$  – Caso un solo estrato de suelo**

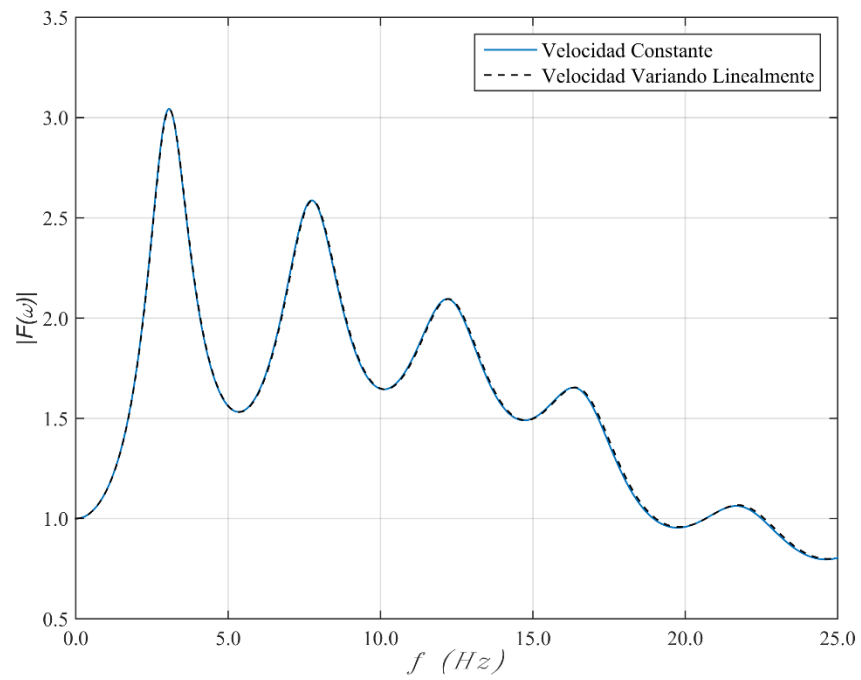
## 6.2. Validación No. 2: Caso suelo estratificado

Para este caso se considerará el depósito de suelo que se presenta en la Figura 9:



**Figura 9. Esquema suelo estratificado para el análisis**

En la Figura 10 se observa que con las ecuaciones deducidas para el caso de estudio se obtienen resultados muy similares al caso de velocidad constante cuando se considera en cada estrato de suelo una velocidad de onda de corte variando linealmente y se tiende a cero el parámetro  $a$ .



**Figura 10. Funciones de transferencia para depósito de suelo con velocidad constante y depósito con velocidad variando linealmente en cada estrato de suelo y tendiendo a cero el parámetro  $\alpha$  – Caso suelo estratificado**

## 7. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

### 7.1. Función de transferencia para el caso de roca rígida

La función de transferencia considerando base sobre roca rígida está dada en términos generales por:

$$F(\omega) = \frac{u_s(0, t)}{u_s(H, t)} \quad (52)$$

Reemplazando en la ecuación (52) para el caso de velocidad en estudio se obtiene:

$$F(\omega) = \frac{-2r v_0^{r-1/2}}{(-r - 1/2)(aH + v_0)^{r-1/2} - (r - 1/2)(aH + v_0)^{-r-1/2} v_0^{2r}} \quad (53)$$

Gazetas (1982) estudió el caso para una velocidad de onda de corte variando linealmente con la profundidad en la forma  $c = c_0(1 + bz)$ . Para el caso de roca rígida planteó la siguiente expresión para la función de transferencia:

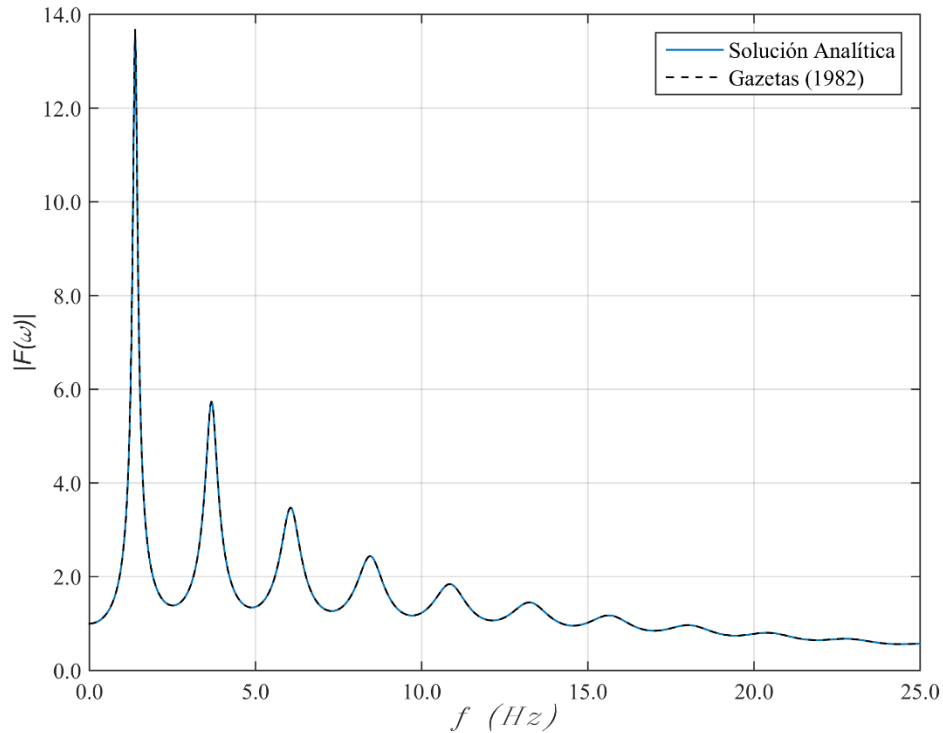
$$F(\omega) = \frac{2q}{(-0,5 + q)(1 + \tilde{b})^{-0,5-q} + (0,5 + q)(1 + \tilde{b})^{-0,5+q}} \quad (54)$$

Donde:

$$q = \sqrt{\left( \frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{c_0^2 b^2 (1 + 2i\xi_s)} \right)} \quad (55)$$

$$\tilde{b} = bH \quad (56)$$

En la Figura 11 se observa que se obtiene la misma función de transferencia con la ecuación analítica propuesta en esta investigación (ecuación (53)) y la ecuación propuesta por Gazetas (1982) (ecuación (54)).



**Figura 11. Comparación de la solución analítica propuesta para el caso de roca rígida con la solución propuesta para este mismo caso por Gazetas (1982).  $v_0 = 100 \frac{m}{s}$ ,  $\frac{v_0}{v_H} = 0,50$ ,  $H = 30 m$  y  $\xi_S = 5\%$**

## 7.2. Función de transferencia para el caso de roca elástica

La función de transferencia considerando el modelo de base sobre roca elástica está dada por:

$$FT(\omega) = \frac{u_s(z_s = 0)}{u_r(z_r = 0)_{Outcropping}} \quad (57)$$

Donde:

$u_s(z_s = 0)$  = Desplazamiento en la superficie del suelo

$u_r (z_r = 0)_{Outcropping}$  = Desplazamiento en la superficie de la roca considerando que no hay suelo sobre ésta.

Si se considera  $\xi_s = \xi_r = 0$  y  $\rho_s = \rho_r$ , la ecuación de la función de transferencia para el caso de estudio está dada por:

$$F(\omega) = \frac{-2r * v_0^{r-1/2} * e^{i\frac{\omega}{v_{sr}}H}}{(aH + v_0)^{r-\frac{1}{2}} * \left(-r - \frac{1}{2}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\right) * v_0^{2r} * (aH + v_0)^{-r-\frac{1}{2}} - \frac{(aH + v_0)^{r+\frac{1}{2}} * \omega * i}{v_{sr} * a} + \frac{v_0^{2r} * (aH + v_0)^{-r+\frac{1}{2}} * \omega * i}{v_{sr} * a}} \quad (58)$$

Donde:

$$r = \sqrt{\frac{-\omega^2}{a^2} + \frac{1}{4}} \quad (59)$$

Los periodos y las amplitudes se obtienen del valor absoluto de la función de transferencia, la cual, luego de las respectivas operaciones matemáticas para agrupar la parte real y la parte imaginaria de los números complejos y estimar su módulo queda:

a) Si  $\frac{-\omega^2}{a^2} + \frac{1}{4} < 0$

$$|F(\omega)| = \frac{2 * |\sqrt{R}| |v_0^{-1/2}|}{\sqrt{(Parte Real)^2 + (Parte Imaginaria)^2}} \quad (60)$$

Donde:

$$R = Abs\left(\frac{-\omega^2}{a^2} + \frac{1}{4}\right) \quad (61)$$

$$\begin{aligned}
\text{Parte Real} &= (aH + v_0)^{-1/2} \\
&* \left[ -\frac{\cos\theta}{2} + \sqrt{R} * \text{sen}\theta + \sqrt{R} * \text{sen}2\alpha * \cos\theta + \frac{1}{2} \cos2\alpha * \cos\theta - \sqrt{R} \right. \\
&* \left. \cos2\alpha * \text{sen}\theta + \frac{1}{2} \text{sen}2\alpha * \text{sen}\theta \right] + \frac{(aH + v_0)^{1/2}}{v_{sr} * a} \\
&* [\omega * \text{sen}\theta - \omega * \text{sen}2\alpha * \cos\theta + \omega * \cos2\alpha * \text{sen}\theta]
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
\text{Parte Imaginaria} \\
&= (aH + v_0)^{-1/2} \\
&* \left[ -\frac{\text{sen}\theta}{2} - \sqrt{R} * \cos\theta - \sqrt{R} * \cos2\alpha * \cos\theta + \frac{1}{2} \text{sen}2\alpha * \cos\theta - \sqrt{R} \right. \\
&* \left. \text{sen}2\alpha * \text{sen}\theta - \frac{1}{2} \cos2\alpha * \text{sen}\theta \right] + \frac{(aH + v_0)^{1/2}}{v_{sr} * a} \\
&* [-\omega * \cos\theta + \omega * \cos2\alpha * \cos\theta + \omega * \text{sen}2\alpha * \text{sen}\theta]
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\theta = \sqrt{R} * \ln(aH + v_0) \tag{64}$$

$$\alpha = \sqrt{R} * \ln(v_0) \tag{65}$$

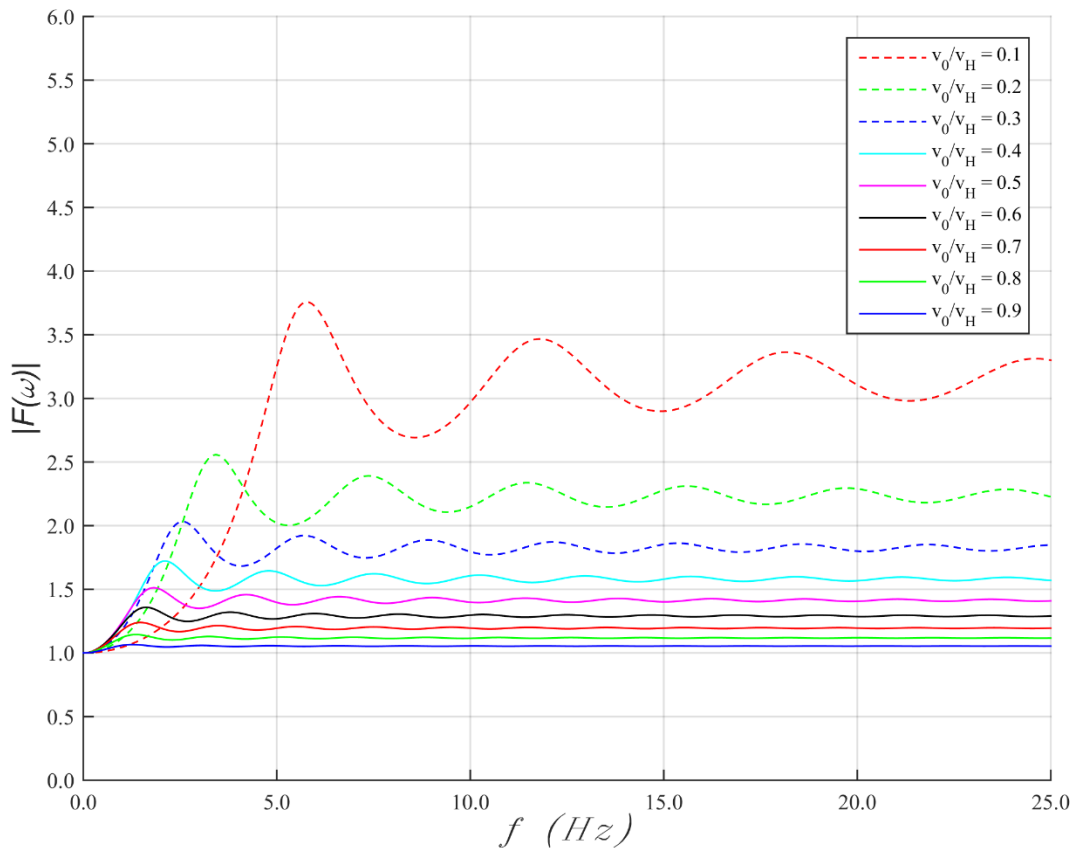
b) Si  $\frac{-\omega^2}{a^2} + \frac{1}{4} > 0$

$$|F(\omega)| = \frac{2 * |r| * |v_0^{r-1/2}|}{\sqrt{(\text{Parte Real})^2 + (\text{Parte Imaginaria})^2}} \tag{48} \tag{66}$$

$$\text{Parte Real} = (aH + v_0)^{r-\frac{1}{2}} * \left(-r - \frac{1}{2}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\right) * v_0^{2r} * (aH + v_0)^{-r-\frac{1}{2}} \tag{67}$$

$$\text{Parte Imaginaria} = \frac{\omega}{v_{sr} * a} \left[ -(aH + v_0)^{r+\frac{1}{2}} + v_0^{2r} * (aH + v_0)^{-r+\frac{1}{2}} \right] \quad (68)$$

Si se considera para el caso de velocidad en estudio la proporción entre la velocidad en superficie ( $v_0$ ) y la velocidad en la interfaz suelo – roca ( $v_H$ ), y se evalúan diferentes relaciones  $\frac{v_0}{v_H}$  se obtienen las funciones de transferencia que se presentan en la Figura 12:



**Figura 12. Funciones de Transferencia para diferentes relaciones  $\frac{v_0}{v_H}$  para el modelo de base sobre roca elástica  $v_0 = 100 \frac{m}{s}$ ,  $v_{sr} = v_H$ ,  $H = 30 \text{ m}$   $\xi_S = \xi_r = 0\%$ ,  $\rho_S = \rho_r = 2000 \frac{kg}{m^3}$**

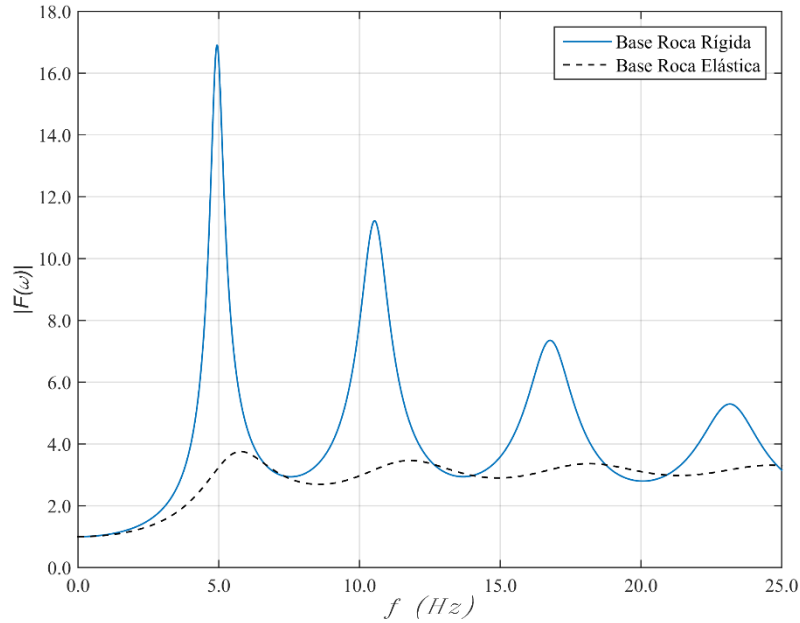
En la Figura 12 se puede observar que entre menor se va haciendo la relación  $\frac{v_0}{v_H}$ , mayores serán las amplitudes de los desplazamientos y por otro lado, las frecuencias naturales del depósito de suelo también se van haciendo mayores, lo que indica que el depósito empieza a comportarse más rígidamente.

### 7.3. Comparación de las funciones de transferencia para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica

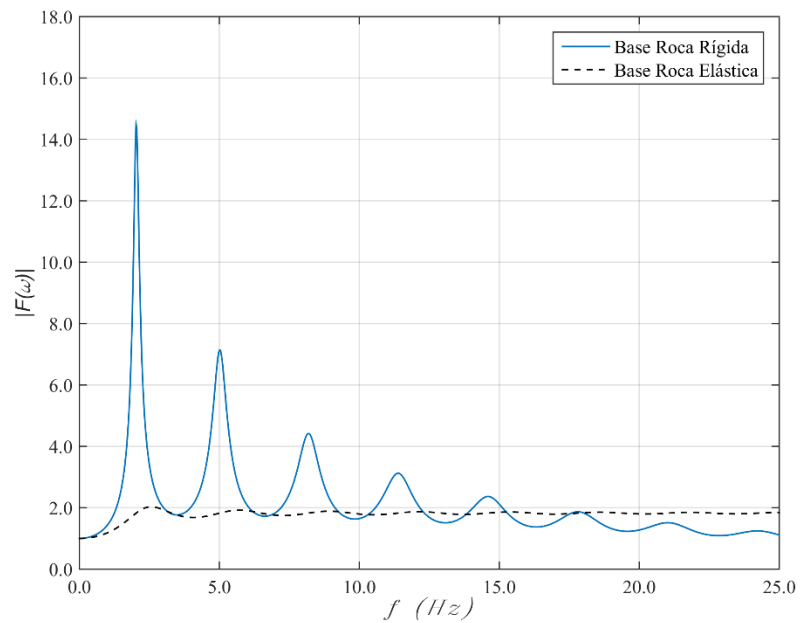
Para el caso de velocidad de onda de corte variando linealmente, el efecto de considerar base sobre roca rígida o base sobre roca elástica se puede observar en la Figura 13, Figura 14, Figura 15 y Figura 16, para diferentes relaciones  $\frac{v_0}{v_H}$  considerando  $\xi_s = 5\%$  para el caso de roca rígida y  $\xi_s = \xi_r = 0\%$  para el caso de roca elástica. Se observa entonces en dichas figuras, al igual que en el caso convencional, una disminución muy significativa en la amplitud cuando se considera el modelo de roca elástica.

Adicionalmente, se observa que las frecuencias naturales no coinciden. Para el caso de roca elástica las frecuencias naturales son mayores.

