



Valoración de la Garantía de Pensión en las Cuentas de Ahorro Individual en Colombia.

Por:

Juan Carlos Gutiérrez
Universidad EAFIT
jgutie31@eafit.edu.co

José Valentín Restrepo Laverde
vatín@une.net.co

Octubre de 2009

Documento Final

Versión 1

Resumen:

El comportamiento del individuo como persona que aporta y futuro beneficiario de una pensión es determinante para cuantificar los efectos que su densidad de aportes tiene sobre el sistema de ahorro individual y la exigibilidad de las diferentes garantías. Por esta razón, en este trabajo se intenta buscar desde las finanzas personales una visión alterna a lo expuesto en diferentes estudios que sobre la materia se han realizado, no solo en Colombia sino a nivel internacional, y brindar una aproximación a la solución del problema de sostenibilidad en el retiro.

Abstract:

A person's individual behavior as the saver and as the future recipient of a pension is fundamental to quantify the effects that his contribution density has over the individual savings accounts and the execution of the different system guarantees. For this reason, this work tries to show an alternate point of view of what is written about the subject in different working papers not only in Colombia but also around the world from the personal finances perspective; and give an approximate solution to the retirement sustainability problem.

Résumé:

Le comportement de l'individu, comme personne qu'il apporte et futur bénéficiaire d'une pension, est déterminant pour quantifier les effets que sa densité d'apports a sur le système d'économie individuelle et l'exigibilité des différentes garanties. C'est pour cette raison que dans ce travail on essaye de chercher depuis les finances personnelles une vision alternative à ce qui est exposé dans différentes études qui sur la matière ont été effectués, non seulement dans la Colombie mais au niveau international aussi, et offrir un rapprochement à la solution du problème d'aptitude à soutenir des opérations prolongées dans la retraite

Palabras Clave: Garantías en las pensiones. Senda Salarial, Densidad de aportes.

Keywords: Pension Guarantees, Income Path, Contribution density.

Mots Clés: Garantie du pension, remuneration, densité d'apports.

Valoración de la Garantía de Pensión en las Cuentas de Ahorro Individual en Colombia.

1. Introducción.

Los regímenes pensionales obligatorios constituyen la estructura social que permite a un trabajador recibir una suma de dinero durante su etapa de retiro gracias a un ahorro realizado durante su periodo productivo. El sistema opera de la siguiente forma. Por un lado, un porcentaje definido de los salarios de cada trabajador se depositan como un ahorro obligatorio. Por otro lado, el acumulado de todos se invierte en el mercado de valores generando una rentabilidad. Al final, la suma total se entrega en una serie de pagos (anualidad) después de cumplir con unas condiciones legales de edad y de semanas de aporte, entre otras.

La mayoría de los países tiene legislaciones que regulan los mecanismos de recaudo, administración y posterior entrega de estos ahorros mediante diferentes sistemas. Por un lado están los regímenes de prima media con beneficio definido, también conocido como PAYG (Pay-As-You-Go), de carácter público, donde se depositan los aportes de todos los afiliados en una cuenta única administrada por el gobierno. Por otro lado están los regímenes de cuenta individual con contribución definida, de carácter privado, donde se recaudan los aportes de cada afiliado y se depositan en cuentas individuales.

En la mayoría de los países latinoamericanos se implantó el régimen de cuenta individual con contribución definida. Este proceso se inició en Chile con la reforma realizada a su sistema pensional en 1981. De allí, con diferentes modificaciones y adaptaciones, se extendió a los demás países. En algunos de estos países se sustituyó el régimen de prima media, lo que implicó realizar traslados de los afiliados del antiguo régimen al nuevo. En Colombia, con la reforma laboral aprobada en el año 1993, se incorporó un esquema mixto donde participan simultáneamente el régimen público y el privado.

Sin embargo, los regímenes corren el riesgo de no cumplir con el objeto social propuesto. Según un informe del Banco Interamericano de Desarrollo publicado en el año 2006¹, la evolución de características socioeconómicas como: mano de obra, actividad económica, composición social, distribución salarial, entre otras, han obligado a implementar reformas para facilitar el cumplimiento de las metas. Además, desde los puntos de vista macroeconómico, político y gubernamental, la volatilidad y riesgos asociados a cada país han incrementado las dificultades para el logro de los objetivos propuestos por las reformas. Debido a estos riesgos, el sistema no ha logrado en un principio aliviar la carga

¹ El Banco Interamericano de Desarrollo publicó el libro “A Quarter Century of Pension Reform in Latin America and the Caribbean: Lessons Learned and Next Steps”, donde recoge varios artículos acerca de los sistemas pensionales en América Latina.

que se tiene sobre el Estado, en especial lo que corresponde a las pensiones por invalidez, jubilación o muerte.

En el caso de los regímenes de prima media, sus riesgos se sitúan sobre la estructura de la pirámide poblacional. Los retiros realizados por aquellos que ya están pensionados se financian con los aportes propios y con los aportes de los nuevos ahorradores más jóvenes². Por ello, el número de afiliados que aun realizan aportes debe ser mayor al número de aquellos que reciben su pensión. Pero la tendencia en el envejecimiento de la población, dada por la menor tasa de natalidad y el aumento en la expectativa de vida, está moviendo este número a niveles preocupantes. En Colombia se espera que la tasa de dependencia³ aumente como se observa en los gráficos 1 y 2.

En los regímenes de cuenta individual con contribución definida, los riesgos se localizan en la cuenta de ahorro previsional y en la configuración de aportes de cada individuo. El origen específico de estos puede ser diverso, pero generalmente inciden factores tales como el rendimiento de las inversiones, la profundidad del mercado, y los costos de transacción. Pero además, también se asocian las características propias del afiliado, como son su senda salarial, su densidad de cotización de aportes, etc.

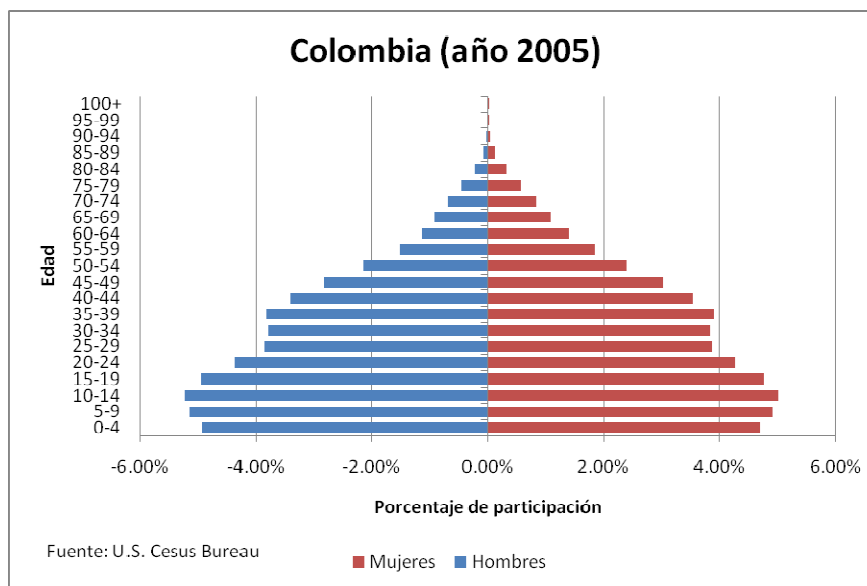


Gráfico 1: Grafica de la pirámide poblacional en Colombia, año 2005.

² El gobierno tiene la potestad de generar recursos extraordinarios financiados por individuos que todavía no han nacido en una política inter-temporal basada en impuestos y legislaciones futuras.

³ La tasa de dependencia es la relación poblacional que existe entre el número de individuos que tienen más de 65 años y el número de individuos entre los 15 y 64 años. Esta tendencia es más evidente en los países desarrollados donde condiciones sociales de familia, empleo y educación son mejores, en especial para la mujer.

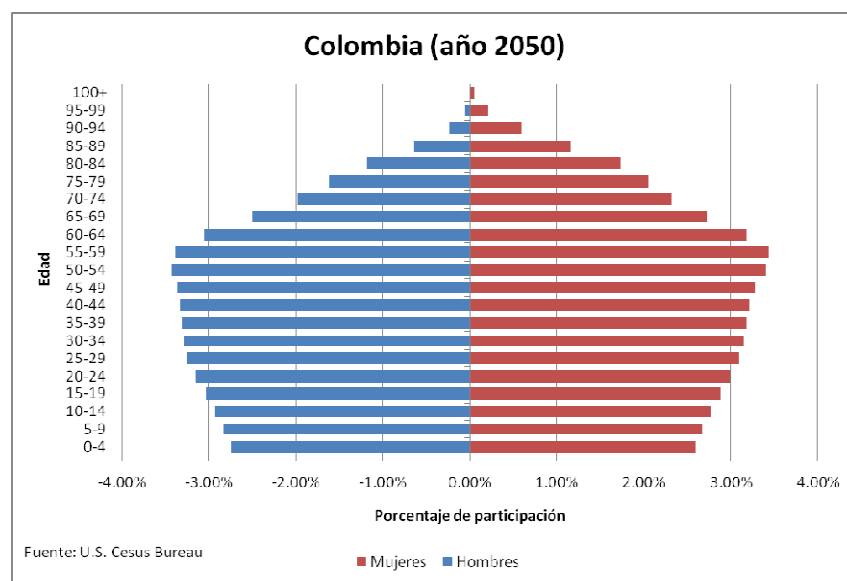


Gráfico 2: Grafica de la pirámide poblacional en Colombia, año 2050.

Una incorrecta estimación de estos riesgos puede ocasionar un desequilibrio fiscal que atente contra la estabilidad económica y social de la nación. Por ello, este estudio propone una metodología para la valoración de la garantía de pensión en las cuentas de ahorro individual de los fondos privados de pensiones obligatorias en Colombia a precios de mercado y fundamentada en la valoración neutral al riesgo. Se escoge el régimen privado de ahorro individual porque actualmente es el de mayor número de afiliados y el que recibe mayor número de nuevas afiliaciones. Igualmente, solo se consideran los individuos que estarán aportando únicamente a este régimen y no aquellos que realicen traslados entre sistemas⁴. La aplicación de esta metodología en esta investigación se orienta desde la conducta del individuo y no pretende evaluar las conductas de las administradoras del fondo, ni las decisiones tomadas por los organismos reguladores. Tampoco este estudio pretende incorporar las reformas y recomendaciones propuestas por diferentes organizaciones y el Estado, que buscan solucionar parcialmente el problema pensional de individuos con muy poca probabilidad de cumplir con los requisitos básicos para una pensión.

A partir de esta premisa, se construye una simulación de Monte Carlo para modelar el comportamiento de la acumulación de capital en la cuenta de ahorros durante la fase de aportes y luego su agotamiento en la fase de retiro. El horizonte de tiempo considerado es de muy largo plazo, lo cual claramente admite incertidumbre en materia de estabilidad económica, política y de otras variables. Esto obliga a plantear otros modelos de apoyo, que bajo supuestos económicos simples y racionales, soporten el uso de algunas

⁴ Un traslado implica pasar del régimen de prima media al de cuenta individual o viceversa. En Colombia, este procedimiento es aceptado siempre y cuando un individuo no le efectúe en intervalos inferiores a tres años. En algunos países latinoamericanos esta libertad solo se otorgó por un número limitado de veces.

entradas del modelo principal de valoración, limitando los efectos temporales. El modelo principal no pretende incorporar todas las variables económicas existentes porque resultaría intratable computacionalmente; pero sí busca facilitar el desarrollo del proceso y aportar metodologías flexibles y objetivas.

Este documento cuenta con cinco capítulos. En el segundo capítulo se describe el funcionamiento actual del régimen de ahorro individual con contribución definida en Colombia, la legislación existente y su aplicación. En el tercero se expone el marco teórico incluyendo los diferentes riesgos del sistema y la revisión de la literatura existente sobre los métodos para su medición, haciendo énfasis en los antecedentes teóricos relativos a la valoración de garantías de pensión a precios de mercado. En el cuarto se desarrolla el modelo principal propuesto para valorar dicha garantía. Y para terminar, en el quinto, se exponen los resultados alcanzados, las conclusiones y recomendaciones.

2. Breve descripción del Régimen de Ahorro Individual

El sistema general de pensiones en Colombia se compone de 2 regímenes con diferentes características. El más reciente es el Régimen de Ahorro Individual (RAI), integrado por las Sociedades Administradoras de Fondos de Pensiones ó AFP. Según ASOFONDOS, entidad gremial del ramo, la función de las AFP es la siguiente:

“Las Sociedades Administradoras de Fondos de Pensiones y de Cesantía (AFP) son instituciones financieras de carácter previsional, vigiladas por la Superintendencia Financiera de Colombia, cuyo objeto exclusivo es la administración y manejo de fondos y planes de pensiones del Régimen de Ahorro Individual con Solidaridad y de fondos de cesantía. En su calidad de administradoras de este régimen, se encuentran obligadas a prestar en forma eficiente, eficaz y oportuna todos los servicios relacionados con la administración de dichos fondos.”⁵

Estas entidades se crearon a partir de la ley 100 de 1993, donde se estableció un régimen mixto con fondos de pensiones públicos y privados. El único fondo público (PAYG) ya existía y era administrado por el Seguro Social. Los fondos privados actualmente en operación son seis: Protección, Citi-Colfondos, ING, Porvenir, BBVA Horizonte y Skandia.

Los recursos captados son invertidos en los mercados con límites explícitos y vigilancia constante de la Superintendencia Financiera de Colombia. La regulación determina los

⁵ [Http://www.asofondos.org.co/](http://www.asofondos.org.co/)

porcentajes máximos y mínimos permitidos en la composición del portafolio. Además exige la constitución de garantías con depósitos en las cuentas de Fogafin.

El sistema sufrió dos reformas estructurales gracias a las leyes 797 de 2003 y 860 de 2003, las cuales modificaron la fecha de jubilación en hombres a 62 años y en mujeres a 57 años para el año 2014. También modificaron el porcentaje de aportes mensual que cualquier trabajador asalariado o independiente debe realizar a una AFP. Si el trabajador es empleado, el empleador está obligado a aportar las 3/4 partes del aporte al fondo. Estos porcentajes están en la Tabla 1. Un resumen de las leyes y reformas se encuentra en el Anexo 1 de este documento.

El porcentaje de cotización sobre el ingreso base de cotización (IBC)⁶ actualmente es del 16.5%, del cual 12 % se destinan directamente a la cuenta de ahorro individual. Los aportes se acumulan junto con los rendimientos generados por los aportes realizados con anterioridad y son los que en el momento de retiro se utilizan para calcular la pensión. Los aportes al fondo de GPM (1.5% del salario del afiliado) son un seguro para cubrir el déficit en las cuentas que no alcancen el ahorro mínimo. Con un sencillo cálculo, este valor resulta equivalente al 12.5% del aporte mensual que va a la cuenta⁷. Adicionalmente los afiliados que ganan más de 4 SMLMV deben aportar el 1% de su salario por el concepto de fondo de solidaridad. Pero si el trabajador gana más de 16 SMLMV este aporte de solidaridad se incrementa en 0.2% por cada SMLMV hasta llegar a los 20 SMLMV. Este fondo sirve como garantía adicional para cubrir las deficiencias del fondo de GPM y cubrir los casos por pensión de supervivencia.

Concepto	Porcentaje	Notas
Aportes al fondo	12.00%	Empleador 9% Trabajador 3%
Comisiones, seguros de invalidez o sobrevivientes	3.00%	
Aporte para Fondo de GPM	1.50%	
Suma de los aportes básicos Aporte + Comisiones + GPM	16.5%	Esta base es para todos los trabajadores con menos de 4 SMLMV
Aportes de Solidaridad		
• ≥ 4 SMLMV	1.00%	
• 16 SMLMV	1.20%	
• 17 SMLMV	1.40%	
• 18 SMLMV	1.60%	
• 19 SMLMV	1.80%	
• ≥ 20 SMLMV	2.00%	

Tabla 1: Porcentajes de contribución.

⁶ El Ingreso Base de Cotización IBC es la base salarial que se utiliza para calcular el valor de los aportes.

⁷ El valor del seguro por afiliado en la actualidad resulta de calcular el valor porcentual del aporte al fondo de GPM sobre el valor del aporte a la cuenta de ahorro (1.5%/12%).

Desde que comenzaron a funcionar en Colombia, el ahorro previsional acumulado en los fondos privados de pensiones obligatorias ha alcanzado valores importantes. En el Gráfico 3 se observa como el capital depositado llega a los 60 billones de pesos en el 2008, cifra que corresponde al 12.1% del PIB⁸. Además, esta participación corresponde al 85% del total del ahorro previsional si se compara con las pensiones voluntarias y las cesantías, que tienen el 9% y el 6% respectivamente. También en el Gráfico 4 se ve como el número de afiliados alcanza los 8.5 millones que equivale al 40% del total de la población económicamente activa para el año 2008⁹. La cifra de afiliados al Seguro Social es de 6 millones a Junio 30 de 2007; cifra inferior y con tendencia decreciente.

Las AFP han permitido una mejor profundización del mercado financiero en Colombia gracias a la política de inversiones en el sistema financiero, entre otros.