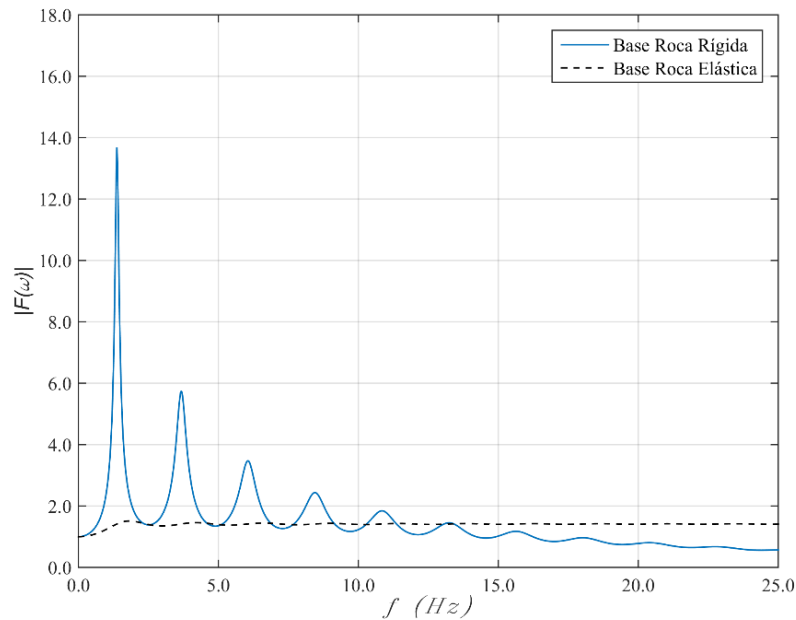
Finalmente, es importante resaltar que los picos de amplificación en el caso de roca elástica son muy cercanos en magnitud y la gráfica no presenta valles tan pronunciados como en el caso de roca rígida. Lo anterior conlleva a que para este caso las formas modales no se logren identificar fácilmente.



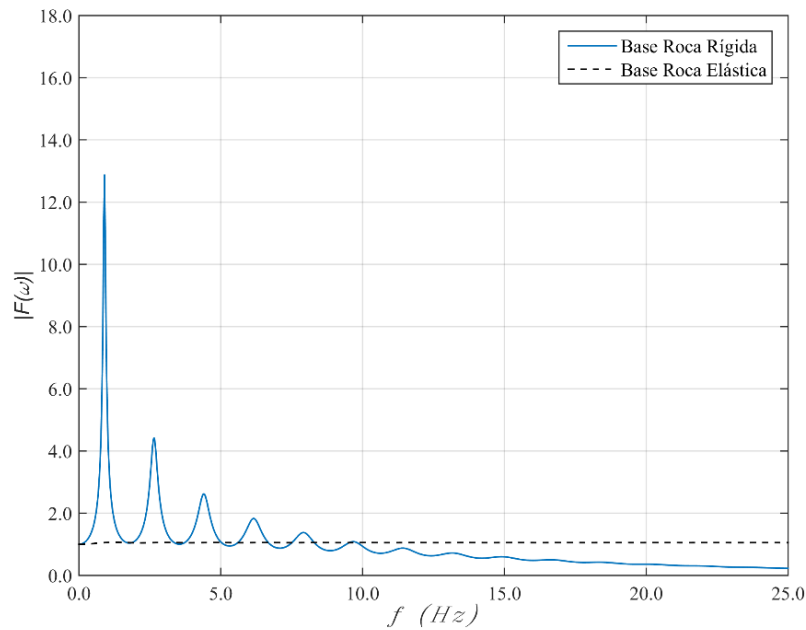
**Figura 13. Comparación de la función de transferencia para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica.**  $\frac{v_0}{v_H} = 0,10$ ,  $v_{sr} = v_H = 1000 \frac{m}{s}$ ,  $H = 30 m$ ,  $\rho_S = \rho_r = 1800 \frac{kg}{m^3}$ ,  $\xi_S = 5\%$  para el caso de roca rígida y  $\xi_S = \xi_r = 0\%$  para el caso de roca elástica



**Figura 14. Comparación de la función de transferencia para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica.**  $\frac{v_0}{v_H} = 0,30$ ,  $v_{sr} = v_H = 333,33 \frac{m}{s}$ ,  $H = 30 m$ ,  $\rho_S = \rho_r = 1800 \frac{kg}{m^3}$ ,  $\xi_S = 5\%$  para el caso de roca rígida y  $\xi_S = \xi_r = 0\%$  para el caso de roca elástica



**Figura 15. Comparación de la función de transferencia para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica.**  $\frac{v_0}{v_H} = 0,50$ ,  $v_{sr} = v_H = 200 \frac{m}{s}$ ,  $H = 30 m$ ,  $\rho_S = \rho_r = 1800 \frac{kg}{m^3}$ ,  $\xi_S = 5\%$  *para el caso de roca rígida* y  $\xi_S = \xi_r = 0\%$  *para el caso de roca elástica*



**Figura 16. Comparación de la función de transferencia para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica.**  $\frac{v_0}{v_H} = 0,90$ ,  $v_{sr} = v_H = 111,11 \frac{m}{s}$ ,  $H = 30 m$ ,  $\rho_S = \rho_r = 1800 \frac{kg}{m^3}$ ,  $\xi_S = 5\%$  *para el caso de roca rígida* y  $\xi_S = \xi_r = 0\%$  *para el caso de roca elástica*

## 8. FORMAS MODALES

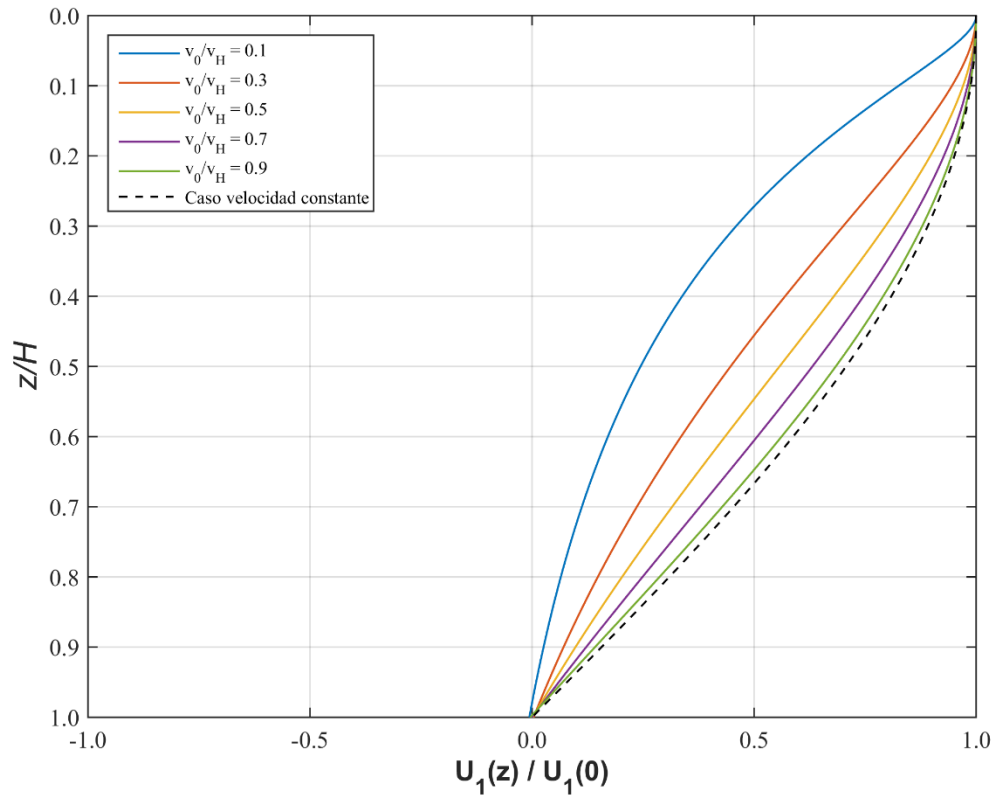
A partir de las frecuencias naturales obtenidas con el modelo de roca rígida se obtuvo las formas modales en el depósito de suelo para los tres primeros modos considerando diferentes relaciones  $\frac{v_0}{v_H}$ .

En la Figura 17, Figura 18 y Figura 19 se encuentran graficadas las formas modales para el primer, segundo y tercer modo, respectivamente. Dichas gráficas incluyen a manera de comparación las formas modales del caso de velocidad constante, las cuales se encuentran descritas por la siguiente expresión:

$$U = \cos \left( (2n - 1) \frac{\pi}{2} \frac{z}{H} \right) \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (69)$$

La Figura 17 corresponde a la gráfica del primer modo de vibración. En ésta se observa la misma tendencia y una gran similitud de las gráficas para el caso de velocidad constante y el caso  $\frac{v_0}{v_H} = 0,9$ . Se observa también que a medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  se va haciendo menor, las gráficas pasan de ser cóncavas a ser convexas y se van acercando más a la superficie del depósito.

La Figura 17 coincide con la gráfica presentada por Gazetas (1982) para las formas modales del primer modo de vibración.



**Figura 17. Forma modal normalizada por el desplazamiento en superficie – Modo 1**

En la Figura 18 se presenta la gráfica de las formas modales para el modo 2. Se observa como a medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  se hace menor los cambios de signo se dan mucho más cerca de la superficie, las amplitudes de los desplazamientos van disminuyendo y las gráficas se van acercando cada vez más a la superficie.

También se puede observar que a medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  se hace menor, las gráficas de las formas modales en cercanía a la superficie se van volviendo tangente a la horizontal, lo cual refleja una deformación muy grande, tendiendo a infinito.

Un análisis similar se puede realizar para el modo 3, presentado en la Figura 19.

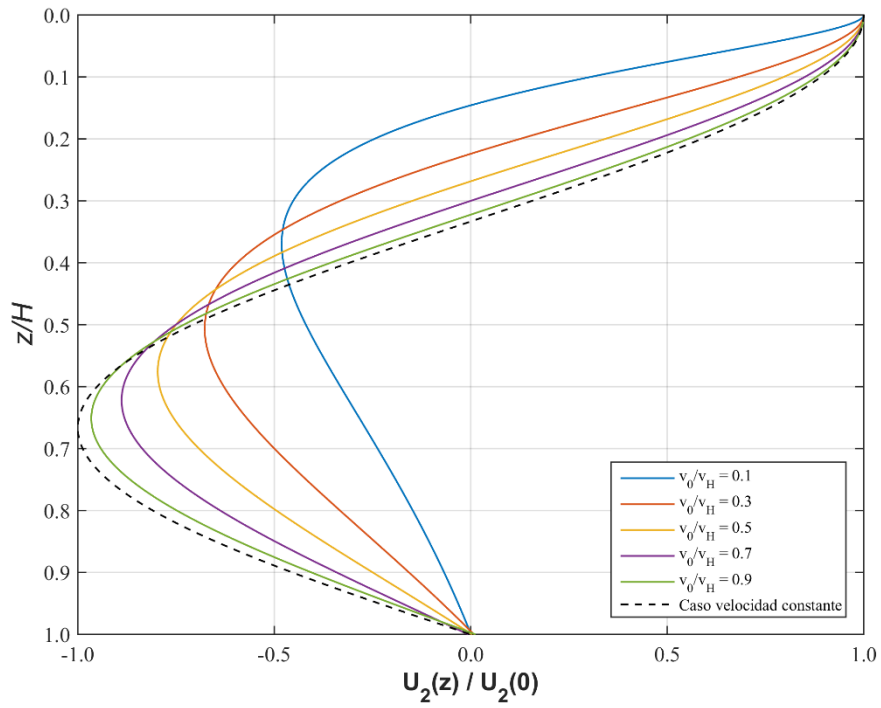


Figura 18. Forma modal normalizada por el desplazamiento en superficie – Modo 2

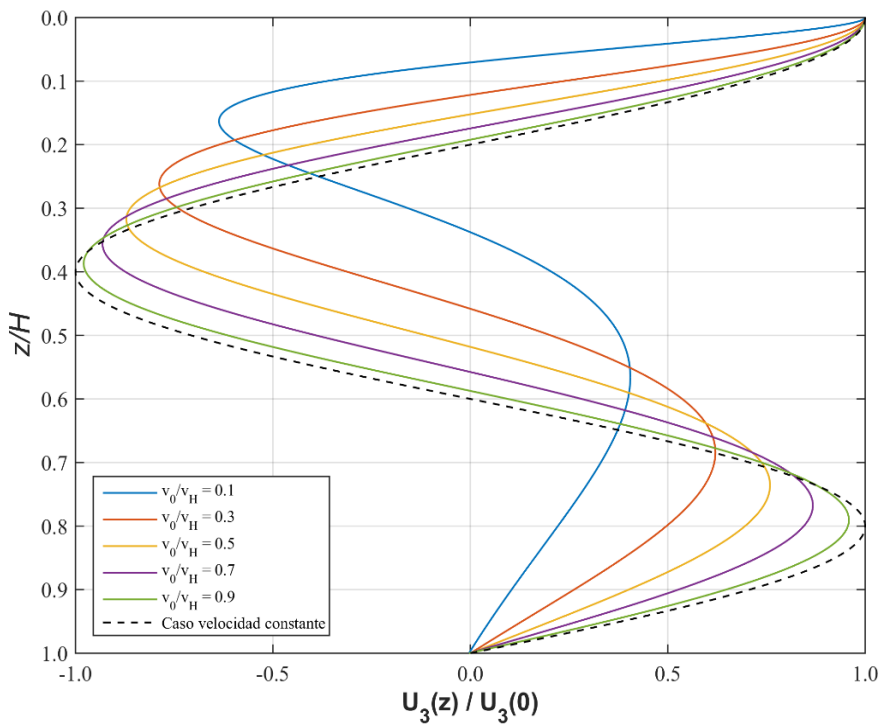


Figura 19. Forma modal normalizada por el desplazamiento en superficie – Modo 3

## 9. COMPARACIÓN DE LA RESPUESTA DINÁMICA OBTENIDA CON EL CASO DE VELOCIDAD DE ONDA DE CORTE VARIANDO LINEALMENTE Y EL CASO DE VELOCIDAD DE ONDA DE CORTE CONSTANTE

En este capítulo se evaluará el impacto en la respuesta dinámica del suelo al considerar un depósito con velocidad de onda de corte variando linealmente con la profundidad (depósito no homogéneo) en relación con un depósito con velocidad de onda de corte constante (depósito homogéneo), para el cual la velocidad constante se estimará a partir de los siguientes casos típicamente usados en la práctica:

- **Caso 1:** Velocidad de onda de corte igual a la mínima velocidad del depósito de suelo:

$$v_{ss} = v_0 \quad (70)$$

- **Caso 2:** Velocidad de onda de corte obtenida como aquella velocidad que genera igual tiempo de viaje de la onda de la base a la superficie:

$$v_{ss} = \frac{H}{\int_0^H \frac{dz}{v_{ss}(z)}} \quad (71)$$

Donde  $v_{ss}(z)$  corresponde a la ecuación (19)

Este es el caso que consideran diferentes códigos sísmicos tales como el Building Seismic Safety Council (BSSC, 2015), International Code Council (ICC, 2015), European Committee for Standardization (CEN, 2004), Instituto Nacional de Normalización (INN, 2012) y Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (AIS, 2010) para la clasificación del tipo de perfil de suelo.

- **Caso 3:** Estimando  $v_{ss}$  como la velocidad promedio del depósito:

$$v_{ss} = \frac{1}{H} \int_0^H v_{ss}(z) dz \quad (72)$$

Donde  $v_{ss}(z)$  corresponde a la ecuación (19)

- **Caso 4:** Determinando la velocidad de onda de corte que genera el mismo periodo fundamental del depósito con velocidad de onda de corte variando linealmente (depósito no homogéneo):

$$v_{ss} = \frac{4H}{T_{\text{Depósito No Homogéneo}}} \quad (73)$$

- **Caso 5:** Velocidad de onda de corte igual a la máxima velocidad del depósito de suelo:

$$v_{ss} = v_H \quad (74)$$

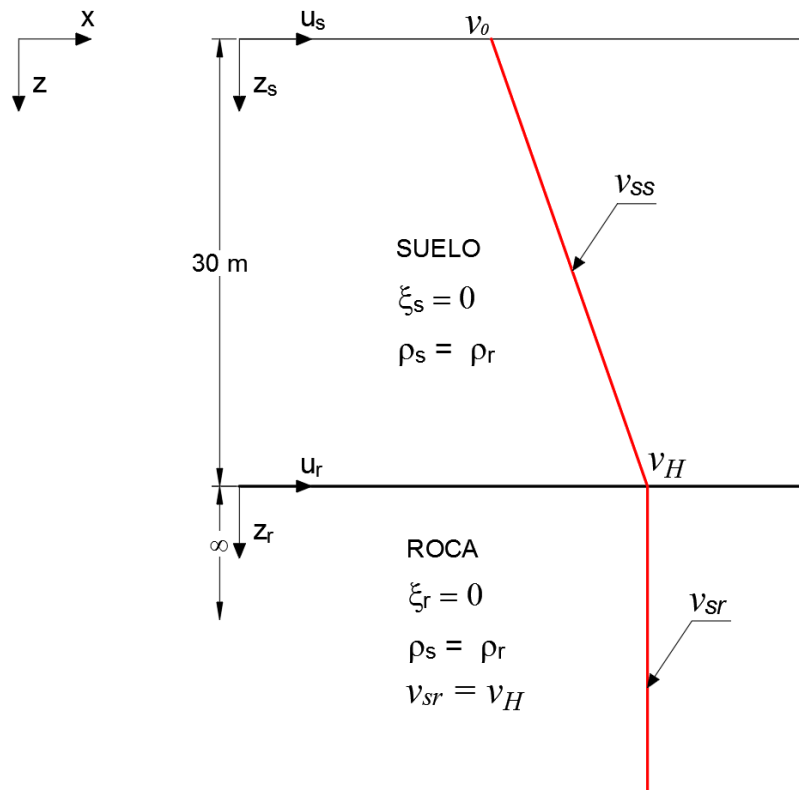
El análisis se realiza a partir de las funciones de transferencia obtenidas con el modelo de roca elástica para cada uno de los casos anteriormente presentados, considerando las cuatro diferentes configuraciones de depósitos que se presentan en la Tabla 2.

**Tabla 2. Configuraciones de depósito para el análisis**

Depósito de Suelo No.	H (m)	$v_0/v_H$	$v_0$ (m/s)	$v_H$ (m/s)	$v_{sr}$ (m/s)
1	30	0,500	100	200	200
2	30	0,250	100	400	400
3	30	0,167	100	600	600
4	30	0,125	100	800	800

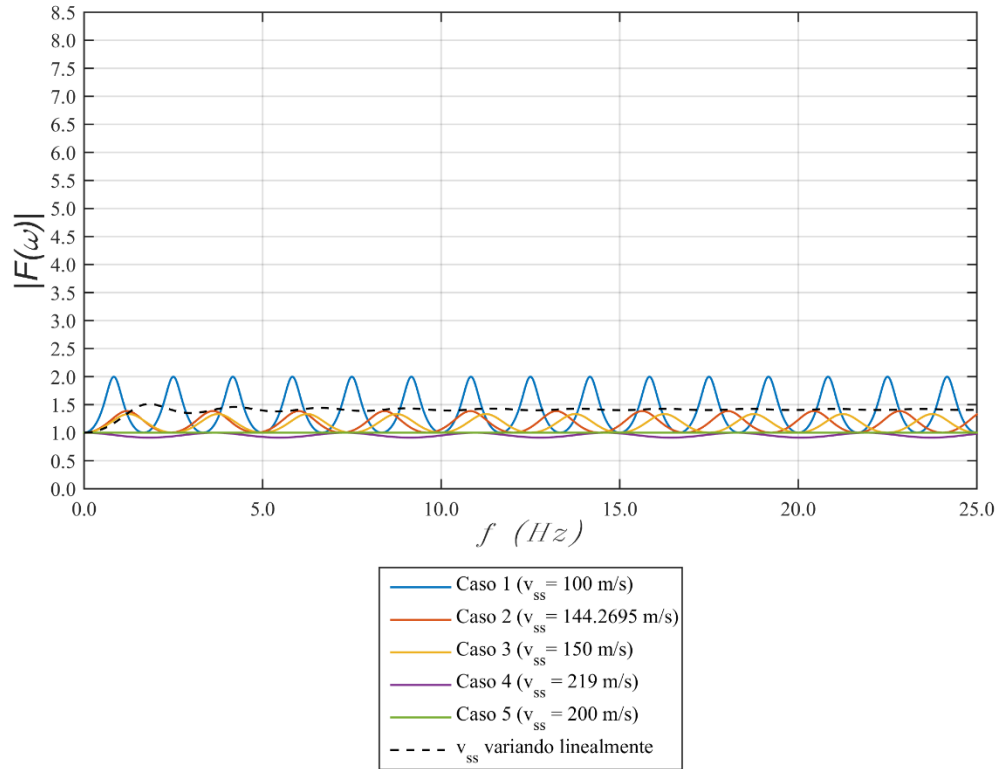
En la Tabla 2 se consideraron todos los depósitos con un espesor de 30 m, ya que este es el espesor definido en diferentes códigos sísmicos (BSSC, 2015; ICC, 2015; CEN, 2004; INN, 2012 y AIS, 2010) para la clasificación del perfil de suelo.

Con el fin de evaluar en la respuesta dinámica solo el efecto de la velocidad de onda de corte, al considerarla constante o variando en forma lineal, se establecerá en las configuraciones de depósito de la Tabla 2 que el suelo y la roca tienen igual densidad y amortiguamiento nulo. Por último, en todos los depósitos se considera que la velocidad de la roca es igual a la velocidad que se obtiene al final del depósito de suelo. Un esquema de los depósitos a evaluar se presenta en la Figura 20.

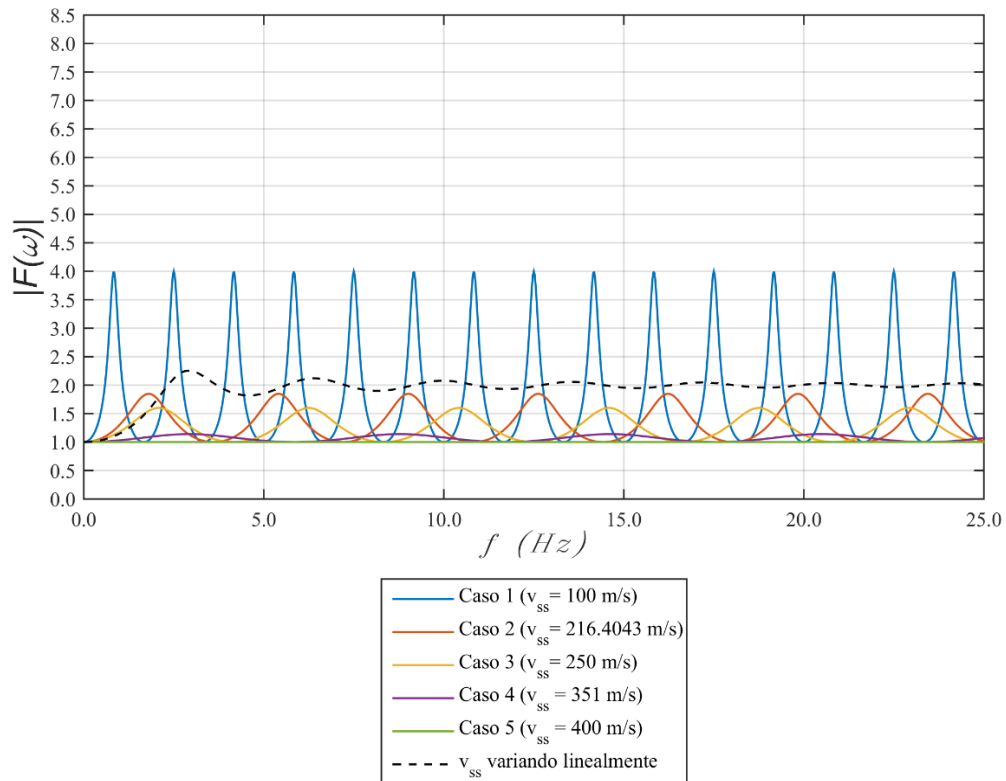


**Figura 20. Esquema depósitos de suelos a evaluar**

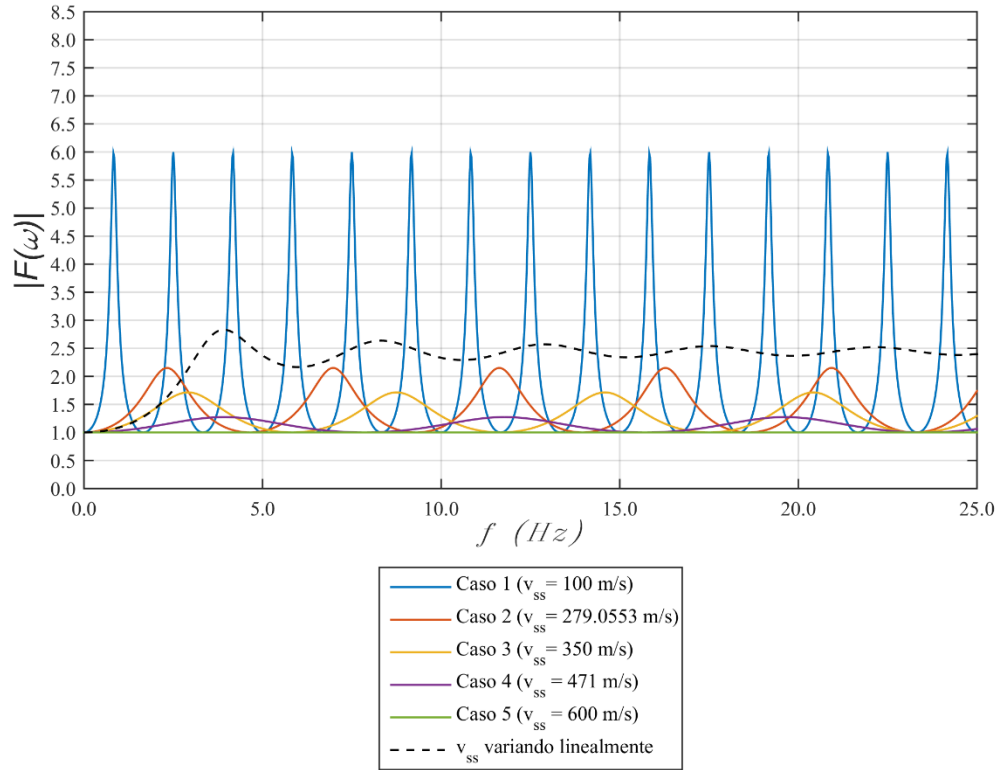
A continuación, se presentan las funciones de transferencia obtenidas para cada depósito:



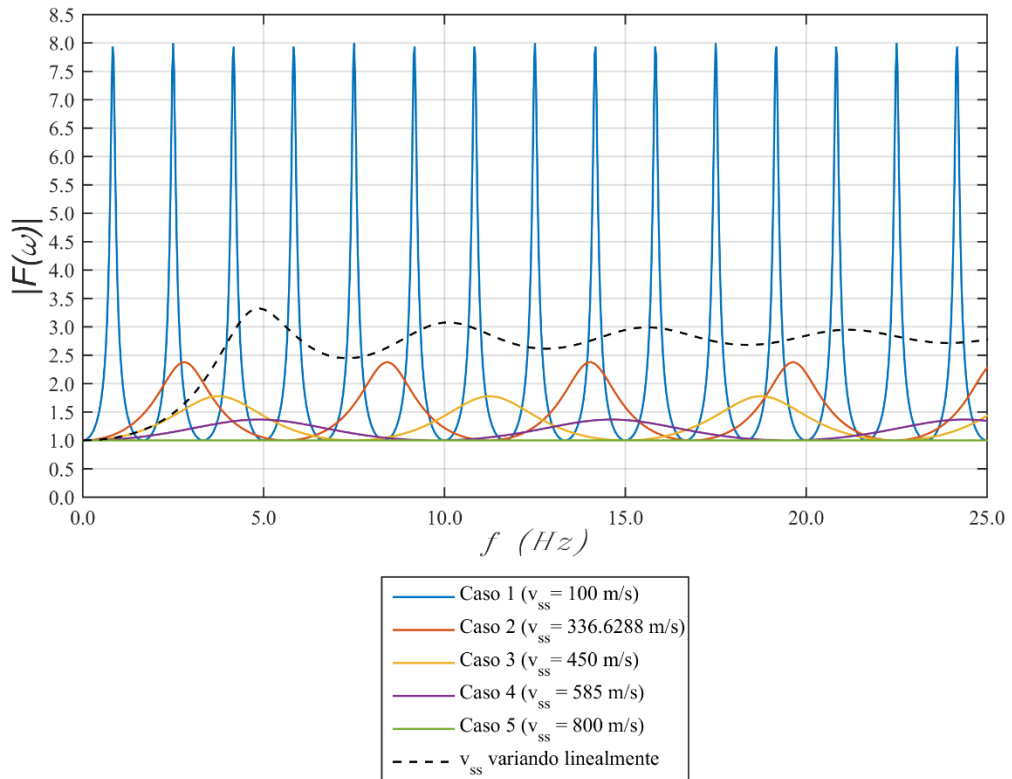
**Figura 21. Funciones de transferencia para el depósito de suelo No.1**



**Figura 22. Funciones de transferencia para el depósito de suelo No.2**



**Figura 23. Funciones de transferencia para el depósito de suelo No.3**



**Figura 24. Funciones de transferencia para el depósito de suelo No.4**

En la Figura 21, Figura 22, Figura 23 y Figura 24 se observa para los casos de velocidad constante (caso 1, caso 2, caso 3, caso 4 y caso 5) que las amplitudes van aumentando a medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  disminuye. Dicho aumento se va dando de acuerdo con la siguiente expresión:

$$|FT(\omega)| = \frac{\rho_r v_{sr}}{\rho_s v_{ss}} \quad (75)$$

La cual se obtiene de la ecuación (17) al considerar  $\xi_s = \xi_r = 0\%$

En la Figura 21, Figura 22, Figura 23 y Figura 24 también se observa que en todas las relaciones  $\frac{v_0}{v_H}$  evaluadas, las mayores amplificaciones se presentan con el caso 1, al cual se le había asignado la menor velocidad de onda de corte del depósito.

Con respecto a las amplitudes del caso 1 y el caso de variación lineal de la velocidad, se observa que a medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  disminuye, la diferencia entre la amplitud máxima del caso 1 y la amplitud máxima del caso de velocidad lineal se va haciendo mayor. Para  $\frac{v_0}{v_H} = 0,50$  la relación entre la amplitud máxima del caso 1 y la amplitud máxima del caso de velocidad lineal es cercana al 132%, mientras que para  $\frac{v_0}{v_H} = 0,125$  dicha relación es del orden del 240%.

En cuanto a las frecuencias naturales del caso 1 se observa que éstas se mantienen constantes independientemente de la relación  $\frac{v_0}{v_H}$ , lo cual era de esperarse ya que para el caso convencional las frecuencias naturales dependen de la velocidad de onda de corte y el espesor del depósito de suelo, parámetros que para el caso 1 no cambian al variar la relación  $\frac{v_0}{v_H}$ .

A medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  disminuye se observa que la diferencia entre la frecuencia fundamental del caso 1 y la frecuencia fundamental del caso de velocidad lineal se va

haciendo mayor. Esto es debido a que las frecuencias naturales del caso 1 permanecen iguales y no se ven afectadas por la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  (como se mencionó anteriormente), mientras que las frecuencias naturales del caso de velocidad lineal aumentan a medida que disminuye la relación  $\frac{v_0}{v_H}$ . Por lo anterior, se obtiene que para  $\frac{v_0}{v_H} = 0,50$  la relación entre la frecuencia fundamental del caso 1 y la frecuencia fundamental del caso de velocidad lineal es cercana al 45%, mientras que para  $\frac{v_0}{v_H} = 0,125$  la relación es del orden del 17%.

Siguiendo con el caso 1, es importante resaltar que este caso en relación con los otros casos de velocidad constante (caso 2, caso 3 y caso 4) y el caso de velocidad lineal, es el que presenta las frecuencias naturales más pequeñas, lo cual lleva a que se comporte más flexiblemente que los otros casos mencionados.

En la Figura 21, Figura 22, Figura 23 y Figura 24 también se observa que el caso de variación lineal de la velocidad presenta mayores amplificaciones que los casos del 2 al 5. Resultados similares encontró Vrettos (2013) quien reportó que cuando el módulo de rigidez al esfuerzo cortante aumenta con la profundidad, se obtienen amplificaciones mayores en relación con el caso donde el módulo de rigidez es constante. Por su parte, Towhata (1996) llegó a la conclusión que cuando el módulo de rigidez al esfuerzo cortante varía continuamente con la profundidad, más energía sísmica puede alcanzar la superficie que la asumida en el análisis convencional con módulos discontinuos.

Para los casos 2, 3 y 4 se observa que a medida que disminuye la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  la velocidad de onda de corte, las amplitudes y las frecuencias naturales aumentan.

Al comparar las funciones de transferencia de los casos 2, 3 y 4 obtenidas en cada relación  $\frac{v_0}{v_H}$ , se observa que el caso 2 presentó amplitudes de desplazamiento más cercanas al caso de variación lineal de velocidad que los casos 3 y 4. Para  $\frac{v_0}{v_H} = 0,50$  la relación entre la amplitud máxima del caso 2 y la amplitud máxima del caso de variación

lineal era cercana al 92%, mientras que para  $\frac{v_0}{v_H} = 0,125$  la relación era del orden del 72%.

De los casos 2, 3 y 4, el caso 4 fue el que presentó las mayores diferencias de amplitudes con el caso de velocidad lineal en todas las relaciones  $\frac{v_0}{v_H}$  evaluadas. Para  $\frac{v_0}{v_H} = 0,50$  la relación entre la amplitud máxima del caso 4 y la amplitud máxima del caso de variación lineal era cercana al 60%, mientras que para  $\frac{v_0}{v_H} = 0,125$  la relación era del orden del 41%.

Se observa también en la Figura 21, Figura 22, Figura 23 y Figura 24 que a medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  disminuye, las diferencias entre las amplitudes máximas de los casos 2,3 y 4 con respecto a la amplitud máxima del caso de velocidad lineal van aumentando.

De acuerdo con Rovithis et al. (2011), el caso homogéneo podría subestimar la respuesta dinámica del depósito de suelo. Según los resultados presentados anteriormente, para el caso de velocidad lineal dicha subestimación de la respuesta dinámica del depósito de suelo se puede dar cuando se consideran los casos de velocidad 2, 3, 4 y 5.

Con respecto a las frecuencias naturales, de los casos 2 y 3, el caso 3 es el que presenta frecuencias naturales más cercanas al caso de velocidad lineal. Se observa también que la diferencia entre las frecuencias naturales del caso 3 y el caso de velocidad lineal se va haciendo más pequeña a medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  disminuye. Para  $\frac{v_0}{v_H} = 0,50$  la relación entre la frecuencia fundamental del caso 3 y la frecuencia fundamental del caso de variación lineal es cercana al 69%, mientras que para  $\frac{v_0}{v_H} = 0,125$  la relación es del orden del 77%.

Por el contrario, en el caso 2 aumenta la diferencia de sus frecuencias naturales en relación con las frecuencias del caso de velocidad lineal a medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  disminuye. Para  $\frac{v_0}{v_H} = 0,50$  la relación entre la frecuencia fundamental del caso 2 y la

frecuencia fundamental del caso de variación lineal es cercana al 66%, mientras que para  $\frac{v_0}{v_H} = 0,125$  la relación es del orden del 57%.

En cuanto a las frecuencias naturales del caso 3 también se observa que éstas son mayores a las frecuencias naturales del caso 1 y el caso 2, pero menores a las frecuencias naturales del caso 4 y el caso de velocidad lineal.

El caso 4 por su definición siempre presentó una frecuencia fundamental igual a la frecuencia fundamental del caso lineal. Sin embargo, las frecuencias subsiguientes son mayores que las frecuencias del caso de velocidad lineal.

Gazetas (1982) estudió suelos con velocidad de onda de corte variando en profundidad de la forma  $c = c_0 (1 + \mu z)^m$  con  $m = 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{4}$  (Véase Numeral 3.2); al comparar los periodos obtenidos en estos depósitos (depósitos no homogéneos) con los periodos obtenidos en un suelo con velocidad constante igual a la velocidad obtenida en la mitad del depósito (depósito homogéneo equivalente), encontró que los suelos no homogéneos presentaban periodos más cortos, es decir, se comportaban más rígidamente que el depósito homogéneo equivalente. En la Figura 21, Figura 22, Figura 23 y Figura 24 se observa un comportamiento muy similar, pues el caso de velocidad lineal presenta frecuencias naturales mayores que los casos de velocidad constante estudiados. A conclusiones similares también llegaron (Ambraseys, 1959) y (Towhata, 1996).

En el caso de velocidad variando linealmente se puede observar que a medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  disminuye, el valor de la amplitud en la función de transferencia y la frecuencia fundamental aumentan. Gazetas (1982) también encontró que al incrementar la constante  $\mu$ , el suelo no homogéneo progresivamente va siendo más rígido en comparación con el equivalente depósito homogéneo, así mismo aumentan las amplitudes.

Las conclusiones planteadas anteriormente no solo aplican para las relaciones  $\frac{v_0}{v_H}$  evaluadas, aplican para cualquier relación  $\frac{v_0}{v_H}$  como se muestra en la Figura 25 y Figura 26.

La Figura 25 muestra como varía la frecuencia fundamental del depósito homogéneo (caso 1, caso 2, caso 3 y caso 4) en relación con el depósito no homogéneo ( $\frac{f^1_{Hom}}{f^1_{No Hom}}$ ), para valores  $\frac{v_0}{v_H}$  en el rango 0,01 hasta 0,97. Se puede observar que el caso 1 y el caso 2 presentan frecuencias fundamentales menores al caso de depósito no homogéneo para cualquier relación  $\frac{v_0}{v_H}$  mientras que el caso 3 presenta frecuencias fundamentales menores al caso de depósito no homogéneo para el rango  $0,02 \leq \frac{v_0}{v_H} \leq 0,97$ . Lo anterior reafirma lo dicho anteriormente acerca de que el depósito no homogéneo se comporta más rígidamente que los depósitos homogéneos estudiados, esta vez generalizado para cualquier relación  $\frac{v_0}{v_H}$ .

De acuerdo con la Figura 25, para el caso 1 se obtienen frecuencias fundamentales hasta un 35% menores a la frecuencia fundamental del caso no homogéneo para  $0,88 \leq \frac{v_0}{v_H} \leq 0,97$ . Para relaciones  $\frac{v_0}{v_H} < 0,88$  la diferencia empieza a aumentar progresivamente hasta obtenerse en  $\frac{v_0}{v_H} = 0,01$  que la frecuencia fundamental del caso 1 es un 98% menor que la frecuencia fundamental del caso no homogéneo.