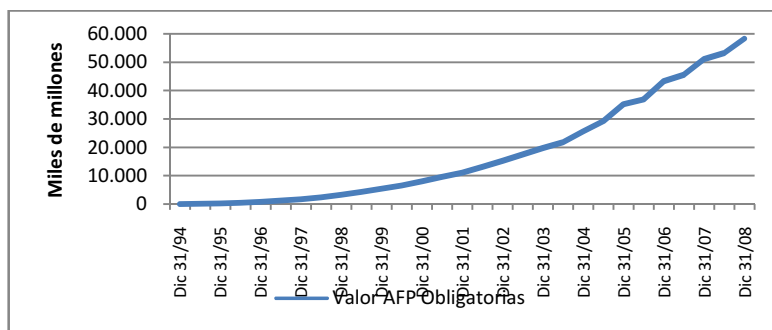


Gráfico 3: Evolución del valor del fondo en millones.

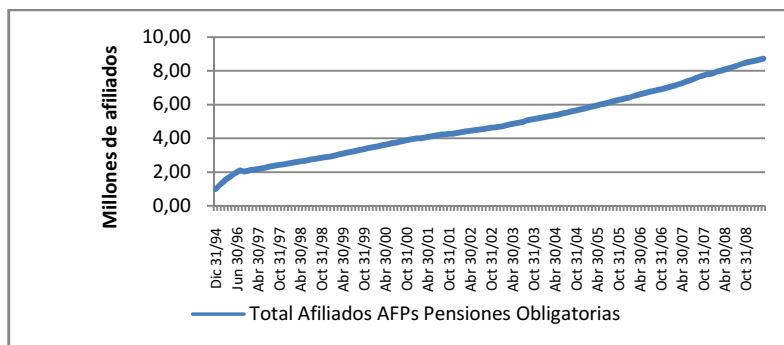


Gráfico 4: Evolución del total de afiliados.

⁸ El valor de todos los fondos privados de pensiones obligatorias en diciembre de 2008 era de 58 billones de pesos según cifras de Asofondos y el valor del PIB (2008) era de 476.7 billones de pesos según el DNP. Cálculos del autor.

⁹ Datos de la encuesta nacional de hogares del DANE y de Asofondos. Cálculos del autor.

A nivel de participaciones, la distribución por género indica que el 58% de los afiliados a las AFP son de sexo masculino y el restante 42% son de sexo femenino. La tendencia muestra que la participación del género femenino ha aumentado en los últimos años. Como se observa en el Gráfico 5, si se analiza por salarios se encuentra que el 83% de todos los afiliados ganan hasta 2 SMLMV y el 65% de todos los afiliados hasta 1 SMLMV. Según la Tabla 2, por edad se puede observar como el 83% de los miembros tiene entre 20 y 44 años de edad, con la mayor concentración (53%) entre los 25 y 39 años. Por contribución, el porcentaje de afiliados activos (que ha realizado aportes en los últimos 6 meses) es 55%.

Rango	Afiliados	Porcentaje
15-19	171,606	2.18%
20-24	1,157,469	14.71%
25-29	1,628,208	20.69%
30-34	1,450,499	18.43%
35-39	1,364,940	17.34%
40-44	1,049,888	13.34%
45-49	667,704	8.48%
50-54	273,821	3.48%
55-59	79,024	1.00%
60-64	19,966	0.25%
65 >=	7,705	0.10%
Total	7,870,830	100%

Tabla 2: Distribución afiliados por edad (año 2007). Fuente: Asofondos

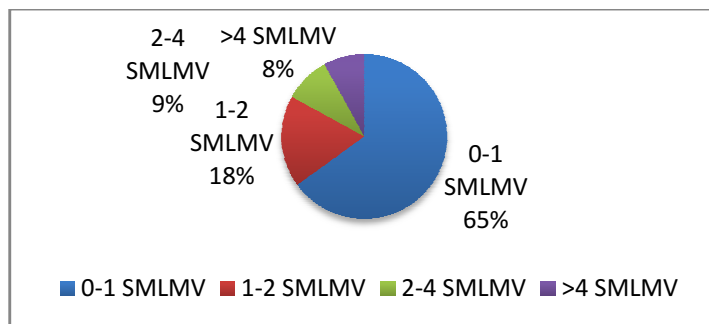


Gráfico 5: Distribución salarial de la población afiliada a las AFP.

3. Marco Teórico

En los regímenes pensionales existen toda clase de factores de riesgo y variables que influyen en el comportamiento del modelo de acumulación de la cuenta de ahorro previsional. A todos estos factores se les debe especificar el tipo de influencia que tienen sobre el comportamiento del modelo. Este ejercicio ha permitido que se desarrollen

modelos matemáticos y cálculos que permiten realizar una mejor estimación a futuro del funcionamiento de los regímenes pensionales.

Los factores de riesgo identificados dentro del régimen pensional forman tres grupos principales. El primer grupo de factores de riesgo es el de pensión mínima (también conocido como Garantía de Pensión Mínima, GPM)¹⁰. En este grupo se considera la posibilidad de un déficit en la cuenta de ahorros de un afiliado en el momento de su retiro, que le impida adquirir la mínima pensión posible en el mercado¹¹. El segundo grupo de factores es el de rentabilidad mínima (también conocido como Garantía de Rentabilidad Mínima, GRM). En este grupo, se analiza el faltante en el rendimiento obtenido por los ahorros de un afiliado contra una rentabilidad mínima exigida¹². El último grupo de factores es conocido como de riesgos de supervivencia; que estudia los eventos donde el individuo sufre de un accidente que le genera una discapacidad permanente y lo obliga a terminar su vida laboral anticipadamente¹³.

En este contexto, los diferentes trabajos realizados para la valoración de las garantías se pueden clasificar en dos grupos según el enfoque dado por sus autores a la evolución del ahorro previsional. El primer grupo es de aquellos modelos que se enfocan en la teoría de portafolio. El segundo grupo es de aquellos modelos que se enfocan en el capital humano. El primero define que el mayor riesgo para cumplir con el objeto social de la pensión se encuentra en el mercado de valores. Los desarrollos propuestos bajo este enfoque evalúan el costo de las garantías en función de los rendimientos obtenidos por el fondo y las prácticas de las administradoras. El segundo define que el mayor riesgo se encuentra en los afiliados. Estos trabajos evalúan el costo de las garantías desde las sendas salariales y el empleo como elementos fundamentales para definir la estructura y magnitud de los aportes.

El primero grupo de autores tiene el interés de evaluar los riesgos desde las políticas y prácticas desarrolladas por las AFP y que afectan a aquellos individuos que cumplen con todos los requisitos mínimos para obtener su pensión de jubilación, como son la edad de

¹⁰ En Colombia, La GPM obliga al estado a garantizar una pensión de 1 SMLMV con fondos que cubren el posible déficit que existe en la cuenta de ahorro individual en el momento de la jubilación y después de cumplir el mínimo de semanas cotizadas. Esta garantía es diferente para otros países en valor pagado y en tiempo exigido.

¹¹ La GPM tiene un factor de riesgo adicional que es el pago de una pensión mínima desde el instante en que se agotan los ahorros en el fondo hasta la muerte del afiliado.

¹² En Colombia la garantía de rentabilidad mínima se calcula sobre el promedio del rendimiento mensual de los últimos 36 meses. La Superintendencia Financiera publica la cifra de rentabilidad mínima en función de una fórmula que utiliza una ponderación entre los datos entregados por los fondos y un portafolio de referencia, todo por un factor de disminución que puede ser 30% ó 230 puntos básicos, la menor de las dos. Quien debe cubrir el faltante en esta cifra es la AFP; primero con los recursos depositados en Fogafín como garantía y luego con su patrimonio.

¹³ El valor de seguro de supervivencia se cubre con recursos del Fondo de Solidaridad que son aportes realizados por aquellos que ganan más de 4 SMLMV. Si los recursos del Fondo no alcanzan a cubrir las obligaciones, el estado debe entregar la cantidad faltante.

jubilación y el mínimo número de semanas cotizadas. Los modelos de valoración realizados por este grupo se centran en estudiar la estructura de los fondos, los incentivos, las comisiones, las políticas de diversificación, la estabilidad económica, entre otros. Por lo anterior, por ejemplo, información como el ingreso de un afiliado y las cohortes salariales solo son importantes para determinar los crecimientos del ahorro y para identificar la población más descubierta.

Uno de los primeros trabajos desarrollados bajo estos parámetros fue propuesto por Zurita (1994). En su trabajo se modela el crecimiento de la cuenta de ahorro de un individuo que pertenece al régimen de pensiones chileno como una ecuación diferencial estocástica; donde la parte determinística está dada por los aportes y el acumulado de los ahorros con rendimiento y la parte aleatoria por la volatilidad de ese mismo rendimiento. La expresión matemática se ve a continuación.

$$dA = [rA(t) + \alpha N]dt + A(t)\sigma\sqrt{T}dw \quad (1)$$

El proceso estocástico supone que un afiliado tiene un salario real N del cual aporta para su pensión obligatoria un porcentaje α . Este aporte se acumula en una cuenta de ahorro previsional A que se invierte en el mercado con rendimientos reales r y una volatilidad σ . La suma de los aportes y los rendimientos genera un cambio en el acumulado de la cuenta de ahorro previsional que se debe sumar para el próximo periodo.

En el trabajo de Zurita se varía el valor de los rendimientos reales del fondo bajo diferentes escenarios para medir la sensibilidad de las garantías. También se modifican las volatilidades con el mismo propósito y al final se intenta establecer el valor de la GPM bajo las diferentes condiciones de riesgo. Este procedimiento se realiza valorando la garantía como una opción PUT de donde finalmente se obtiene el valor presente de la suma que cubre el déficit en el futuro.

Una característica de las metodologías con énfasis en los portafolios es considerar las diferentes variables de los modelos como reales para eliminar los efectos inflacionarios. Por ejemplo, en el trabajo de Zurita, tanto el salario, como la tasa de rendimiento, son valores reales. Además, se observa en este trabajo que existe una prima de riesgo en el mercado constante¹⁴ y los salarios cambian en la misma proporción que la inflación, dando a entender que asume que el comportamiento de la economía es estable y estático.

Posteriormente, Pennacchi (1999) propuso un modelo con una ecuación estocástica con estructura similar a la propuesta por Zurita; pero donde la evolución de las variables del salario real y tasa de interés real siguen sendos procesos estocásticos auxiliares para dar más dinamismo al estudio. Para ello, el autor definió que la tasa de interés real r seguía

¹⁴ Los artículos como “Efficient Capital Markets” de Fama (1991) y “The Equity Premium” de Fama y French (2001) señalan como la prima de riesgo del mercado no es constante, pero su comportamiento tampoco es explicable desde la economía y la aversión al riesgo.

un proceso Vasicek en torno a una tasa de interés real de largo plazo γ , y definió que el salario seguía un proceso similar pero alrededor de un activo de referencia del mercado c_N . Este aporte a la metodología permitió incorporar más variables en la modelación del ahorro previsional y complementar el riesgo con una cantidad no considerada previamente.

$$dA/A = g_A dt + \sigma_A dz_A \quad (2)$$

$$dN/N = (\alpha_N - c_N)dt + \sigma_N dz_N \quad (3)$$

$$dr = \beta(\gamma - r)dt + \sigma_r dz_r \quad (4)$$

En Colombia, son escasos este tipo de estudios. Los primeros trabajos sobre el tema fueron desarrollados por Parra (2001), donde se estableció una serie de modelos actuariales usados para el desarrollo del software “DNPension”; y que posteriormente fueron revisados con las recomendaciones de otros estudios propuestos por Osorio *et al* (2005) y Castro (2009). Estudios más recientes se enfocan específicamente en el comportamiento de las AFP, de sus portafolios de inversiones y de las comisiones de administración e incentivos que reciben. En este segmento se encuentran trabajos como Jara (2005) y Reveiz y León (2008), que aconsejaban cambios en la gestión y regulación de los fondos de pensiones mediante el cambio en los esquemas de comisiones y ajustes en los límites de los portafolios permitidos. Por otro lado, Jara (2006) y León y Laserna (2008) exploraron la rentabilidad y alternativas para mejorar el rendimiento de los fondos y la posibilidad de implementar una estrategia de multi-fondos.

También en Colombia, el trabajo más cercano a la metodología propuesta por Zurita fue realizado por Silva (2003), que adoptó la misma ecuación estocástica, pero con unas adiciones. En primer lugar, el autor no consideró los salarios reales como constantes. Por el contrario, incluyó las sendas salariales $N^S(t)$ obtenidas de los estudios de Parra (2001), clasificadas según la cantidad de SMLMV y distribuidas en deciles poblacionales. En segundo lugar definió una sola densidad de cotización¹⁵ para todos los individuos suponiendo que a lo largo de la vida laboral existía una probabilidad de realizar cotización del 70%, y se representa mediante la siguiente ecuación:

$$dA^S = [rA^S(t) + (0.7) \alpha N^S(t)]dt + A^S(t)\sigma\sqrt{T} \quad (5)$$

Por otra parte, para el segundo grupo de autores, el enfoque consiste en valorar los riesgos que sobre el ahorro previsional son causados por el capital humano, asumiendo que las actividades administrativas y financieras de las administradoras de los fondos son las correctas; y que la ley les otorga las herramientas necesarias para cumplir con su función social. El riesgo del capital humano se entiende como la deficiencia en el aporte al

¹⁵ La densidad de cotización es el factor que indica el número de semanas cotizadas sobre el número máximo de semanas posibles para alcanzar la jubilación. Un individuo que comience a laborar a los 22 años y se jubile a los 62 años tiene la posibilidad de trabajar 2080 semanas. Al estar obligado por ley a cotizar 1325 semanas (año 2014), entonces la densidad de cotización mínima posible para obtener el derecho a la pensión es de 64%.

ahorro previsional debido a que el aporte no es constante, es inestable y es insuficiente para alcanzar el ahorro mínimo debido a condiciones laborales inferiores o deficientes y a problemas de género.

El impacto en la sociedad de estos estudios generalmente es fuerte porque toca estructuras económicas como son el salario mínimo, el desempleo, y sociales como es el género. Por el lado económico, no es justo colocar al trabajador menos calificado¹⁶ como el directo responsable de su propio déficit pensional cuando en los países latinoamericanos la mayoría de ellos no tiene el control de su capacidad de generar recursos. Estudios en Colombia como los desarrollados por Arango *et al.* (2007) y Lopez y Lasso (2008) demuestran las dificultades encontradas en las políticas económicas y laborales para intentar mantener y aumentar el poder adquisitivo de la clase obrera. Inclusive sus estudios demuestran la existencia de un deterioro sistemático del poder adquisitivo real de los trabajadores con bajos niveles de educación. Otros estudios como los de Tamayo (2008) y Arango *et al.* (2009) explican la incidencia de factores como el desempleo y el trabajo informal en los ingresos.

Por el lado del género, estudios del Banco Mundial¹⁷ demuestran como la mujer en Latinoamérica en general cuenta con menores salarios y mayores probabilidades de no alcanzar una pensión por tener una menor edad de jubilación, igual exigencia en el número de semanas cotizadas y periodos largos de inactividad por dedicarse a la crianza de los hijos. Este problema es aún más grave si se tiene en cuenta que la mayoría de la población es femenina y presenta la mayor longevidad.

Entre los trabajos desarrollados dentro de este grupo en Latinoamérica está el de Zurita (2006); quien para evaluar la garantía de pensión mínima, incorpora una variable dicotómica que cambia según la probabilidad de empleo de los individuos. Esta variable modela el movimiento del empleo desde y hacia el desempleo a partir de las cuatro probabilidades que expresan cada uno de los cuatro posibles cambios de estado de la condición laboral¹⁸. Adicionalmente, en el trabajo se especifica el salario como una variable que depende de la edad del individuo y de su sexo. El autor concluye que, en un alto grado de probabilidad, las mujeres no alcanzan a tener derecho a la pensión.

Otro desarrollo importante en este tipo de enfoque es el de Smetters *et al.* (2007), donde además de trabajar las cohortes salariales, propone un esquema de valoración neutral al

¹⁶ En Colombia se considera la mano de obra no calificada como el porcentaje de población que no accede o no concluye por diferentes razones el ciclo de educación técnica o superior. Por otro lado, la mano de obra calificada es aquel grupo de personas que sí terminaron algún estudio técnico o superior. Según el Observatorio Laboral para la Educación en Colombia 1'350.000 colombianos (7% de la población económicamente activa) se consideran mano de obra calificada.

¹⁷ "Pension system in Latin America - Concepts and measurements of coverage". (2008) World Bank. Discussion Paper 0616.

¹⁸ Las 4 probabilidades se definen como: de empleo a empleo, de empleo a desempleo, de desempleo a desempleo y de desempleo a empleo. Al estimar cada una de las probabilidades se puede generar una secuencia que con 1 indica la condición de actividad y con 0 la de inactividad.

riesgo independiente de los rendimientos extraordinarios obtenidos por los administradores de los fondos. Para la definición de las cohortes, su estudio toma las definiciones planteadas por la OACT¹⁹ que estimaba el comportamiento salarial para cinco cohortes principales hasta el año 2050. Con ellas se plantean simulaciones con aportes y comisiones para obtener la suma total del ahorro previsional de cada una de ellas.