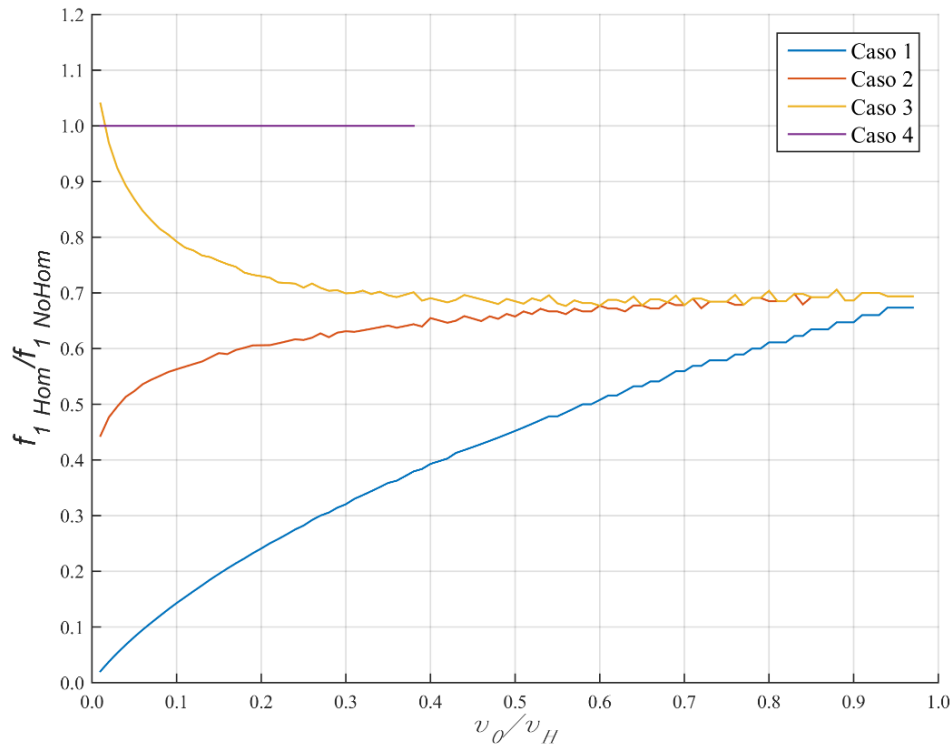
Para el caso 2 se observa que se obtienen frecuencias fundamentales hasta un 35% menores a la frecuencia fundamental del caso no homogéneo para relaciones  $\frac{v_0}{v_H} \geq 0,40$ . A partir de ahí la diferencia sigue aumentando progresivamente hasta obtenerse en  $\frac{v_0}{v_H} = 0,01$  que la frecuencia fundamental del caso 2 es un 56% menor a la frecuencia fundamental del caso no homogéneo.

Para el caso 3 se observa que se obtienen frecuencias fundamentales hasta un 32% menores a la frecuencia fundamental del caso no homogéneo para relaciones  $\frac{v_0}{v_H} \geq 0,28$ . A partir de ahí la diferencia empieza a disminuir progresivamente hasta obtenerse en  $\frac{v_0}{v_H} = 0,01$  que la frecuencia fundamental del caso 3 es un 4% mayor a la frecuencia fundamental del caso no homogéneo.

Como se mencionó anteriormente, de los cinco casos de velocidad constante estudiados, exceptuando el caso 4, el caso 3 es el que presenta frecuencias fundamentales más cercanas al caso de variación lineal de la velocidad para todas las relaciones  $\frac{v_0}{v_H}$ . Sin embargo, es importante destacar que para relaciones  $\frac{v_0}{v_H} \geq 0,56$  el caso 2 presenta una frecuencia fundamental muy próxima a la del caso 3, con diferencias entre ambas de tan solo el 3%.

En la Figura 25 solo se presenta graficado el caso 4 para el rango en el cual se obtiene que la velocidad del depósito de suelo es menor que la velocidad de la roca ( $\frac{v_0}{v_H} \leq 0,38$ ).

El caso 5 no se grafica ya que en este caso la velocidad del suelo y la roca son iguales, además al suelo y a la roca se les asignó igual densidad e igual amortiguamiento, por lo que el valor de amplificación es igual a la unidad para todo valor de  $\frac{v_0}{v_H}$ , como se observa en la Figura 21, Figura 22, Figura 23 y Figura 24.



**Figura 25. Variación de la frecuencia fundamental del caso homogéneo con respecto al caso no homogéneo para diferentes relaciones  $\frac{v_0}{v_H}$**

La Figura 26 muestra como varía la amplitud máxima del depósito homogéneo en relación con el depósito no homogéneo ( $\frac{A_{1 Hom}}{A_{1 No Hom}}$ ) para diferentes relaciones  $\frac{v_0}{v_H}$ .

En esta figura se observa que el caso 1 sobreestima la respuesta del suelo para todos los valores  $\frac{v_0}{v_H}$ . Para el rango  $0,78 \leq \frac{v_0}{v_H} \leq 0,97$  la amplitud máxima del caso 1 puede ser hasta 10% mayor que la amplitud máxima del caso no homogéneo; de aquí en adelante la diferencia se va haciendo progresivamente mayor hasta finalmente obtener en  $\frac{v_0}{v_H} = 0,01$  que la amplitud máxima del caso 1 es 420% mayor que la amplitud máxima del caso no homogéneo.

En la Figura 26 también se puede observar que el caso 2 y el caso 3 presentan amplitudes 10% menores al caso de depósito de suelo no homogéneo para valores  $\frac{v_0}{v_H} \geq$

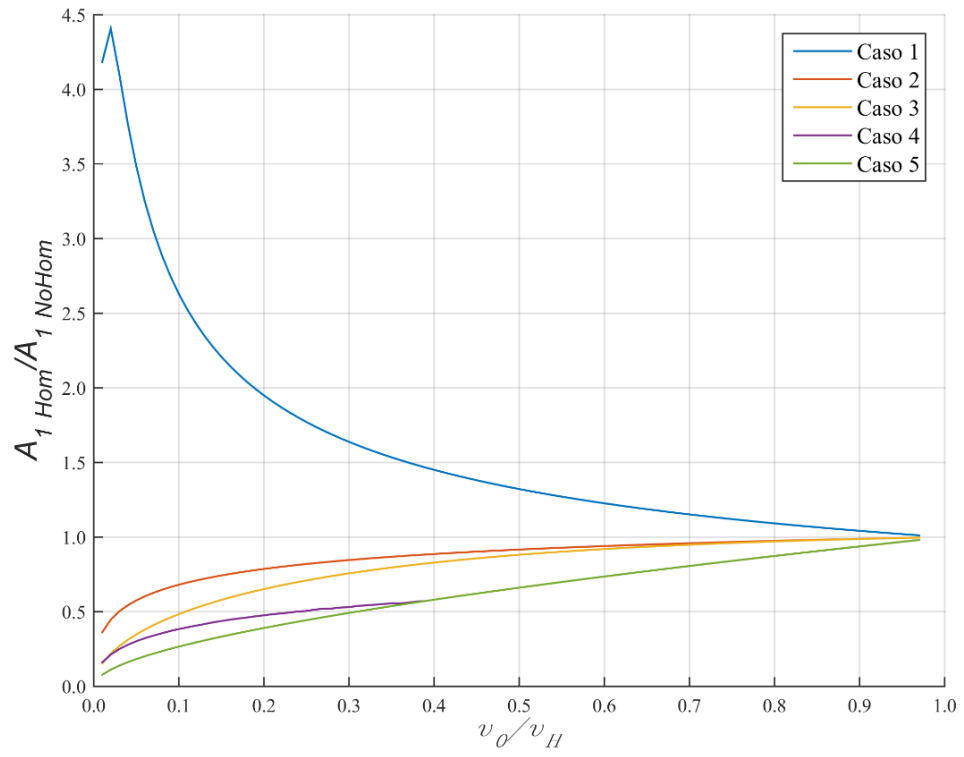
0,43 y  $\frac{v_0}{v_H} \geq 0,54$ , respectivamente. Además, para el caso 2 y caso 3 se obtiene para  $\frac{v_0}{v_H} < 0,43$  y  $\frac{v_0}{v_H} < 0,54$ , respectivamente, que la diferencia se va haciendo progresivamente mayor hasta finalmente obtener en  $\frac{v_0}{v_H} = 0,01$  que la amplitud máxima del caso 2 y caso 3 es 64% y 89% menor que la amplitud máxima del caso no homogéneo, respectivamente.

Por otro lado, el caso 4 para el rango en el cual se obtiene una velocidad de onda de corte menor que la velocidad de la roca ( $0,01 \leq \frac{v_0}{v_H} \leq 0,38$ ), subestima la respuesta del suelo entre un 43% y un 89% con respecto a la amplitud máxima del caso no homogéneo.

Se observa también que el caso 5 subestima la respuesta del suelo para todos los valores  $\frac{v_0}{v_H}$ . Para el rango  $0,84 \leq \frac{v_0}{v_H} \leq 0,97$  la amplitud máxima del caso 5 es 10% menor que la amplitud máxima del caso no homogéneo; de aquí en adelante la diferencia se va haciendo progresivamente mayor hasta finalmente obtener en  $\frac{v_0}{v_H} = 0,01$  que la amplitud máxima del caso 5 es 92% menor a la amplitud máxima del caso no homogéneo.

De acuerdo con lo anterior, con los casos 1, 2, 3 y 5 se pueden obtener amplitudes muy cercanas al caso no homogéneo, con porcentajes de error menores al 10%, por lo general cuando hay una variación suave de la velocidad con la profundidad.

Rovithis et al. (2011) estudió las funciones de transferencia para el caso de roca rígida y encontró resultados similares, planteó que en términos de amplitudes resonantes, el reemplazo de una capa de suelo no homogénea con una equivalente homogénea puede ser válido solo para una variación suficientemente suave de la velocidad de onda de corte con la profundidad.



**Figura 26. Variación de la amplitud máxima del caso homogéneo con respecto al caso no homogéneo para diferentes relaciones  $\frac{v_0}{v_H}$**

## 10. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN APROXIMADA PARA EL PERIODO FUNDAMENTAL

### 10.1. Caso base sobre roca rígida

Al solucionar la ecuación (21) considerando el amortiguamiento igual a cero, se obtiene la siguiente ecuación de desplazamientos:

$$u_s(z, t) = [C_1 (az + v_0)^{r-1/2} + C_2 (az + v_0)^{-r-1/2}] e^{i\omega t} \quad (76)$$

Donde:

$$r = i\lambda \quad (77)$$

$$\lambda = \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{\omega^2}{a^2}} \quad (78)$$

Para el modelo de base sobre roca rígida se consideran las siguientes dos condiciones de frontera: desplazamiento igual a cero en la interfaz suelo – roca con el fin de considerar las vibraciones libres (ecuación (79)) y de acuerdo con el numeral 5.2 el esfuerzo cortante debe ser igual a cero en la superficie (ecuación (80)):

$$u_s(H, t) = 0 \quad (79)$$

$$\tau(0, t) = G_s(0) \frac{\partial u_s(0, t)}{\partial z} + \eta \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_s(0, t)}{\partial z} \right) = 0 \quad (80)$$

Finalmente, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$C_1 \left( i\lambda - \frac{1}{2} \right) v_0^{i\lambda} + C_2 \left( -i\lambda - \frac{1}{2} \right) v_0^{-i\lambda} = 0 \quad (81)$$

$$C_1(aH + v_0)^{i\lambda-1/2} + C_2(aH + v_0)^{-i\lambda-1/2} = 0 \quad (82)$$

Resolviendo simultáneamente las anteriores dos ecuaciones se llega a la siguiente expresión:

$$\lambda_n \ln(aH + v_0) - \lambda_n \ln(v_0) + \tan^{-1}(2\lambda_n) = n\pi \quad (83)$$

Solucionando numéricamente la anterior ecuación para cada valor de  $n$  se obtienen los valores de  $\lambda_n$ , con los cuales se estiman los diferentes periodos naturales a partir de la siguiente ecuación:

$$T_n = \frac{4\pi}{a \sqrt{4\lambda_n^2 + 1}} \quad (84)$$

Ya que la ecuación (84) requiere ser solucionada numéricamente, a continuación se planteará para el periodo fundamental amortiguado una ecuación aproximada, práctica y simple, para la cual solo se requiera una calculadora de mano para su solución.

De acuerdo con la ecuación (53), la función de transferencia para el caso de roca rígida se encuentra determinada por las variables  $\xi_s$ ,  $a$ ,  $H$ ,  $v_0$  y  $\omega$ .

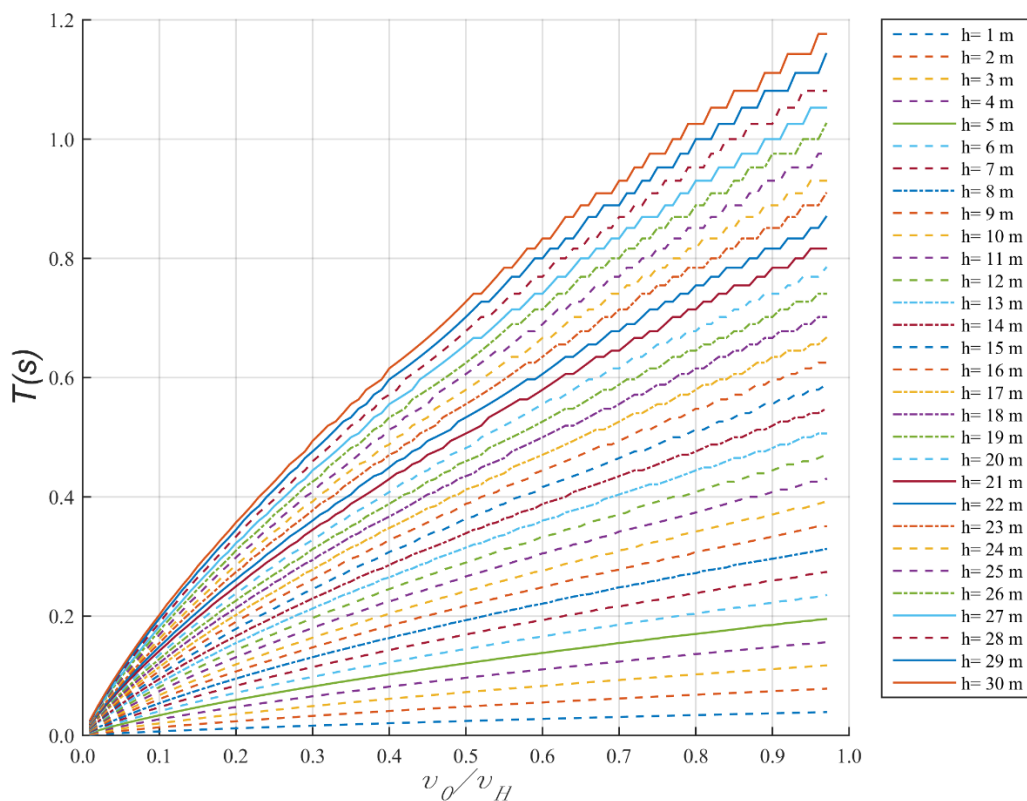
Fijando el amortiguamiento en  $\xi_s = 5\%$  y la velocidad de onda de corte en superficie en  $v_0 = 100 \text{ m/s}$  las variables que quedan son  $a$ ,  $H$  y  $\omega$ .

Con el fin de considerar todas las diferentes posibilidades de variación de la velocidad de onda de corte que se pueden dar en el depósito de suelo, se considerará la variable  $\frac{v_0}{v_H}$  para el rango  $0,01 \leq \frac{v_0}{v_H} \leq 0,97$ . Así, la tasa de variación de velocidad con la

profundidad ( $a$ ) se obtendrá despejando de la ecuación (19) para el valor  $\frac{v_0}{v_H}$  que se desea evaluar.

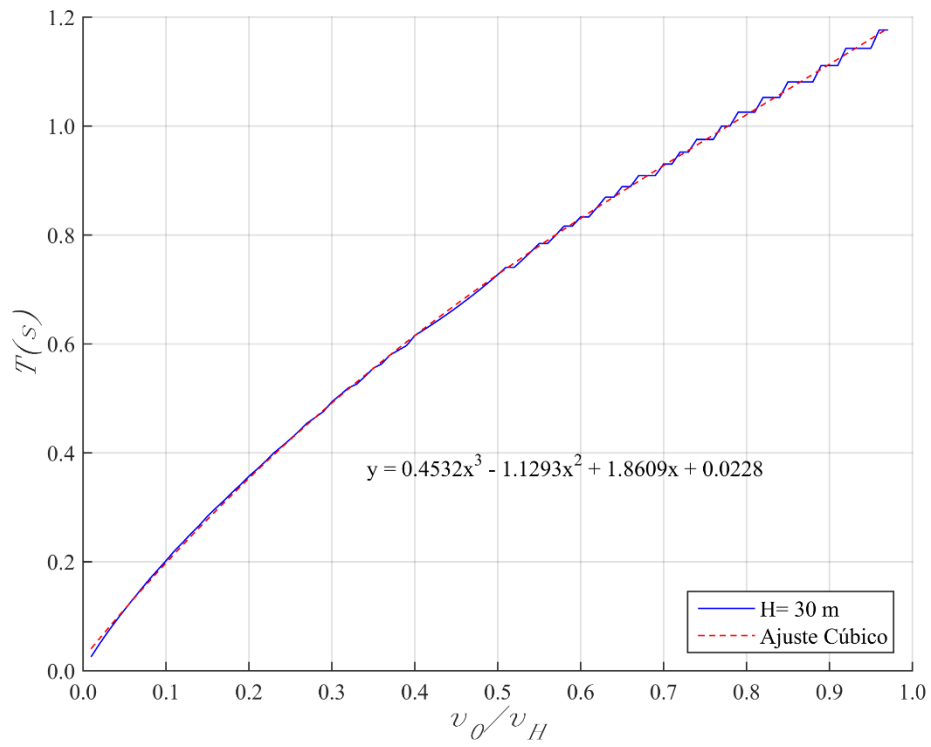
Finalmente, para la variable  $H$  se tomarán valores desde 1 m hasta 30 m y las frecuencias angulares ( $\omega$ ) evaluadas serán las necesarias hasta encontrar el periodo fundamental.

De acuerdo con lo anterior, al graficar los resultados obtenidos para el periodo fundamental real ( $T$ ) para cada  $\frac{v_0}{v_H}$  desde 0,01 hasta 0,97 (con un tamaño de paso de 0,01) y cada valor de  $H$ , se obtiene la gráfica que se muestra en la Figura 27:

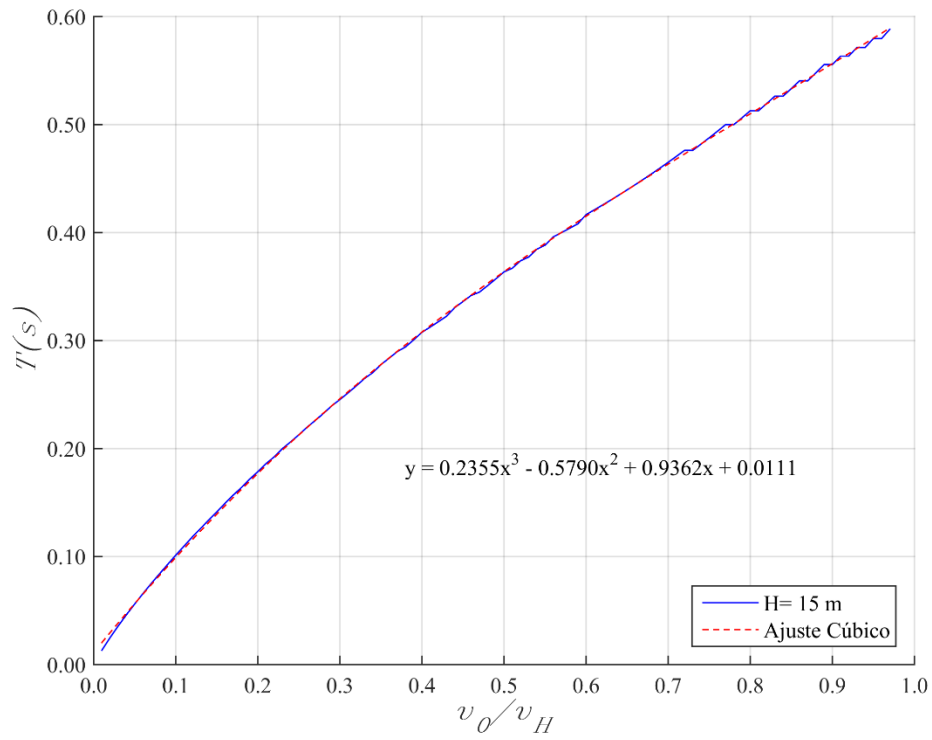


**Figura 27. Variación del periodo fundamental para el caso de roca rígida considerando  $v_0 = 100 \frac{m}{s}$ ,  $\xi_s = 5\%$**

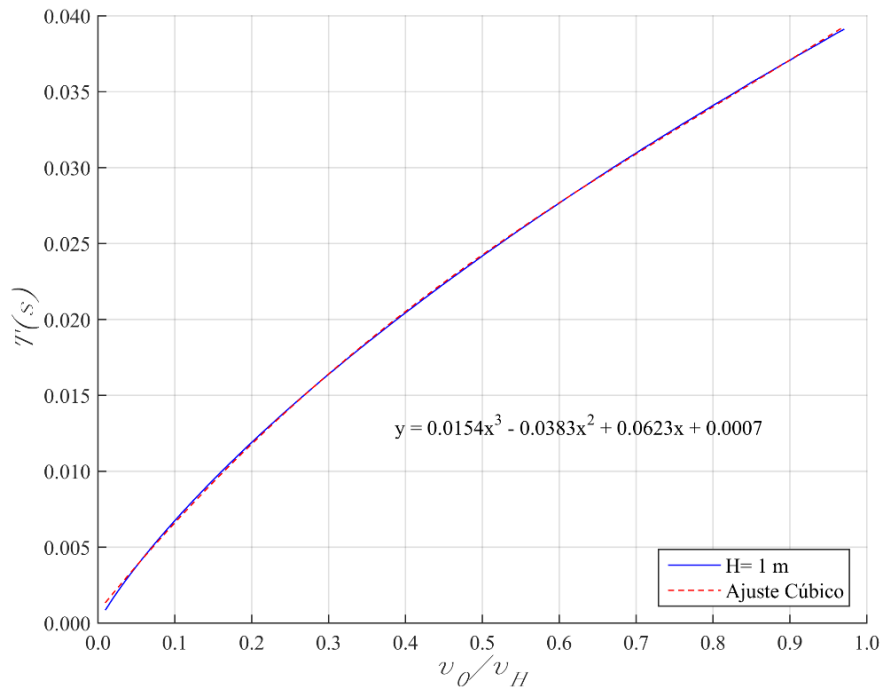
Al analizar cada una de las gráficas de la Figura 27, se observa que cada gráfica se ajusta muy bien a una ecuación cúbica, como se muestra en la Figura 28, Figura 29, y Figura 30 para diferentes valores de  $H$ :



**Figura 28. Variación del periodo fundamental para  $H = 30$  m**



**Figura 29. Variación del periodo fundamental para  $H = 15$  m**



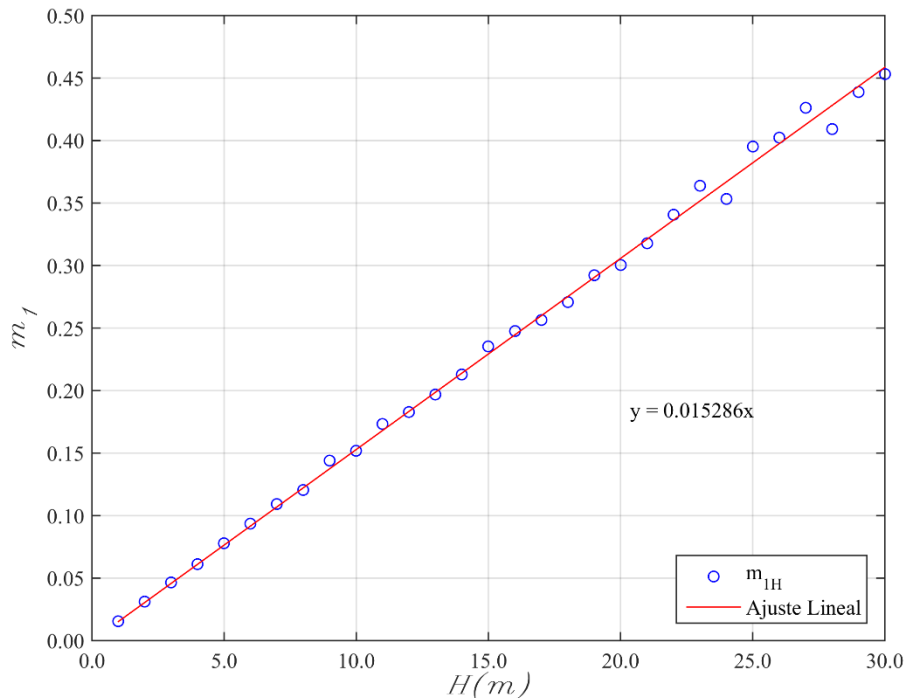
**Figura 30. Variación del periodo fundamental para  $H = 1$  m**

De acuerdo con la Figura 28, Figura 29 y Figura 30, la ecuación que describe el comportamiento del periodo para cada  $H$  tiene la siguiente forma:

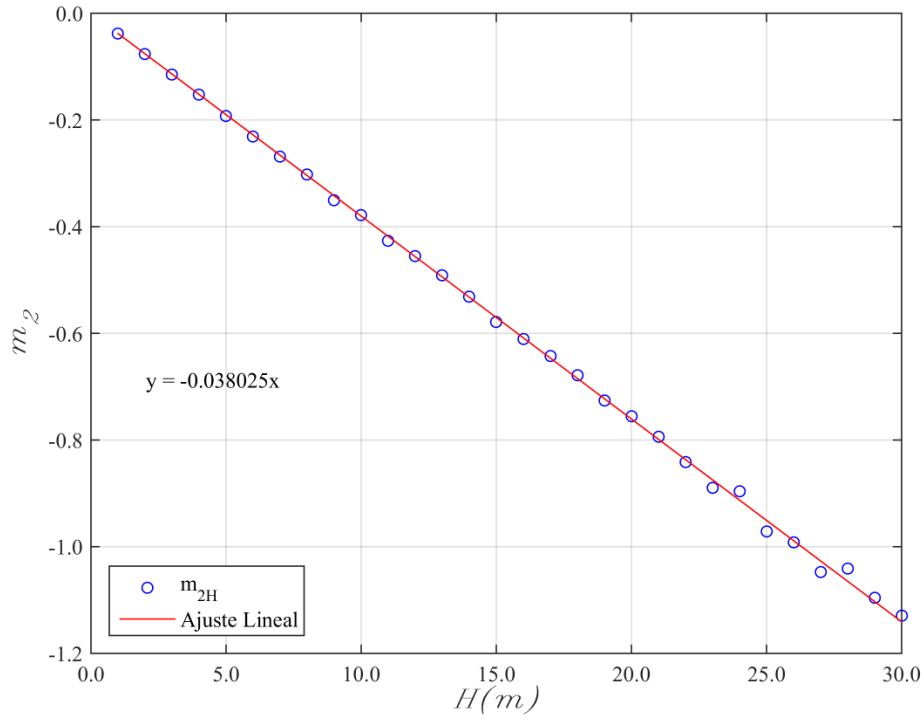
$$T = m_1 \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^3 + m_2 \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^2 + m_3 \left( \frac{v_0}{v_H} \right) + d \quad (85)$$

Entonces es posible concluir que la pendiente  $m_1$  de la gráfica para  $H = 1,0 \text{ m}$  se puede relacionar con la pendiente  $m_1$  de la gráfica para  $H = 5,0 \text{ m}$  o  $H = 20 \text{ m}$ , o en definitiva con la gráfica para cualquier  $H$ .

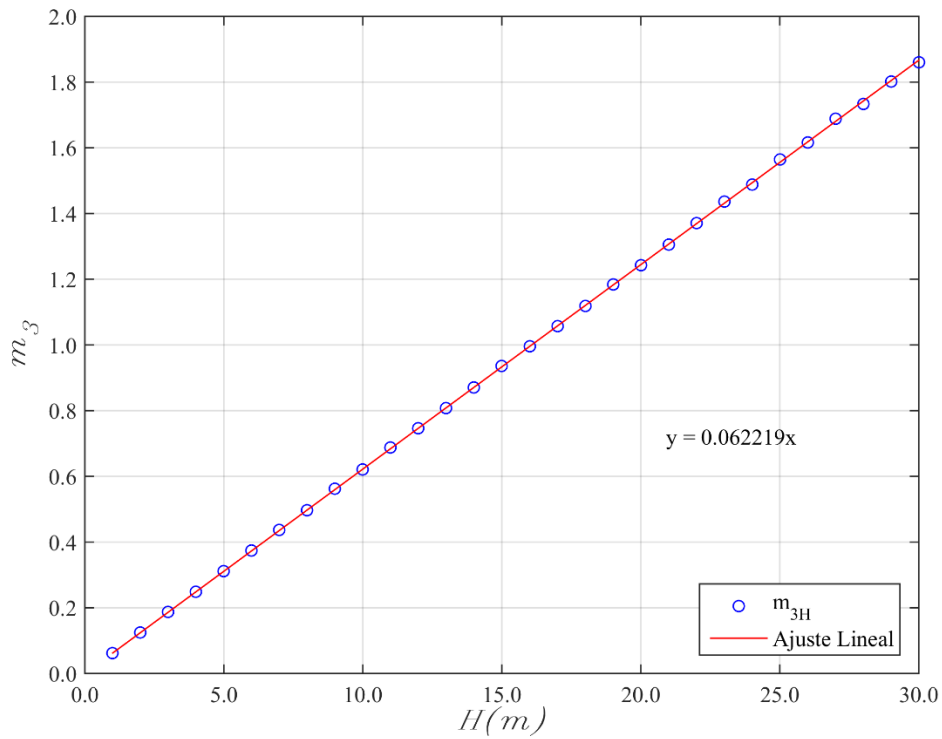
En una gráfica  $H$  vs  $m_x$ , se puede observar que las diferentes pendientes ( $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  y  $d$ ) están relacionadas con la altura  $H$  a través de una ecuación lineal, como se presenta en la Figura 31, Figura 32, Figura 33 y Figura 34:



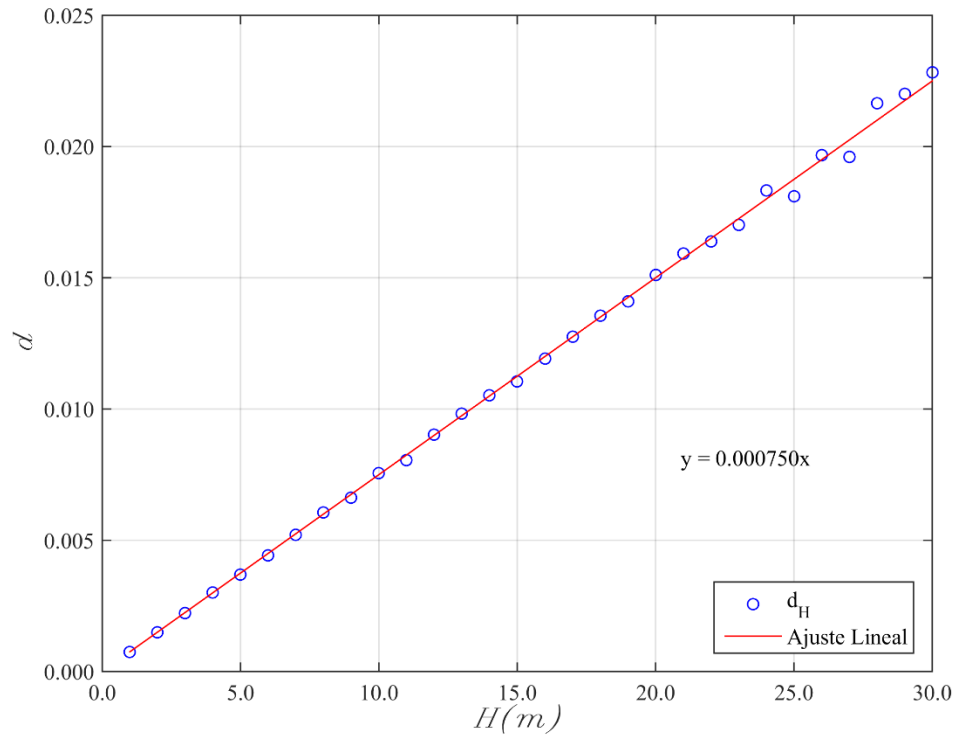
**Figura 31. Variación de la pendiente  $m_1$  con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca rígida**



**Figura 32. Variación de la pendiente  $m_2$  con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca rígida**



**Figura 33. Variación de la pendiente  $m_3$  con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca rígida**



**Figura 34. Variación de la pendiente  $d$  con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca rígida**

De acuerdo con la Figura 31, Figura 32, Figura 33 y Figura 34 las pendientes  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  y  $d$  se definen como se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$m_1 = 0,015286 H \quad (86)$$

$$m_2 = -0,038025 H \quad (87)$$

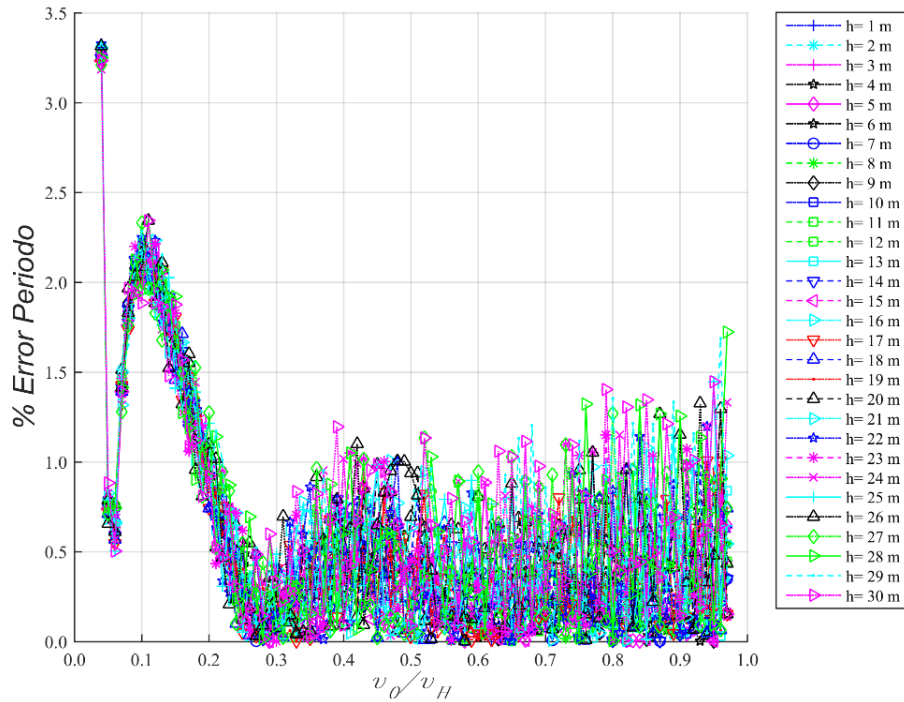
$$m_3 = 0,062219 H \quad (88)$$

$$d = 0,000750 H \quad (89)$$

Reemplazando las ecuaciones (86), (87), (88) y (89) en la ecuación (85) se obtiene:

$$T_{R\acute{i}gido\ Aprox\ \xi=5\%} = 0,015286 H \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^3 - 0,038025 H \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^2 + 0,062219 H \left( \frac{v_0}{v_H} \right) + 0,000750 H \quad (90)$$

Ahora, si se comparan los valores obtenidos del periodo aproximado ( $T_{R\acute{i}gido\ Aprox\ \xi=5\%}$ ) con el periodo real ( $T$ ) se obtienen diferencias entre ambos periodos máximas del 3,33% (Véase Figura 35), para un rango  $\frac{v_0}{v_H}$  desde 0,05 hasta 0,97.



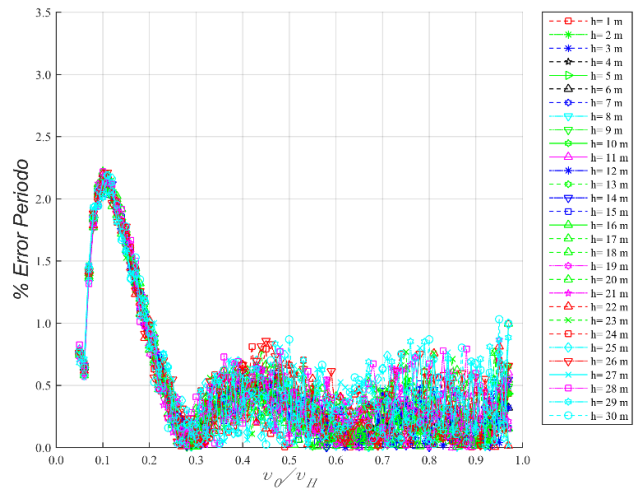
**Figura 35. % Error Periodo obtenido con la Ecuación  $T_{R\acute{i}gido\ Aprox\ \xi=5\%}$  con respecto al Periodo Real ( $T$ ) considerando  $v_0 = 100 \frac{m}{s}$  y  $\xi_s = 5\%$**

Con el fin de generalizar una ecuación válida para cualquier valor de  $v_0$  y cualquier valor de  $\xi_s$ , se realizó el mismo procedimiento descrito anteriormente con diferentes valores de  $v_0$  y diferentes valores de  $\xi_s$ . Finalmente, se determinó la siguiente expresión para

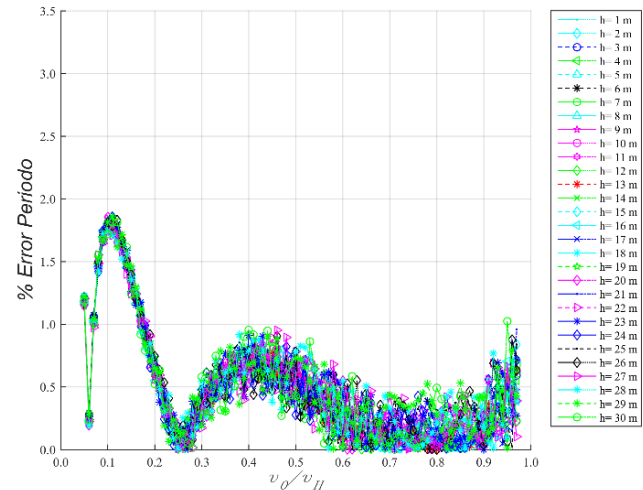
$T_{R\acute{i}gido\ Aprox}$ :

$$T_{R\acute{i}gido\ Aprox} = \left( 1,5286 \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^3 - 3,8025 \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^2 + 6,2219 \left( \frac{v_0}{v_H} \right) + 0,0750 \right) * \frac{H}{v_0} \quad (91)$$

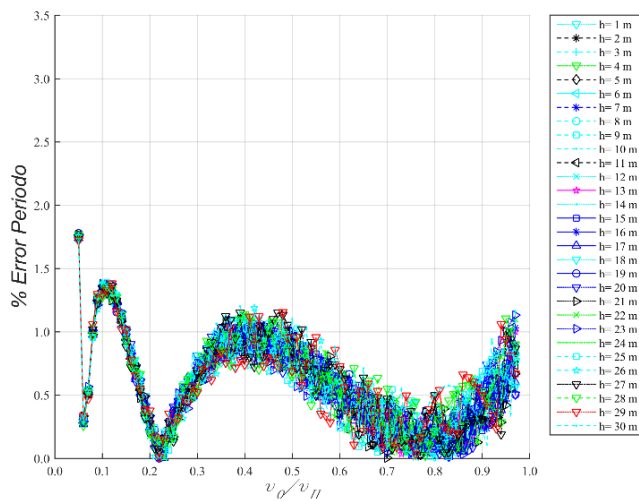
La ecuación (91) es entonces la ecuación para el periodo fundamental para un depósito de suelo con velocidad variando linealmente con la profundidad, sobre roca rígida y para el caso con amortiguamiento. Con esta ecuación se obtienen errores menores al 3,50% cuando se considera  $0,05 \leq \frac{v_0}{v_H} \leq 0,97$ ,  $90 \frac{m}{s} \leq v_0 \leq 400 \text{ m/s}$  y  $0 < \xi_s \leq 15\%$  (Véase Figura 36).