Además, Smetters *et al.* (2007) realizan unas observaciones sobre las metodologías utilizadas para valorar las garantías. La primera observación es con respecto a la utilización del valor de costo esperado contra el valor de mercado. Los autores consideran que la utilización de la metodología de costo esperado, al incorporar la expectativa de retornos adicionales contra los del mercado, está ignorando algunos de los riesgos existentes y por ende termina con una garantía subvalorada. La segunda observación es respecto al empleo de Black-Scholes como metodología para la valoración de las garantías de las cuenta de ahorro previsional. La observación del autor consiste en que esta metodología no se comporta bien cuando existe un cambio en el monto asegurado, como ocurre en los fondos de pensiones debido a los aportes periódicos realizados por los individuos. A esto se adiciona el factor de horizonte temporal, que al ser tan largo, implica segmentar la valoración de la garantía en intervalos de tiempo menores con el riesgo de perder la información capturada del periodo anterior.

Otros autores que han realizado aportes en modelación por capital humano son Mitchell y Smetters (2003). Dentro de su documento, los autores aportan diferentes metodologías que permiten valorar las garantías de las pensiones como opciones. Además, incluye observaciones y cálculos sobre los beneficios de las cuentas de ahorro individual y el cálculo de las garantías.

En Colombia no existen muchas referencias sobre trabajos que pertenezcan a este grupo de enfoque. Por un lado están los aportes realizados por Silva (2003), quien incluyó las sendas salariales y el factor de densidad de cotización. La más reciente aportación esta en el trabajo presentado por Reveiz, León *et al.* (2009) que también incluyó las últimas versiones de las sendas salariales desarrolladas por el DNP y además hizo un estudio más completo sobre las probabilidades de aporte en cada periodo.

Por otro lado, un nuevo elemento importante para los estudios de las garantías del ahorro previsional son los modelos que se deben estudiar para el cálculo del retiro del individuo según la modalidad de pago seleccionada. Existen varias modalidades de pago disponibles para cada afiliado. La primera de ellas consiste en la entrega en un pago único del total del saldo disponible en la cuenta de ahorro previsional en el momento de la jubilación. En Colombia, esta modalidad de pago se otorga a los afiliados que no alcanzaron a cumplir con alguna de las condiciones establecidas para tener acceso a la pensión como es, por ejemplo, el mínimo de semanas cotizadas. La segunda modalidad

¹⁹ La OACT (Office of Actuary) es un departamento de la Oficina de Administración de la Seguridad Social en los Estados Unidos de América encargada de determinar las series del cálculo actuarial.

de pago es la entrega de una suma programada durante un tiempo definido y/o hasta que se agotan los recursos disponibles en la cuenta de ahorro previsional del afiliado. En Colombia, esta modalidad se puede convenir entre el afiliado y la administradora del fondo. La última modalidad es la entrega de una renta vitalicia que se compra usando los recursos acumulados en la cuenta individual. La pensión mínima en Colombia sigue esta modalidad de pago.

Las primeras dos modalidades de pago no tienen un cálculo diferente a programar la entrega de unos recursos; pero la modalidad de renta vitalicia incorpora un análisis adicional que también viene acompañada de una serie de riesgos adicionales como son el de mortalidad y el de tasa de interés. Los cálculos para el pago de una renta vitalicia están contenidos en informes de cálculo actuarial definidos por diferentes aseguradoras y entidades gubernamentales. El cálculo más simple, que lo incluye Zurita (1994), se indica a continuación:

$$M = N/\delta \quad (6)$$

Para calcular la suma necesaria (M) para comprar una renta vitalicia con pago anual (N) simplemente se divide el pago por la tasa de retorno del mercado (δ). El problema de este cálculo es que ignora los efectos a largo plazo como son los ajustes anuales que se realizan en los pagos y los cambios en las tasas de descuento.

Sin embargo, autores como Milevsky (2006), tienen una recopilación de diferentes cálculos que permiten obtener el acumulado en la cuenta para comprar la renta vitalicia, según información específica como la edad, el género, el tiempo estimado de vida, entre otras. Cada una de estas estimaciones surge de la información publicada por la OACT y de modelos desarrollados por las aseguradoras.

En este orden de ideas y en función de algunos elementos tomados de las anteriores descripciones, el presente trabajo se enfoca en desarrollar una metodología para la valoración de las garantías de pensión para el mercado colombiano utilizando la valoración neutral al riesgo propuesta por Smetters *et al.* (2007), pero incorporando elementos propios del sistema pensional colombiano y de los modelos estocásticos presentados por Pennacchi y por Zurita. El enfoque principal está en comprender como se desarrolla esta metodología de valoración.

La metodología de valoración neutral al riesgo busca asignarle un precio a una opción u otro derivado asumiendo que el universo es neutral al riesgo. En un mundo neutral al riesgo el retorno esperado de todos los activos es la tasa libre de riesgo y los inversionistas no esperan ninguna compensación por el riesgo asumido; en otras palabras todas las expectativas se concentran en usar la misma tasa (tasa libre de riesgo). Por lo tanto, el valor entregado por el proceso se considera el valor justo ya que compensa por igual tanto las probabilidades de que el precio aumente como las probabilidades de que el precio disminuya. Por esta simple definición resultan igualmente descartadas las

probabilidades de arbitraje ya que no existe un activo con retornos extraordinarios que permita plantear una estrategia “Free Lunch”.

Para facilitar este desarrollo se asume que, debido a la eficiencia del mercado, el precio de un activo incorpora todas las probabilidades de aumentar o disminuir. Entonces, solo interesa valorar el posible exceso o defecto en el precio del activo al final del periodo causado por la volatilidad. Para esto, se toma un activo similar de referencia que solo se valora a la tasa libre de riesgo y sin volatilidad. Al final, se encuentra el promedio de las diferencias entre ambos precios. Esta definición fue fundamental para el desarrollo de los modelos de valoración mediante arboles binomiales para la valoración de opciones como los desarrollados por Cox, Ross y Rubinstein (CRR).²⁰

Para comenzar el desarrollo de la metodología de valoración neutral al riesgo se parte de una ecuación diferencial estocástica básica que describa el comportamiento de la cuenta de ahorro previsional en función de la tasa libre de riesgo r_f . Esta ecuación muestra el cambio en la acumulación A de la cuenta en función de los retornos y la volatilidad de un periodo.

$$dA = r_f A dt + A \sigma \sqrt{T} dw \quad (7)$$

A partir de ella se crea un modelo de árbol discreto de n -ramas donde se cumplen las condiciones que exige la valoración neutral al riesgo. Esto es, se escribe la ecuación en su forma discreta, se evalúa con números generados aleatoriamente y se repite múltiples veces el proceso.

$$\Delta A = r_f A \Delta t + A \sigma \sqrt{T} \Delta w \quad (8)$$

El resultado de cada una de las repeticiones se valora como una opción PUT común y corriente donde existe un pago ó 0. Los pagos resultantes se promedian y se descuentan a la tasa libre de riesgo para obtener el valor de la garantía G .

$$P = \max [M - A(T), 0] \quad (9)$$

$$G = e^{-r_f(T-t)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P \quad (10)$$

Hull (2002) describe este proceso de la siguiente forma:

1. Crear una caminata aleatoria para el activo que siga los principios de la valoración neutral donde el precio del activo crece a la tasa libre de riesgo, la volatilidad es la de un activo similar riesgoso.
2. Calcular el pago de la opción en el momento T .

²⁰ John C. Cox, Stephen A. Ross, Mark Rubinstein. Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics, Volume 7, Issue 3, September 1979, Pages 229-263.

3. Repetir los pasos 1 y 2 para obtener muchos resultados en un mundo neutral al riesgo.
4. Calcular la media de los pagos resultantes de cada una de las simulaciones, inclusive si son cero, para obtener un valor esperado en un mundo neutral al riesgo.
5. Descontar el valor resultante a la tasa libre de riesgo para encontrar el valor de la garantía en el momento 0. Estimar las fronteras superior e inferior para determinar el intervalo de confianza.

El modelo se puede ajustar con cambios en los pasos 1 y 2. El primer ajuste a la ecuación número 8 es la inclusión de las sendas salariales de cada cohorte $W_t^{g,E}$ en función del tiempo t , el género g y el nivel salarial E . El porcentaje de aporte del salario φ es igual al 12%

$$dA = (r_f A + \varphi W_t^{g,E})dt + A\sigma\sqrt{T}dW \quad (11)$$

Posteriormente se incluye la variable de probabilidad de cotización $\delta_t^{g,E}$ en función de las probabilidades de desempleo según la edad del individuo, el género y el nivel salarial. Esta variable multiplica la senda salarial para indicar si existieron aportes de cotización.

$$dA = (r_f A + \varphi \delta_t^{g,E} W_t^{g,E})dt + A\sigma\sqrt{T}dW \quad (12)$$

Por otro lado, existe alguna incertidumbre en algunas variables como son la inflación y la tasa libre de riesgo. Dado que la simulación se realiza para intervalos de tiempo de 40 años o más, es incorrecto que se asuman como constantes, pero también es incorrecto que sigan procesos totalmente estocásticos. Por lo anterior se propone para la inflación el uso de un proceso de generación controlado que refleje intervalos de incertidumbre no estocástica, ajustado a un conjunto de pertenencia con forma trapezoidal en donde se pueden tipificar 3 tipos de comportamientos en función del grado de pertenencia dentro de un sistema de lógica difusa: por debajo de un límite inferior, entre el límite inferior y superior y por encima del límite superior. La lógica difusa permite incorporar a este modelo elementos racionales como son los intervalos del estado actual de un dato²¹. De esta forma se espera que el resultado sea similar a lo reportado por el Banco de la República en sus informes periódicos sobre inflación esperada. Para la tasa de interés libre de riesgo se considera el uso de la tasa Yield de los TES UVR, de más largo plazo y de alta liquidez, que existan en el mercado, pero sujeta al dato de la inflación estimada. El valor de la tasa de interés, al igual que el salario y las demás variables, es nominal.

²¹ Los intervalos, que la lógica difusa incorpora, permiten evaluar una variable dentro de un rango a diferencia de un valor puntual. Esta característica le permite adaptarse mejor a los sistemas donde existen intervalos de valores permitidos, para una o varias variables. En el caso colombiano, la inflación proyectada se reporta periódicamente como un intervalo para un periodo de tiempo. Esto se traduce en que la política monetaria y de tasas del Banco de la Republica se trazan, en parte, en función de cómo se referencia la inflación actual con respecto a este intervalo (por encima, por debajo o dentro del intervalo). Ver los anexos para una explicación mas detallada.

Simultáneamente, dentro de la simulación debemos incluir el comportamiento de los fondos de GPM y de solidaridad. Estos fondos, que se recaudan paralelamente al ahorro previsional, constituyen otro ahorro que en el futuro sería para cubrir una parte o la totalidad de las garantías previstas. La suma que estos dos fondos alcancen sirve para determinar el verdadero déficit que el estado y las AFP enfrentan. Aunque las normas que rigen los parámetros de inversión de estos dos fondos no son claras en la ley, por la naturaleza del modelo de valoración neutral al riesgo se va a suponer que también crecen a la tasa libre de riesgo.

Finalmente se valora la magnitud que debe alcanzar el fondo con el fin de satisfacer el costo de las anualidades con diferentes metodologías propuestas por Milevsky (2006). Esto permite calcular el costo de la anualidad bajo diferentes escenarios. Este paso permite obtener una mejor estimación del déficit.

4. Desarrollo

Inicialmente se procede con el estudio de la sensibilidad de algunas de las variables de entrada para al sistema. Para ello, se utilizó el modelo propuesto por Zurita utilizando diez cohortes salariales en intervalos de un SMLMV, donde se pudo verificar la reacción de cuatro variables que son: los rendimientos globales de la cuenta de ahorro, el porcentaje de los aportes individuales, el rendimiento de los retiros (cálculo de una anualidad)²² y el nivel de aporte por salarios. Los resultados mostraron que la modificación del porcentaje de los aportes individuales no influye decisoriamente en el resultado del ahorro obtenido, ni es el método más efectivo para reducir el déficit²³ y que el rendimiento global de la cuenta de ahorro es determinante como era de esperarse.

Pero aún más interesante fue observar la importancia que tiene el valor de la anualidad en función de la tasa de rendimiento sobre el valor total de la cuenta de ahorro previsional. Un aumento en el rendimiento de una anualidad pagado por las aseguradoras incrementará las probabilidades de alcanzar el mínimo ahorro previsional especialmente en las cohortes con menor ingreso²⁴. Este aumento en las probabilidades fue superior al generado por obtener un mejor rendimiento en la cuenta de ahorro durante la fase de acumulación. Esto indica que es importante diseñar un buen mecanismo de retiro que permita calcular el precio correcto de la anualidad.

²² Para evaluar los planes de retiro se utilizó la misma ecuación propuesta por Zurita (1994) para el cálculo de una anualidad, donde el valor acumulado en la cuenta de ahorro previsional es el resultado de dividir los pagos anuales por la tasa de rendimiento ofrecida por la aseguradora. Esta metodología es incompleta como se verá más adelante, pero, de todas formas, el resultado es útil para un análisis preliminar.

²³ Ver la demostración en el Anexo 4b.

²⁴ Ver la demostración en el Anexo 4a.

Otro elemento que se analizó utilizando el mismo modelo de Zurita (1994) es la densidad de los aportes. Suponiendo el caso de un individuo que tiene la posibilidad de aportar al menos 25 años de 45 años posibles a lo largo de su vida laboral, y si esos posibles años de aporte continuo se definen en tres intervalos: 18 años a 43 años, 28 años a 53 años, o 37 años a 62 años, se obtiene otro resultado importante. Los primeros años de cotización son fundamentales para mejorar las probabilidades de alcanzar una pensión mínima. Los cotizantes tardíos para las cohortes de bajo ingreso presentan un déficit 2 a 3 veces mayor que aquellos que comenzaron más jóvenes. Estos resultados se muestran en la Tabla 3. Este pequeño ejercicio reafirma la importancia de diseñar un buen mecanismo para simular la densidad de cotización y su efecto en la cuenta de ahorro previsional.

Déficit en la cuenta de ahorros (SMLMV)		SMLMV	
IBC	1 SMLMV	2 SMLMV	3 SMLMV
18 a 43 años	108.38	46.28	19.2
28 a 53 años	122.69	59.38	24.77
37 a 62 años	150.25	100.66	54.77

Tabla 3: Déficit en cuenta de ahorro para periodos de cotización diferentes

Partiendo de estos elementos, se divide el proceso de construcción del modelo en cuatro partes principales. La primera parte consiste en el cálculo del valor total necesario en la cuenta de ahorro al final del periodo de acumulación a partir del valor de una anualidad en el retiro. En la segunda parte se desarrolla una senda de cotización (densidad de cotización) variable en el tiempo que garantice el mínimo de semanas cotizadas a cualquier individuo. En la tercera parte se desarrolla el modelo de subconjuntos difusos que ayudarán a determinar la tasa de interés libre de riesgo a partir de la inflación esperada. Y en la cuarta parte se determinan las sendas salariales seguidas por las diferentes cohortes. Todas estas partes permitirán estimar el déficit de la cuenta de ahorro previsional para después descontarlo a la tasa libre de riesgo y obtener el valor del déficit a precios de hoy.

4.1 Capital Necesario al Inicio del Retiro.

Para comenzar con el cálculo del valor total necesario de la cuenta de ahorros para la compra de una anualidad, se realizó un estudio de las tablas de mortalidad por género definidas para Colombia. Estas tablas fueron emitidas en el año 2007 para individuos con

edades entre los 20 y 100 años²⁵. Estas tablas se construyeron a partir de una población inicial de 100.000 individuos de 20 años de edad $l(x)$, cifra que año a año va disminuyendo según la información de número de fallecimientos anuales $d(x)$. Además, incluyen información como la probabilidad $q(x)$ de morir en cada año y la esperanza de vida media, $e^0(x)$, a partir de cada año.

La forma de la gráfica de la cantidad de sobrevivientes contra la edad es de gran ayuda para determinar cuál es el mejor modelo de ajuste y cuál es el mejor modelo de cálculo que se puede implementar para una anualidad. Se pueden observar en la curva unas características particulares (Gráfica 6). Esas características están en el intervalo de la gráfica, independiente del género, que comienza desde los 60 años de edad y termina en los 100 años de edad; y que se asemeja a lo que se denomina una S invertida. Entre los diferentes modelos existentes propuestos por M. Milevsky (2006)²⁶ para la supervivencia, el que más se ajusta es el denominado Gompertz-Makeham (GoMa). Este modelo realiza un ajuste exponencial a las probabilidades de supervivencia suponiendo una distribución Gamma. GoMa se diferencia de los esquemas tradicionales donde se analiza la probabilidad de supervivencia actual ${}_tP_x$ como el producto de las probabilidades de supervivencia anteriores (de grupos de edades más jóvenes) o en otros casos con modelos lineales o exponenciales bajo la suposición de la existencia de una distribución normal con media en la esperanza de vida.

$${}_tP_x = \prod (1 - q_x) \quad (13)$$

El modelo GoMa define el Factor de Mortalidad Instantánea (FIM)²⁷ como una ecuación lineal exponencial que depende de dos parámetros independientes m y b y de una constante FIM λ conocida y de la edad x . (ecuación 15)

$$\lambda(x) = \lambda + \frac{1}{b} e^{\left[\frac{x-m}{b}\right]} \quad (14)$$

Esta expresión, al convertirse en la probabilidad condicional de supervivencia ${}_tP_x$ ²⁸, se transforma en una expresión más completa que la definición clásica tradicional.

$${}_tP_x = e^{\left(-\lambda t + b(\lambda(x) - \lambda)(1 - e^{-t/b})\right)} \quad (15)$$

²⁵ Las tablas se encuentran en la resolución numero 1112 de 2007 emitida por la Superintendencia Financiera de Colombia en la cual expresamente se actualizaron las tablas del sistema asegurador en Colombia.