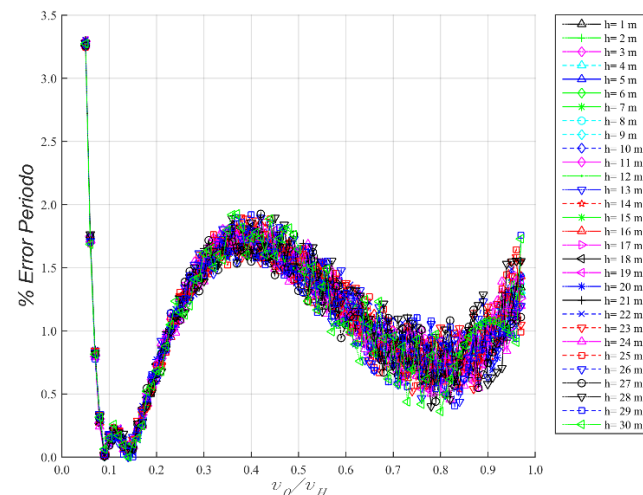
a)  $v_0 = 175 \frac{m}{s} - \xi_s = 5\%$



b)  $v_0 = 241 \frac{m}{s} - \xi_s = 7,5\%$



c)  $v_0 = 297 \frac{m}{s} - \xi_s = 10\%$



d)  $v_0 = 333 \frac{m}{s} - \xi_s = 15\%$

Figura 36. Error (%) obtenido con la Ecuación  $T_{Rigido Aprox}$  con respecto al Periodo Real ( $T$ )

## 10.2. Caso base sobre roca elástica

Previamente en el numeral 2 se mostró que el modelo de roca elástica, a diferencia del modelo de roca rígida considera las variables  $\rho, \xi$  y  $v_s$  tanto del suelo como de la roca. Ya que esta investigación se enfocó en el efecto causado por una velocidad de onda de corte variando linealmente, se considera en este numeral  $\rho_s = \rho_r$  y  $\xi_s = \xi_r = 0$ , con el fin de identificar más claramente los efectos anteriormente mencionados. Adicionalmente, se consideró el perfil de velocidades presentado en la Figura 20 en el cual se define que la velocidad de onda de corte de la roca es constante e igual a la velocidad obtenida en la base del depósito de suelo, como se muestra a continuación:

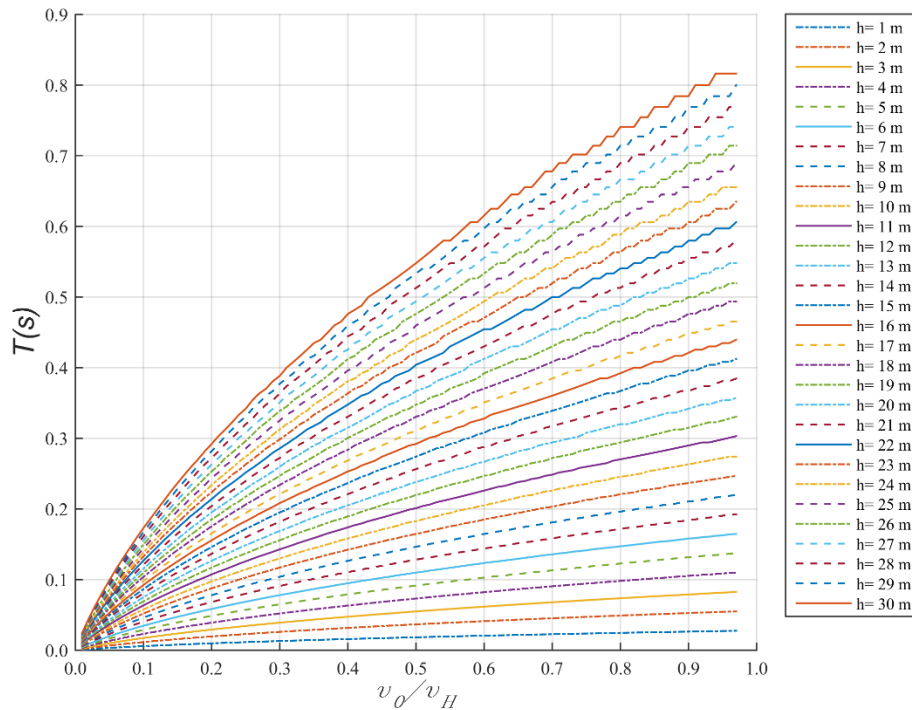
$$v_{sr} = v_H = aH + v_0 \quad (92)$$

De acuerdo con la ecuación (58) la función de transferencia para el caso de roca elástica depende de las variables  $a, H, v_0, v_{sr}$  y  $\omega$ .

Teniendo en cuenta que  $v_{sr}$  se definió en términos de  $a, H$  y  $v_0$  (ecuación (92)) y fijando la velocidad de onda de corte en superficie en  $v_0 = 100 \text{ m/s}$  las variables que quedan son  $a, H$  y  $\omega$ .

De aquí en adelante se sigue el mismo procedimiento planteado en el numeral 10.1

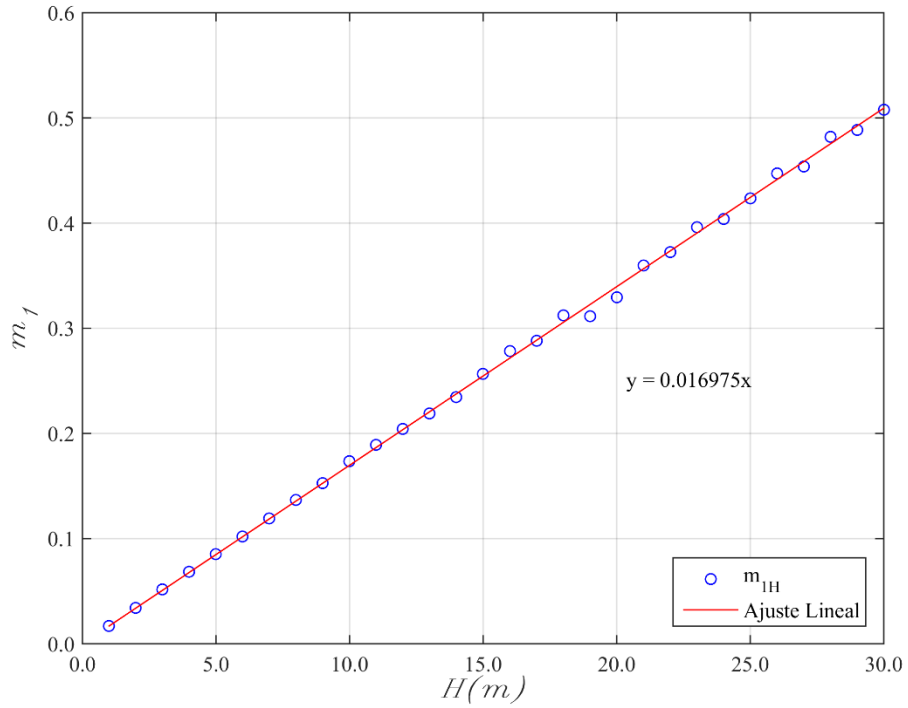
Al graficar los resultados obtenidos para el periodo fundamental real ( $T$ ) para cada  $\frac{v_0}{v_H}$  desde 0,01 hasta 0,97 (con un tamaño de paso de 0,01) y cada valor de  $H$ , se obtiene la gráfica que se muestra en la Figura 37:



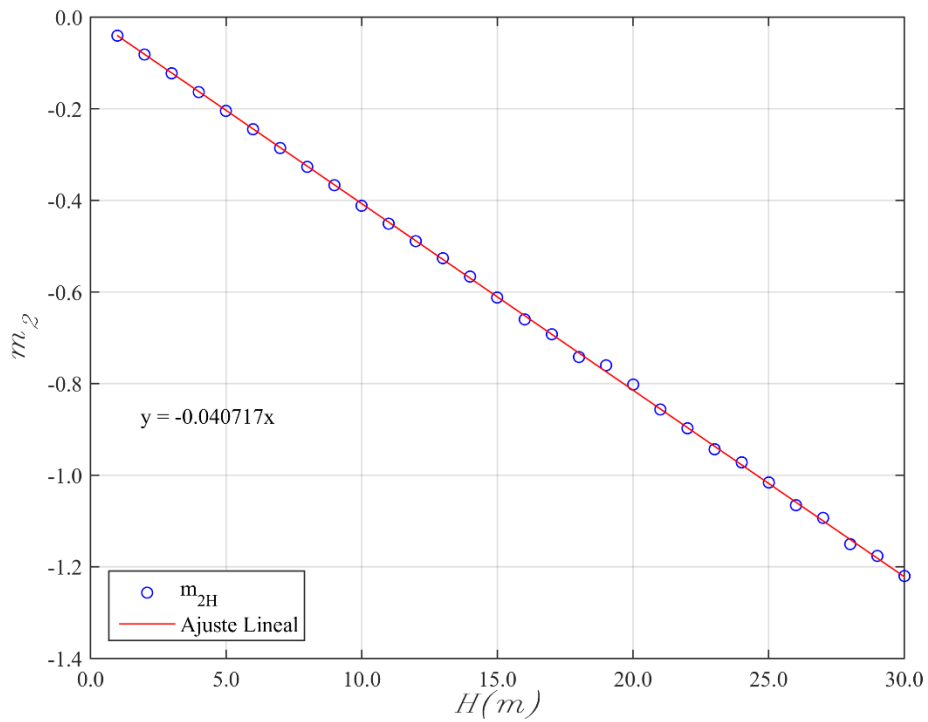
**Figura 37. Variación del periodo fundamental para el caso de roca elástica considerando**

$$v_0 = 100 \frac{m}{s}, v_{sr} = v_H, \rho_s = \rho_r, \xi_s = \xi_r = 0,0 \%$$

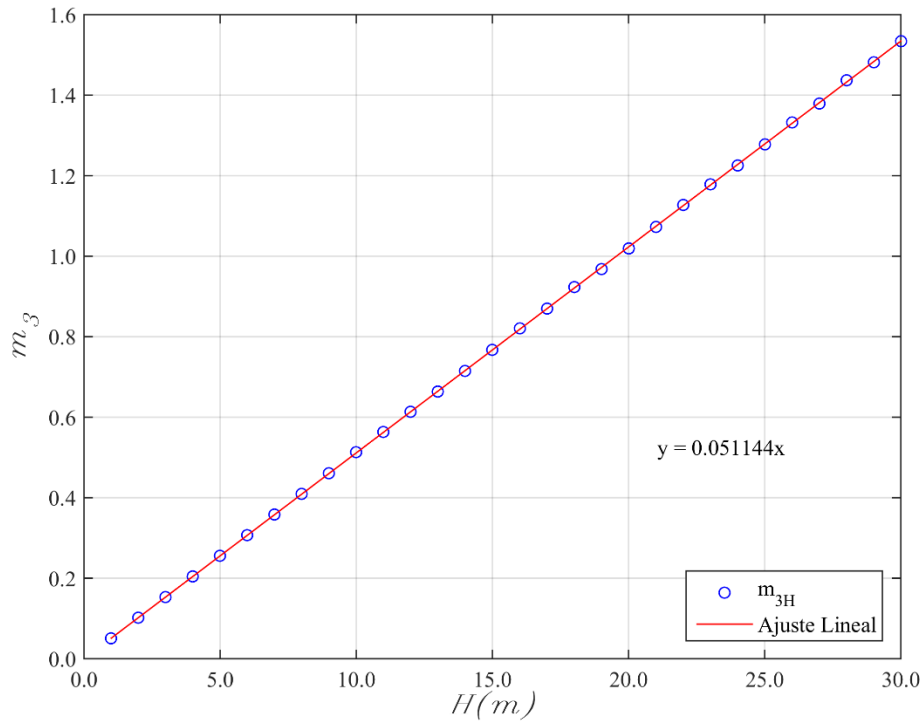
Al igual que en el caso para roca rígida (numeral 10.1) al analizar cada una de las gráficas de la Figura 37, se concluyó que cada una de ellas se ajusta muy bien a una ecuación cúbica y se determinó que las diferentes pendientes ( $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  y  $d$ ) están relacionadas con la altura  $H$  a través de una ecuación lineal, como se presenta en la Figura 38, Figura 39, Figura 40 y Figura 41:



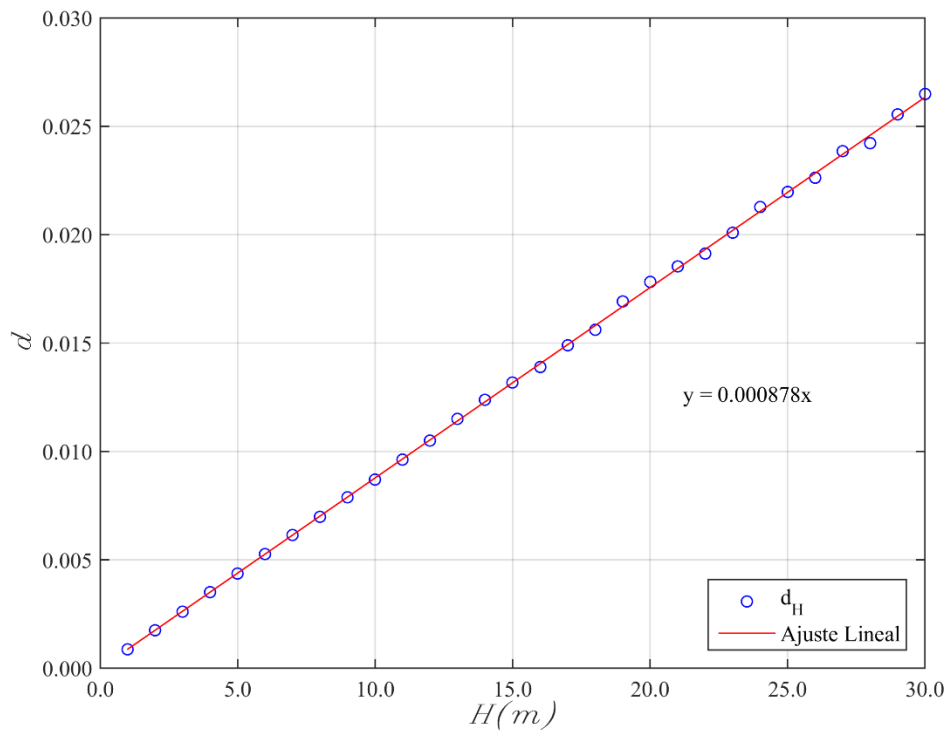
**Figura 38. Variación de la pendiente  $m_1$  con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca elástica**



**Figura 39. Variación de la pendiente  $m_2$  con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca elástica**



**Figura 40. Variación de la pendiente  $m_3$  con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca elástica**



**Figura 41. Variación de la pendiente  $d$  con el espesor del depósito ( $H$ ) – Caso roca elástica**

De acuerdo con la Figura 38, Figura 39, Figura 40 y Figura 41 se puede observar que las pendientes  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  y  $d$  se definen como se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$m_1 = 0,016975 H \quad (93)$$

$$m_2 = -0,040717 H \quad (94)$$

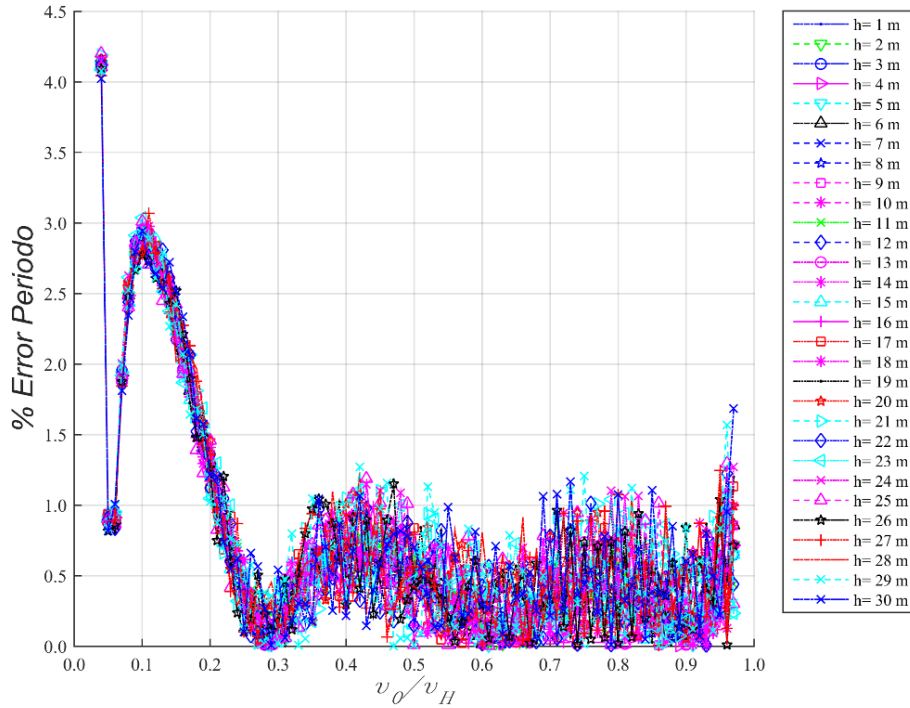
$$m_3 = 0,051144 H \quad (95)$$

$$d = 0,000878 H \quad (96)$$

Con las ecuaciones (93), (94), (95) y (96) se determinó la siguiente ecuación para el periodo aproximado sobre roca elástica:

$$T_{Elástico Aprox} = 0,016975 H \left(\frac{v_0}{v_H}\right)^3 - 0,040717 H \left(\frac{v_0}{v_H}\right)^2 + 0,051144 H \left(\frac{v_0}{v_H}\right) + 0,000878 H \quad (97)$$

Ahora, si se comparan los valores obtenidos del periodo aproximado ( $T_{Elástico Aprox}$ ) con el periodo real ( $T$ ) se obtienen diferencias entre ambos periodos máximas del 4,20% (Véase Figura 42), para un rango  $\frac{v_0}{v_H}$  desde 0,04 hasta 0,97.