²⁶ Milevsky, Moshe. The Calculus of Retirement Income: Financial Models for Pension Annuities and life Insurance. New York. Cambridge University Press. (2006). Capítulos 3 y 6.

²⁷ En ingles IFM (Instantaneous Force of Mortality). Este factor sirve para indicar la probabilidad que tiene un individuo a una edad determinada de fallecer en el siguiente año.

²⁸ La probabilidad condicional de supervivencia es la cifra que indica la probabilidad que tiene un individuo de sobrevivir un número de años a partir de una edad específica.

Al aplicar la definición de una anualidad sobre la función condicional de supervivencia se obtiene el valor de la anualidad \overline{a}_x en función de una distribución gamma incompleta. Esta distribución se apoya en los mismos parámetros m y b y además incluye la tasa de retorno de la aseguradora r .

$$\overline{a}_x = \left[\frac{b\Gamma(-rb, b\lambda(x))}{e^{(m-x)r - b\lambda(x)}} \right] \quad (16)$$

Para ajustar los parámetros del modelo GoMa con los datos reales se debe seguir el siguiente procedimiento. Primero se calcula la probabilidad de mortalidad q_x con los datos de las tablas publicadas dividiendo el número de fallecidos por el número total de individuos vivos para cada una de las edades. Luego se calcula la probabilidad condicional de supervivencia para cada año de vida multiplicando las probabilidades de supervivencia de todos los años anteriores y el actual. Por otro lado, se genera un modelo GoMa con parámetros iniciales m y b escogidos al azar. Por simplicidad, el parámetro λ se hace igual a cero ya que este se utiliza para indicar un aumento general en la tasa de supervivencia de la población que no es el caso de este estudio. Después, se calcula el error cuadrático relativo de los datos calculados mediante la probabilidad de supervivencia GoMa y los datos calculados a partir de los publicados en las tablas. Se encuentra la sumatoria de los errores. Finalmente se optimiza el modelo GoMa variando los parámetros con el objetivo de minimizar la suma total de los errores.

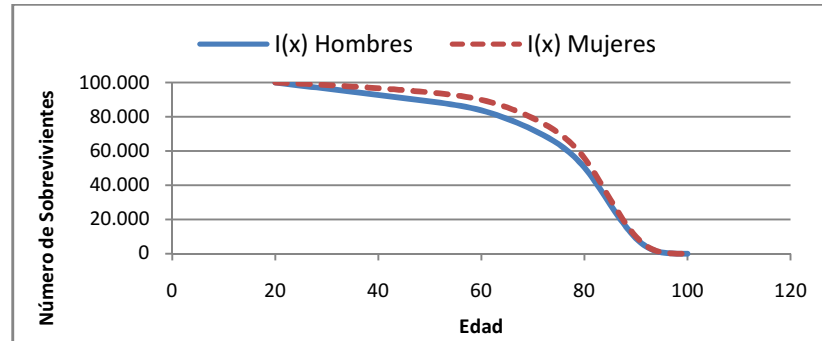


Gráfico 6: Sobrevivientes vs edad

El resultado del ejercicio de estimación de los parámetros permite ajustar el modelo a los datos teóricos como se observa en los gráficos 7 y 8 para el caso de hombres y mujeres respectivamente. En el caso de los hombres las variables de ajuste m y b fueron 103 y 15 respectivamente y en el caso de las mujeres las variables de ajuste m y b fueron 109 y 15 respectivamente. El error relativo total en ambos casos no sumo más del 3%. Las tablas completas resultantes se encuentran al final del artículo en los anexos.

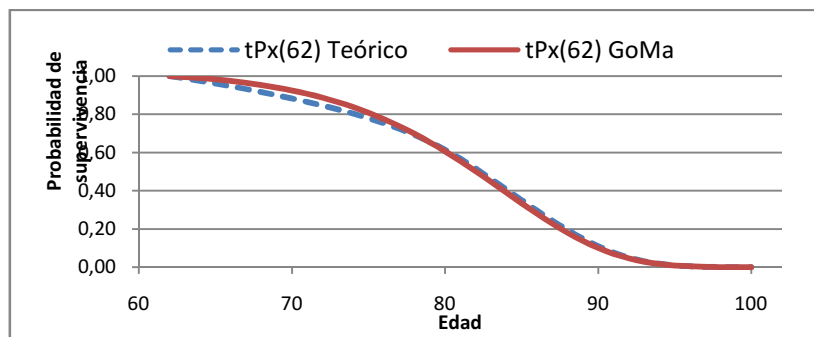


Gráfico 7: Ajuste de GoMa para hombres. Probabilidad condicional de supervivencia contra la edad

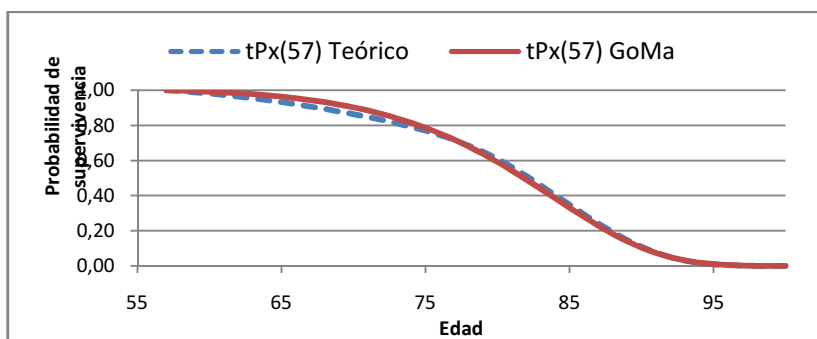


Gráfico 8: Ajuste GoMa para mujeres. Probabilidad condicional de supervivencia contra la edad

Con este resultado se puede plantear la ecuación del modelo GoMa para calcular las anualidades que se pagan en el retiro y que dependen de una distribución gamma incompleta, de los parámetros m y b encontrados y de la tasa de interés que pagan las aseguradoras. El resultado de esta ecuación es la cantidad de unidades monetarias que debe existir en la cuenta de ahorro previsional por cada unidad monetaria que se desea como pago anual. Expresada en unidades de SMLMV, el monto en la cuenta de ahorro previsional M equivale a multiplicar la anualidad obtenida en función de la tasa de interés r (real) y de la edad x por 13 (12 meses de pago mas la prima).

$$M = 13 \left[\frac{b\Gamma(-rb, b\lambda(x))}{e^{(m-x)r - b\lambda(x)}} \right] \quad (17)$$

4.2 Generación de Sendas de Cotización

El siguiente elemento a definir es el recorrido o senda de cotización de los individuos para que al final logren cumplir el mínimo de semanas requeridas. Una de las formas utilizadas

en diferentes artículos es definir una densidad de cotización mensual que afecta los aportes realizados en una proporción equivalente al número de semanas trabajadas sobre el total posible. Esta aproximación, aunque lógica en su concepción, ignora el peso que tienen las cotizaciones en el tiempo al asumir que son constantes durante todo el ciclo de vida laboral. La posibilidad de alcanzar la suma necesaria para adquirir la jubilación sin hacer efectiva la garantía es mayor mientras más tempranamente se realicen los aportes a la cuenta de ahorro previsional como se observó previamente. Además, es normal en la sociedad colombiana que un individuo alterne entre tener un empleo durante un tiempo y volver al desempleo por otro. No es normal, especialmente en las clases menos favorecidas, que una persona trabaje un número de semanas definido todos los meses y todos los años del ciclo de vida laboral.

Otra técnica disponible para el desarrollo de esta senda es el uso de las probabilidades que existen entre el empleo y el desempleo. En todos los países del mundo normalmente se reporta una tasa global de desempleo. Además, en los sistemas estadísticos de cada país se puede encontrar con mayor claridad la tasa de desempleo discriminada por grupos de edad, género, educación, y en algunos casos, niveles de ingreso. Entonces, se puede crear un modelo que calcule la probabilidad de estar empleado y desempleado y generar una senda de cotización más ajustada a la realidad según estas variables demográficas. Pero, la información existente sobre empleo y desempleo en las cifras estadísticas nacionales no permite identificar a aquellos individuos que se consideran empleados pero que realmente no cotizan en su cuenta de ahorro previsional (informales y/o evasión del empleador y/o desconocimiento). Otra dificultad es generar a partir de las cifras de empleo-desempleo una senda que garantice solamente el mínimo de semanas a cada uno de los grupos de edad, género, ingreso, educación, etcétera, para poder evaluar efectivamente la garantía.

Entonces, en función de lo anterior, se desarrolla un modelo de senda de cotización que depende de la relación existente entre el máximo número posible de semanas cotizadas, el mínimo número de semanas efectivamente laboradas y el mínimo número de semanas para tener derecho a una pensión. Esta decisión está fundamentada en que para estimar las garantías importa más el cumplimiento de los requisitos mínimos de cotización (el número de semanas cotizadas) que el empleo o el desempleo. Un individuo que alcanza el mínimo número de semanas no necesariamente ha recorrido un camino determinado por la tasa de desempleo. Sin embargo, la tasa de desempleo es útil para determinar los intervalos del ciclo de vida laboral donde existe mayor o menor densidad de empleo como se observara más adelante.

Por ejemplo, una persona que comienza su vida laboral a los 20 años de edad y supóngase que debe cotizar al menos 1325 semanas a su cuenta de ahorro previsional tiene una probabilidad p de emplearse y cumplir con el requisito de mínimo número de semanas cotizadas o una probabilidad $1-p$ de no emplearse, pero aún así tener la posibilidad de cumplir con el mismo requisito. Si la vida laboral de esta persona es hasta

los 65 años (2340 semanas en total), entonces él debería tener una probabilidad de trabajar equivalente al número mínimo de semanas por laborar sobre el total de semanas posibles a laborar, que en este caso sería equivalente a $1325/2340$. De igual forma tiene una probabilidad de no trabajar equivalente a $1015/2340$.

Si se supone que esta persona logró emplearse en la primera semana, para la siguiente semana la probabilidad de emplearse cambia ya que el número de semanas posibles a laborar es menor en una unidad, y el número de semanas laboradas y cotizadas es también menor en una unidad. Entonces la probabilidad de esta persona para emplearse es de $1324/2339$ y para no emplearse es de $1015/2339$. Si, por el contrario, esta persona no logró emplearse, entonces las probabilidades para la siguiente semana son diferentes ya que el número de semanas cotizadas continúa invariante, pero el número de semanas posibles a laborar disminuye en una unidad. Luego la probabilidad del individuo para emplearse es de $1325/2339$ y para no emplearse es de $1014/2339$.

Si se repite este procedimiento es posible crear una estructura similar a un árbol binomial de probabilidades de emplearse y de no emplearse con tres características principales. La primera característica es que la profundidad del árbol es igual al número total de semanas posibles a laborar. La segunda característica es que el resultado al final está en una sola rama que equivale al número de semanas trabajadas y cotizadas. Y la tercera característica es que se consideran semanas trabajadas todas las ramas que vayan en una misma dirección (ascendente o descendente, dependiendo del orden del árbol).

Por ejemplo, en el grafico 9 se muestra un pequeño árbol para 3 semanas de trabajo donde se busca que una persona trabaje al menos 2 (S_4 , marcado en azul, punteada). Las opciones de trabajar o no trabajar en una semana están marcadas con líneas verdes y rojas respectivamente. Luego, para alcanzar la meta el individuo tiene la posibilidad de trabajar o no trabajar en diferentes semanas, pero siempre buscando un objetivo específico. Todas estas posibles rutas están marcadas en amarillo. Es posible crear un conjunto de probabilidades que lo lleve por cualquiera de dichas sendas alternativas pero que siempre termine en la que se tiene como objetivo.

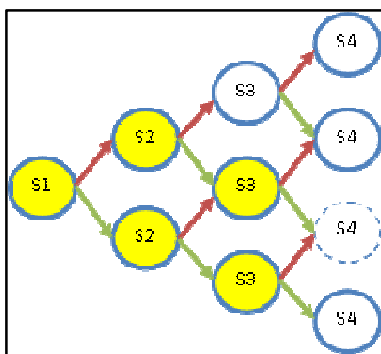


Gráfico 9: Árbol binomial de la senda de cotización

Entonces, y para general la senda de cotización (densidad de cotización), se construye un modelo estocástico que genera diferentes rutas a partir de las probabilidades ajustadas en cada periodo. En este modelo aleatorio se asume que cada periodo que tiene una duración de 3 meses. Como se muestra en la ecuación 19, la probabilidad P_i de trabajar la siguiente semana es igual al cociente cuyo numerador es la diferencia del mínimo número de periodos a trabajar N_{min} menos el número de semanas cotizadas N_C , y el denominador es diferencia entre el número total de periodos hábiles N_T menos en número de periodos transcurridos i .

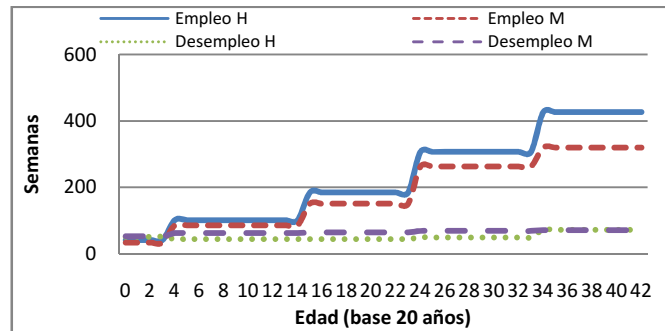
$$P_i = \frac{N_{min} - N_C}{N_T - i} \quad (18)$$

Pero, el resultado del ejercicio anterior no está ajustado a la realidad del comportamiento laboral de una persona a pesar de que permite construir la senda laboral eficiente. En diferentes trabajos, como los realizados por Núñez (2005), Martínez (2003) y Viáfara y Uribe (2006), está demostrado que para diferentes momentos dentro del ciclo de vida laboral, una persona está sometida a diferentes expectativas de duración en el empleo y en el desempleo según su género, su nivel de educación, su actividad, su edad, entre otros. Cada una de estas expectativas modifican la densidad de cotización permitiendo que la persona realice o no aportes a su cuenta de ahorro previsional. Entonces, se requiere realizar un cambio en las probabilidades resultantes para ajustar el modelo a unas expectativas de duración del empleo y desempleo dentro de la economía colombiana.

Para realizar este ajuste se comienza con las expectativas de duración del empleo y desempleo publicadas en las tablas del trabajo de Martínez (2003) para el DNP. En estas tablas existe una clasificación por edades en siete intervalos diferentes de los cuales solo cinco intervalos son necesarios; más específicamente aquellos que incluyen las edades entre los 20 y 65 años. En la Gráfica 10 están las líneas de la duración del empleo y el desempleo en meses, por edad y por género. Para efectos de simplificación en el modelo, se optó por trazar una línea de tendencia y encontrar la ecuación lineal que describe cada una de las cuatro trayectorias posibles. De esta forma se puede calcular el punto medio de la duración (duración promedio) del empleo o del desempleo según el género y la edad.

Luego, esta duración promedio se toma como la media para generar una distribución de probabilidad acumulada normal con una desviación estándar arbitraria equivalente a 1 año para el empleo y a 10 semanas para el desempleo. Esta distribución de probabilidad acumulada evaluada con el tiempo transcurrido en cada estado, ya sea de empleo o de desempleo, arroja un valor que se multiplica con el complemento de la probabilidad obtenida del modelo básico de senda de cotización. Por ejemplo, la probabilidad acumulada de llevar empleado un tiempo determinado se multiplica por la probabilidad de la senda de cotización de estar desempleado. El resultado de esta operación se suma a la probabilidad de la senda de cotización correspondiente. Sobre este resultado se evalúan

de nuevo las probabilidades en cada uno de los estados para obtener una nueva senda de cotización con un mejor sentido económico.



Gráfica 10: Semanas vs Edad (base 20 años)

4.3 Tratamiento de la incertidumbre en Inflación y Tasa Libre de Riesgo

La incertidumbre es la característica principal de todas las variables de cualquier sistema cuando los periodos son de muy largo plazo, como es el caso de las pensiones. En este trabajo, la incertidumbre existe en la tasa de interés, en el porcentaje de aporte, en la volatilidad de los modelos, entre otros. Sin embargo, se puede realizar un ejercicio simple de clasificación de las variables entre: aquellas en donde la incertidumbre tiene un origen natural y/o dependiente de una serie de eventos externos y donde los cambios en el valor de la variable son relativamente periódicos, y aquellas en donde el valor esta determinado únicamente por leyes o decretos y donde los cambios en el valor de la variable se dan en el intervalo de años. Las variables que pertenecen al primer grupo, por su naturaleza, pueden ser simuladas usando un modelo estocástico controlado por un sistema de lógica difusa.

El modelo de lógica difusa cuenta con diferentes subconjuntos y reglas para determinar el cambio en la tasa libre de riesgo. Se parte de la inflación y de la tasa libre de riesgo actual; y se realiza una simulación para determinar el cambio en la inflación en función de la variable aleatoria inflación y el cambio incierto (no estocástico) en la tasa libre de riesgo. La tasa de interés se considera incierta, de cambios periódicos y dependiente de otras variables como la inflación; y por ello se evalúa con la lógica difusa. En cambio, la inflación se considera aleatoria pero influenciada por una variable incierta como es el cambio en la tasa libre de riesgo. Estos dos sistemas se realimentan entre sí para generar una senda de la tasa de interés en el tiempo.

Un sistema de lógica difusa permite evaluar el comportamiento de un conjunto de variables no solo por su valor sino por el grado de pertenencia que estas tengan dentro de un grupo de áreas definidas conocidas como subconjuntos difusos. El grado de pertenencia es una variable que indica que tanto está su valor dentro de los límites especificados por un subconjunto y para ello toma valores entre 0 y 1, donde 0 es ninguna pertenencia a un subconjunto específico hasta 1 que es la pertenencia total al subconjunto. Un subconjunto difuso es un área determinada con una forma particular que se define en forma similar a una probabilidad. Los resultados de los diferentes grados de pertenencia a los diferentes subconjuntos se evalúan como variables ponderadas²⁹ siguiendo una serie de reglas que determinan el tipo de operaciones lógicas a realizar entre los diferentes subconjuntos. Una respuesta es aceptada cuando cumple con todos los criterios de una regla.

Las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos se pueden definir de diferentes formas, donde las más comunes son las triangulares, las trapezoidales y las gaussianas. Las formas triangulares definen un único punto donde el grado de pertenencia es el máximo. En el resto de los puntos, el grado de pertenencia disminuye constantemente en función de una pendiente definida por los puntos extremos del conjunto. Las formas trapezoidales definen un intervalo donde el grado de pertenencia es máximo. Por fuera de ese intervalo el grado de pertenencia disminuye constantemente en función de una pendiente definida por el punto extremo y el máximo correspondiente según el lado de la figura. La forma gaussiana tiene una curva similar a la de la distribución normal donde el máximo se presenta en el punto que sería el equivalente a la media y un punto de referencia en ambos extremos equivalente a la desviación estándar.³⁰

Para comenzar a desarrollar la lógica difusa se debe verificar, solo por motivos de referencia, que la inflación y la tasa de interés tengan un comportamiento en donde se pueda observar algún tipo de dependencia. Para ello, se compararon los datos de la inflación con los datos de la tasa Yield de los TES UVR 2015 para una serie de transacciones ocurridas entre los años 2003 y 2009 (Gráfico 11: Tasa TES UVR e Inflación 2003 a 2009). Se escogen los títulos TES UVR porque son el instrumento de inversión local de más bajo riesgo con el que cuentan las AFP. Como se observa, existe un grado de dependencia en el comportamiento de ambos indicadores acorde con la

²⁹ El peso ponderado de los grados de pertenencia a un subconjunto difuso que cumple una regla determinada define el valor de salida del sistema en un proceso conocido como “desborrosificación” o “defuzzificación”. Los mecanismos de este procedimiento son tan simples como la suma de los productos de cada grado de pertenencia por su conjunto resultante como el cálculo de los momentos geométricos sobre las formas de los conjuntos.

³⁰ Una explicación más profunda de los modelos difusos se puede encontrar en “Design of Fuzzy Controllers” de Jan Jantzen y “On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems” de Carl Carlsson y Robert Fullér.

literatura económica que indica que en principio la tasa de interés³¹ es el mecanismo básico regulador de la inflación; sin dejar de reconocer que existen otros mecanismos y variables al alcance de los organismos reguladores, pero que no vamos a considerar dentro de nuestro modelo.

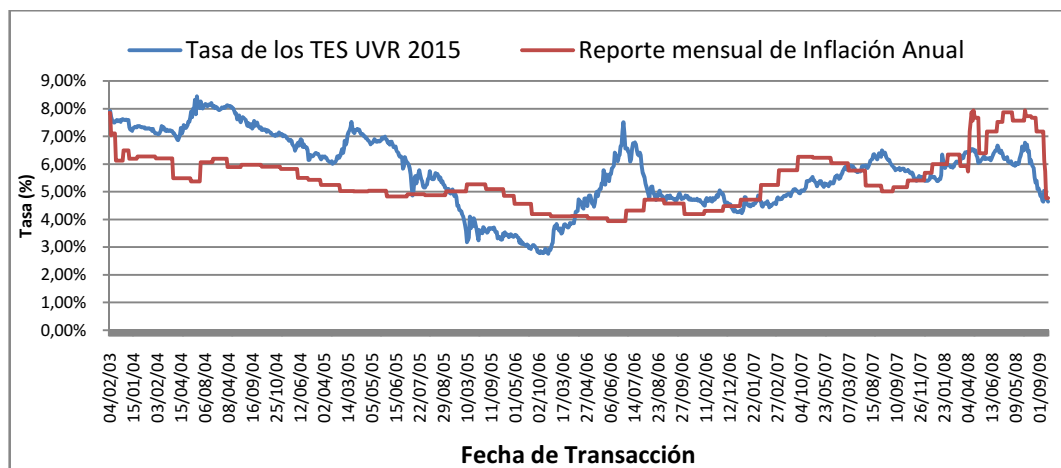


Gráfico 11: Tasa TES UVR e Inflación 2003 a 2009

Luego, se define para la variable inflación un conjunto difuso que contuviera la expectativa sobre la inflación reportada por el Banco de la Republica en sus informes periódicos sobre el aumento general de precios. El Banco normalmente reporta la expectativa de inflación para el año como una banda con un límite máximo y un límite mínimo entre los que él espera se sitúe el valor de la inflación. Para el año 2009 esa banda está localizada entre el 4.5% y el 5.5%. Por ello, se decidió que la figura adecuada para calificar el comportamiento de la inflación es una función de forma trapezoidal (Gráfico 12) que asigne el máximo grado de pertenencia a los valores de inflación que estén dentro de la banda de la expectativa del banco. Este subconjunto difuso se le llamó “normal”. Además de este subconjunto, se definieron otros 3 para indicar: una inflación por debajo de la expectativa llamado “low”, una inflación por encima de la expectativa llamado “high” y una inflación muy por encima de la expectativa llamado “very high”. Los subconjuntos “low” y “high” sirven para determinar el comportamiento de la tasa libre de riesgo mientras que el “very high” sirve como subconjunto de control para evitar desbordamientos en el modelo.

³¹ La tasa de intervención del Banco de la Republica es el verdadero mecanismo regulador de la inflación en Colombia. Pero, no se debe desconocer que el valor de la tasa de intervención influye directamente en el valor de las tasas de títulos soberanos como son los TES UVR.

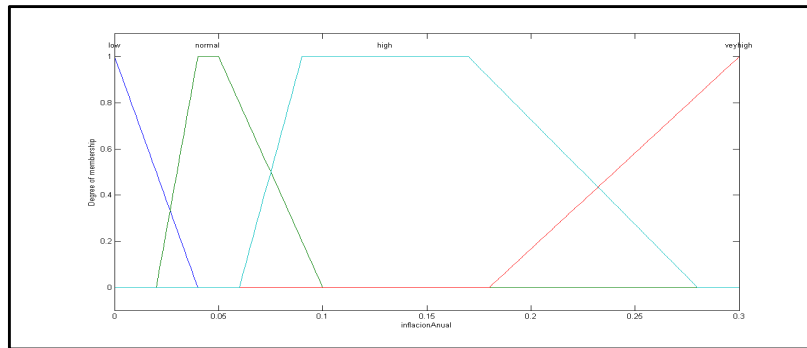


Gráfico 12: Subconjuntos difusos para la inflación

Para la tasa de interés se escogió un conjunto difuso con forma triangular al que se denomina “normal” y que captura el comportamiento de los títulos TES UVR dentro de una expectativa de mercado que oscila alrededor del 6%. El uso de la forma triangular (Gráfico 13) se compara en algún grado con el uso de los modelos Vasicek en las simulaciones Montecarlo para las diferentes tasas porque marca un valor puntual alrededor del cual oscila el valor de la tasa. Al Igual que con la inflación, se adicionaron otros dos subconjuntos difusos para indicar si la tasa libre de riesgo está alta o si la tasa libre de riesgo está baja, llamados “high” y “low” respectivamente. Igualmente se incorporó un subconjunto adicional para evitar el desbordamiento, llamado “very high”.

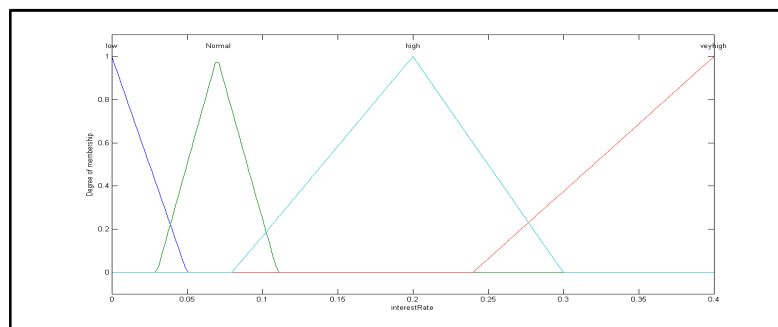


Gráfico 13: Subconjuntos difusos para tasa de interés

Después, el resultado del grado de pertenencia de cada uno de los subconjuntos se evalúa siguiendo una serie de reglas lógicas y de teoría de conjuntos para determinar una posible salida. Por ejemplo, una regla dice que “si la inflación está alta y la tasa de interés está baja, entonces se debe incrementar la tasa de interés”. Cada regla que se cumple indica cual salida se debe seleccionar y además con cual grado de aplicación se debe hacer. Las salidas también son subconjuntos difusos que no se evalúan como grado de pertenencia sino como grado de aplicación. El grado de aplicación es igual al mínimo grado de pertenencia entre todos los subconjuntos válidos y definidos dentro de una regla. La lista de las reglas usadas en este modelo se encuentra en los anexos.

Para la modelación del cambio de la tasa de interés se definieron 3 subconjuntos difusos de salida (Gráfico 14) que siguen la metodología de “Sugeno”, donde no necesariamente debe existir “overlapping” de los conjuntos de salida³². El primero se conoce como “stable” y sirve para indicar que no se realiza ningún cambio sobre la tasa de interés. El segundo se conoce como “increment” y sirve para indicar un aumento en 100 puntos básicos en la tasa de interés. Y el tercero se conoce como “decrement” y sirve para indicar un decremento en 100 puntos básicos en la tasa de interés. Los 100 puntos básicos se escogieron para coincidir con los cambios máximos y mínimos que normalmente el ente regulador (Banco de la Republica) realiza. No sobra indicar que estos valores son el máximo y mínimo posible de salida del proceso. El resultado de evaluar todas las reglas y ponderar la salida arroja en cada ejecución un valor entre -100 puntos básicos y 100 puntos básicos.

Un mecanismo de corrección que se introdujo para la salida fue la estandarización del cambio de la tasa de libre de riesgo en saltos de +/-25, +/-50, +/-75 y +/-100 puntos básicos. Para ello, se evalúa el resultado del modelo difuso dentro de otro modelo que selecciona el valor más apropiado para el cambio de la tasa libre de riesgo. En otras palabras, se definen unos intervalos que indican cual es el cambio de tasa libre de riesgo permitida según el valor ingresado.

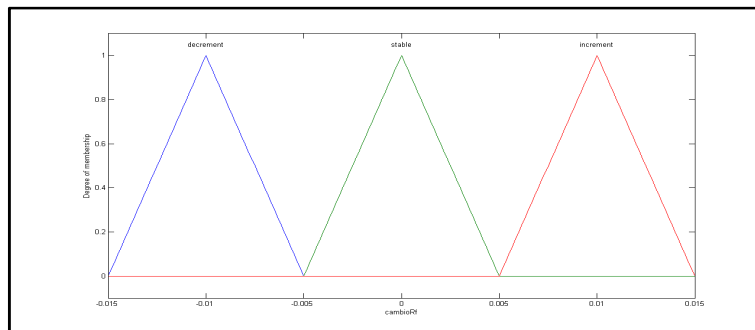


Gráfico 14: Subconjuntos difusos de salida.

El resultado de evaluar todas las reglas y ponderar los grados de aplicación de cada uno de los subconjuntos difusos de salida es el valor de incremento o decremento de la tasa libre de riesgo. Los efectos de este incremento o decremento son inmediatos sobre el valor de la tasa libre de riesgo; pero actúan con rezago sobre el valor de la inflación $\Delta\pi_t$. Este rezago corresponde a un parámetro de influencia β negativo que multiplica a la diferencia entre la tasa libre de riesgo actual r_f y el promedio histórico de varios periodos anteriores de la tasa libre de riesgo \bar{r} como se aprecia en la siguiente ecuación:

³² Los modelos “Sugeno” desarrollan los conjuntos de salida como variables “Singleton” que equivalen a una unidad en un punto determinado. También desarrollan los conjuntos de salida como funciones lineales. Por simplicidad en la programación, la salida “Sugeno” se puede modelar como subconjuntos de forma triangular, donde las dos pendientes verticales son similares y sin overlapping.

$$\Delta\pi_r = -\beta(r_f^t - \bar{r}) \quad (19)$$

Se reconoce la existencia de aleatoriedad en la inflación antes de su inclusión en el modelo difuso. Entonces, el camino que sigue la inflación se define con un modelo estocástico donde los cambios en esta son determinados por una variable aleatoria que sigue una distribución normal estándar $W(t)$ y por el cambio en la inflación determinado por el cambio en tasa libre de riesgo $\Delta\pi_r$. El tiempo transcurre en meses, acorde con las políticas del Banco de la Republica. La expresión que define este comportamiento es la siguiente.

$$\Delta\pi_t = \pi_t W(t) \sigma \sqrt{1/12} + \Delta\pi_r \quad (20)$$

El resultado de ensayar el modelo se puede observar en el Gráfico 15. Se observa como la tasa libre de riesgo reacciona cuando se produce la salida de la inflación del rango de expectativa indicado por el Banco de la Republica. Además se observa como la línea de la inflación corregida se desvía de la línea de inflación sin corregir cuando ocurre el cambio de la tasa libre de riesgo. Otra característica son los cambios en la tasa libre de riesgo que se presentan como saltos de escalera, muy acorde con lo que sucede en el mercado. Sin embargo, algunas reacciones de incremento o decremento de la tasa libre de riesgo del modelo se pueden mejorar con la incorporación de más variables al sistema con sus respectivos subconjuntos difusos; como por ejemplo, el cambio en la tasa de inflación. Un efecto adverso de esta medida es que el número de reglas se incrementa substancialmente y se hace cada vez más complejo el diseño y la calibración del modelo.

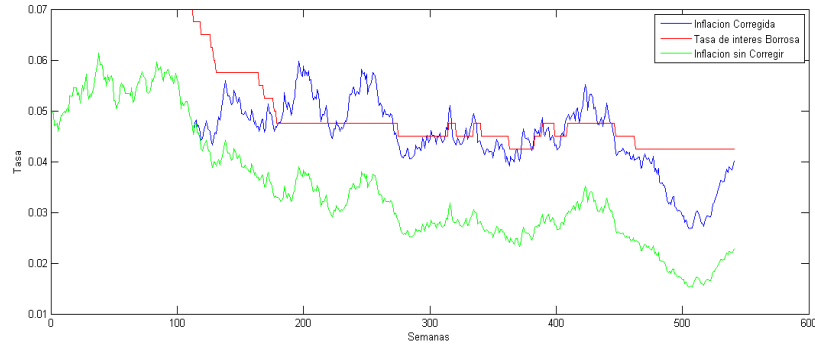


Gráfico 15: Ejemplo de una ejecución del modelo difuso.

4.4 Sendas Salariales de cada Cohorte

Se escogieron cinco sendas salariales para cinco cohortes por cada género según dos criterios. El primer criterio es la distribución salarial de los afiliados en la AFP que se observa en la Gráfica 5. Según esa distribución se tienen cuatro cohortes, que son:

personas con 1 SMLMV (65% de los afiliados), personas con 2 SMLMV (18% de los afiliados), personas con entre 3 y 4 SMLMV (9% de los afiliados) y personas con más de 4 SMLMV (8% de los afiliados). Esto significa que de 100,000 simulaciones, 65,000 se deben hacer con la primera cohorte, 18,000 con la segunda cohorte, 9,000 con la tercera cohorte y 8,000 con la cuarta cohorte suponiendo que esta distribución se mantiene constante a lo largo de todo el ciclo de vida laboral³³. El siguiente criterio es el comportamiento de las sendas salariales para diferentes cohortes descritas en el documento de Reveiz, León *et al.* (2009). En este documento se indica el comportamiento de diez cohortes compuestas de igual número de personas y ordenadas por promedios salariales. Por simplicidad se tomó la trayectoria de las cinco cohortes más representativas que son las cohortes con 1 SMLMV, 2 SMLMV, 3 SMLMV, 4 SMLMV y los mayores a 4 SMLMV.