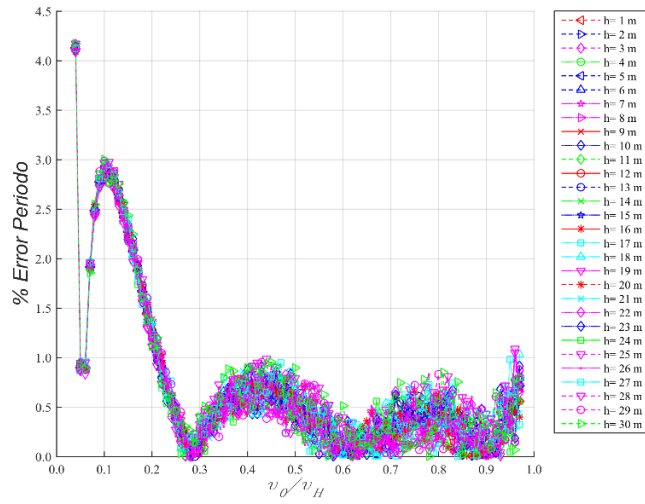


**Figura 42. % Error Periodo obtenido con la Ecuación  $T_{Elástico Aprox}$  con respecto al Periodo Real ( $T$ ) considerando  $v_0 = 100 \frac{m}{s}$ ,  $v_{sr} = v_H$ ,  $\rho_s = \rho_r$ ,  $\xi_s = \xi_r = 0,0\%$**

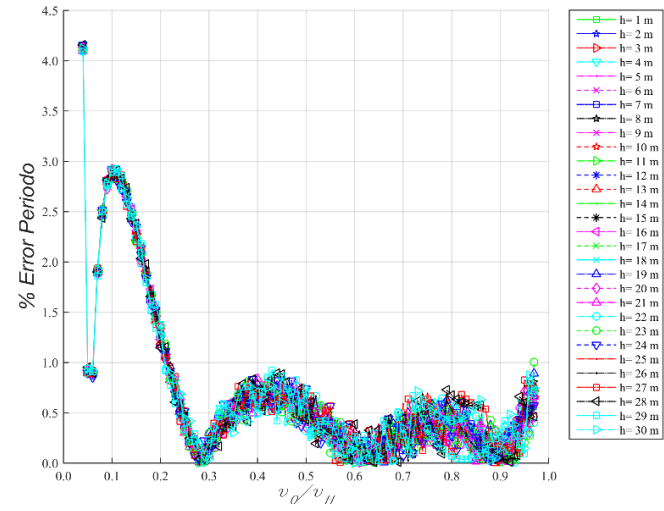
Variando el valor de  $v_0$  y realizando el mismo procedimiento planteado en el numeral 10.1, se determinó que la ecuación para  $T_{Elástico Aprox}$  se puede generalizar para diferentes valores de  $v_0$  así:

$$T_{Elástico Aprox} = \left( 1,6975 \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^3 - 4,0717 \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^2 + 5,1144 \left( \frac{v_0}{v_H} \right) + 0,0878 \right) * \frac{H}{v_0} \quad (98)$$

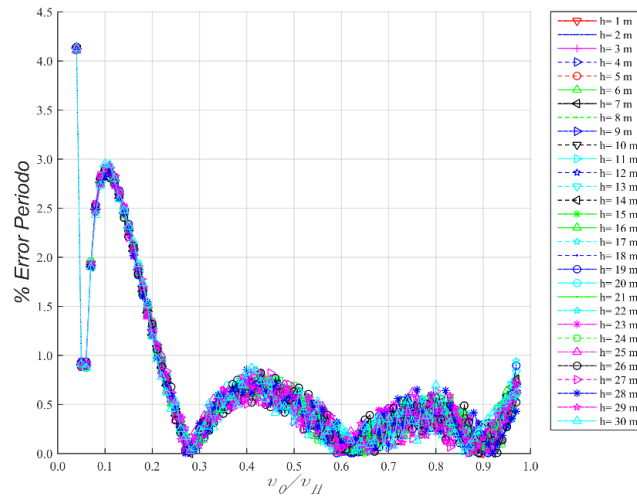
La ecuación (98) es entonces la ecuación para el periodo fundamental para un depósito de suelo con velocidad variando linealmente con la profundidad, sobre roca elástica, con densidad igual a la densidad de la roca, amortiguamiento nulo tanto de la roca como del suelo y para el caso en que la velocidad de la roca es igual a la velocidad final del depósito de suelo. Con esta ecuación se obtienen errores menores al 4,20% cuando se considera  $0,04 \leq \frac{v_0}{v_H} \leq 0,97$  y  $90 \frac{m}{s} \leq v_0 \leq 400 \frac{m}{s}$  (Véase Figura 43).



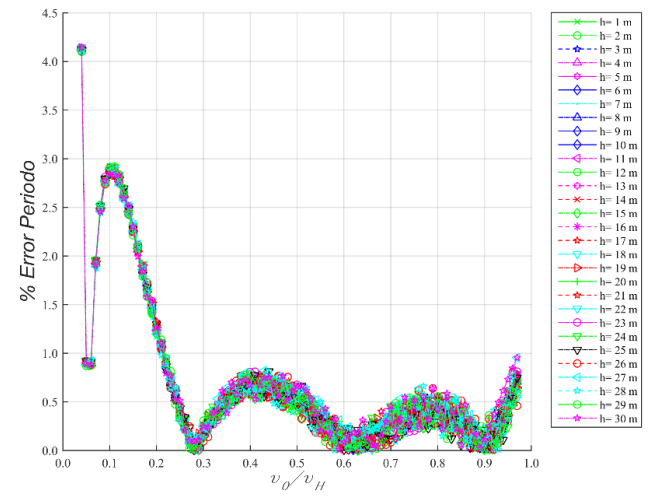
a)  $v_0 = 175 \text{ m/s}$



b)  $v_0 = 241 \text{ m/s}$



c)  $v_0 = 297 \text{ m/s}$



d)  $v_0 = 333 \text{ m/s}$

Figura 43. Error (%) obtenido con la Ecuación  $T_{Elastico Aprox}$  con respecto al Periodo Real ( $T$ )

### 10.3. Comparación de las ecuaciones de periodo fundamental aproximado obtenidas para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica

Las ecuaciones (91) y (98) en su forma son similares a la ecuación del periodo fundamental para el caso de un depósito de suelo con velocidad constante sobre roca rígida, la cual se presenta a continuación:

$$T = \frac{4H}{v_{ss}} \quad (99)$$

Las expresiones para  $T_{Rígido Aprox}$  y  $T_{Elástico Aprox}$  se pueden expresar exactamente en la forma de la ecuación (99) haciendo:

$$T_{Rígido Aprox} = \frac{4H}{v_{eq}} \quad (100)$$

y

$$T_{Elástico Aprox} = \frac{4H}{v_{eq}} \quad (101)$$

En términos generales las ecuaciones (100) y (101) conllevan a:

$$\frac{4H}{v_{eq}} = \left( m_1 \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^3 + m_2 \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^2 + m_3 \left( \frac{v_0}{v_H} \right) + d \right) * \frac{H}{v_0} \quad (102)$$

Finalmente se obtiene:

$$v_{eq} = \frac{4v_0}{m_1 \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^3 + m_2 \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^2 + m_3 \left( \frac{v_0}{v_H} \right) + d} \quad (103)$$

Despejando en la ecuación (103) la relación  $\frac{v_{eq}}{v_0}$  se obtiene:

$$\frac{v_{eq}}{v_0} = \frac{4}{m_1 \left(\frac{v_0}{v_H}\right)^3 + m_2 \left(\frac{v_0}{v_H}\right)^2 + m_3 \left(\frac{v_0}{v_H}\right) + d} \quad (104)$$

La ecuación (104) graficada tanto para el caso de roca rígida como para el caso de roca elástica se presenta en la Figura 44. Al leer en dicha figura la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  y su respectivo valor de  $\frac{v_{eq}}{v_0}$ , luego reemplazando por el valor de  $v_0$  se obtiene el valor de  $v_{eq}$ , el cual reemplazado en la respectiva ecuación (100) o ecuación (101) permite obtener de una manera más fácil y rápida el valor de  $T_{Rígido Aprox}$  o  $T_{Elástico Aprox}$ .

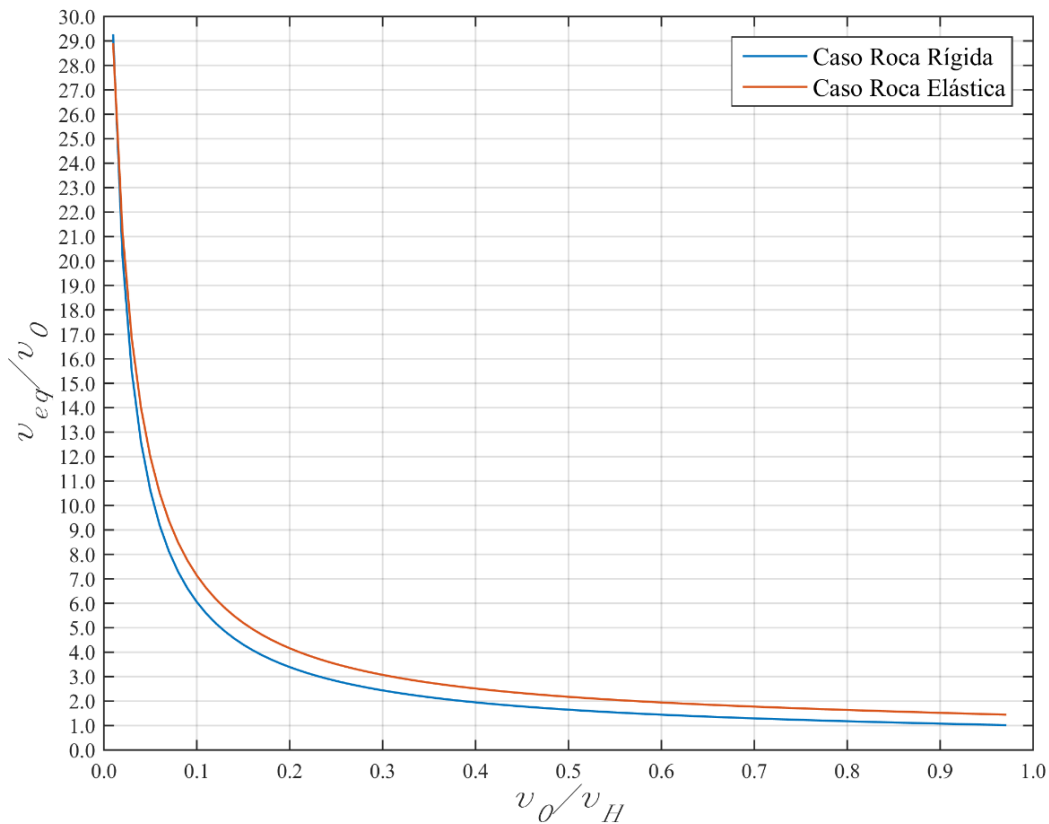


Figura 44. Gráfica para obtener  $T_{Rígido Aprox}$  y  $T_{Elástico Aprox}$  con la ecuación

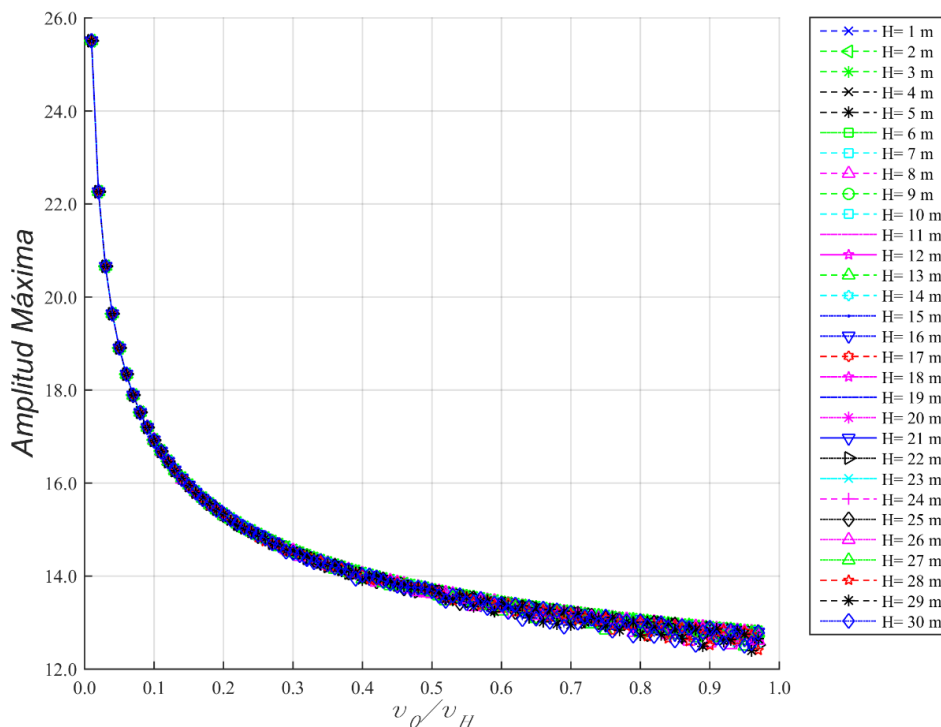
$$T = \frac{4H}{v_{eq}}$$

De acuerdo con la Figura 44 se concluye que con el caso de roca elástica se obtienen periodos fundamentales hasta un 20% más bajos que el periodo obtenido con el caso de roca rígida para  $\frac{v_0}{v_H} \leq 0,29$  y hasta un 30% más bajos para  $\frac{v_0}{v_H} > 0,29$ .

## 11. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN APROXIMADA PARA LA AMPLITUD MÁXIMA

### 11.1. Amplitud máxima para el caso de roca rígida

Al graficar las amplitudes obtenidas en los periodos fundamentales para cada valor de  $\frac{v_0}{v_H}$  y cada valor de  $H$ , considerando  $v_0 = 100 \frac{m}{s}$  y  $\xi_s = 5\%$ , se obtiene la gráfica que se presenta en la Figura 45:



**Figura 45. Amplitud máxima para el caso de roca rígida considerando  $v_0 = 100 \text{ m/s}$  y  $\xi_s = 5\%$**

En la Figura 45 se puede observar que se obtiene la misma gráfica o una gráfica muy similar para los diferentes valores de  $H$ . Lo anterior no indica que la amplitud no depende de  $H$ , ya que como se puede observar en la ecuación (53) la variable  $H$  está siempre

presente, lo que sucede es que  $H$  se encuentra dentro del paréntesis que define a  $v_H$  ( $v_H = aH + v_0$ ).

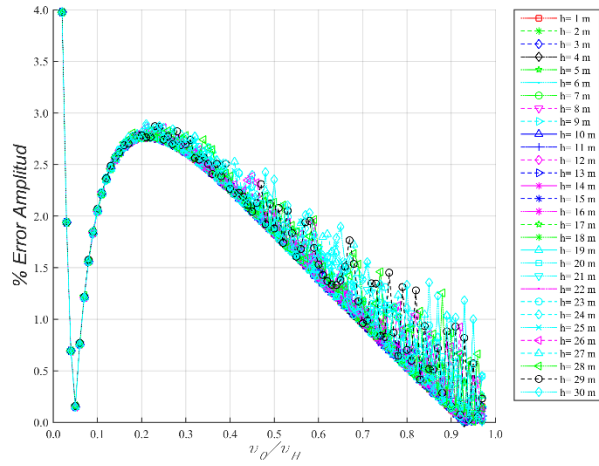
Al variar el valor de  $v_0$  y el valor de  $\xi_s$ , se dedujo la siguiente ecuación aproximada para la amplitud máxima del caso de roca rígida:

$$\text{Amplitud Máxima}_{Rígida Aprox} = \frac{2}{\pi \xi_s} \left( \frac{v_0}{v_H} \right)^{-0,13246} \quad (105)$$

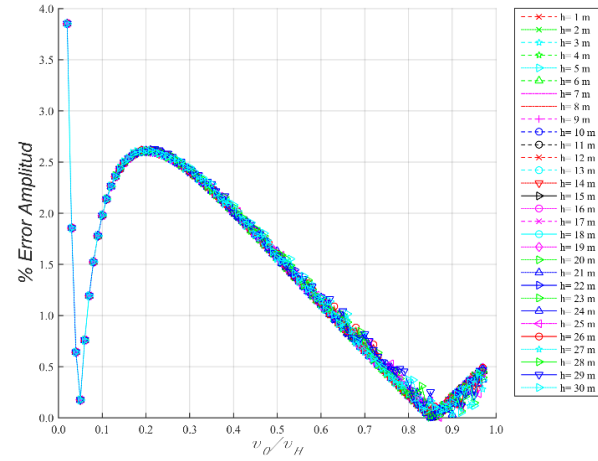
Aunque la ecuación (105) depende de la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  la cual es un parámetro adimensional, se concluye que la amplitud máxima no depende del espesor del depósito de suelo ni de la velocidad de onda de corte, lo anterior es consistente con la ecuación de la amplitud máxima del caso de velocidad constante para el modelo de roca rígida, la cual está dada por la ecuación (106):

$$A = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\xi_s} \quad (106)$$

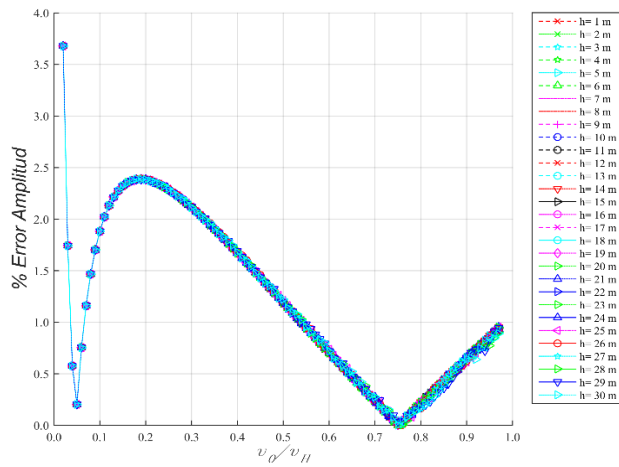
La ecuación (105) es entonces la ecuación para la amplitud máxima para un depósito de suelo con velocidad variando linealmente con la profundidad, sobre roca rígida y para el caso con amortiguamiento. Con esta ecuación se obtienen errores menores al 4,30% cuando se considera  $0,02 \leq \frac{v_0}{v_H} \leq 0,97$ ,  $90 \frac{m}{s} \leq v_0 \leq 400 \frac{m}{s}$  y  $0 < \xi_s \leq 15\%$  (Véase Figura 46).



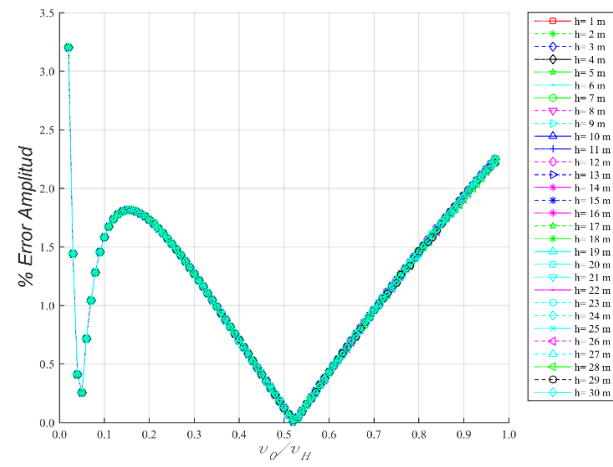
a)  $v_0 = 175 \text{ m/s}$   $\xi_s = 5\%$



b)  $v_0 = 241 \text{ m/s}$   $\xi_s = 7,5\%$



c)  $v_0 = 297 \text{ m/s}$   $\xi_s = 10\%$



d)  $v_0 = 333 \text{ m/s}$   $\xi_s = 15\%$

Figura 46. Error Amplitud (%) obtenido con la Ecuación  $Amplitud\ M\acute{a}xima_{R\acute{i}gida\ Aprox}$  con respecto a la Amplitud M\acute{a}xima

Real

## 11.2. Amplitud máxima para el caso de roca elástica

Por las razones planteadas en el numeral 10.2, en este numeral también se consideró  $\rho_s = \rho_r$  y  $\xi_s = \xi_r = 0$ . Adicionalmente, se consideró el perfil de velocidades presentado en la Figura 20, en el cual se define  $v_{sr} = v_H$ .