Fue necesario realizar un ajuste a las cohortes 3 y 4 debido a que no existe una discriminación sobre el número de afiliados que pertenecen a cada una de ellas. Por ello, se intentó mantener la tendencia decreciente en el número de afiliados de las cohortes 1 y 2 por lo que a la cohorte 3 se le asignó el 6% de los afiliados y a la cohorte 4 el 3% de los afiliados.

Los resultados de esta modelización discreta de las sendas salariales se observa en los gráficos 16 y 17. Allí se puede observar que la senda de cotización de los hombres crece más aceleradamente que la de las mujeres y alcanza niveles mucho más altos en general. También se observa cómo después de 100 semanas existe una muy baja posibilidad de cambio en el salario de la mujer sobre todo cuando esta pertenece a las cohortes inferiores.

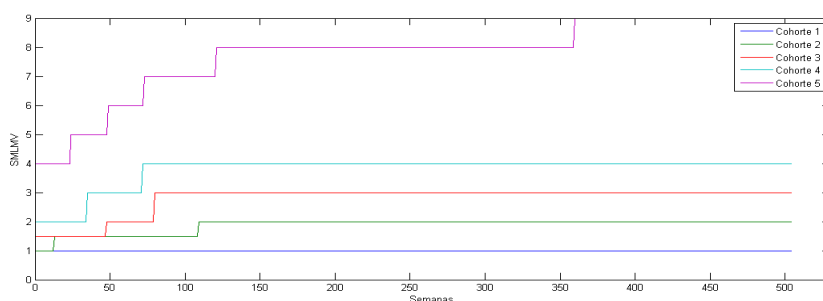


Gráfico 16: Senda Salarial Mujeres

³³ La suposición de la distribución constante en el tiempo asume que las políticas desde el Estado no han mejorado ni desmejorado la condición salarial de la población.

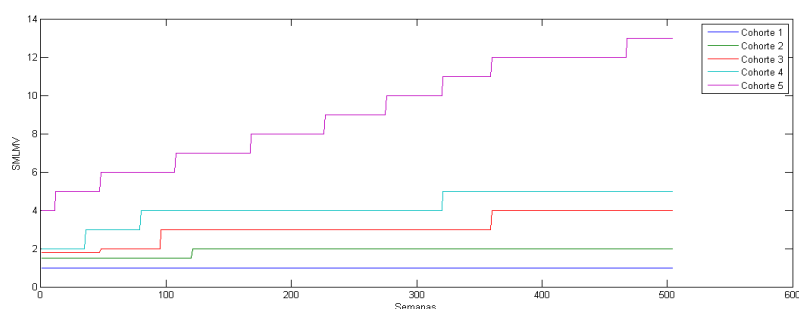


Gráfico 17: Senda Salarial hombres

5. Resultados, Conclusiones y recomendaciones

El resultado entregado por el modelo muestra que para los hombres existe un déficit (sin tener en cuenta los fondos de GPM y solidaridad) en la cuenta de ahorro previsional para las primeras cuatro cohortes, pero no en la quinta que es la de más alto ingreso. Por el contrario, en el caso de las mujeres, en todas las cohortes existe una probabilidad de déficit, aunque en la cohorte 5 es muy baja. La participación porcentual de las diferentes cohortes en el déficit se concentró en la cohorte número uno, tanto para hombres como para las mujeres, con el 84% y 80% respectivamente; seguido por la cohorte 2 para hombres y mujeres con el 15% y 16% respectivamente (ver Tabla 4, parte A).

Si se observan los datos con más detalle, parece que el déficit total en el futuro de la primera cohorte de las mujeres es menor que el mismo ítem de los hombres. Pero, si se divide este valor por el equivalente del salario mínimo en el futuro, se encuentra que el total de déficit en el futuro normalizado es mayor en las mujeres (ver Tabla 4, parte B). La razón de esta discrepancia resulta del menor tiempo de cotización por parte de las mujeres. Por esta sola razón las cifras no serán comparables hasta no realizar la valoración descontada en el tiempo.

El déficit per cápita normalizado, que resulta de dividir el déficit total normalizado por el número de personas afiliadas dentro de una cohorte (ver Tabla 4, parte D), es un indicador para mostrar en promedio qué tan deficitaria es una cuenta. En general, se observa en la Tabla 4, parte B, que para las mujeres los resultados son más elevados que para los hombres lo que sugiere que una parte muy grande de las garantías se van a requerir para cubrir el déficit de las mujeres. El grado de déficit sugerido por estos datos puede ser peor si a ello se suma la creciente participación de las mujeres en el mercado laboral. Normalmente se señala a la desigualdad salarial como uno de los posibles causantes de este déficit en las mujeres, pero esta afirmación requiere de un análisis más detallado.

A	Total Déficit en el Futuro En SMLMV de Hoy para 20,000	Mujeres	Hombres	Porcentaje por cohorte del total del déficit (Mujeres)	Porcentaje por cohorte del total del déficit (Hombres)
	Cohorte 1	10,047,201	10,645,665	79.55%	82.62%
	Cohorte 2	2,035,907	1,889,317	16.12%	14.66%
	Cohorte 3	432,228	301,366	3.42%	2.34%
	Cohorte 4	114,467	48,221	0.91%	0.37%
	Cohorte 5	352	0	0.00%	0.00%
	TOTAL DEFICIT	12,630,155	12,884,569		
	SALARIO MINIMO FUTURO EN SMLMV DE HOY	63.333228	78.669964		
B	Total Déficit en el Futuro En SMLMV del Futuro (37 años de cotización)	Mujer	Hombre	Porcentaje por cohorte del total del déficit (Mujeres)	Porcentaje por cohorte del total del déficit (Hombres)
	Cohorte 1	158,640	135,321	79.55%	82.62%
	Cohorte 2	32,146	24,016	16.12%	14.66%
	Cohorte 3	6,825	3,831	3.42%	2.34%
	Cohorte 4	1,807	613	0.91%	0.37%
	Cohorte 5	6	0	0.00%	0.00%
	TOTAL DEFICIT	199,424	163,780		
C	Numero de Personas en Cada Cohorte				
	Cohorte 1	13,000			
	Cohorte 2	3,600			
	Cohorte 3	1,200			
	Cohorte 4	600			
	Cohorte 5	1,600			
D	Déficit en SMLMV del Futuro Por Persona	Mujer	Hombre		
	Cohorte 1	12.20	10.41		
	Cohorte 2	8.93	6.67		
	Cohorte 3	5.69	3.19		
	Cohorte 4	3.01	1.02		
	Cohorte 5	0.00	0.00		

Tabla 4: Total déficit por cohorte (20,000 hombres y 20.000 mujeres)

5.1 Valoración

Para valorar el total del déficit del sistema pensional, solo falta descontar el promedio del déficit de cada cohorte, de cada género a la tasa libre de riesgo y según la duración del ciclo de vida laboral de cada género. Como la tasa libre de riesgo es una variable de salida del modelo, entonces se asume como tasa libre de riesgo el resultado de promediar todas las tasas libres de riesgo resultantes de todas las cohortes de todas las simulaciones de un mismo género. Después, se suman todos los resultados descontados y se obtiene el valor del déficit a precios de 2009.

El resultado del déficit, como se observa en la última fila de la Tabla 5A, es de 7.74 millones de SMLMV por cada 100,000 afiliados a los fondos. En la Tabla 5B, se observa, que luego de considerar el valor del salario mínimo actual, esta suma equivale a 3.84 billones de pesos. Si actualmente se tiene una población de 8.5 millones de afiliados a los fondos de pensiones obligatorias, esto significa que la suma total del déficit en los aportes podría ascender a los 326.55 billones de pesos, que equivalen al 64.9% del PIB³⁴ de Colombia; pero solo bajo la suposición de que todos los 8.5 millones de afiliados van a cumplir con los requisitos mínimos exigidos por la ley.

Cohorte	Mujeres	Periodo de Descuento M 37 Años	Hombres	Periodo de Descuento H 42 Años	100% (Hombres y Mujeres)	Mujeres (42%)	Hombres (58%)	Todos
	Valor Déficit per cápita	Descontado DM	Valor Déficit per cápita	Descontado DH	Número de Afiliados por Cohorte NAC	Total DM*NAC*42%	Total DH*NAC*58%	Total Mujeres y Hombres
Cohorte 1	772.98	107.07	819.97	86.96	65,000.00	2,923,098.73	3,278,230.97	6,201,329.69
Cohorte 2	569.48	78.88	537.04	56.95	18,000.00	596,370.29	594,579.49	1,190,949.78
Cohorte 3	398.00	55.13	330.44	35.04	6,000.00	138,930.06	121,949.14	260,879.21
Cohorte 4	270.61	37.48	157.59	16.71	3,000.00	47,230.36	29,078.15	76,308.51
Cohorte 5	39.12	5.42	0.00	0.00	8,000.00	18,206.67	-	18,206.67
							Total (Und. SMLMV)	7,747,673.86

Tabla 5A: Estimación del déficit actual en SMLMV por cada 100,000 afiliados

Déficit en SMLMV por 100,000 afiliados	7,747,673.86
Salario Mínimo	496,000.00
Déficit en pesos por 100,000 afiliados	3,842,846,235,778.88
Afiliados total a las AFP	8,500,000.00
Déficit Total del RAI	326,641,930,041,205.00

Tabla 5B: Estimación del déficit total del RAI

Si se observan las garantías acumuladas por la simulación (Tabla 6) se encuentra un resultado que sugiere que efectivamente los aportes de los géneros son muy diferentes. Los hombres tienen más contribución a los fondos de GPM y de Solidaridad en todas las cohortes estudiadas si eliminamos el factor tiempo. La razón de esta diferencia puede ser, de nuevo, la desigualdad laboral existente.

GPM En SMLMV	Mujer	Hombre
Cohorte 1	1,951,705.00	3,113,662.00
Cohorte 2	995,428.90	1,601,599.00
Cohorte 3	495,981.60	807,407.70
Cohorte 4	344,372.60	551,183.30
Cohorte 5	1,780,146.00	3,248,039.00
TOTAL	5,567,634.10	9,321,891.00
SOLIDARIDAD	Mujer	Hombre
Cohorte 1	0.00	0.00
Cohorte 2	0.00	0.00
Cohorte 3	0.00	567,412.00
Cohorte 4	332,683.50	537,402.90
Cohorte 5	1,724,854.00	3,177,287.00
TOTAL	2,057,537.50	4,282,101.90

Tabla 6: Magnitud de las garantías por cohorte y genero

³⁴ El valor del PIB estimado para el 2009 por el DNP es de 503.2 billones de pesos.

Si se hacen efectivas las diferentes garantías sobre el déficit total acumulado en las cuentas, respetando la independencia de géneros, se encuentra el siguiente resultado. En el caso de los hombres, por cada 100.000 afiliados, el valor alcanzado por el fondo de GPM y el fondo de solidaridad alcanza para cubrir el 100% del déficit y hacer posible la garantía de pensión mínima mientras que en las mujeres solo alcanza para cubrir el 60% del déficit. Pero, el valor de la garantía no estaría financiado en el caso en donde solamente se utilice el fondo de GPM para cubrir el déficit de cuenta de ahorros previsional de los hombres y de las mujeres. Para las mujeres, solamente con el fondo de GPM, el nivel de cobertura de la garantía alcanza el 44%, mientras que para los hombres solamente con el fondo de GPM el nivel de cobertura de la garantía alcanza el 72%. En este caso, el gobierno debería entrar a financiar el 56% y el 28% del déficit total en mujeres y hombres respectivamente. Este déficit final descontando a valores de 2009 totaliza 142,9 billones, prácticamente equivalente al presupuesto nacional para la vigencia del año 2009.

50,000 afiliados por género	Déficit en SMLMV por 100,000 afiliados	Garantía GPM en SMLMV por 100,000 afiliados	Déficit con GPM en SMLMV por 100,000 afiliados	Porcentaje de déficit con GPM	Solidaridad en SMLMV por 100,000 afiliados	Déficit Total por 100,000 afiliados en SMLMV y porcentaje de déficit final
Operación	A	B	A-B=C	C/A	D	C-D=E E/A
Mujeres	31,575,387.50	13,919,085.25	17,656,302.25	56%	5,143,843.75	12,512,458.50 40%
Hombres	32,211,422.50	23,304,727.50	8,906,695.00	28%	10,705,254.75	(1,798,559.75) 0%

Tabla 7A: Estimación del peso de las Garantías (50,000 afiliados por género)

A	Déficit - Garantía por 100,000 afiliados	
	Mujeres (50,000 afiliados)	17,656,302.25
	Hombres (50,000 afiliados)	8,906,695.00
B	Déficit descontado en SMLMV por 100,000 afiliados	
	Mujeres (descontado 37 años)	2,445,749.95
	Hombres (descontado 42 años)	944,532.76
C	Suma Déficit descontado en SMLMV (100,000 afiliados)	3,390,282.71
D	Salario Mínimo	496,000
C*D=E	Subtotal en Pesos para 100,000 Afiliados	1,681,580,226,051.88
F	Múltiplo de 8,5 Millones de Afiliados	85.00
F*E	Déficit Total en Pesos no cubierto por GPM	142,934,319,214,409.00

Tabla 7B: Total déficit no cubierto por GPM

En virtud del déficit existente en las cuentas del género femenino, se realizó un cambio en el modelo para permitir a las mujeres trabajar hasta los 62 años y observar el efecto del aumento en tiempo de jubilación sobre el déficit en la cuenta de ahorro previsional (Tabla

8). Los resultados mostraron que el déficit en la cuenta de ahorros cubierto solamente por el fondo de GPM pasó del 44% al 62%. Esto le representa al Estado pasar de destinar 142.9 billones de pesos (28.4% del PIB) para cubrir las garantías de ambos géneros, a solamente 98.92 billones de pesos (19.7% del PIB). Esta es una reducción del 31% en costos para el Estado. Y, si además de ello, se incluye al fondo de solidaridad para financiar el déficit en la cuenta de ahorros individual del género femenino, la cobertura alcanza el 87%.

A	Déficit de GPM en SMLMV	
	Mujeres (50,000 afiliados)	13,527,101.00
	Hombres (50,000 afiliados)	8,923,510.50
B	Valor descontado a R_t (SMLMV)	
B1	Mujeres (50,000 afiliados) a 42 años	1,407,131.47
B2	Hombres (50,000 afiliados) a 42 años	939,203.82
C=B1+B2	Suma Total Déficit en SMLMV	2,346,335.29
D	Salario Mínimo	496,000.00
C*D=E	Déficit total para 100,000 afiliados en pesos	1,163,782,302,437.09
F	Multiplificador	85.00
G=F*E	Déficit Total en pesos no cubierto por GPM	98,921,495,707,152.80

Tabla 8: Estimación del déficit con jubilación de mujeres a los 62 años.

Otra modificación que se realizó fue el cambio de la edad de inicio del ciclo de vida laboral de 20 años a 30 años para cuantificar la importancia del inicio temprano en los aportes; ejercicio similar al realizado con el modelo de Zurita. El efecto de este cambio se observa en el nivel de cobertura de los fondos de GPM y fondos de Solidaridad. Para el caso en donde solo se utiliza el fondo de GPM, la cobertura alcanzó solo el 40% para las mujeres y el 60% para los hombres. El déficit total generado en el fondo equivale al 170.3 billones (33.8% del PIB). Otros cambios, como 25 años y 35 años, se observan en el Gráfico 18.

La modificación final realizada permitió aumentar el número de semanas mínimas cotizadas de 1325 semanas a 1800 semanas (Tabla 8) suponiendo una mejora en las condiciones laborales en todas las cohortes. Este ejercicio disminuyó considerablemente el déficit de los fondos de GPM y solidaridad en todas las cohortes de ambos géneros. En el caso de las mujeres, la cobertura del fondo de GPM alcanzó el 77% mientras que en los hombres el cubrimiento llegó al 100%. El déficit generado esta cercano a los 35,5 billones de pesos (7.1% del PIB).