Al graficar las amplitudes máximas obtenidas en los periodos fundamentales para cada valor de  $\frac{v_0}{v_H}$  y cada valor de  $H$ , considerando  $\rho_s = \rho_r$ ,  $\xi_s = \xi_r = 0,0\%$  y  $v_0 = 100 \frac{m}{s}$ , se obtiene la gráfica que se presenta en la Figura 47:

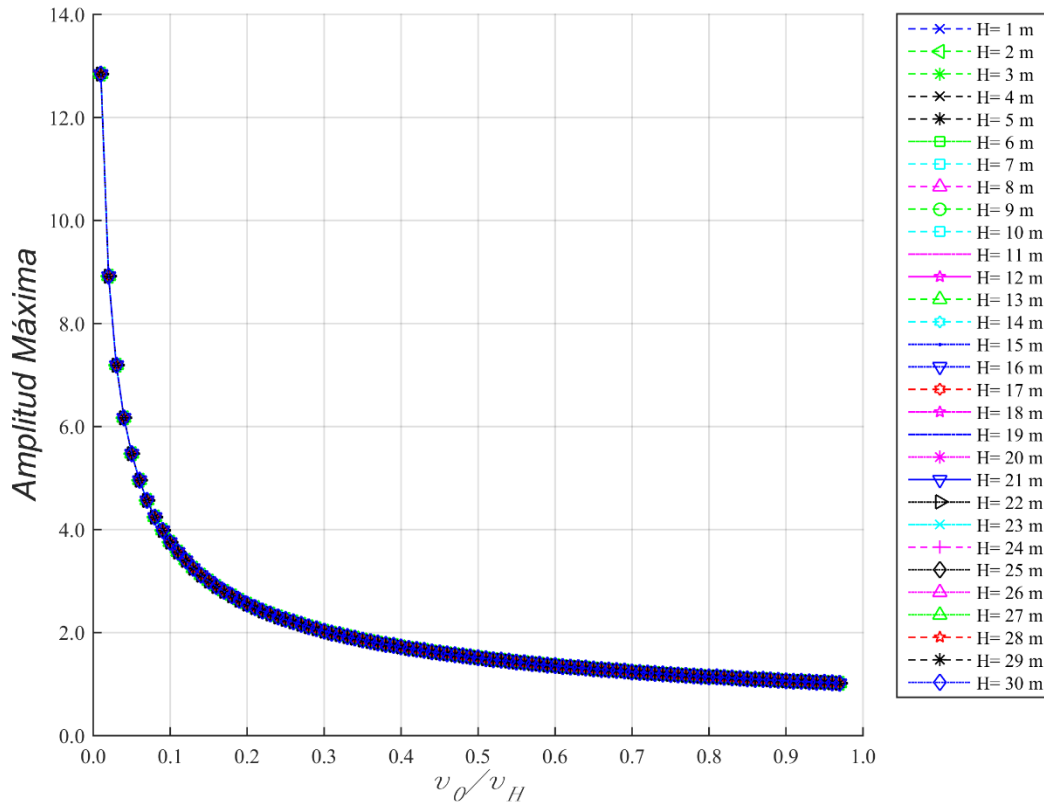
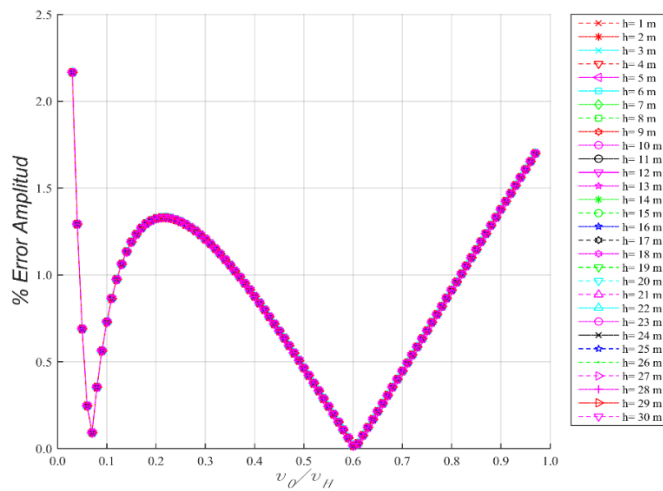


Figura 47. Amplitud máxima para el caso de roca elástica considerando  $v_0 = 100 \frac{m}{s}$ ,  $v_{sr} = v_H$ ,  $\rho_s = \rho_r$ ,  $\xi_s = \xi_r = 0,0\%$

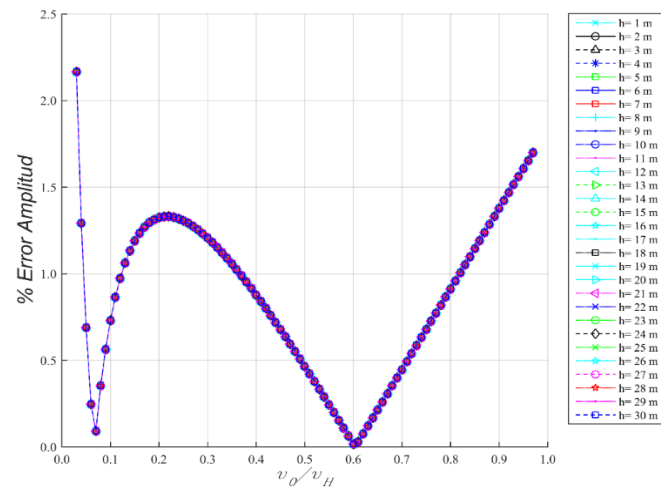
Siguiendo el procedimiento planteado en el Numeral 11.1, se obtuvo la siguiente ecuación para la amplitud máxima del caso de roca elástica, la cual aplica para cualquier valor de  $v_0$ :

$$Amplitud\ Máxima_{Elástica\ Aprox} = 1,01838 \left(\frac{v_0}{v_H}\right)^{-0,5637} \quad (107)$$

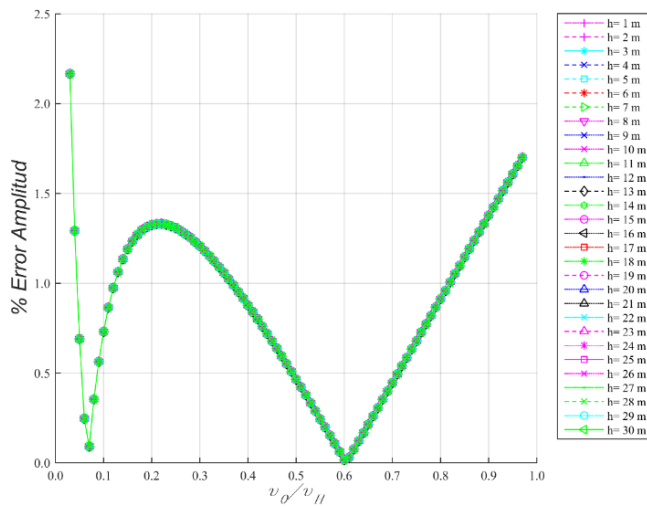
La ecuación (107) es entonces la ecuación para la amplitud máxima para un depósito de suelo con velocidad variando linealmente con la profundidad, sobre roca elástica, con densidad igual a la densidad de la roca, amortiguamiento nulo tanto de la roca como del suelo y para el caso en que la velocidad de la roca es igual a la velocidad final del depósito de suelo. Con esta ecuación se obtienen errores menores al 2,20% cuando se considera  $0,03 \leq \frac{v_0}{v_H} \leq 0,97$  y  $90 \frac{m}{s} \leq v_0 \leq 400 \frac{m}{s}$  (Véase Figura 48).



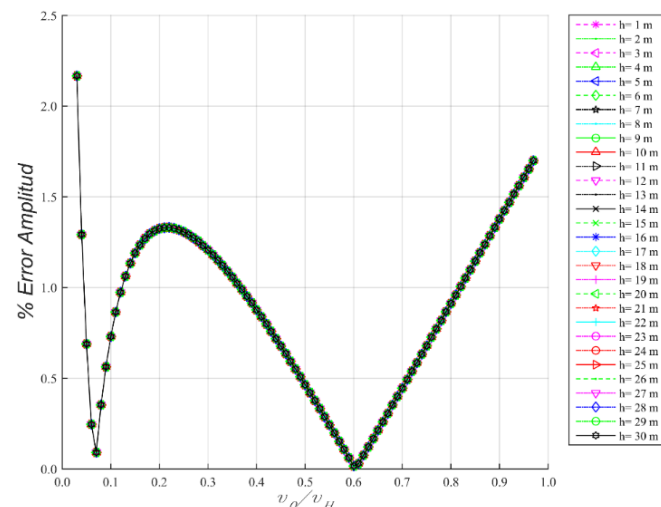
a)  $v_0 = 175 \text{ m/s}$



b)  $v_0 = 241 \text{ m/s}$



c)  $v_0 = 297 \text{ m/s}$



d)  $v_0 = 333 \text{ m/s}$

Figura 48. Error Amplitud (%) obtenido con la Ecuación  $Amplitud\ M\acute{a}xima_{El\acute{a}stica\ Aprox}$  con respecto a la Amplitud Máxima

Real

### 11.3. Comparación de las ecuaciones de amplitud máxima aproximada obtenidas para el caso de roca rígida y el caso de roca elástica

En la Figura 49 se presentan gráficamente las amplitudes máximas para diferentes relaciones  $\frac{v_0}{v_H}$ , para los modelos de roca rígida y roca elástica. Se puede notar en dicha gráfica las diferencias en las amplitudes máximas al considerar el modelo de roca rígida y el modelo de roca elástica.

En esta gráfica es importante destacar el hecho que con el caso de roca elástica con amortiguamiento nulo del suelo y la roca se obtienen amplitudes bastante menores que el caso de roca rígida, incluso cuando se compara con el caso de roca rígida con amortiguamiento del suelo del 15%.

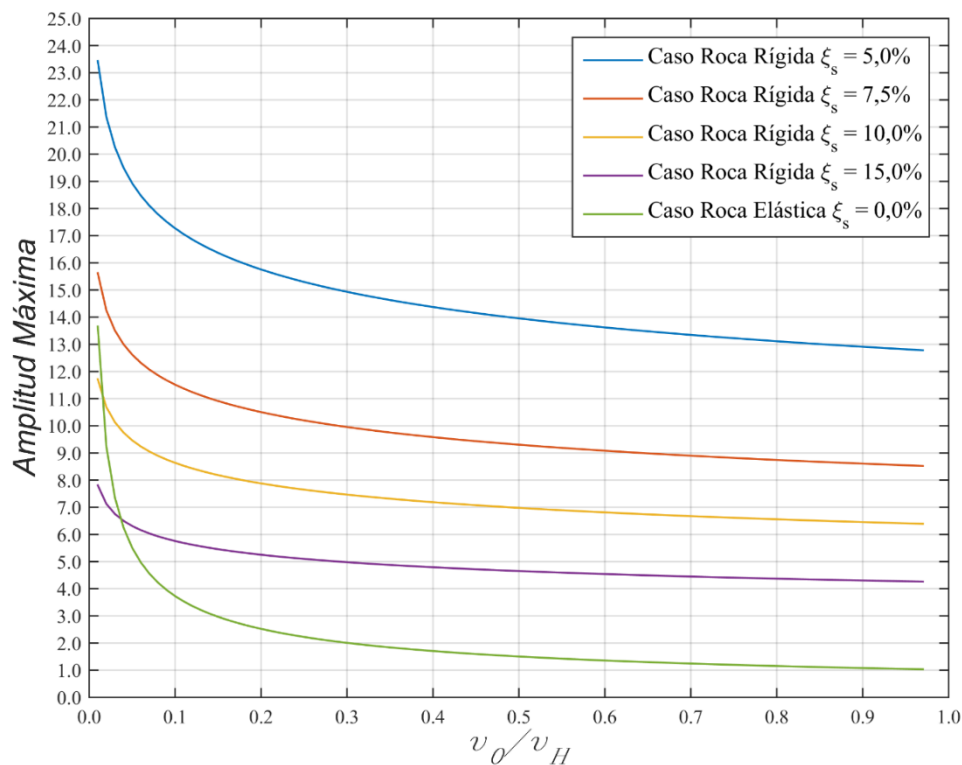


Figura 49. Amplitud máxima para el modelo de roca rígida y el modelo de roca elástica.

## 12. CONCLUSIONES

Entre menor es la relación  $\frac{v_0}{v_H}$ , mayores serán las amplitudes de los desplazamientos, por otro lado, las frecuencias naturales del depósito de suelo también se van haciendo mayores, lo que indica que el depósito empieza a comportarse más rígidamente.

Al comparar las funciones de transferencia obtenidas con el modelo de roca rígida y el modelo de roca elástica, se observó al igual que en el caso convencional, una disminución muy significativa en la amplitud cuando se considera el modelo de roca elástica, incluso cuando se considera para el caso de roca elástica un amortiguamiento nulo.

Al comparar las funciones de transferencia obtenidas con el modelo de roca rígida y el modelo de roca elástica, se observó que las frecuencias naturales no coinciden, como sí sucede para el caso de velocidad constante. Para el caso de roca elástica las frecuencias naturales son mayores, es decir, presenta periodos naturales más pequeños que el caso de roca rígida. Para relaciones  $\frac{v_0}{v_H} \leq 0,29$  el periodo fundamental del caso de roca elástica puede ser hasta un 20% más bajo que el periodo fundamental del caso de roca rígida, mientras que para relaciones  $\frac{v_0}{v_H} > 0,29$  puede llegar a ser hasta un 30% más bajo. Lo anterior indica que en el caso de roca elástica el depósito de suelo se comporta más rígidamente.

En la función de transferencia para el caso de roca elástica se observó que los picos de amplificación de los diferentes modos son muy cercanos en magnitud y no se presentan valles pronunciados como en el caso de roca rígida, por lo que en muchas ocasiones no es fácil identificarlos. Lo anterior pareciera indicar que no hay modos de vibración claros y que todas las frecuencias tienen una respuesta importante, por lo que se deben considerar todas de manera continua.

Las formas modales para los tres primeros modos mostraron que a medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  disminuye, las amplitudes de desplazamiento se reducen más rápidamente con la profundidad. Para los modos 2 y 3, que tienen cambio de signo, estos cambios de signo se dan mucho más cerca de la superficie a medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  disminuye.

En las gráficas de las formas modales también se observó que a medida que la relación  $\frac{v_0}{v_H}$  se hace menor, dichas gráficas en cercanía a la superficie se van volviendo tangente a la horizontal, lo cual refleja una deformación muy grande, tendiendo a infinito.

Gráficamente se compararon las funciones de transferencia del caso de variación lineal de la velocidad con las funciones de transferencia obtenidas con el caso convencional, considerando los siguientes casos de velocidad constante: velocidad de onda de corte mínima del depósito de suelo (caso 1), velocidad que genera el mismo tiempo de viaje de la onda de la base a la superficie (caso 2), velocidad promedio del depósito de suelo (caso 3), velocidad que genera el mismo periodo fundamental del depósito no homogéneo (caso 4) y velocidad máxima del depósito de suelo (caso 5).

Con el caso 1 siempre se presentaron mayores amplificaciones que con el caso de variación lineal de la velocidad y los casos 2, 3, 4 y 5. Así mismo, con el caso 1 siempre se obtuvo frecuencias naturales más pequeñas y por lo tanto un comportamiento más flexible del suelo en relación con el caso de variación lineal de la velocidad y los casos 2, 3 y 4.

El caso de velocidad variando linealmente presenta frecuencias naturales mayores que los casos 1, 2 y 3, por lo tanto, se comporta más rígidamente que los casos de velocidad constante anteriormente mencionados.

En términos de frecuencias fundamentales se resalta que reemplazar el depósito no homogéneo por un depósito homogéneo equivalente con el cual se obtengan magnitudes de error  $\leq 10\%$ , es posible solo con el caso 3 en el estrecho rango de  $0,01 \leq \frac{v_0}{v_H} \leq 0,04$ .

De acuerdo con esto se concluye que en términos de frecuencias fundamentales no es posible reemplazar el depósito no homogéneo con un depósito homogéneo equivalente cuya velocidad de onda de corte se defina por los casos del 1 al 3.

El caso de velocidad variando linealmente en profundidad genera mayores amplificaciones que los casos 2, 3, 4 y 5. De acuerdo con lo anterior, se concluye que dichos casos de velocidad constante subestiman la respuesta dinámica del depósito de suelo.

En términos de amplitudes máximas se concluye que reemplazar el depósito no homogéneo por un depósito homogéneo equivalente con el cual se obtengan magnitudes de error  $\leq 10\%$ , es posible con los siguientes casos de velocidad cuando el perfil lineal de velocidad se encuentra entre los rangos que se definen a continuación:

Con el caso 1 cuando  $\frac{v_0}{v_H} \geq 0,78$

Con el caso 2 cuando  $\frac{v_0}{v_H} \geq 0,43$

Con el caso 3 cuando  $\frac{v_0}{v_H} \geq 0,54$

Con el caso 5 cuando  $\frac{v_0}{v_H} \geq 0,84$

El comportamiento del periodo fundamental tanto para el caso de roca rígida como para el caso de roca elástica se ajustó con un porcentaje de error menor al 4,20% a una ecuación cúbica, sencilla y práctica, la cual depende de las variables  $v_0$ ,  $\frac{v_0}{v_H}$  y  $H$ .

El comportamiento de la amplitud máxima tanto para el caso de roca rígida como para el caso de roca elástica se ajustó con un porcentaje de error menor al 4,30% a una ecuación potencial, sencilla y práctica, la cual solo depende de las variables  $\xi_s$  y  $\frac{v_0}{v_H}$ .

### 13. REFERENCIAS

- Afra, H., & Pecker, A. (2002). Calculation of free field response spectrum of a non-homogeneous soil deposit from bed rock response spectrum. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 22(2), 157-165.
- Ambraseys, N. N. (1959). A note on the response of an elastic overburden of varying rigidity to an arbitrary ground motion. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 49(3), 211-220.
- Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (AIS). (2010). Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente NSR-10. Bogotá, D.C.
- Building Seismic Safety Council (BSSC). (2015). *NEHRP Recommended seismic provisions for new buildings and other structures*. FEMA Federal Emergency Management Agency.
- Dobry, R., Oweis, I., & Urzua, A. (1976). Simplified procedures for estimating the fundamental period of a soil profile. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 66(4), 1293-1321.
- European Committee for Standardization (CEN). (2004). EN 1998-1: 2004 Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance - Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings. Brussels, Belgium.
- Gazetas, G. (1982). Vibrational characteristics of soil deposits with variable wave velocity. *International journal for numerical and analytical methods in Geomechanics*, 6(1), 1-20.

- Idriss, I. M., & Seed, H. B. (1968). Seismic response of horizontal soil layers. *Journal of the soil mechanics and Foundation Division*, 1003-1031.
- Instituto Nacional de Normalización (INN). (2012). NCh 433. Of1996 modificada en 2012 Diseño sísmico de edificios. Santiago, Chile.
- International Code Council (ICC). (2015). *IBC International Building Code*.
- Jacobsen, L. S. (1930). Motion of a soil subjected to a simple harmonic ground vibration. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 20(3), 160-195.
- Kramer, S. L. (1996). *Geotechnical Earthquake Engineering*. Prentice Hall International Series.
- Roesset, J. M. (1970). Fundamentals of soil amplification. *Massachusetts Ins. of Tech.*
- Rovithis, E. N., Parashakis, H., & Mylonakis, G. E. (2011). 1D harmonic response of layered inhomogeneous soil: Analytical investigation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 31(7), 879-890.
- Towhata, I. (1996). Seismic wave propagation in elastic soil with continuous variation of shear modulus in the vertical direction. *Soils and Foundations*, 36(1), 61-72.
- Travasrou, T., & Gazetas, G. (2004). On the linear seismic response of soils with modulus varying as a power of depth: the maliakos marine clay. *Soils and foundations*, 44(5), 85-93.
- Vrettos, C. (2013). Dynamic response of soil deposits to vertical SH waves for different rigidity depth-gradients. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 47, 41-50.