Cobertura de la GPM	Mujeres	Hombres
Semanas Cotizadas		
1,325	44%	72%
1,500	55%	83%
1,800	77%	100%

Tabla 9: Cobertura GPM vs semanas cotizadas y género

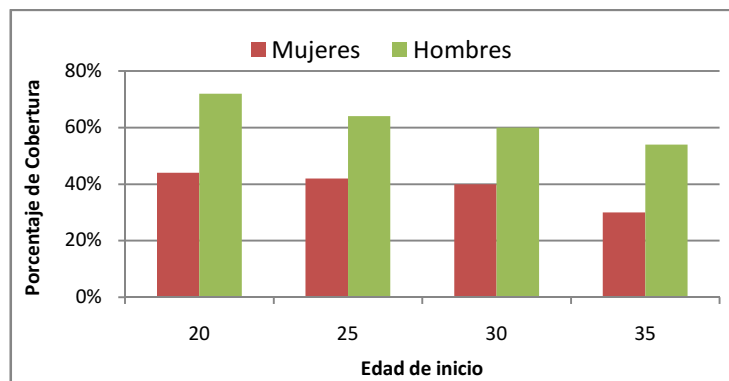


Gráfico 18: Porcentaje de cobertura según la edad de inicio de cotización

5.2 Conclusiones y recomendaciones

Es recurrente en este tipo de trabajos que para disminuir el déficit en las cuentas de ahorro previsional se recomienda la disminución de la tasa de desempleo, o la reducción de la informalidad en el trabajo, o el aumento del número de afiliados al sistema, implementando esquemas de flexibilización laboral (empresas de empleo temporal), o relajando las normas del régimen para que otros grupos de trabajadores puedan afiliarse. Estas medidas no resuelven el problema de fondo porque no contribuyen decisivamente a evitar que el déficit que se está generando en las cuentas de ahorro individual siga creciendo a niveles insostenibles.

Solucionar el problema del déficit en las cuentas de ahorro previsional desde el problema del desempleo, incorporando mano de obra barata a la industria o transformando la mano de obra informal en formal son soluciones que solo reportan sus beneficios en el corto plazo. Estas soluciones permiten a las AFP disponer de un capital adicional para mejorar las inversiones con el nuevo capital que viene de los nuevos cotizantes. Pero, este tipo de prácticas a futuro lo único que hacen es aumentar el riesgo existente en el sistema, ya que aumentan la participación de las cohortes salariales con mayor riesgo de déficit en el futuro; debido a su escasez de capital humano.

Ampliar la cobertura del sistema pensional es una meta que se debe lograr por parte de los organismos gubernamentales y las administradoras de los fondos de pensiones por el impacto social que ello representa, y porque todo ciudadano debe estar cubierto para tener una vejez digna. Pero, cuando se permite el ingreso de otro grupo de cotizantes por el mecanismo de la relajación de las reglas, no necesariamente el beneficio social representa un beneficio para la Nación. Por un lado, se abre aún más la posibilidad de que más individuos entren inmediatamente a realizar aportes a los diferentes fondos y por ende aumenta la cobertura. Pero, por otro lado, se está cambiando el funcionamiento estructural del sistema pensional que incrementa los riesgos por incertidumbre. Además,

se abre la posibilidad de que la sostenibilidad del régimen de ahorro individual se fundamente en el aumento de cotizantes (aumentar la cobertura universal); con el fin de contar con más individuos que aportan y que ayudan a aumentar la magnitud de las garantías futuras para beneficio de unos pocos.

Luego, una medida que se puede implementar para disminuir el déficit en las cuentas de ahorro previsional sería mejorando los aportes que se realizan a los fondos de GPM y fondos de solidaridad. La contribución de estos fondos a la disminución del déficit presente en las cuentas de ahorro, tanto de hombres como de mujeres, es considerable, pero aun insuficiente. Un aumento en el aporte a la solidaridad solo afectaría a las personas con alto poder adquisitivo mientras que el beneficio solo se presentaría para aquellos con bajo nivel de ingreso siempre y cuando las semanas cotizadas le permitan gozar de este privilegio. La percepción pública general de esta medida sería la de un subsidio en la jubilación que ofrecen los estratos altos a los estratos bajos. Aunque, desde la equidad social, los subsidios son una forma de equilibrar la capacidad de generar ingresos (salario y capital humano) con respecto a los costos y gastos que plantea la subsistencia en la sociedad, en este caso se podría percibir como una práctica al estilo “Robin Hood” que alivia el problema desde la forma, pero no lo solucionan en el fondo.

Otra solución más adecuada para enfrentar el problema del déficit es mejorar el capital humano de las personas para dar la posibilidad a un mejor ahorro. Si se lograra disminuir en cinco puntos el porcentaje de afiliados a los fondos de pensiones que ganan 1 SMLMV del 65% al 60% y aumentar los que ganan 2 SMLMV en 5 puntos del 18% al 23%, y además garantizar el cumplimiento del mínimo de semanas cotizadas, el déficit en la cohorte inferior bajaría substancialmente del 80% al 75% para las mujeres y del 82% al 78% para los hombres. Además, esta política implica mejorar el recaudo en las cuentas de ahorro previsional, disminución en el déficit general en el momento de retiro y aumento en los fondos de GPM; sin desconocer el beneficio en el componente social. Pero, al día de hoy, esto representaría un costo adicional para las empresas y el mismo Estado. Se ve entonces la necesidad de estructurar una verdadera política estatal a largo plazo para la mejorar la productividad de los trabajadores con el menor ingreso a través de capacitación, que finalmente generen más recursos para la industria y se traduzca en mejores salarios para ellos. En este caso es preferible mejor calidad en el empleo a más cantidad de empleo.

También sería ideal revisar las edades de retiro de las mujeres. El costo de las anualidades para ellas, sumado al menor tiempo de cotización y los menores salarios, son los principales causantes del déficit. Por ello, se recomienda que las edades de las mujeres se igualen a las de los hombres en un futuro cercano. Aunque esta decisión es polémica porque la mujer es la que lleva la carga de la maternidad, cada año que pasa parece más propicia debido a los cambios culturales en la sociedad, la disminución de la tasa de maternidad y la mayor participación del hombre en el crecimiento de sus hijos. Pero esta medida debe ir acompañada de la igualdad en los salarios y los derechos

laborales de la mujer, que le permitan realmente estar a la altura de los salarios y los derechos laborales de los hombres. Si no, la medida sería un castigo al género femenino.

Por otro lado, se debe dar herramientas a los aseguradores para que desarrollen los modelos de pagos mediante anualidades. El desarrollo de este mecanismo es clave para permitir que las diferentes cuentas de ahorro previsional dispongan de un capital suficiente para adquirir una renta vitalicia sin recurrir en exceso al fondo de garantía GPM. Esto implica que se deben producir modelos y tablas de mortalidad que reflejen con certeza la esperanza de vida de los colombianos. También es necesario estudiar las diferentes densidades de cotización presente en las distintas cohortes salariales. Este dato permitiría a los modelos alcanzar un grado de precisión mejor al conseguido en la actualidad.

Finalmente, si se busca mejorar el desempeño de las cuentas de ahorro previsional y su posterior utilización como financiador del retiro, se debe estudiar muy detalladamente los efectos directos e indirectos que puede originar el cambio en una política sobre la sociedad, el individuo y las AFP. Como se observó en este trabajo, en el caso de los aportes, ahorrar mas no significa mejor; en otras palabras aumentar el porcentaje del aporte no es necesariamente la mejor política para incrementar la suma acumulada en las cuentas de ahorro previsional y disminuir su déficit.

Anexo 1.

Leyes

Ley 100 de 1993: Por la cual se crea el sistema de seguridad social integral y se dictan otras disposiciones. Esta ley define actualmente las políticas del sistema pensional colombiano permitiendo la convivencia de los dos regímenes pensionales: El régimen PAYG administrado por el Seguro Social y de régimen privado de contribución definida y solidaridad administrado por las AFP.

Ley 797 de 2003: Por la cual se reforman algunas disposiciones del sistema general de pensiones previsto en la Ley 100 de 1993 y se adoptan disposiciones sobre los Regímenes Pensionales exceptuados y especiales. En especial en esta ley se establece la obligación de los trabajadores independientes de aportar a un sistema de pensiones por el monto que ellos mismos declaren en sus ingresos.

Ley 860 de 2003: Por la cual se reforman algunas disposiciones del Sistema General de Pensiones previsto en la Ley 100 de 1993 y se dictan otras disposiciones. Esta ley modifica algunas disposiciones y normas sobre los requisitos para tener acceso a la pensión de invalidez. Además, incorpora un tratamiento especial para los empleados del CTI de la fiscalía por considerar su labor de alto riesgo.

Decretos

Decreto 692 de 1994: Por el cual se reglamenta parcialmente la Ley 100.

Decreto 510 de 2003: Por medio del cual se reglamentan parcialmente los artículos 3,5,7,8,9,10 y 14 de la Ley 797 de 2003.

Decreto 2633 de 1994: Por el cual se reglamentan los artículos 24 y 57 de la Ley 100 de 1993.

Decreto 2765 de 2007: Por el cual se reglamenta la garantía de rentabilidad mínima.

Circulares Externas

Circular Básica Jurídica 007 de 1996: Instrucciones generales relacionadas con las entidades administradoras del sistema general de pensiones y el control, regulación y vigilancia que realiza la Superintendencia Financiera sobre sus prácticas.

Circular Externa 029 de 2005: Que obliga a las AFP y al seguro social a buscar mecanismos para la detección y solución de las múltiples vinculaciones de algunos afiliados.

Jurisprudencia

Sentencia C-789 de 2002: Sobre el artículo 36, incisos 4 y 5 de la Ley 100 de 1993

Sentencia C-1024 de 2004: Sobre los artículos 2, 3 y 9 de la Ley 797 de 2003

Anexo 2.

Resultados de modelo GoMa para Hombres

Datos					Goma			
Edad	Número de Sobrevivientes	Fallecidos	qx (probabilidad de morir)	tPx(62) Teórico	Años Corridos	Factor exponencial GoMa	tPx(62) GoMa	Error Relativo Cuadrático
62	81995	979	0.011940	1.000000	0	0.004333	1.000000	0.000000
63	81016	1054	0.013010	0.988060	1	0.004632	0.995221	0.000052
64	79962	1119	0.013994	0.975206	2	0.004952	0.989462	0.000208
65	78843	1179	0.014954	0.961559	3	0.005293	0.982576	0.000459
66	77664	1232	0.015863	0.947180	4	0.005658	0.974398	0.000782
67	76432	1281	0.016760	0.932154	5	0.006048	0.964747	0.001140
68	75151	1357	0.018057	0.916531	6	0.006465	0.953426	0.001485
69	73794	1413	0.019148	0.899982	7	0.006910	0.940220	0.001799
70	72381	1477	0.020406	0.882749	8	0.007387	0.924897	0.002012
71	70904	1558	0.021973	0.864736	9	0.007896	0.907217	0.002087
72	69346	1656	0.023880	0.845734	10	0.008440	0.886929	0.002007
73	67690	1790	0.026444	0.825538	11	0.009022	0.863783	0.001772
74	65900	1957	0.029697	0.803708	12	0.009644	0.837534	0.001424
75	63943	2160	0.033780	0.779840	13	0.010309	0.807961	0.001014
76	61783	2397	0.038797	0.753497	14	0.011020	0.774877	0.000607
77	59386	2666	0.044893	0.724264	15	0.011780	0.738148	0.000266
78	56720	2971	0.052380	0.691749	16	0.012592	0.697721	0.000052
79	53749	3359	0.062494	0.655516	17	0.013460	0.653644	0.000005
80	50390	3818	0.075769	0.614550	18	0.014388	0.606096	0.000116
81	46572	4241	0.091063	0.567986	19	0.015380	0.555416	0.000278
82	42331	4412	0.104226	0.516263	20	0.016440	0.502123	0.000387
83	37919	4545	0.119861	0.462455	21	0.017573	0.446935	0.000521
84	33374	4567	0.136843	0.407025	22	0.018785	0.390771	0.000649
85	28807	4466	0.155032	0.351326	23	0.020080	0.334734	0.000784
86	24341	4305	0.176862	0.296860	24	0.021464	0.280071	0.000949
87	20036	4062	0.202735	0.244356	25	0.022944	0.228101	0.001081
88	15974	3706	0.232002	0.194817	26	0.024525	0.180120	0.001109
89	12268	3257	0.265487	0.149619	27	0.026216	0.137281	0.001017
90	9011	2725	0.302408	0.109897	28	0.028023	0.100466	0.000809
91	6286	2138	0.340121	0.076663	29	0.029955	0.070182	0.000548
92	4148	1584	0.381871	0.050588	30	0.032020	0.046482	0.000333
93	2564	1097	0.427847	0.031270	31	0.034228	0.028962	0.000170
94	1467	702	0.478528	0.017891	32	0.036587	0.016827	0.000063
95	765	408	0.533333	0.009330	33	0.039110	0.009024	0.000010
96	357	212	0.593838	0.004354	34	0.041806	0.004416	0.000001
97	145	96	0.662069	0.001768	35	0.044688	0.001946	0.000018
98	49	36	0.734694	0.000598	36	0.047769	0.000760	0.000044
99	13	11	0.846154	0.000159	37	0.051062	0.000259	0.000064
100	2	2	1.000000	0.000024	38	0.054582	0.000075	0.000106
							Error	0.026230

Tabla 10: Cálculo de GoMa

Resultados de modelo GoMa para Mujeres.

Datos					GoMa			
Edad	Número de Sobrevivientes	Fallecidos	qx (probabilidad de morir)	tPx(57) teórico	Años corridos	Factor Exponencial GoMa	tPx(57) GoMa	Error relativo cuadrático
57	91636	521	0.005686	1.000000	0	0.002081	1.000000	0.000000
58	91115	584	0.006409	0.994314	1	0.002225	0.997702	0.000012
59	90531	655	0.007235	0.987941	2	0.002378	0.994925	0.000049
60	89876	731	0.008133	0.980794	3	0.002542	0.991593	0.000119
61	89145	811	0.009098	0.972816	4	0.002717	0.987620	0.000225
62	88334	891	0.010087	0.963966	5	0.002905	0.982910	0.000372
63	87443	972	0.011116	0.954243	6	0.003105	0.977353	0.000560
64	86471	1045	0.012085	0.943636	7	0.003319	0.970827	0.000784
65	85426	1116	0.013064	0.932232	8	0.003548	0.963196	0.001028
66	84310	1180	0.013996	0.920053	9	0.003793	0.954308	0.001275
67	83130	1242	0.014940	0.907176	10	0.004054	0.943997	0.001495
68	81888	1332	0.016266	0.893623	11	0.004333	0.932083	0.001655
69	80556	1403	0.017416	0.879087	12	0.004632	0.918370	0.001755
70	79153	1483	0.018736	0.863776	13	0.004952	0.902650	0.001749
71	77670	1582	0.020368	0.847593	14	0.005293	0.884704	0.001625
72	76088	1699	0.022329	0.830329	15	0.005658	0.864308	0.001391
73	74389	1855	0.024936	0.811788	16	0.006048	0.841239	0.001068
74	72534	2050	0.028263	0.791545	17	0.006465	0.815281	0.000712
75	70484	2285	0.032419	0.769174	18	0.006910	0.786237	0.000379
76	68199	2561	0.037552	0.744238	19	0.007387	0.753944	0.000127
77	65638	2875	0.043801	0.716291	20	0.007896	0.718286	0.000006
78	62763	3235	0.051543	0.684916	21	0.008440	0.679220	0.000047
79	59528	3691	0.062004	0.649614	22	0.009022	0.636793	0.000253
80	55837	4230	0.075756	0.609335	23	0.009644	0.591168	0.000542
81	51607	4700	0.091073	0.563174	24	0.010309	0.542650	0.000748
82	46907	4889	0.104228	0.511884	25	0.011020	0.491706	0.000795
83	42018	5036	0.119853	0.458532	26	0.011780	0.438978	0.000834
84	36982	5061	0.136850	0.403575	27	0.012592	0.385291	0.000828
85	31921	4949	0.155039	0.348346	28	0.013460	0.331639	0.000801
86	26972	4770	0.176850	0.294338	29	0.014388	0.279149	0.000784
87	22202	4501	0.202729	0.242285	30	0.015380	0.229028	0.000725
88	17701	4106	0.231964	0.193166	31	0.016440	0.182476	0.000592
89	13595	3609	0.265465	0.148359	32	0.017573	0.140585	0.000407
90	9986	3019	0.302323	0.108975	33	0.018785	0.104225	0.000207
91	6967	2369	0.340032	0.076029	34	0.020080	0.073941	0.000057
92	4598	1756	0.381905	0.050177	35	0.021464	0.049879	0.000002
93	2842	1216	0.427868	0.031014	36	0.022944	0.031761	0.000018
94	1626	778	0.478475	0.017744	37	0.024525	0.018932	0.000080
95	848	452	0.533019	0.009254	38	0.026216	0.010464	0.000158
96	396	235	0.593434	0.004321	39	0.028023	0.005305	0.000224
97	161	106	0.658385	0.001757	40	0.029955	0.002436	0.000262
98	55	40	0.727273	0.000600	41	0.032020	0.000999	0.000265
99	15	12	0.800000	0.000164	42	0.034228	0.000360	0.000235
100	3	3	1.000000	0.000033	43	0.036587	0.000112	0.000191
							Error Total	0.025442

Tabla 11: Cálculo de GoMa

Anexo 3: Reglas de la lógica difusa.

Numero de la regla	Inflación	Tasa de interés Rf	Cambio en la tasa
1	Low	Low	Stable
2	Normal	Low	Increment
3	High	Low	Increment
4	Low	Normal	Decrement
5	Normal	Normal	Stable
6	High	Normal	Increment
7	Low	High	Decrement
8	Normal	High	Decrement
9	High	High	Increment
10	High	Very High	Stable
11	Very High	Very High	Stable

Tabla 12: Reglas del sistema difuso.

Anexo 4a. Demostración de la ventaja del cálculo de la anualidad sobre el rendimiento de la cuenta.

El modelo de Zurita se apoya en una ecuación estocástica (Ecuación 1) que permite estimar con una simulación de Monte Carlo el valor final de la cuenta de ahorros usando como insumos la tasa de interés real, el salario real y un porcentaje de cotización del aporte. El déficit de la cuenta de ahorros se estima comparando el resultado del cálculo de una renta vitalicia (Ecuación 6) con el valor final del ahorro acumulado (Ecuación 9).

Primero, se estima el déficit de la cuenta de ahorros usando una tasa de interés real del 3% y un aporte del 12% para cada una de diez posibles cohortes con salarios reales comenzando desde 1 SMLMV y terminando en 10 SMLMV. Con este resultado se puede trazar la siguiente curva que servirá como referencia.

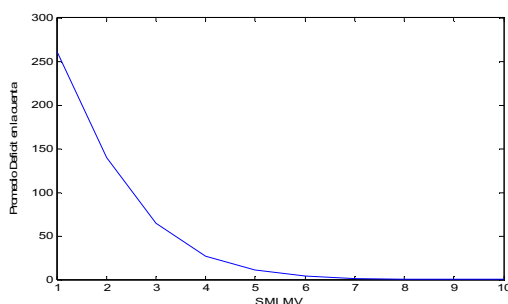


Gráfico 19: Déficit de referencia en SMLMV

Luego se modificó el ejercicio de dos formas. La primera modificó la tasa de interés real del 3% al 6% para la estimación de la renta vitalicia. La segunda modificó la tasa de interés real para la estimación del valor final de la cuenta de ahorros del 3% al 6%. Los resultados se pueden apreciar en los siguientes gráficos. En la gráfica de la izquierda se encuentra el resultado de la primera modificación y en la gráfica de la derecha el resultado de la segunda modificación.

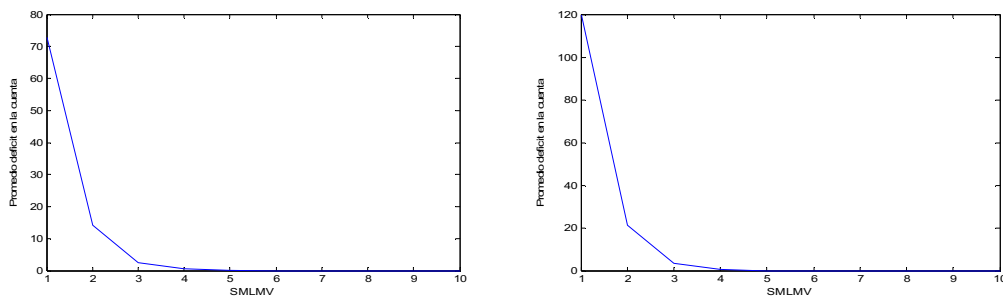


Gráfico 20: Déficit con el cambio de la tasa de interés real de la renta vitalicia (izquierda) y cambio del rendimiento del fondo (derecha).

En ambos casos, al aumentar la tasa de interes real se disminuyó el deficit con respecto a la gráfica de referencia. Pero, si se observa con mas detenimiento, en el primer caso el deficit en la primera cohorte alcanza alrededor de los 70 SMLMV mientras que en la segunda alcanza los 120 SMLMV.

Entonces, se puede concluir que la disminucion del déficit de la cuenta de ahorros previsional es mayor con la mejora de la tasa de interes de la renta vitalicia que la mejora de la tasa de interes del rendimiento de los aportes.

Anexo 4b. Demostración de la ventaja del cálculo de la anualidad sobre el rendimiento de la cuenta.

Para esta demostración, se comienza con el mismo modelo descrito en el Anexo 4a de este documento (modelo de Zurita). Los resultados que sirven de referencia de esta estimación se encuentran en el Gráfico 19. Se puede observar que el déficit promedio de la cohorte de más bajos ingresos se encuentra alrededor de los 250 SMLMV.

Entonces, para evaluar el resultado de aumentar la cotización en la cuenta de ahorros previsional, modificamos el porcentaje de los aportes del 12% al 24% para todas las cohortes. El resultado se puede observar en el Gráfico 21.

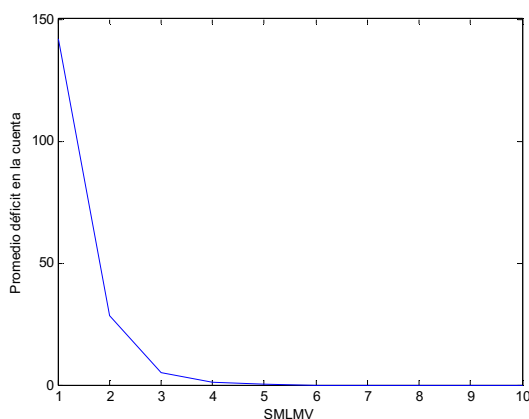


Gráfico 21: Déficit por aumento en los aportes.

Como se puede observar, el déficit por el aumento de los aportes bajó de 250 SMLMV a 150 SMLMV. Pero, si se compara este resultado con los obtenidos por las medidas propuestas en el Anexo 4a, se descubre que la propuesta de mejorar el porcentaje de aportes es inferior a las propuestas de mejorar la tasa de interés real cuando se trata de reducir el déficit en las cuentas de ahorro previsional, especialmente en las cohortes de menor ingreso.

Anexo 5: Breve introducción a la lógica difusa.

Existen dos metodologías claras en el manejo de las variables en los modelos de sistemas de control y simulación. La primera metodología, asume que las variables contienen valores discretos con intervalos no continuos, en donde, una variable (aleatoria) puede pertenecer ó no pertenecer a un subconjunto específico en función de su valor. La segunda metodología, sugiere que las variables son continuas y tienen intervalos continuos; en donde, el valor de una variable (aleatoria) tiene una probabilidad de estar dentro en un intervalo medible del rango (subconjunto) según su valor.

Ambas metodologías son ampliamente aceptadas para modelar y simular sistemas. Pero, existen un grupo de sistemas, en donde características como conjuntos probabilísticos sobre variables discretas, ó conjuntos discretos sobre variables continuas, obligan a replantear la estructura de modelación y desarrollo del sistema. Por ejemplo, la decisión de controlar la inflación no depende de cuantos puntos básicos este por debajo o por encima de un valor medio esperado. Esta decisión depende del consenso de un grupo de expertos que a su juicio determinan, según un rango de valores aceptado para la inflación y otras variables de importancia, cuales son las medidas a tomar.

Por ello, en los años 60 y 70, se desarrolló un proceso de modelación de sistemas conocido como lógica difusa. En este proceso, se define diferentes rangos de valores (subconjuntos), que generalmente se puede definir con nombres intuitivos (lingüística), como por ejemplo: “caliente” o “rápido” o “débil”. También, se supone que existe una escala de pertenencia de las variables de entrada a los subconjuntos definidos, con características muy similares a las de un componente probabilístico; de tal forma que una variable puede estar “poco caliente” o “muy rápida” o “nada débil”. Esta escala es un valor entre cero y uno. Además, se definen una serie de reglas que determinan cuales son las posibles salidas validas del modelo.

Para el diseño de un modelo difuso, se comienza por definir los subconjuntos difusos para cada variable. Estos subconjuntos difusos sirven para determinar, con rangos, la característica “lingüística” que tiene una variable en un momento específico. En principio, estos rangos no siguen ninguna regla explícita y dependen más del concepto subjetivo del diseñador. Por ejemplo, para un diseñador, un vaso se puede considerar lleno de agua cuando el líquido supera el 90% de la capacidad total; pero para otro diseñador esta medida puede ser el 70%. Es de notar, que a pesar de lo subjetivo, es indispensable que exista al menos un subconjunto para cada punto posible del rango de valores para la variable de entrada (todos los puntos posibles deben estar cubiertos). Por ello, es necesario también que exista un grado de “Overlapping”, situación en donde un subconjunto se intercepta con otro cerca de un valor de frontera.

Cuando el valor de una variable se encuentra dentro del intervalo definido por un subconjunto difuso, el grado de veracidad se determina mediante una propiedad conocida

como grado de pertenencia. El grado de pertenencia es un valor entre cero y uno, resultante de evaluar la variable de entrada en una función asignada al conjunto, tal que:

$$\begin{aligned} F_{c1}(x) &= \begin{cases} P_1(x), & x > x_0 \\ P_2(x), & x < x_0 \end{cases} \\ P_n(x) &= 1, \quad x \rightarrow x_0 \\ P_n(x) &= 0, \quad x \gg x_0 \vee x \ll x_0 \end{aligned} \quad (21)$$

Cabe anotar que una sola variable puede tener, simultáneamente, diferentes grados de pertenencia en diferentes subconjuntos difusos gracias al efecto de “overlapping”.

Luego, entran a conformarse las reglas en el sistema difuso, que son las que definen, mediante operaciones lógicas, cuales de las salidas son las validas. Existen varias formas de definir las operaciones lógicas de las reglas, donde las más comunes son las *AND* y las *min*. Las *AND* consideran verdaderos todos los grados de pertenencia donde su valor es diferente de cero y es indispensable que en una regla todos lo sean para que esta sea verdadera. Las *min* seleccionan el menor valor resultante entre todos los grados de pertenencia de todos los subconjuntos que componen una regla y es importante que el resultado sea diferente de cero.

$$RULE = \min(F_{c1}(x) \wedge F_{c2}(x) \wedge F_{c3}(x) \wedge \dots F_{cn}(x)) \quad (22)$$

Existen dos técnicas específicas en la definición de la salida. La primera técnica es la “Mandami”, que define la salida como subconjuntos difusos al igual que las variables de entrada, La segunda técnica es la “Sugeno” que define la salida como un conjunto de variables “Singleton” (pulso unitario). En ambos casos, cada una de las salidas (subconjuntos o singletons) está expresando una condición “Lingüística” del mismo modo que las entradas. Por ejemplo, “aumentar”, o “mantener” son posibles condiciones resultantes. También, junto con esta condición lingüística, se indica la magnitud de la salida. La magnitud de la salida de cada regla en la mayoría de los casos es equivalente a la operación *min*.

En un sistema difuso, existe la posibilidad de que se cumplan varias de las reglas y por ende varias las salidas sean validas. En estos casos existen muchas formas de determinar cual es la salida final. Algunas formas son utilizando promedios o promedios ponderados. Otras formas van mucho más allá y calculan momentos inerciales en función de las formas geométricas resultantes. En el caso de los modelos “Sugeno”, es normal que las salidas solo sean promediadas dado que la magnitud del área de un “Singleton” siempre es uno. Además, esta propiedad permite a las aplicaciones que no pueden modelar salidas “Singleton” reemplazarlas con salidas triangulares, con áreas iguales y sin “overlapping”.

6. Bibliografía

Asociación Colombiana de Administradoras de fondos de pensiones y Cesantías.
<http://www.asofondos.org.co>

Borrero, Ligia. La Pensión De Vejez De La Mujer En Colombia. (2007). AIOS (La Asociación Internacional de Organismos de Supervisión de Fondos de Pensiones). Tesis. Universidad de Alcalá.

Carlsson, Carl., Fullér, Robert. On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 122(2001) pp 315-326.

Castro, Freddy; Piraquive, Gabriel; Reveiz, Alejandro; Leon, Carlos. (2009) Modelo de simulación del valor de la pensión de un trabajador en Colombia. En: Borradores de Economía. No. 553. Pp 1-40.

Crabbe, Carolin A. (2005). A Quarter Century of Pension Reform in Latin America and the Caribbean: Lessons Learned and Next Steps. Washington DC. IDB. 409p

John C. Cox, Stephen A. Ross, Mark Rubinstein (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, Volume 7, Issue 3, September 1979, Pages 229-263

Decreto 2765 de 2007. (2007) Diario Oficial 46694. Santa Fe de Bogotá.

Fama, Eugene y French, Kenneth (2002). The Equity Premium. En: *The Journal of Finance*, Vol. 57, No. 2 (Apr., 2002), pp. 637-659

Fama, Eugene Efficient Capital Markets: II (1991). En: *The Journal of Finance*, Vol. 46, No. 5 (Dec., 1991), pp. 1575-1617

Fisher, Klaus (1998). A discrete Martingale Model for Pension Fund Guarantees in Colombia. Pricing and Markets Effects. En CRÉFA Working Paper No 98-02. Université Laval.

Hull, John. Options, Futures and Other Derivatives. New Jersey. Prentice Hall. 7th Edition. 822p ISBN: 978-0-13-601586-4

Informe sobre Inflación, Banco de la Republica, Marzo 2009. <http://www.banrep.gov.co>

Jantzen, Jan. Design of Fuzzy Controllers. Technical report N. 98-E-864, Danmarks Tekniske Universitet, Lyngby, 1998.

Jara, D., Gómez, C. y Pardo, A. (2005), Análisis de eficiencia de los portafolios pensionales en Colombia, en Ensayos sobre Política Económica, No.49,.

Jara, Diego (2006). Modelo de la Regulación de las AFP en Colombia y su Impacto en Portafolio de los Fondos de Pensiones. Revista ESPE, No. 52. Páginas 162-221.

Laserna, Juan y León, Carlos (2008). Asignación Estratégica de Activos para Fondos de Pensiones Obligatorias en Colombia: Un Enfoque Alternativo. En: Borradores de Economía. No. 523. Pp 1-31.

Ley 100 de 1993 y sus respectivas modificaciones. "Sistema de Seguridad Social Integral". Diciembre 1993.

Lopez, Hugo, Lasso Francisco (2008). Salario Mínimo, Salario Medio y Empleo Asalariado Privado en Colombia. Un Estudio Exploratorio sobre la Evasión al Mínimo Legal. : Borradores de Economía No 484, Banco de la Republica. Pp. 1-42.

Martínez, Hermez. (2003) ¿Cuánto duran los colombianos en el desempleo y el empleo?: Un análisis de supervivencia. En: Archivos de Economía. Documento 236. DNP.

Milevsky, Moshe. (2006) The Calculus of Retirement Income: Financial Models for Pension Annuities and life Insurance. New York. Cambridge University Press. ISBN 0-521-84258-1.

Mitchel, Olivia S. Y Kent Smetters. (2003) Risk transfer and Retirement Income Security. New York. Oxford University Press. Pp 157-186.

Núñez, Jairo. (2005) Exitos y fracasos de la reforma laboral en Colombia. En CEDE 2005-43. Universidad de los Andes.

Osorio, Javier., Martinez, Juliana, y Rodríguez, Tomas. (2005). El modelo DNPensión V 4.0 Parte I. En Archivos de Economía, documento 285, Departamento Nacional de Planeación.

Pennacchi, George G. (1999). The Value of Guarantees on Pension Funds Returns. En: The Journal of Risk and Insurance. Vol 66. No. 2. Pp. 219-237.

Pérez Marulanda, Camila *et al.* (2004) Sistema Pensional Colombiano. Santa fe de Bogotá. Consejo Superior de Política Fiscal.

Reveiz, Alejandro, Laserna, Juan, Leon, Carlos y Martinez Ivonne. (2008). Recomendaciones para la Modificación del Régimen de Pensiones Obligatorias en Colombia. En: Borradores de Economía. No 507. Pp 1- 26.

Reveiz, Alejandro, y Leon, Carlos. (2008). Administración de fondos de pensiones y multifondos en Colombia. En: Borradores de Economía. No. 506. Pp 1-27.

Reveiz, Alejandro *et al.* (2009). Modelo de simulación del valor de la pensión de un trabajador en Colombia. En: Borradores de Economía. No 553. Pp 1-40.

Rofman, Rafael *et al.* (2008). Pension system in Latin America - Concepts and measurements of coverage. World Bank. Discussion Paper 0616.

Silva, Carlos (2003). Garantía de Pensión Mínima en Colombia: el Efecto de la Volatilidad del Retorno de la Cuenta de Ahorro Individual. En: CEDE 2003-17. Universidad de los Andes.

Smetters, Kent *et al.* (2006). Pricing Personal Accounts Benefit Guarantees. A simplified Approach. NBER Reporter.

Superintendencia Financiera de Colombia. <http://www.superfinanciera.gov.co>

Viáfara, Carlos Y Uribe, José. (2006). Duración del desempleo y canales de búsqueda de empleo en Colombia. En CISDE, Universidad del Valle. Clasificación JEL: J60, J64.

Zadeh, Lotfi. (2004). Fuzzy Logic Systems: Origin, Concepts, And Trends. Computer Science Division Department of EECSUC Berkeley. November 10, 2004.

Zurita L. Salvador (1994). Minimum Pension Insurance in the Chilean Pension System. En Revista de Análisis Económico. Vol 9. No. 1. Pp 105-126.

Zurita L. Salvador (1996). Risk-Based Premiums for Pension Insurance. En: Estudios de Administración. Vol 3. No. 1. Pp 35-66